


3524







Digitized by the Internet Archive  
in 2024











# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

*Journal of Applied Mathematics and Physics*  
*Journal de Mathématiques et de Physique appliquées*

## ZAMP

Editores: J. Ackeret, E. Baldinger, E. Baumann  
R. Mercier, P. Scherrer, E. Stiefel, F. Stüssi, W. Traupel, H. Ziegler

---

Redactor: R. Sängler

VOL. IX – 1958



BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL  
SCHWEIZ · SWITZERLAND · SUISSE

Vol. IXa, Fasc. 1-4, pag. 1-394

*Inhalt - Contents - Sommaire*

## ORIGINALARBEITEN

*Original Papers · Articles originaux*

	Seite Page	Nr. Issue
AZPEITIA, A. G., and NEWELL, G. F.: Theory of Oscillation Type Viscometers III: A Thin Disk . . . . .	97	(2)
BALDINGER, E., und CZAJA, W.: Über stabilisierte Netzgeräte mit Transistoren . . . . .	1	(1)
BLADEL, J. VAN: Normal Modes Methods for Boundary-Excited Wave Guides . . . . .	193	(2)
COLLATZ, L.: Fehlerabschätzungen bei Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen mit unendlichem Grundgebiet . . . . .	118	(2)
HERSCH, J.: Contribution à la méthode des équations aux différences . . . . .	129	(2)
HUNZIKER, R. R.: Heat Transfer and Reynolds' Analogy in a Turbulent Flow with Heat Release . . . . .	307	(4)
LING, F. F., and SAIBEL, E.: On the Phenomenon of Brake-Fading . . . . .	315	(4)
LIST, R.: Kennzeichen atmosphärischer Eispartikeln: 1. Teil: Graupeln als Wachstumszentren von Hagelkörnern . . . . .	180	(2)
2. Teil: Hagelkörner . . . . .	217	(3)
MITCHELL, A. R., and THOMSON, J. Y.: Finite Difference Methods of Solution of the von Mises Boundary Layer Equation with Special Reference to Conditions Near a Singularity . . . . .	26	(1)
MITRA, M.: Exact Transient Solution of the Buried Line Source Problem for an Asymmetric Source . . . . .	322	(4)
NICOLAS, M. M.: Comportement d'un câble porteur-tracteur . . . . .	331	(4)
ROTH-DESMEULES, E.: Über die Darstellung einer Flugbahnschar und ihrer Störungen für Feuerleitgeräte . . . . .	235	(3)
SCHNEIDER, T., und SCHRANZ, P.: Möglichkeiten und Grenzen des Infrarotsehens . . . . .	251	(3)
SCHULTZE, E.: Maschinelle Auswerterechnung bei der Flugabwehr . . . . .	359	(4)
SHIELD, R. T., and ZIEGLER, H.: On Prager's Hardening Rule . . . . .	260	(3)
THOM, H. C. S.: A Method for the Evaluation of Hail Suppression . . . . .	37	(1)

## KURZE MITTEILUNGEN

*Brief Reports · Communications brèves*

CARRERAS-PATXOT, R., and SÄNGER, R.: A Method for Studying the Diffusion of Silver Iodide Particles in the Atmosphere by Means of $I^{131}$ . . . . .	375	(4)
COPPEL, W. A.: The Solution of Cubic Equations by Iteration . . . . .	380	(4)
FOOTE, J. R.: An Asymptotic Method for Free Convection Past a Vertical Plate . . . . .	64	(1)
GREGG, J. L., and SPARROW, E. M.: Low Prandtl-Number Free Convection . . . . .	383	(4)
HERDAN, G.: An Inequality Relation Between Yule's Characteristic $K$ and Shannon's Entropy $H$ . . . . .	69	(1)
IBRAHIM, A. A. K.: A New Approach to the Theory of an Oscillating Cylinder Viscometer by Dimensional Analysis . . . . .	74	(1)
KREYSZIG, E.: Einschliessung von Eigenwerten und Mohrsches Spannungsdiagramm . . . . .	202	(2)



	Seite Page	Nr. Issue
KROUPA, F.: A Note on the Second Fundamental Problem of Elasticity Applied to a Plane Circular Ring . . . . .	78	(1)
MAJUMDAR, S. K.: A Note on Magneto-Hydrodynamics of a Finite Rotating Disk . . . . .	387	(4)
MÜLLER, H.: Zur Frage der Charakterisierung stationärer Bewegungen in der Hydrodynamik. . . . .	389	(4)
NIJMAN, F., and POHLHAUSEN, K.: Remarks on the Paper by M. FINSTON: 'Free Convection Past a Vertical Plate' . . . . .	67	(1)
SCHWARZ, H.-R.: Nachtrag zu «Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen» . . . . .	79	(1)
SRIVASTAVA, A. C.: The Flow of a Non-Newtonian Liquid Near a Stagnation Point . . . . .	80	(1)
STEWARTSON, K.: On the Free Convection from a Horizontal Plate . . . . .	276	(3)
VODIČKA, V.: Elementary Solution of Some Plate Problems . . . . .	206	(2)

## VARIA

*Miscellaneous · Divers*

Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 22. September 1957 in Neuchâtel. Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik:

BALDINGER, E., und SANTSCHI, P.: Eine neue Untersetzerschaltung mit Transistoren . . . . .	88	(1)
BALDINGER, E., und STADLER, B.: Ein magnetisch abstimmbares Filter im Mikrowellengebiet, unter Verwendung der paramagnetischen Resonanz . .	85	(1)
CHAIX, B.: Couples de pivotement d'origine hydraulique et centrifuge agissant sur les pales de roues Kaplan . . . . .	90	(1)
CORNAZ, P., et MERCIER, R.: Utilisation des transistors dans les dispositifs de résonance nucléaire . . . . .	87	(1)
LÜSCHER, E., und TROYON, F.: Ein Gittergerät für Untersuchungen des Raman-Effektes . . . . .	91	(1)

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 3. bis 4. Mai 1958 in Romont. Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik:

ACKERET, J.: Über Reibung und Grenzschicht-Stabilität an rotierenden angeblasenen Zylindern . . . . .	284	(3)
BALDINGER, E., und CZAJA, W.: Ein stabilisiertes Netzgerät hoher Güte mit Transistoren . . . . .	291	(3)
BALDINGER, E., und MAIER, A.: Ein einfacher Thermostat mit Transistoren .	289	(3)
BEUSCH, W., MAEDER, D., und MÜLLER, R.: Ein nichtlinearer Verstärker zur Verkürzung von Impulsflanken . . . . .	294	(3)
BRINKMANN, D., BRUN, E., und STAUB, H. H.: Verwendung einer Differentialphotodiode in einem hochstabilisierenden Magnetstromregulator . . . . .	300	(3)
DESSOULAVY, R., DURAND, J., et LÜSCHER, E.: Un amplificateur pour spectrophotomètre . . . . .	296	(3)
GLÄTTLI, H.: Systematische Herleitung logischer Schaltungen . . . . .	288	(3)
HAERTER, A.: Über die Belüftung von Autostrassen-Tunnel . . . . .	286	(3)
KARTASCHOFF, P.: Klystron stabilisé en phase . . . . .	297	(3)
KARTASCHOFF, P.: Multiplication de fréquence et stabilité en phase . . . .	299	(3)
MAEDER, P.: Über die Möglichkeit magneto-hydrodynamischer Kreisel . . .	288	(3)
MEYER, L.: Beispiele zur Theorie der Flügelgitter . . . . .	285	(3)
OLSEN, J. L.: Ein supraleitender Gleichrichter und Verstärker . . . . .	293	(3)
SCHWAAR, P.: Quelques considérations sur le développement des compresseurs axiaux transsoniques . . . . .	282	(3)

Tagungsanzeige: Internationale Tagung für Elektronenmikroskopie 1958 in Berlin . . . . . 93 (1)

Tagungsanzeige: Herbsttagung 1958 der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft in Glarus . . . . .	210	(2)
The Physics of Fluids. Journal published by the American Institute of Physics . . . . .	92	(1)

## BUCHBESPRECHUNGEN

*Book Reviews · Notices bibliographiques*

BISPLINGHOFF, R. L., ASHLEY, H., und HALFMAN, R. L.: Aeroelasticity (Addison Wesley Publishing Co., Reading 1955) (Ref. P. de Haller) . . . . .	214	(2)
BLECHSCHMIDT, E.: Präzisionsmessungen von Kapazitäten, Induktivitäten und Zeitkonstanten. 2. Band (Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1957) (Ref. E. Baldinger) . . . . .	306	(3)
BUCHHOLZ, H.: Elektrische und magnetische Potentialfelder (Springer-Verlag, Berlin 1957) (Ref. M. Strutt) . . . . .	96	(1)
CORCORAN, W. H., OPFELL, J. B., und SAGE, B. H.: Momentum Transfer in Fluids (Academic Press, Inc., New York 1956) (Ref. W. Traupel) . . . . .	306	(3)
COWLING, T. G.: Magnetohydrodynamics (Interscience Tracts on Physics and Astronomy, Nr. 4) (Interscience Publishers, New York and London 1957) (Ref. M. Waldmeier) . . . . .	304	(3)
CURTISS, J. H. (Herausgeber): Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Vol. VI: Numerical Analysis (McGraw-Hill, New York 1956) (Ref. E. Stiefel) . . . . .	94	(1)
DOETSCH, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation (R. Oldenbourg, München 1956) (Ref. E. Stiefel) . . . . .	94	(1)
DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Bd. 2: Anwendungen der Laplace-Transformation, 1. Abt.; Bd. 3: Anwendungen der Laplace-Transformation, 2. Abt. (Birkhäuser-Verlag, Basel und Stuttgart 1956) (Ref. H. Rutishauser) . . . . .	393	(4)
DRYDEN, H. L., und KÁRMÁN, TH. VON (Herausgeber): Advances in Applied Mechanics, Bd. IV (Academic Press Inc., New York 1956) (Ref. P. de Haller) . . . . .	213	(2)
FORSYTHE, G. E.: Bibliography of Russian Mathematics Books (Chelsea, New York 1956) (Ref. E. Stiefel) . . . . .	94	(1)
FRANKL, F. I., und KARPOVICH, E. A.: Gas Dynamics of Thin Bodies (Interscience Publishers, New York und London 1954) (Ref. H. R. Voellmy) . . . . .	302	(3)
FRIEDMAN, B.: Principles and Techniques of Applied Mathematics (John Wiley & Sons, New York; Chapman & Hall, London 1956) (Ref. H. Rutishauser) . . . . .	215	(2)
GRAY, D. E. (Coordinating Editor): American Institute of Physics Handbook - Herausgeber: The American Institute of Physics (Mc Graw-Hill Book Co., New York 1957) (Ref. E. Mooser) . . . . .	212	(2)
HARTREE, D. R.: The Calculation of Atomic Structures (John Wiley & Sons, New York 1957) (Ref. R. Jost) . . . . .	215	(2)
HÜBNER, E.: Technische Schwingungslehre in ihren Grundzügen (Springer-Verlag, Berlin 1957) (Ref. H. Ziegler) . . . . .	303	(3)
Interpolation and Allied Tables (Her Majesty's Stationery Office, London 1956) (Ref. E. Stiefel) . . . . .	96	(1)
KAUFMANN, W.: Technische Hydro- und Aeromechanik (Springer-Verlag, Berlin 1954) (Ref. H. R. Voellmy) . . . . .	216	(2)
KOHLRAUSCH, F.: Praktische Physik (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Bd. 1 1955, Bd. 2 1956) (Ref. U. Katz) . . . . .	302	(3)
LIEFMANN, W. W., und ROSHKO, A.: Elements of Gasdynamics (John Wiley & Sons, New York 1957) (Ref. P. de Haller) . . . . .	212	(2)
MACCOLL, L. A. (Herausgeber): Applied Probability, Vol. VII: Proceedings of the Seventh Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society (McGraw-Hill Book Co., New York 1957) (Ref. W. Saxer) . . . . .	213	(2)



	Seite Page	Nr. Issue
MAYER, H.: Physik dünner Schichten. Teil 2: Struktur, elektrische Leitfähigkeit, magnetische Eigenschaften (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart 1955) (Ref. U. Katz) . . . . .	211	(2)
MERCIER, A., und Kervaire, M. (Herausgeber): Fünfzig Jahre Relativitätstheorie (Helv. phys. Acta, Suppl. IV) (Birkhäuser Verlag, Basel 1956) (Ref. C. Enz) . . . . .	95	(1)
NEWELL, H. E.: High Altitude Rocket Research (Academic Press, Inc., New York 1953) (Ref. H. R. Voellmy) . . . . .	304	(3)
Progress in Nuclear Energy. Serie 1: Physics and Mathematics, Bd. 1 (Pergamon Press, London 1956) (Ref. D. Maeder) . . . . .	211	(2)
PLANK, R. (Herausgeber): Handbuch der Kältetechnik. Bd. 8: H. HAUSEN, Erzeugung sehr tiefer Temperaturen. Gasverflüssigung und Zerlegung von Gasgemischen (Springer-Verlag, Berlin 1957) (Ref. H. Grüter) . . . . .	393	(4)
SNEDDON, I. N.: Elements of Partial Differential Equations (McGraw-Hill Book Co., New York 1957) (Ref. E. Roth-Desmeules) . . . . .	95	(1)
STOKER, J. J.: Water Waves. Pure and Applied Mathematics Bd. 4 (Interscience Publishers, Inc., New York and London 1957) (Ref. H. Ziegler) . . . . .	216	(2)
STRATTON, J. A., MORSE, P. M., CHU, L. J., LITTLE, J. D. C., und CORBATO, F. J.: Spheroidal Wave Functions (The Technology Press of M. I. T. and John Wiley & Sons, New York 1956) (Ref. P. Lächli) . . . . .	93	(1)
THÜRING, B.: Einführung in die Methoden der Programmierung kaufmännischer und wissenschaftlicher Probleme für elektronische Rechenanlagen. 1. Teil: Die Logik der Programmierung (Göller Verlag, Baden-Baden 1957) (Ref. W. Nef) . . . . .	305	(3)
VAJDA, S.: The Theory of Games and Linear Programming (Methuen & Co., London 1956) (Ref. Th. Ginsburg) . . . . .	95	(1)
WARD, G. N.: Linearized Theory of Steady High-Speed Flow (Cambridge University Press, London 1955) (Ref. H. R. Voellmy) . . . . .	214	(2)
ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker (Springer Verlag, Berlin 1957) (Ref. Th. Ginsburg) . . . . .	305	(3)

AUTORENREGISTER.

Index of Authors · Table des auteurs

O = Originalarbeiten – Original Papers – Articles originaux  
M = Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves  
V = Varia – Miscellaneous – Divers  
B = Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

ACKERET, J., V 284  
AZPEITIA, A. G., and NEWELL, G. F., O 97  
  
BALDINGER, E., B 306  
BALDINGER, E., und CZAJA, W., O 1, V 291  
BALDINGER, E., und MAIER, A., V 289  
BALDINGER, E., und SANTSCHI, P., V 88  
BALDINGER, E., und STADLER, B., V 85  
BEUSCH, W., MAEDER, D., und MÜLLER, R., V 294  
BLADEL, J. VAN, O 193  
BRINKMANN, D., BRUN, E., und STAUB, H. H., V 300  
BRUN, E., BRINKMANN, D., und STAUB, H. H., V 300

CARRERAS-PATXOT, R., and SÄNGER, R., M 375  
CHAIX, B., V 90  
COLLATZ, L., O 118  
COPPEL, W. A., M 380  
CORNAZ, P., et MERCIER, R., V 87  
CZAJA, W., und BALDINGER, E., O 1, V 291  
  
DESSOULAVY, R., DURAND, J., et LÜSCHER, E., V 296  
DURAND, J., DESSOULAVY, R., et LÜSCHER, E., V 296  
  
ENZ, C., B 95

FOOTE, J. R., M 64

GINSBURG, TH., B 95, B 305

GLÄTTLI, H., V 288

GREGG, J. L., and SPARROW, E. M., M 383

GRÜTER, H., B 393

HALLER, P. DE., B 212, 213, 214

HERDAN, G., M 69

HERSCH, J., O 129

HUNZIKER, R. R., O 307

IBRAHIM, A. A. K., M 74

JOST, R., B 215

KARTASCHOFF, P., V 297, 299

KATZ, U., B 211, 302

KREYSZIG, E., M 202

KROUPA, F., M 78

LÄUCHLI, P., B 93

LING, F. F., and SAIBEL, E., O 315

LIST, R., O 180, 217

LÜSCHER, E., DESSOULAVY, R., et DURAND, J., V 296

LÜSCHER, E., und TROYON, F., V 91

MAEDER, D., B 211

MAEDER, D., BEUSCH, W., und MÜLLER, R., V 294

MAEDER, P., V 288

MAIER, A., und BALDINGER, E., V 289

MAJUMDAR, S. K., M 387

MERCIER, R., et CORNAZ, P., V 87

MEYER, L., V 285

MITCHELL, A. R., and THOMSON, J. Y., O 26

MITRA, M., O 322

MOOSER, E., B 212

MÜLLER, H., M 389

MÜLLER, R., BEUSCH, W., und MAEDER, D., V 294

NEF, W., B 305

NEWELL, G. F., and AZPEITIA, A. G., O 97

NICOLAS, M. M., O 331

NIUMAN, F., and POHLHAUSEN, K., M 67

OLSEN, J. L., V 293

POHLHAUSEN, K., and NIUMAN, F., M 67

ROTH-DESMEULES, E., O 235, B 95

RUTISHAUSER, H., B 215, 393

SAIBEL, E., and LING, F. F., O 315

SÄNGER, R., and CARRERAS-PATXOT, R., M 375

SANTSCHI, P., und BALDINGER, E., V 88

SAXER, W., B 213

SCHNEIDER, T., und SCHRANZ, P., O 251

SCHRANZ, P., und SCHNEIDER, T., O 251

SCHULTZE, E., O 359

SCHWAAR, P., V 282

SCHWARZ, H.-R., M 79

SHIELD, R. T., and ZIEGLER, H., O 260

SPARROW, E. M., and GREGG, J. L., M 383

SRIVASTAVA, A. C., M 80

STADLER, B., und BALDINGER, E., V 85

STAUB, H. H., BRINKMANN, D., und BRUN, E., V 300

STEWARTSON, K., M 276

STIEFEL, E., B 94, 96

STRUTT, M., B 96

THOM, H. C. S., O 37

THOMSON, J. Y., and MITCHELL, A. R., O 26

TRAUPEL, W., B 306

TROYON, F., und LÜSCHER, E., V 91

VODIČKA, V., M 206

VOELLMY, H. R., B 214, 216, 302, 304

WALDMEIER, M., B 304

ZIEGLER, H., B 216, 303

ZIEGLER, H., and SHIELD, R. T., O 260

Fasc. 1 (25. 1. 1958) . . . pag. 1- 96

Fasc. 2 (25. 7. 1958) . . . pag. 97-216

Fasc. 3 (25. 9. 1958) . . . pag. 217-306

Fasc. 4 (25. 11. 1958) . . . pag. 307-394

Vol. IXb, Fasc. 5/6, pag. 1–777 – Festschrift Jakob Ackeret (25. 3. 1958)

Sonderband – Special Issue – Numéro spécial

*Inhalt – Contents – Sommaire*

Verzeichnis der Arbeiten siehe Festschrift Jakob Ackeret, Seiten 5–7

Index of papers see Festschrift Jakob Ackeret, pages 5–7

Liste des articles voir Festschrift Jakob Ackeret, pages 5–7

AUTORENREGISTER

*Index of Authors – Table des auteurs*

ASHLEY, H., BRUNELLE, E., and MOSER, H. H., 57

BAXTER, D. C., and FLÜGGE-LOTZ, I., 81

BERG, B. VAN DEN, and BERGH, H., 97

BERGH, H., and BERG, B. VAN DEN, 97

BERNDT, S. B., 105

BETZ, A., 34, 125

BRIEDEN, K., 132

BROER, L. J. F., and HAAN, R. E. DE, 162

BRUHN, G., und HAACK, W., 173

BRUNELLE, E., ASHLEY, H., and MOSER, H. H., 57

BUSEMANN, A., 191

CHAIX, B., 203

DARRIEUS, G., 225

DRIEST, E. R. VAN, 233

DRYDEN, H. L., 249

ECKERT, E. R. G., und HARTNETT, J. P., 259

FEINDT, E. G., und SCHLICHTING, H., 274

FLÜGGE-LOTZ, I., and BAXTER, D. C., 81

FRÖSSEL, W., 285

GERBER, A., 37

GINSBURG, TH., MEYER, L., und SPRENGER, H., 17

GÖRTLER, H., und WITTING, H., 293

GRASSMANN, P., 307

GREBER, I., HAKKINEN, R. J., and TRILLING, I., 312

GROHNE, D., und MANOHAR, R., 332

GYGI, H., 26

HAACK, W., und BRUHN, G., 173

HAAN, R. E., and BROER, L. J. F., 162

HAKKINEN, R. J., GREBER, K., and TRILLING, J., 312

HARTNETT, J. P., und ECKERT, E. R. G., 259

HEINZ, C., 347

HUTTON, ST. P., 357

JAQUET, E., 372

JARAY, P., 382

JARRE, G., 389

KÁRMÁN, TH. VON, 55

KELLER, C., 47

KRAFT, H., 404

LUKASIEVICZ, J., 422

MAEDER, P. F., and THOMMEN, H. U., 438

MANOHAR, R., und GROHNE, D., 332

MEYER, L., GINSBURG, TH., und SPRENGER, H., 17

MEYER, R. E., 454

MOSER, H. H., ASHLEY, H., and BRUNELLE, E., 57

OSWATITSCH, K., und TEIPEL, I., 462

ODART, A., 479

PAULI, W., 490

PLASKOWSKI, Z., 498

RESLER jr., E. L., and SEARS, W. R., 509

ROSSOW, V. J., 519

ROTH-DESMEULES, E., und SÄNGER, R., 528

ROTT, N., 543  
 ROY, M., 554  
 RUDINGER, G., 570  
 RUTISHAUSER, H., 586

SÄNGER, E., 591  
 SÄNGER, R., 777  
 SÄNGER, R., und ROTH-DESMEULES, E.,  
 528  
 SAUER, R., 601  
 SCHARDIN, H., 606  
 SCHLICHTING, H., und FEINDT, E. G., 274  
 SCHMIDT, E., 622  
 SCHULTZ-GRUNOW, F., 628  
 SEARS, W. R., and RESLER jr., E. L., 509  
 SHAPIRO, A. H., 637  
 SPANNHAKE, W., 642  
 SPRENGER, H., GINSBURG, TH., und  
 MEYER, L., 17

STRSCHELETZKY, M., 648  
 STÜSSI, F., 661

TANK, F., 9  
 TEIPEL, I., und OSWATITSCH, K., 462  
 THEODORIDES, PH., 668  
 THOMMEN, H. U., und MAEDER, P. F., 438  
 TRAUPEL, W., 687  
 TRILLING, L., GREBER, I., und HAKKINEN,  
 R. J., 312

WALZ, A., 695  
 WATTENWYL, R. VON, 31  
 WENK, F., 710  
 WESKE, J. R., 721  
 WINTERNITZ, F. A. L., 725

ZAND, ST. J., 737  
 ZIEGLER, H., 748  
 ZIEREP, J., 764

*Volumen IX (1958)* erschien in zwei Teilen:

Vol. IXa, Fasz. 1–4, und

Vol. IXb, *Festschrift* JAKOB ACKERET,  
 als Doppelnummer Fasz. 5/6.

*Volume IX (1958)* was published in two parts:

Vol. IXa, No. 1–4, and

Vol. IXb, *Festschrift* JAKOB ACKERET,  
 as a double issue No. 5/6.

*Volume IX (1958)* parut en deux parties:

Vol. IXa, fasc. 1–4, et

Vol. IXb, *Festschrift* JAKOB ACKERET,  
 un fascicule double n° 5/6.

Nachdruck verboten

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der  
 Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten

© Birkhäuser Verlag, Basel 1958

Printed in Switzerland



# Über stabilisierte Netzgeräte mit Transistoren

Von ERNST BALDINGER und WOLFGANG CZAJA, Basel<sup>1)</sup>

## Einleitung

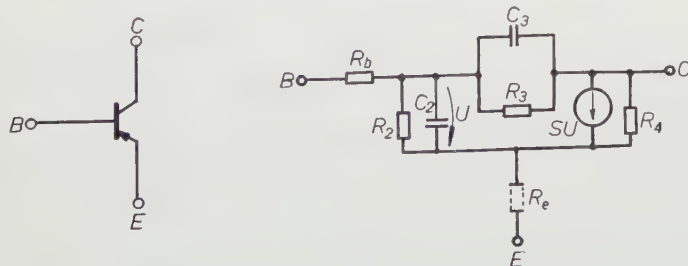
Die Zahl der Anwendungen stabilisierter Netzgeräte als Gleichspannungsquellen niederen Innenwiderstandes ist durch die Möglichkeit, Transistor-Netzgeräte zu bauen, wesentlich vergrößert worden.

Mit verhältnismässig kleinem Aufwand kann man heute Probleme lösen, die bisher die Verwendung von Akkumulatoren notwendig machten. Berücksichtigt man, dass sich die Ausgangsspannung der stabilisierten Netzgeräte sehr einfach über grosse Bereiche variieren lässt, so erkennt man, dass Transistor-Netzgeräte in vielen Anwendungen Akkumulatoren überlegen sind. Ferner gibt der Temperaturkoeffizient der Ausgangsspannung solcher Netzgeräte zu keinen Schwierigkeiten Anlass.

Die hier behandelten stabilisierten Netzgeräte sind ausserdem zur Speisung komplizierterer Transistorschaltungen, Stabilisierung der Heizung von Röhrenschaltungen usw. interessant und dürften die Lösung vieler Probleme auch bei industriellen Geräten erleichtern.

Im folgenden wird gezeigt, dass man die Eigenschaften dieser Netzgeräte beherrscht und mit den heute käuflichen Transistoren bereits sehr brauchbare Resultate erreichen kann.

Für den Transistor benützen wir durchwegs das Ersatzschema nach Figur 1, das in der Literatur zum Teil als natürliches Ersatzschema bezeichnet wird [1-4]<sup>2)</sup>.



Figur 1  
Ersatzschema des Transistors.

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität Basel, Abteilung für angewandte Physik.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 25.

Die Verwendung des Ersatzschemas nach Figur 1 bietet drei wesentliche Vorteile.

a) Die Behandlung von Transistorschaltungen wird der von Röhrenschaltungen ähnlich. Durch passende Grenzübergänge erhält man Verhältnisse, wie sie bei der Verwendung von Röhren vorliegen.

b) Die Arbeitspunktabhängigkeit ( $I_c$ - bzw.  $I_e$ -Abhängigkeit) der Parameter lässt sich in guter Näherung durch einfache Funktionen darstellen [2–4]. Dies gestattet zum Beispiel, die Lastabhängigkeit des Stabilisierungsfaktors bei Stabilisierungsschaltungen zu berechnen.

c) Die Aufstellung eines derartigen Ersatzschemas lässt sich physikalisch begründen [1, 2]. Die Parameter haben eine einfache physikalische Bedeutung.

Typische Werte der Parameter eines Niederfrequenztransistors kleiner Leistung OC 71 sind zum Beispiel  $R_b = 300 \Omega$ ,  $R_2$  proportional  $1/I_c$ , wobei  $R_2 = 1,3 k\Omega$  bei  $I_c = 1 \text{ mA}$ . Die differentielle Stromverstärkung  $SR_2$  des Transistors in Emitterschaltung bei kurzgeschlossenem Ausgang ist nahezu konstant, mit dem Mittelwert  $SR_2 \approx 55^3$ ). Weiter erweisen sich  $R_3$  und  $R_4$  ebenfalls in guter Näherung als proportional zu  $1/I_c$  und nehmen bei  $I_c = 1 \text{ mA}$  die Werte  $R_3 \approx 2,5 M\Omega$ ,  $R_4 \approx 40 k\Omega$  an.

Den Widerstand der Emittierzuleitung werden wir in allen Rechnungen als genügend klein voraussetzen und von seinem Einfluss absehen. Schliesslich können wir die Kapazitäten  $C_2$  und  $C_3$  so lange vernachlässigen, als wir uns mit genügend langsamen Vorgängen befassen. Zur Diskussion von Stabilitätsfragen sind hingegen diese Kapazitäten wesentlich. Von allgemeinem Interesse ist die Feststellung, dass die bei etwa  $1 \text{ kHz}$  gemessenen Parameter auch bei sehr langsamen Veränderungen (« Gleichstromschwankungen ») ihre Werte praktisch beibehalten.

## 1. Einfache Stabilisierungsschaltungen

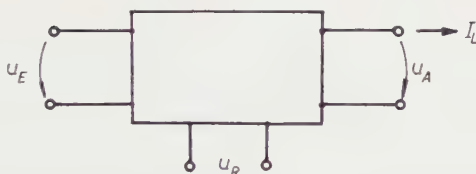
### 1.1. Stabilisierungsschaltungen

Stabilisierte Netzgeräte stellen im allgemeinen als Schaltungen Sechspole dar (Figur 2).

Die Ausgangsspannung ist eine Funktion der Eingangs- und der Referenzspannung.

$$u_A = u_A(u_E, u_R) .$$

<sup>3)</sup> Aus Messungen an einer Vielzahl verschiedener Transistortypen ergab sich, dass bei Niederleistungstransistoren (bis einige hundert Milliwatt)  $SR_2$  verglichen mit  $R_2$  nur schwach von  $I_c$  abhängig ist und im Hinblick auf die Berechnung von Schaltungen in vielen Fällen in ausreichender Näherung als konstant angenommen werden kann. Bei Leistungstransistoren scheint hingegen allgemein die  $I_c$ -Abhängigkeit von  $SR_2$  stärker zu sein. (Die Arbeitspunktabhängigkeit von  $SR_2$  entspricht im wesentlichen der Websterschen Theorie über hohe Injektionsdichten. Vgl. zum Beispiel [20].)



Figur 2

Stabilisierungsschaltung als Sechspol.

 $u_E$  Eingangsspannung;  $u_A$  Ausgangsspannung;  $u_R$  Referenzspannung;  $I_L$  Laststrom.

Wir fragen nach dem Einfluss von  $\Delta U_E$  und  $\Delta U_R$  auf  $u_A$  und entwickeln  $u_A$  dazu in eine Taylor-Reihe<sup>4)</sup>

$$\left. \begin{aligned} u_A &= (u_A)_{\substack{\Delta U_E=0 \\ \Delta U_R=0}} + \left( \frac{\partial u_A}{\partial u_E} \right)_{\substack{\Delta U_E=0 \\ \Delta U_R=0}} \Delta U_E + \dots + \left( \frac{\partial u_A}{\partial u_R} \right)_{\substack{\Delta U_E=0 \\ \Delta U_R=0}} \Delta U_R + \dots, \\ (u_A)_{\substack{\Delta U_E=0 \\ \Delta U_R=0}} &= U_A(U_E, U_R). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Eine derartige Entwicklung ist immer dann möglich, wenn wir genügend kleine Abweichungen  $\Delta U_E$  und  $\Delta U_R$  von einem Bezugszustand betrachten. Unsere Schaltung soll in dem Sinne als linear zu betrachten sein, als das Abbrechen der Entwicklung (1) mit den linearen Gliedern auch bei endlichen  $\Delta U_E$  und  $\Delta U_R$  bereits eine gute Näherung darstellt. Sowohl  $U_A$  als auch die Koeffizienten von  $\Delta U_E$  und  $\Delta U_R$  in (1) werden im allgemeinen vom Laststrom, das heisst vom Arbeitspunkt der Transistoren abhängen.

Weitergehende Aussagen lassen sich erst dann machen, wenn wir die Allgemeinheit einschränken und an die Schaltung zusätzliche Anforderungen stellen. Dazu definieren wir den Stabilisierungsfaktor  $\eta$  als Verhältnis

$$\eta = \frac{\Delta U_E}{U_E} \cdot \frac{U_A}{\Delta U_A} \quad (2)$$

und den Innenwiderstand

$$R_i = - \left( \frac{\partial u_A}{\partial I_L} \right)_{\Delta U_E=0}. \quad (3)$$

Bezüglich der Ausgangsklemmen lassen sich bei bekannter Ausgangsspannung  $U_A$  die stabilisierten Netzgeräte eindeutig durch  $\eta$  und  $R_i$  beschreiben, das heisst als Spannungsquelle  $u_A$  mit dem Innenwiderstand  $R_i$  darstellen. Dabei gilt

$$u_A = U_A + \Delta U_A = U_A \left( 1 + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\Delta U_E}{U_E} \right).$$

$\eta$  und  $R_i$  hängen vom Arbeitspunkt, das heisst von der Belastung ab.

<sup>4)</sup> Wir bezeichnen eine konstante Spannung im folgenden mit  $U_\lambda$ , die überlagerte Rippelspannung bzw. Schwankung mit  $\Delta U_\lambda$ , so dass  $u_\lambda = U_\lambda + \Delta U_\lambda$  gilt.

Die Stabilisierungsschaltung soll eine möglichst gute Approximation an eine ideale Spannungsquelle darstellen, das heisst eine möglichst konstante Gleichspannung liefern. Dies verlangt

1. einen möglichst kleinen Innenwiderstand  $R_i$  derart, dass  $I_L R_i / U_A \ll 1$ ,
2. einen möglichst grossen Stabilisierungsfaktor  $\eta$ , so dass  $\Delta U_A / \Delta U_E \ll 1$  und  $\Delta U_A / U_A \ll 1$  gilt.

3. Werden wir verlangen, dass sich  $\eta$  und vor allem  $R_i$  mit der Frequenz nicht stark ändern, das heisst für schnelle Schwankungen der Eingangsspannung und des Laststromes ähnliche Werte aufweisen wie für extrem langsame.

Die zweite Bedingung verbietet eine starke Abhängigkeit der Ausgangsspannung von  $u_E$ . Es ist daher plausibel

$$u_A = \bar{u}_A(u_R) + b u_E, \quad \frac{b u_E}{u_A} \ll 1 \quad (4)$$

zu schreiben. Diese Überlegung gilt auch dann, wenn wir unsere Schaltung aus nichtlinearen Elementen aufbauen<sup>5)</sup>.

Verwendet man keine Bauteile mit nichtlinearen Kennlinien, so ist die Einführung einer Referenzspannung und gesteuerter Spannungs- bzw. Stromquellen (Röhren, Transistoren usw.) notwendig. Die Einführung gesteuerter Quellen erlaubt, dass die abgegebene stabilisierte Leistung durch den Eingang geliefert und die Referenzspannung nur schwach belastet wird.

Eine Stabilisierungsschaltung wird also entweder passend nichtlineare Elemente oder eine Referenzspannung<sup>6)</sup> und gesteuerte Quellen enthalten. Im folgenden werden wir die zweite Variante vorziehen, die sich mit normalen Bauelementen realisieren lässt und weitaus anpassungsfähiger ist.

Es ist nicht erforderlich, dass die Referenzspannung eine extreme Konstanz aufweist. Man kann sich zum Beispiel eine ebenfalls vom Netz gespeisene, eigene Hilfsspannung als Referenzelement mit der Eigenschaft

$$u_R = U_R + \left( \frac{\partial u_R}{\partial u_E} \right)_{\Delta U_E=0} \Delta U_E + \dots \quad (5)$$

denken. Setzen wir (5) zusammen mit (4) in (1) ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} u_A = (\bar{u}_A(U_R) + b U_E) + \left\{ \left( \frac{\partial u_A}{\partial u_E} \right)_{\substack{\Delta U_E=0 \\ \Delta U_R=0}} + \left( \frac{\partial u_A}{\partial u_R} \right)_{\substack{\Delta U_E=0 \\ \Delta U_R=0}} \left( \frac{\partial u_R}{\partial u_E} \right)_{\Delta U_E=0} \right\} \Delta U_E + \dots, \\ \frac{b U_E}{U_A} \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

<sup>5)</sup> Derartige Elemente lassen sich stets durch eine Spannungsquelle und eine Serieimpedanz darstellen.

<sup>6)</sup> oder ein als Referenzelement wirkendes, wesentlich nichtlineares Element.

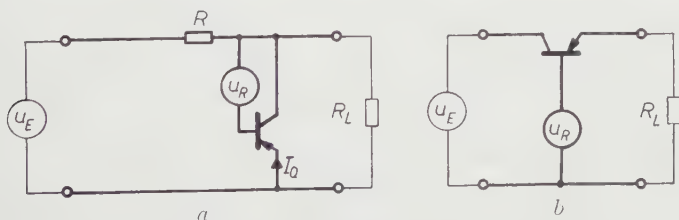
Durch Brückenschaltungen<sup>7)</sup> kann der gesamte Koeffizient von  $U_E$  in (1a) oder ein Teil, zum Beispiel

$$\left( \frac{\partial u_R}{\partial u_E} \right)_{\Delta U_E = 0},$$

zum Verschwinden gebracht werden. Da die Differentialquotienten, wie wir bereits betonten, ebenfalls Funktionen von  $I_L$  sind, wird eine derartige Kompensation vor allem für Netzgeräte von Vorteil sein, deren Belastung konstant ist. Praktische Kompensationsschaltungen werden aus linearen Elementen aufgebaut, sie kompensieren also nur die linearen Terme in (5) bzw. (1a); höhere Terme sind störend und werden nicht kompensiert. Die Tatsache, dass bei praktischen Geräten eine ausgezeichnete Kompensation auch für grössere  $\Delta U_E$  möglich ist, kann als Beweis für die Zulässigkeit der Näherungen (1) und (1a) gewertet werden.

Wir wollen diese allgemeinen Betrachtungen nun verlassen und uns der Behandlung der Stabilisierungsschaltungen in Figur 3 zuwenden, wobei wir unseren Überlegungen zunächst die Schaltungen in der einfachsten Form zugrunde legen.

$a$  bezeichnen wir als Schaltung mit Quertransistor,  $b$  als Schaltung mit Längstransistor. Beide Varianten sind gebräuchliche, von den Röhrenschaltungen



Figur 3

Einfache Stabilisierungsschaltungen:  $a$  mit Quertransistor;  $b$  mit Längstransistor.

her bekannte Anordnungen [6–8], die im Zusammenhang mit Transistoren bereits erwähnt wurden [9–11, 13, 22].

### 1.2. Die Schaltung mit Quertransistor

Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst die Referenzspannung als ideal an. Es soll also  $u_R = U_R$  und  $R_{iR} = 0$  gelten. Ausserdem vernachlässigen wir den Innenwiderstand des speisenden Netzgerätes. Später werden wir uns von diesen einschränkenden Voraussetzungen wieder befreien.

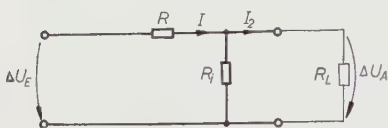
<sup>7)</sup> Unter Brückenschaltung verstehen wir hier allgemeine Schaltungen im Sinne von BODE [5], S. 243.



Aus der Schaltung nach Figur 3a ergibt sich sofort, dass

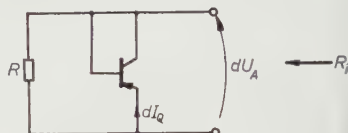
$$U_A = U_R + U_{eb}, \quad (6)$$

wobei in den meisten praktischen Fällen die Basis-Emitter-Spannung  $U_{eb}$  klein, das heisst  $U_{eb}/U_R \ll 1$  ist. Zur Berechnung von  $\eta$  bestimmen wir zunächst das Verhältnis  $\Delta U_E/\Delta U_A$ , das wir aus der Ersatzschaltung (Figur 4) entnehmen können:  $\Delta U_E/\Delta U_A = (R + R_i)/R_i$ . Wegen  $R_i/R \ll 1$  lässt sich dies zu



Figur 4

Ersatzschaltung zu Figur 3a.



Figur 5

Zur Berechnung des Innenwiderstandes.

$\Delta U_E/\Delta U_A \approx R/R_i$  vereinfachen. Ferner gilt  $U_E - U_A = I R^8$ , wobei mit  $I$  die Summe aus Querstrom  $I_Q$ , das heisst dem Strom durch den Quertransistor in Figur 3a und Laststrom  $I_L$  bezeichnet wird. Im Leerlauf ist  $I = I_Q$ . Mit der Definition von (2) erhalten wir

$$\eta = \eta_\infty \left(1 - \frac{U_A}{U_E}\right), \quad \eta_\infty = \frac{U_A}{I R_i}. \quad (7)$$

Aus diesen Beziehungen liest man die für die Dimensionierung von stabilisierten Netzgeräten geeigneten Zusammenhänge

$$\eta_\infty R_i = \frac{U_A}{I}, \quad \eta R_i = R \frac{U_A}{U_E} \quad (7a)$$

ab.  $\eta_\infty$  bedeutet den optimalen Stabilisierungsfaktor, den man für  $U_E \rightarrow \infty$  erreicht. Aus (7) entnimmt man, dass eine Erhöhung der Eingangsspannung über den Wert von etwa  $2 U_A$  nicht empfehlenswert ist. Eine grössere Eingangsspannung bedeutet nur eine bescheidene Verbesserung, die sich asymptotisch dem Faktor 2 nähert, während die Eingangsleistung unbeschränkt wächst. Weiter zeigt sich, dass das Produkt aus Innenwiderstand und Stabilisierungsfaktor durch die Gleichstromgrössen allein festgelegt ist. Beachtet man ferner, dass  $U_A$  und  $I$  von der Last weitgehend unabhängig sind, so ist sofort ersichtlich, dass die Beziehungen (7) und (7a) ihre Gültigkeit auch bei Belastung des Netzgerätes beibehalten, wenn nur die entsprechenden Werte für  $\eta$  und  $R_i$  eingesetzt werden.

Wir fragen nun nach dem Innenwiderstand  $R_i$ . Da stets  $dI_L = -dI_Q$  gilt, erhält man für den differentiellen Innenwiderstand aus (3)

$$R_i = \left( \frac{\partial u_A}{\partial I_Q} \right)_{\Delta U_E=0}. \quad (8)$$

<sup>8)</sup> Man beachte, dass dies eine Beziehung zwischen « Gleichstromgrössen » darstellt.

Die für die Berechnung des Innenwiderstandes massgebende Ersatzschaltung ist in Figur 5 dargestellt. Mit Hilfe des eingangs angegebenen Ersatzschemas für den Transistor erhalten wir im Grenzfall sehr langsamer Störungen

$$R_i = \frac{R_b + R_2}{1 + S R_2}, \quad R \gg R_i. \quad (9)$$

Beschränken wir uns nicht nur auf langsame Schwankungen, so enthält (9) statt  $R_2$  die entsprechende Impedanz (vgl. Figur 1). Besitzt ferner die Referenzspannung einen Innenwiderstand ungleich Null, so ist in (9) als  $R_b$  die Summe aus Basiszuleitungswiderstand des Transistors und Innenwiderstand der Referenzspannung einzusetzen.

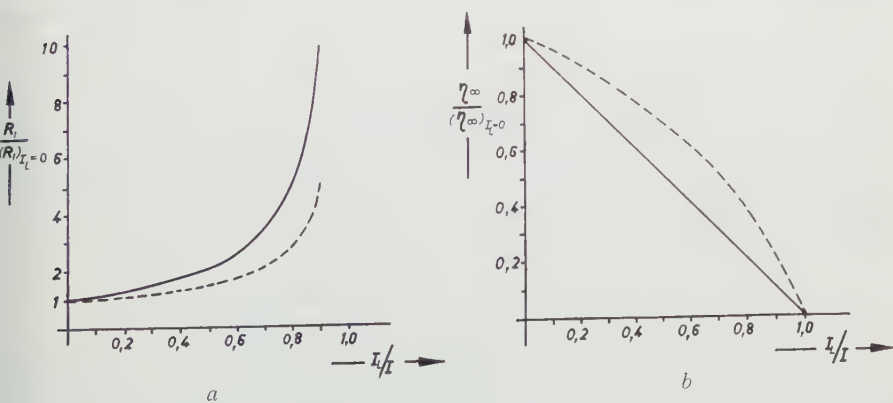
Es bleibt nun noch die Diskussion der Lastabhängigkeit von  $R_i$  und  $\eta$ ; wegen (7a) können wir uns auf die von  $R_i$  beschränken. Mit (9) und den in der Einleitung angegebenen Abhängigkeiten der Parameter vom Arbeitspunkt ergibt sich

$$R_i = (R_i)_{I_L=0} \frac{1}{1 - I_L/I} - \frac{R_b}{1 + S R_2} \cdot \frac{I_L/I}{1 + I_L/I}. \quad (10)$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn der Querstrom gross gegen den Laststrom ist (bzw.  $R_b$  sehr klein ist) zu

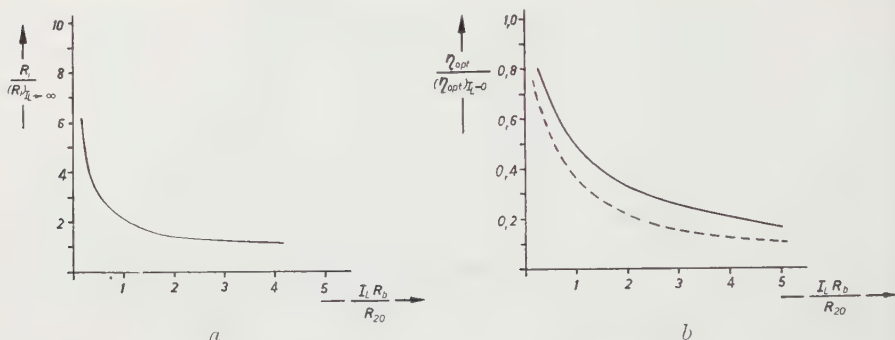
$$R_i \approx (R_i)_{I_L=0} \frac{1}{1 - I_L/I}, \quad \eta \approx (\eta)_{I_L=0} (1 - I_L/I). \quad (11)$$

(11) hat den Vorteil, dass die Eigenschaften des Transistors nicht bekannt sein müssen. Sie erlaubt auch für unbekannte Transistoren eine gute Abschätzung, die etwas zu ungünstige Werte liefert.  $R_i$  und  $\eta$  sind in Figur 6 als Funktion der



Figur 6

Schaltung mit Quertransistor nach Figur 3a. *a* Lastabhängigkeit von  $R_i$ ; *b* Lastabhängigkeit von  $\eta$ . — Gleichung (11); — — Gleichung (10) bzw. Gleichung (10) und (7a). Messpunkte:  $\eta_{\infty}$ . Schaltung mit OC 71; im Leerlauf erhält man die Werte  $\eta_{\infty} = 35,8$  berechnet,  $\eta_{\infty} = 33,8$  gemessen,  $R_i = 10 \Omega$  berechnet,  $R_i = 11 \Omega$  gemessen.



Figur 7

Schaltung mit Längstristor nach Figur 3b. *a* Lastabhängigkeit von  $R_i$ ; *b* Lastabhängigkeit von  $\eta_{opt}$ . — Gleichung (16) und (17); — — Gleichung (17a). Für eine Schaltung mit einem OC 71 ergibt die Rechnung  $(R_i)_{I_L \rightarrow \infty} \approx 5,5 \Omega$ ,  $(\eta_{opt})_{I_L=0} \approx 1690$ . Beste Übereinstimmung der Messwerte mit der Rechnung erhält man für  $(R_i)_{I_L \rightarrow \infty} = 6,0 \Omega$  und  $(\eta_{opt})_{I_L=0} = 1700$ .

Belastung aufgetragen. Baut man mit dem eingangs erwähnten Transistor eine Querschaltung auf, so stimmen die gemessenen Werte innerhalb der Messgenauigkeit mit der Rechnung überein<sup>9)</sup>. Es ist jedoch zu beachten, dass die hier berechneten funktionellen Abhängigkeiten von der Belastung nur unter der Voraussetzung  $SR_2 \approx \text{const}$  gelten (vgl. S. 2). Die gemessene Abhängigkeit von  $1/SR_2$  ist von der Form  $A + BI_c$  und hat die Tendenz, die Lastabhängigkeit von  $R_i$  und  $\eta$  abzuschwächen, mindestens solange  $SR_2$  im Vergleich zu  $R_2$  nur schwach von  $I_c$  abhängt.

Wir haben bisher den Innenwiderstand des speisenden Netzteiles null gesetzt. Man überlegt sich nun leicht, dass bei Schaltungen mit Quertransistor der Innenwiderstand  $R_{iN}$  des speisenden Netzteiles in Serie zum Vorwiderstand  $R$  liegt und deshalb einfach berücksichtigt werden kann. Im allgemeinen ist in dieser Schaltung der Einfluss von  $R_{iN}$  jedoch klein.

Bis auf die Berechnung des Innenwiderstandes und die Belastungsabhängigkeiten besitzen die Überlegungen dieses Abschnittes insofern eine allgemeine Bedeutung, als sie auch auf die Verhältnisse bei Stabilisatoren mit Glühbirnen und Zener-Dioden [11, 12] direkt anwendbar sind.

### 1.3. Die Schaltung mit Längstristor

Um zu einer einfachen Behandlung der Längsschaltung zu gelangen, betrachten wir zunächst den Einfluss des Seriewiderstandes  $R_{iN}$  des speisenden

<sup>9)</sup> Langsame Schwankungen, die der Transistor ausregelt, bewirken eine Arbeitspunktverschiebung und damit eine Temperaturänderung des Transistors. Dieser zusätzliche Effekt, der hier nicht berücksichtigt wurde, lässt sich anhand von Abschnitt 3.1 angeben, ist jedoch nicht von grosser Bedeutung. Im erwähnten Beispiel ist die Korrektur stark lastabhängig und variiert von  $\sim 3\%$  bis  $\sim 10\%$ .

Netztes auf den Innenwiderstand und den Stabilisierungsfaktor. Eine strenge Behandlung der Schaltung nach Figur 3b mit dem Ersatzschema des Transistors nach Figur 1 zeigt, dass, solange

$$R_{iN} \ll \frac{R_4}{1 + \frac{R_4(1 + SR_2)}{R_3}} \cdot \frac{R_b}{R_b + R_2} \quad (12)$$

gilt, der Innenwiderstand bei kurzgeschlossenem Eingang berechnet, das heisst  $R_{iN} = 0$  gesetzt werden kann.

Der Einfluss von  $R_{iN}$  auf den Stabilisierungsfaktor lässt sich wie folgt erfassen: Zwischen den Schwankungen  $\Delta U_E^*$  am Eingang<sup>10)</sup> und den Spannungsschwankungen  $\Delta U_E$  zwischen Kollektor und Basis in Figur 3b besteht der Zusammenhang

$$\Delta U_E = \frac{Z}{R_{iN} + Z} \Delta U_E^*$$

mit der Eingangsimpedanz  $Z$  (vom Netzteil aus gesehen) der Schaltung in Figur 3b. Wir berechnen nun

$$\eta^* = \frac{\Delta U_E^*}{\Delta U_A} \cdot \frac{U_A}{U_E^*} = \left(1 + \frac{R_{iN}}{Z}\right) \frac{\Delta U_E}{\Delta U_A} \cdot \frac{U_A}{U_E} \cdot \frac{U_E}{U_E^*}, \quad \eta^* = \eta \frac{1 + \frac{R_{iN}}{Z}}{1 + \frac{R_{iN}}{U_E}}.$$

Da die gleichstrommässige Eingangsimpedanz  $U_E/I \ll Z$  sein muss, wird

$$\eta^* = \eta,$$

wenn die Bedingung

$$\frac{I R_{iN}}{U_E} \ll 1 \quad (13)$$

erfüllt ist. Es bleibt nun noch die Bestimmung von  $Z$ . Dazu hat man zunächst zu beachten, dass in der Schaltung nach Figur 3b bei einer Änderung  $\Delta I$  des Eingangsstromes die entsprechende Änderung des Laststromes um den Faktor  $\beta$  grösser ist. Die Differenz fliesst durch die Basisleitung des Transistors. Der Wert von  $\beta$  liegt sehr nahe an eins.  $\Delta U_A$  können wir nun einerseits aus dem Spannungsabfall über dem Lastwiderstand und andererseits aus dem Stabilisierungsfaktor bestimmen. Setzen wir beide Ausdrücke gleich, so ergibt sich

$$Z = \frac{\Delta U_E}{\Delta I} = \eta \beta R_L \frac{U_E}{U_A} \approx \eta \frac{U_E}{I}, \quad \text{da } \beta \approx 1.$$

Die Bedingung (13) ist die bei weitem einschränkende, das heisst, der Einfluss von  $R_{iN}$  ist auf den Stabilisierungsfaktor grösser als auf den Innenwiderstand.

<sup>10)</sup>  $U_E^*$  bzw.  $\Delta U_E^* = E M K$  bzw. Änderung der  $E M K$ ,  $U_E$  bzw.  $\Delta U_E$  = Klemmenspannung bzw. Änderung der Klemmenspannung des Gleichrichters mit dem Innenwiderstand  $R_{iN}$ .

Die Ungleichungen (12) und (13) dürften wohl für viele praktisch auftretende Fälle erfüllt sein; wir werden daher im folgenden vom Innenwiderstand  $R_{iN}$  des Netztesiles absehen, also  $R_{iN} = 0$  setzen.

Die Ausgangsspannung der Schaltung mit Längstransistor nach Figur 3b bestimmt sich zu

$$U_A = U_R - U_{eb}. \quad (14)$$

Es lässt sich leicht einsehen, dass der Innenwiderstand  $R_i$  dieser Schaltung durch (9) gegeben ist. Zur Bestimmung des Verhältnisses  $\Delta U_E / \Delta U_A$  stellen wir unsere Schaltung formal durch eine Ersatzschaltung entsprechend zu Figur 4 dar. Die beiden Widerstände legen wir als Parameter dieser Ersatzschaltung durch folgende Bedingungen fest:

1. Vom Ausgang aus gesehen soll die Ersatzschaltung den gleichen Innenwiderstand wie Figur 3b besitzen.

2.  $\Delta U_E / \Delta U_A$  soll für beide Schaltungen den gleichen Wert aufweisen.

Aus 1. folgt, dass der zum Ausgang parallel liegende Widerstand gleich  $R_i$  wird, während man mit 2. den zweiten Widerstand  $R_a$  streng zu

$$R_a = \frac{R_4}{1 + \frac{R_4(1 + S R_2)}{R_3}} \cdot \frac{1 + \frac{R_L}{R_b + R_2} \left(1 + S R_2 + \frac{R_2}{R_4}\right)}{1 + \frac{R_2 + R_L(1 + S R_2)}{R_b} + \frac{R_2}{R_3}}$$

berechnet.

Mit diesem Vorgehen erreicht man, dass die Behandlung der Längsschaltung formal auf die gleiche einfache Art wie die der Querschaltung erfolgen kann. Man hat dabei jedoch die Lastabhängigkeit von  $R_a$  zu beachten. Es gilt

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta U_A} = \frac{R_a + R_i}{R_i} \approx \frac{R_a}{R_i}, \quad \frac{R_i}{R_L} \ll 1.$$

Damit wird der Stabilisierungsfaktor

$$\eta = \frac{R_a}{R_i} \cdot \frac{U_A}{U_E} = \eta_{opt} \frac{U_A}{U_E}. \quad (15)$$

Optimale Verhältnisse liegen offenbar dann vor, wenn  $U_A / U_E = 1$ . Man wird also bei der Schaltung mit Längstransistor bestrebt sein,  $U_E$  möglichst klein zu wählen, das heisst nur die minimal notwendige Kollektor-Emitter-Spannung an den Transistor anzulegen. Aus (15) erhält man sofort

$$\eta_{opt} R_i = R_a, \quad (15a)$$

und dieses Produkt ist im Gegensatz zur Schaltung mit Quertransistor, vom Arbeitspunkt, das heisst von der Belastung des Netzgerätes abhängig.



Wir untersuchen nun noch die Lastabhängigkeit von  $R_i$  und  $\eta$ . Die Variation von  $R_i$  mit der Belastung ergibt sich leicht zu

$$R_i = (R_i)_{I_L \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad (16)$$

wobei wir die dimensionslose Grösse  $x = R_b/R_2 = R_b I_L/R_{20}^{11}$  eingeführt haben und  $(R_i)_{I_L \rightarrow \infty}$  den Wert  $R_b/(1 + SR_2)$  besitzt. Der Stabilisierungsfaktor variiert für kleine  $x$ , das heisst kleine Belastungen, näherungsweise wie

$$\eta_{opt} = \frac{R_a}{R_i} \approx (\eta_{opt})_{I_L=0} \frac{1}{1+x} \quad (17)$$

mit

$$(\eta_{opt})_{I_L \rightarrow 0} \rightarrow \frac{R_4 S R_2}{R_2} \quad (11).$$

In (17) wurde dabei  $R_a - (R_a)_{I_L \rightarrow 0} \rightarrow R_4$  eingesetzt. Für beliebige  $x$  erhält man mit den immer zulässigen Vereinfachungen  $R_2/R_4 \ll 1$ ,  $R_2/R_3 \ll 1$ ,  $S R_2 \gg 1$ ,

$$R_a \approx \frac{R_4}{1 + \frac{R_4 S R_2}{R_3} \cdot \frac{x}{1+x}}$$

und weiter

$$\eta_{opt} = (\eta_{opt})_{I_L=0} \frac{1}{1+x \left(1 + \frac{R_{40} S R_2}{R_{30}}\right)}. \quad (17a)$$

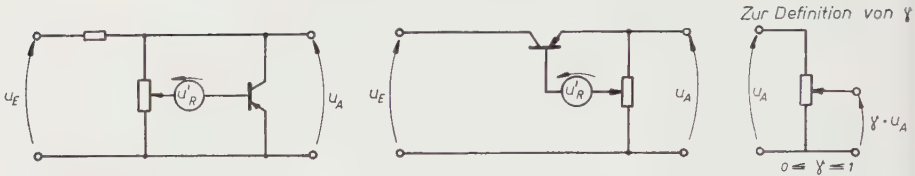
Nach (16) geht  $R_i \rightarrow \infty$  für  $I_L \rightarrow 0$ . Betreibt man die betrachtete Schaltung im Leerlauf, bzw. bei stark wechselnder Belastung, so ist es vorteilhaft, eine geringe zusätzliche Belastung einzubauen, die  $R_i$  passend begrenzt. Weiter ist bemerkenswert, dass  $\eta_{opt}$  für  $R_b \rightarrow 0$  lastunabhängig wird und  $(R_i)_{I_L \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  geht. Figur 7 gibt eine Darstellung der Arbeitspunktabhängigkeit von  $\eta$  und  $R_i$ . Bezüglich des Einflusses der  $I_c$ -Abhängigkeit von  $S R_2$  und des Temperatureffektes gilt das Entsprechende wie auf Seite 8.

#### 1.4. Ergänzende Bemerkungen zum Verhalten der Schaltungen nach Figur 3

a) *Varianten der Schaltung der Referenzspannung.* Für manche Anwendungen kann es zweckmässig sein, die in Figur 3 angegebene Schaltung wie folgt abzuändern (Figur 8):

Mit  $\gamma$  bezeichnen wir das Spannungsteilerverhältnis, dessen Definition aus Figur 8 entnommen werden kann. Wir bemerken, dass der Spannungsteiler eine zusätzliche konstante Belastung des Netzgerätes darstellt. Der Spannungsteiler soll ferner durch den Transistor praktisch nicht belastet werden.

<sup>11)</sup> Für Parameter  $R_\lambda \sim 1/I_c$  schreiben wir  $R_\lambda = R_{\lambda 0}/I_c$  ( $\lambda = 2, 3, 4$ ).



Figur 8

Stabilisierungsschaltungen mit Spannungsteiler.

Eine allfällige Belastung des Spannungsteilers durch den Transistor kann durch den Faktor  $\gamma$  berücksichtigt werden. Bei den Schaltungen mit Quertransistor erhalten wir jetzt für die Ausgangsspannung

$$U_A = \frac{U'_R + U_{cb}}{\gamma},$$

und es ist anschaulich verständlich, dass der Stabilisierungsfaktor  $\eta$  um den Faktor  $\gamma$  verkleinert, der Innenwiderstand um  $1/\gamma$  vergrößert wird, wobei das Produkt beider Größen erhalten bleibt, vorausgesetzt, dass die Gleichstromdaten des Gerätes nicht verändert werden. Bei den Schaltungen mit Längstransistor erhält man nach Figur 9 eine Ausgangsspannung von

$$U_A = \frac{U'_R + U_{cb}}{1 - \gamma},$$

und sowohl für den Innenwiderstand als auch für den Stabilisierungsfaktor gilt das bereits oben erwähnte Verhalten, wobei  $\gamma$  durch  $(1 - \gamma)$  zu ersetzen ist. Besitzt ferner die in Figur 8 eingezeichnete Spannungsquelle  $u'_R$  den Innenwiderstand  $R_{iR}$ , so tritt dieser in beiden Schaltungen additiv zum Basiszuleitungswiderstand hinzu.

Verwendet man als Referenzelemente Zener-Dioden [11, 12], so erhält man zum Beispiel die in Figur 9 dargestellten Schaltungen.

Zener-Dioden können näherungsweise als Serieschaltung einer Spannungsquelle (Elektromotorische Gegenkraft) mit einem Widerstand dargestellt werden, womit die Behandlung der Schaltung analog zu dem soeben gegebenen Beispiel erfolgen kann.



Figur 9

Stabilisierungsschaltungen mit Zener-Dioden als Referenzelement.

b) *Wirkungsgrad der Stabilisierungsschaltungen.* Wir fragen nach dem Wirkungsgrad  $\xi$  der beiden Varianten von Figur 3.  $\xi$  soll wie üblich das Verhältnis von abgegebener (stabilisierter) Leistung zu Eingangsleistung bedeuten. Für die Schaltung mit Quertransistor erhält man

$$\xi = \frac{U_A I_L}{U_E I} = \frac{U_A}{U_E} \left( 1 - \frac{I_Q}{I} \right).$$

Wie bereits erwähnt, wird  $U_A/U_E \approx 1/2$ , und ein Verhältnis von  $I_Q/I \approx 20\%$  ist erfahrungsgemäss noch vernünftig. Damit wird im günstigsten Fall  $\xi \approx 40\%$ . In allen anderen Fällen wird ein entsprechend grösserer Bruchteil der hineingesteckten Leistung im Quertransistor vernichtet. Es kann von Vorteil sein, durch einen passend gewählten Widerstand in der Kollektorleitung den Transistor vor Überlastung zu schützen.  $\xi$ ,  $R_i$  und  $\eta$  werden jedoch von dieser Massnahme nicht beeinflusst. Die Schaltung mit Längstransistor ist demgegenüber wesentlich günstiger, hier ist nämlich

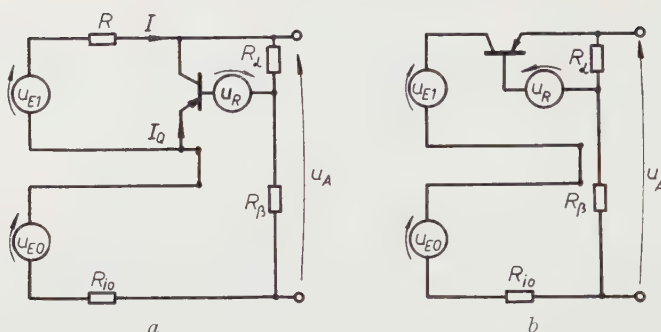
$$\xi = \frac{U_A I_L}{U_E I} \approx \frac{U_A I_L}{U_E I_L},$$

und dieses Verhältnis liegt unabhängig von der Belastung wohl in den meisten Fällen nahe an eins.

Nimmt man bei der Längsschaltung in Kauf, dass die notwendige Vorbelastung den Wirkungsgrad vor allem bei kleiner Last verschlechtert, so fällt der Vergleich eindeutig zugunsten der Längsschaltung aus. Dies um so mehr, wenn man beachtet, dass unter Verwendung gleicher Transistoren die Schaltung nach Figur 3b einen um Grössenordnungen höheren Stabilisierungsfaktor aufweist als die Schaltung nach Figur 3a, während die Innenwiderstände in der gleichen Grössenordnung liegen.

Als Vorteil der Schaltung mit Quertransistor ist vor allem ihre Kurzschlussicherheit zu erwähnen, während die maximale Ausgangsspannung durch die zulässige Emitter-Kollektor-Spannung begrenzt wird. Eine derartige Beschränkung existiert bei den Längsschaltungen nicht. Die höchste zulässige Ausgangsspannung wird hier durch die Grösse der zulässigen Schwankungen der Eingangsspannung bedingt. Unter Umständen wird man allerdings zusätzliche Schaltungsmassnahmen ergreifen müssen, um den Längstransistor im Falle eines Kurzschlusses, bzw. bei zu starker Belastung, zu schützen (vgl. zum Beispiel [13]).

c) *Serienschaltung stabilisierter und unstabiler Quellen.* Der Spannungsbereich von Transistor-Netzgeräten lässt sich erhöhen, wenn man zum Ausgang der Schaltungen in Figur 3 eine unstabilisierte Quelle in Serie schaltet (vgl. Figur 10). Diese Massnahme erlaubt, die gegenüber den Anodenströmen der üblichen Röhren grossen Kollektorströme der Transistoren auch bei Netzgeräten mit höheren Spannungen auszunützen.



Figur 10

Serieschaltung von stabilisierten und unstabilisierten Quellen.

$$U_{E0} + U_{E1} = U_E, U_{E0} + U_{A1} = U_A, \text{ Spannungsteilverhältnis } \gamma = R_\beta / (R_\alpha + R_\beta).$$

Voraussetzungen über den Spannungsteiler vgl. Abschnitt 1.4a.

Wir untersuchen zunächst das Verhalten der gemäss Figur 10a veränderten Querschaltung von Figur 3a und sehen vorerst vom Innenwiderstand  $R_{i0}$  der unstabilisierten Quelle ab. Nehmen wir  $U_{E0} \gg U_{E1}$  an, so kann man  $\Delta U_{E1}$  gegen  $\Delta U_{E0}$  vernachlässigen, das heisst  $\Delta U_E \approx \Delta U_{E0}$  setzen. Man erkennt folgendes Verhalten der Schaltung:  $\Delta U_{E0}$  verursacht Variationen  $\Delta I \approx \Delta U_{E0} / R'$  von  $I$ . Diese Stromänderungen werden nun vom Transistor nahezu ausgeglichen, es bleibt eine Schwankung  $\Delta U_A = \Delta I R'_i$  übrig, wobei mit  $R'_i$  der Innenwiderstand der Querschaltung mit dem Spannungsteiler nach Figur 10a aber mit  $U_{E0} = 0$  und  $R_{i0} = 0$  bezeichnet wird. Man erhält somit

$$\frac{\Delta U_E}{\Delta U_A} \approx \frac{\Delta U_{E0}}{\Delta U_A} = \frac{R}{R'_i}$$

und

$$\eta_{total} = \eta' \frac{1 + \frac{U_{E0}}{U_{A1}}}{1 + \frac{U_{E0}}{U_{E1}}}.$$

$\eta'$  ist entsprechend zu  $R'_i$  definiert. Diesen Überlegungen liegen die normalerweise erfüllbaren Voraussetzungen  $R'/R \ll 1$ ,  $R'_i/R_L \ll 1$  zugrunde. Der Innenwiderstand der Anordnung nach Figur 10a wird mit  $R_{i0} = 0$  zu

$$R_{i_{total}} = R'_i.$$

Der Einfluss eines  $R_{i0} \neq 0$  auf den Stabilisierungsfaktor lässt sich nun sofort angeben.  $R_{i0}$  wird nur vom Laststrom durchflossen, wir haben also anstelle von  $\Delta U_{E0}$  jetzt

$$\Delta U_{E0}^* = \Delta U_{E0} - R_{i0} \frac{\Delta U_A}{R_L}$$



zu setzen. Es ergibt sich schliesslich

$$\eta_{total}^* = \eta_{total} \frac{1 + \frac{R'_i}{R} \cdot \frac{R_{i0}}{R_L}}{1 + \frac{R_{i0}}{R_L}},$$

wobei  $\eta_{total}^*$  mit  $R_{i0} \ll R_L$  in das vorher abgeleitete  $\eta_{total}$  übergeht. Mit entsprechenden Überlegungen erhält man den Innenwiderstand zu

$$R_{i_{total}}^* = R_{i_{total}} \left( 1 + \frac{R_{i0}}{R} \right).$$

Wir wollen zur Berechnung des Stabilisierungsfaktors noch zwei Bemerkungen anfügen:

1. Der Einfluss der Schwankungen  $\Delta U_{E1}$  kann mit Hilfe des Superpositionsprinzips leicht berücksichtigt werden. Man erhält zum Beispiel

$$\Delta U_A = (\Delta U_{E0} - \Delta U_{E1}) \cdot \frac{R'_i}{R}, \text{ usw.}$$

2. Da mit  $U_{E0} \gg U_{E1}$  die absolute Grösse der Schwankungen  $\Delta U_{E0}$  beträchtlich werden kann, ist die Rechnung unter Umständen durch die Berücksichtigung der Arbeitspunktabhängigkeit von  $R'_i$  zu verfeinern. Man erhält dann

$$\gamma \Delta U_A = \gamma \int_{U_{A1}}^{U_{A2}} dU_A = \int_{I_1}^{I_2} R_i dI,$$

und dieses Integral lässt sich mit (11) bzw. (10) streng lösen.

Wird zum Ausgang eines stabilisierten Netzgerätes in Längsschaltung (Figur 3b) eine unstabilisierte Quelle in Serie geschaltet (Figur 10b), so ergibt sich als neue Schaltung wieder ein normales Netzgerät in Längsschaltung. Kann der Innenwiderstand der unstabilisierten Quelle vernachlässigt werden, so entnimmt man  $\eta$  und  $R_i$  aus Abschnitt 1.4a. Der Einfluss eines von Null verschiedenen Widerstandes  $R_{i0}$  lässt sich entsprechend zum Abschnitt 1.3 berücksichtigen. Man erhält

$$\eta_{total}^* = \eta' \frac{1 + \frac{R_{i0}}{Z'}}{1 + \frac{I R_{i0}}{U_E}}$$

und in einer höheren Näherung als der in 1.3 angegebenen

$$R_{i_{total}}^* = R'_i + \frac{R_{i0}}{\eta'_{opt}}$$

mit  $R_{i0} \ll R_3$ ,  $R_{i0} \ll R_4 (1 + S R_2)$ .  $R'_i$ ,  $\eta'$  usw. bedeuten dabei die Grössen der Schaltung unter Berücksichtigung des Spannungsteilers, aber mit  $R_{i0} = 0$ .

Voraussichtlich ist es in vielen Fällen vorteilhaft, in derartige «aufgestockte» Netzgeräte einen Regeltransformator mit Servomotor-Antrieb einzubauen. Die unstabilisierte Spannung lässt sich dann jeweils so nachstellen, dass die Stabilisierungsschaltung stets im günstigsten Regelbereich arbeitet. Ferner verbessert man mit dieser Massnahme die Eigenschaften der Schaltung für genügend langsame Schwankungen erheblich, während für kurzzeitige Eingangsstörungen die soeben abgeleiteten Beziehungen gültig bleiben.

## 2. Methoden zur Verbesserung der Stabilisierungsschaltung

### 2.1. Einbau zusätzlicher Vorverstärker

Es erscheint selbstverständlich, dass mit dem Einbau von Vorverstärkern in die bisher diskutierten einfachen Stabilisierungsschaltungen ihre Eigenschaften wesentlich verbessert werden können. Derartige Gleichstromverstärker sind zwischen der Basis des stabilisierenden Transistors und der Referenzspannung anzubringen. Die Auswirkungen dieser Massnahme kann man bei der *Querschaltung* sofort überblicken. Bezeichnen wir mit  $\mu > 1$  die Verstärkung des Vorverstärkers, so bleiben unsere Rechnungen unverändert, wenn wir dem stabilisierenden Transistor nun die Steilheit  $S' = \mu S$  zuordnen. Es ergeben sich somit folgende Zusammenhänge:

$$R'_i = \frac{R_i}{\mu}, \quad \eta'_{\infty} = \mu \eta_{\infty}^{12)}.$$

Treten im Transistor selbst wesentliche Rückkopplungseffekte auf, wie dies zum Beispiel in der *Längsschaltung* über  $R_3$  und  $R_b$  der Fall ist, so versagt das soeben benützte einfache Verfahren. Eine genauere Analyse der Schaltung zeigt, dass unter den Voraussetzungen

$$\frac{R_2}{R_3} \ll 1, \quad \frac{R_2}{R_4} \ll 1, \quad R_L \gg \frac{R_b + R_2}{1 + S R_2}, \quad S R_2 \gg 1, \quad \mu > 1,$$

ebenfalls

$$R'_i = \frac{R_i}{\mu}, \quad \eta'_{opt} = \mu \eta_{opt}^{12)}$$

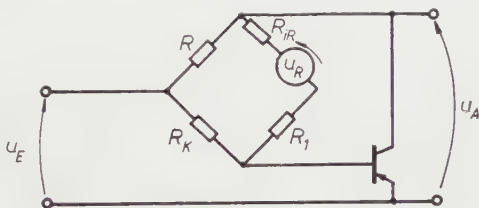
gilt.  $R_a$  wird, wie zu erwarten war, nur sehr schwach von  $\mu$  beeinflusst, und zwar im Sinne einer Verminderung der Lastabhängigkeit. Die Rechnung zeigt, dass im Ausdruck für  $R_a$  (vgl. Abschnitt 1.3) statt  $R_L$  nun  $\mu R_L$  auftritt.

Es soll noch bemerkt werden, dass die Schaltungen nun kompliziertere, zum Teil mehrfach rückgekoppelte Systeme sind und es notwendig ist, die Stabilitätskriterien sorgfältig zu untersuchen. Eine theoretische Behandlung derartiger Systeme findet man in [5] und [8].

<sup>12)</sup> Die mit ' gekennzeichneten Grössen beziehen sich auf eine Schaltung mit der Verstärkung  $\mu > 1$ , die übrigen auf die gleiche Schaltung, aber mit  $\mu = 1$ .

## 2.2. Kompensation des Einflusses von Schwankungen der Eingangsspannung

Wir haben bereits im Abschnitt 1.1 auf die Möglichkeit einer Kompensation des Einflusses der Schwankungen der Eingangsspannung auf die Ausgangsspannung hingewiesen und untersuchen nun eine derartige Kompensationschaltung an einem Netzgerät mit Quertransistor nach Figur 3a, jedoch im Leerlauf. Die Schaltung ist dann wie folgt zu variieren:



Figur 11

Kompensationsschaltung für ein Netzgerät nach Figur 3a.

Dabei bedeuten  $R_{iR}$  den Innenwiderstand der Batterie bzw. der Referenzspannung,  $R_1$  einen Seriewiderstand in der Basiszuleitung des Transistors,  $R_k$  den Kompensationswiderstand, und  $R_i$  ist durch (9) gegeben. Man berechnet  $\Delta U_A$  zu

$$\Delta U_A = \Delta U_E \frac{R_i - \frac{R_{iR} + R_1}{R_k + R + R_{iR} + R_1} \cdot \frac{1 + S R_2}{R_i + \frac{R_k}{R_k + R + R_{iR} + R_1} \left( R + \frac{R_{iR} + R_1}{1 + S R_2} \right)}{(R + \frac{R_{iR} + R_1}{1 + S R_2})}.$$

Für

$$R_k = R \frac{\frac{R_{iR} + R_1}{R_i} \left( \frac{S R_2}{1 + S R_2} - \frac{R_i}{R} \right) - 1}{1 + \frac{R_{iR} + R_1}{R_i (1 + S R_2)}}$$

erhält man eine abgegliche Brückenschaltung mit  $\Delta U_A = 0$ . Man beachte, dass  $R_k > 0$  sein muss und somit ein Abgleich der Brücke für  $R_1$  die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{R_{iR} + R_1}{R_i} > 1$$

bedingt.

Der Innenwiderstand  $\bar{R}_i$  der Schaltung nach Figur 11 wird durch  $R_k$  nur schwach beeinflusst:

$$\bar{R}_i = (\bar{R}_i)_{R_k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{R_k}{R_{iR} + R_1} + \frac{R_k}{R_b + R_2}} \right), \quad \frac{R_k}{\bar{R}_i} \gg 1.$$

Dabei bedeutet

$$(\bar{R}_i)_{R_k \rightarrow \infty} = R_i + \frac{R_{iR} + R_1}{1 + S R_2}, \quad (R_i)_{R_k \rightarrow \infty} \gg 1.$$

Im Falle der exakten Kompensation erhält man

$$\bar{R}_i = (\bar{R}_i)_{R_k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{R_{iR} + R_1}{R \left( \frac{R_{iR} + R_1}{R_i} - 1 \right)} \right),$$

das heisst praktisch den Wert für  $R_k \rightarrow \infty$ .

Der Stabilisierungsfaktor der Schaltungen in Figur 3 kann also mit zwei Methoden vergrössert werden:

1. Durch den Einbau zusätzlicher Vorverstärker (vgl. Abschnitt 2.1).
2. Durch Kompensation (vgl. Figur 11); dabei sind die Innenwiderstände der so modifizierten Schaltungen natürlich verschieden. Wir vergleichen die beiden Varianten 1 und 2 der Querschaltung nach Figur 3a, fordern in beiden Fällen das gleiche  $\eta$  und erhalten mit den Voraussetzungen

$$\frac{(R_i)_{R_k \rightarrow \infty}}{R} \ll 1, \quad \frac{(R_i)_{R_k \rightarrow \infty}}{R_k} \ll 1$$

eine Aussage über die Lastabhängigkeit des Stabilisierungsfaktors:

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial I_L} \right)_{R_k = \text{const}} = \mu \left( 1 + \frac{R}{R_k} \right).$$

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial I_L} \right)_{\mu > 1}$$

Die Lastabhängigkeit von  $\eta$  ist demnach bei einer kompensierten Querschaltung ungefähr um den Faktor  $\mu$  grösser als die Lastabhängigkeit des gleichen Stabilisierungsfaktors einer entsprechenden Querschaltung mit Vorverstärker.

Es sei noch bemerkt, dass der Einfluss von Lastschwankungen auf die Ausgangsspannung ebenfalls kompensiert werden kann, wobei mit dieser Methode auch negative Innenwiderstände realisierbar sind. Eine interessante Anordnung ist kürzlich von PEMBERTON [14] angegeben worden. Vergleiche auch die Arbeit von MIDDLEBROOK [22].

### 3. Temperaturkoeffizient und Beispiele ausgeführter Geräte

#### 3.1. Temperaturkoeffizient der Ausgangsspannung

Man überzeugt sich zunächst anhand der Überlegungen des Abschnitts 1.4b leicht davon, dass die Übertragung von Schwankungen der Referenzspannung auf die Ausgangsspannung bei Schaltungen mit Quertransistor im Verhältnis  $1:\gamma$  bei Schaltungen mit Längstransistor im Verhältnis  $1:(1-\gamma)$  erfolgt. Beschränken wir uns auf die einfachen Schaltungen in Figur 3, so gilt mit  $\gamma = 1$  bzw.  $\gamma = 0$

$$\Delta U_R = \Delta U_A.$$



Betrachtet man weiter nur die Schaltung mit Quertransistor (Figur 3a), so erhält man aus (6) die Aussage

$$\frac{dU_A}{dT} = \frac{dU_R}{dT} + \frac{dU_{eb}}{dT}. \quad (18)$$

Es lässt sich zeigen, dass die Änderungen des Innenwiderstandes und des Querschnitts mit der Temperatur nur einen von höherer Ordnung kleinen Einfluss auf  $U_A$  haben.

Für  $dU_{eb}/dT$  können wir schreiben

$$\frac{dU_{eb}}{dT} = \left(1 + \frac{R_b}{Z_2}\right) \left(\frac{\partial U_{ej}}{\partial T}\right)_{I_c}, \quad (19)$$

wobei  $U_{ej}$  die Emitter-Junction-Spannung ( $\approx U_{cb} - R_b I_b$ , da  $R_b$  praktisch unabhängig von  $I_c$  und  $T$ ) bedeutet. Eine nähere Begründung für (19) geben wir im Anhang. Mit (19) erhält man aus (18) für langsame Änderungen

$$\frac{dU_A}{dT} = \frac{dU_R}{dT} + \left(1 + \frac{R_b}{R_2}\right) \left(\frac{\partial U_{ej}}{\partial T}\right)_{I_c}, \quad \left(\frac{\partial U_{ej}}{\partial T}\right)_{I_c} < 0. \quad (20)$$

Aus (20) liest man die Möglichkeit der Kompensation des Temperaturganges der Ausgangsspannung ab. Der Temperaturkoeffizient der Referenzspannung (zum Beispiel einer Zener-Diode) kann den des Transistors mindestens teilweise aufheben.

Der gemessene Temperaturkoeffizient der Ausgangsspannung einer Schaltung nach Figur 3a (OC 71), bei  $dU_R/dT = 0$ , ergab sich zu etwa  $-3,5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$  bis zu  $40^\circ\text{C}$ . Oberhalb  $40^\circ\text{C}$  erhält man einen etwa dreimal grösseren Wert. Nach (20) und Figur 17 berechnet man den Temperaturkoeffizienten in befriedigender Übereinstimmung zu  $-3,0 \text{ mV}/^\circ\text{C}$  bis zu etwa  $45^\circ\text{C}$ .

Die Überlegungen lassen sich ebenfalls auf Schaltungen mit Längstransistoren anwenden, wobei aber nun zu beachten ist, dass wegen (14) der Temperaturkoeffizient der Referenzspannung mit demselben Vorzeichen eingeht wie der Temperaturkoeffizient des Längstransistors, das heisst, eine Kompensation des Temperatureinflusses der Ausgangsspannung entsprechend (20) nicht eintritt. Abgesehen von diesem Unterschied bleibt die Rechnung dieselbe.

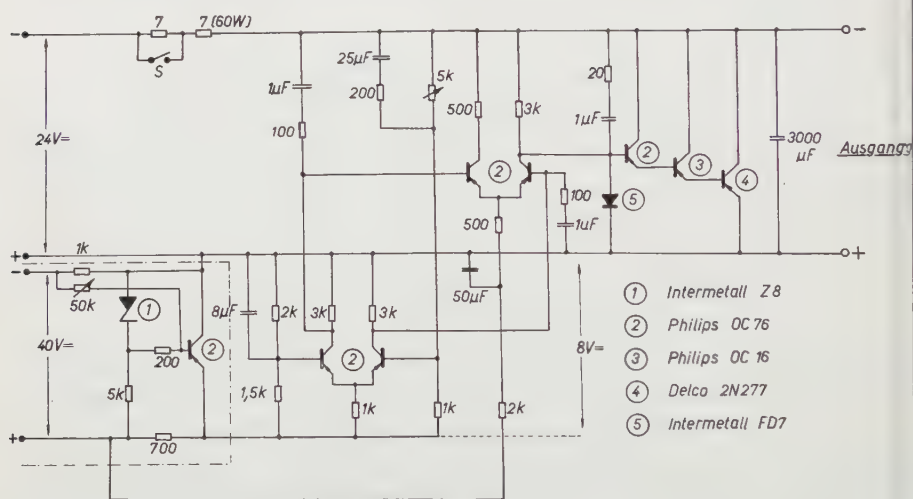
Weist die zu untersuchende Schaltung einen Vorverstärker auf, so ist die erste Stufe wesentlich für den Temperaturkoeffizient der Ausgangsspannung und bestimmt zusammen mit dem Temperaturkoeffizient der Referenzspannung den der Ausgangsspannung.

Der Temperaturkoeffizient des Verstärkers lässt sich nun durch geeignete Schaltungsmassnahmen (symmetrische Stufen) weitgehend beherrschen (vgl. Abschnitt 3.2a und [15]), und durch passende Unsymmetrien die Temperaturkoeffizienten anderer Bauelemente (Referenzspannung usw.) kompensieren.

Eine genauere Analyse der Verhältnisse ist auf Grund der in den Figuren 16 und 17 dargestellten Zusammenhänge prinzipiell möglich, würde hier jedoch zu weit führen.

### 3.2. Beispiele ausgeführter stabilisierter Netzgeräte mit Transistoren

a) *Schaltung mit Quertransistor* (Figur 12). Dieses Gerät, das bereits kurz beschrieben wurde (vgl. BALDINGER und CZAJA [17]), ist als Laborgerät ent-



Figur 12

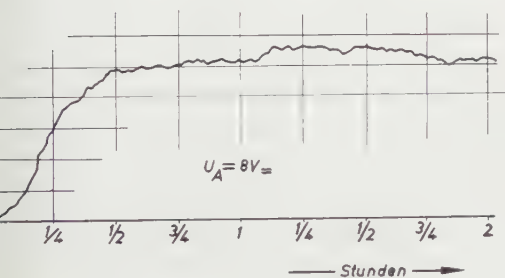
Stabilisierungsschaltung mit Quertransistor. Der Schalter S reduziert bei dauernder geringer Belastung den Strom durch den Quertransistor zur Vermeidung unnötiger Wärmeentwicklung.

wickelt worden und weist in einer neueren Ausführung eine Ausgangsspannung von  $1 \div 17$  V auf. Der maximale Ausgangsstrom beträgt 2,3 A bei 1 V und 0,6 A bei 17 V. Der Stabilisierungsfaktor ist rund 1000 und wird im wesentlichen durch den Stabilisierungsfaktor der Referenzspannung bestimmt. Die Referenzspannung selber ist ein kompensiertes Netzgerät mit Quertransistor. Wie die Erfahrung beim Bau von drei gleichartigen Schaltungen lehrte, ist der zweistufige symmetrische Verstärker genügend unempfindlich auf die Toleranzen der Elemente, und seine Temperaturabhängigkeit gibt zu keinen Schwierigkeiten Anlass. Als Leistungstransistor wird ein DELCO 2N277 verwendet.

Der Einbau der Diode FD7 erweist sich als notwendig, um unter allen Umständen eine Übersteuerung der Endstufe des Verstärkers und damit Kipperscheinungen zu verhindern. Die eingebauten RC-Glieder dienen in der in [5] und [8] beschriebenen Art zur Korrektur des Frequenzganges und verhindern damit eine Instabilität der Schaltung.

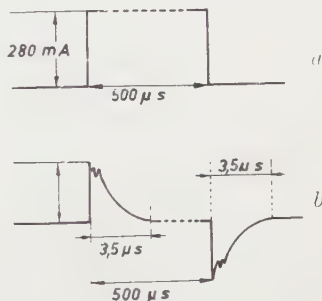
Der Temperaturkoeffizient der Ausgangsspannung beträgt rund  $-0,5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$ . In Figur 13 ist der Drift der Ausgangsspannung in der ersten Stunde nach dem Einschalten des Netzgerätes gezeigt. Die statistischen Schwankungen konnten zum Teil als Schwankungen der Temperatur innerhalb des Gerätes identifiziert werden.

Für sehr niedrige Frequenzen beträgt der Innenwiderstand  $R_i \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \Omega$  und steigt bei etwa 100 kHz auf  $0,2 \Omega$ . Im Gebiet  $0 \leq f \leq 20 \text{ kHz}$  wird der Innenwiderstand durch die Schaltung bedingt. Bei höheren Frequenzen ist die



Figur 13

Drift der Ausgangsspannung des Netzgerätes nach Figur 12 nach dem Einschalten.



Figur 14

a) dem Ausgang der Schaltung nach Figur 12 aufgeprägter Stromimpuls; b) Spannung über dem Innenwiderstand, das heisst an den Ausgangsklemmen. Maximalwert: 0,28 V Spitzenspannung.

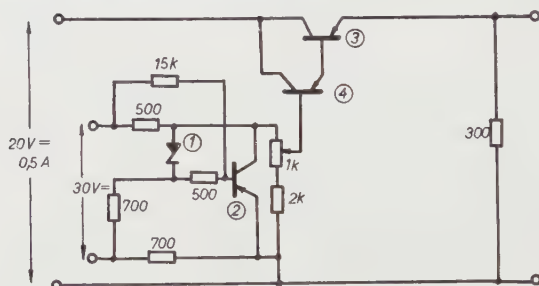
Impedanz der am Ausgang liegenden Kondensatoren massgebend, und  $R_i$  hängt dann wesentlich vom Typ und Fabrikat der verwendeten Kondensatoren ab. Das Impulsverhalten des Ausganges entnimmt man aus Figur 14.

Der Netzteil wurde als Graetz-Schaltung mit Drossel Eingang dimensioniert (vgl. zum Beispiel BALDINGER [16]). Bei einer Rippelspannung von rund 0,3 V Spitzenwert an den Eingangsklemmen der Stabilisierungsschaltung beträgt die Rippelspannung am Ausgang etwa 0,3 mV Spitzenwert<sup>13)</sup>. Der Netzteil weist einen Innenwiderstand von etwa  $2 \Omega$  auf. Die gesamte Schaltung arbeitet bei einer Umgebungstemperatur von  $45^\circ\text{C}$  noch einwandfrei.

Abschliessend soll erwähnt werden, dass sich die Schaltung nach Figur 12 weiter verbessern liesse, wobei in erster Linie an eine Verbesserung der Konstanz der Referenzspannung gedacht werden muss.

<sup>13)</sup> Da die Selengleichrichter im Netzteil den Strom zeitweilig unterbrechen [16], wird die Drossel zu Schwingungen angeregt, die sich auf den Ausgang des Netzgerätes übertragen. Im angegebenen Beispiel treten kurze Störungen von etwa 5 mV Spitzenwert auf. Diese Schwingungen lassen sich prinzipiell beseitigen, wenn man statt Selengleichrichter zum Beispiel Si-Dioden verwendet.

b) *Schaltung mit Längstransistor*. Die in Figur 15 dargestellte Stabilisierungsschaltung mit Längstransistor liefert eine Ausgangsspannung von 10,5 V bis 15,5 V und ist bis 0,5 A belastbar, wobei eine konstante Vorbelastung von 50 mA eingebaut wurde. Die Referenzspannung ist wie im Beispiel a) ausgebildet. Der Stabilisierungsfaktor des kompensierten Gerätes beträgt etwa  $100 \div 150$ . Ferner weist der Innenwiderstand den praktisch lastunabhängigen Wert von  $0,6 \Omega$  auf, und sein Frequenzgang ist durch einen starken Anstieg bei



Figur 15

Stabilisierungsschaltung mit Längstransistor:

① 2 Internmetall Z 8 in Serie; ② Philips OC 76; ③ Philips OC 16; ④ 2 Philips OC 76 parallel. Netzteil: Graetz-Gleichrichter mit Drossel Eingang, Innenwiderstand rund  $20 \Omega$ . Rippelspannung am Eingang der Stabilisierungsschaltung rund 0,6 V Spitzenwert und am Ausgang rund 3 mV Spitzenwert.

etwa 20 kHz charakterisiert. Die Ausgangsspannung zeigt einen Temperaturkoeffizienten von rund  $+3,5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$ , und dieser liegt damit in der abgeschätzten Größenordnung. Die maximal zulässige Umgebungstemperatur beträgt etwa  $55^\circ\text{C}$ .

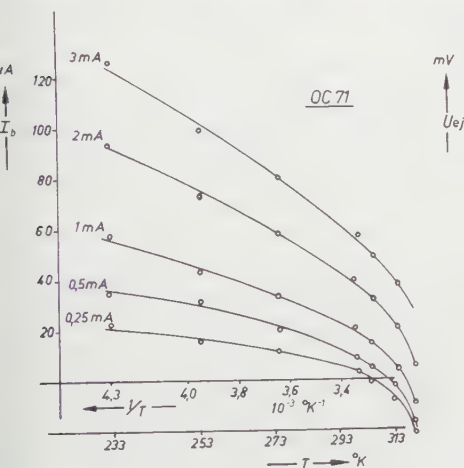
Dieses Netzgerät eignet sich zum Beispiel für die Anwendung in industriellen Schaltungen. Auf die Kurzschlußsicherheit wurde verzichtet und als Überlastungsschutz sowohl für den Selengleichrichter als auch den Leistungstransistor eine Feinsicherung eingebaut. Über die Verbesserungsmöglichkeiten gilt das beim vorherigen Beispiel Erwähnte.

## Anhang

Wir geben hier Messungen über das Temperaturverhalten eines OC 71 wieder, ohne jedoch näher auf die theoretische Deutung einzugehen. Als Voraussetzung erwähnen wir zunächst, dass nach [2] und [3] die Parameter der Ersatzschaltung höchstens mit  $T$  bzw.  $1/T$  variieren, im Gegensatz zur exponentiellen Abhängigkeit des Arbeitspunktes also annähernd als konstant angenommen werden können (vgl. auch [18] für Angaben über  $R_b$ ). Wir beschäftigen uns also mit der Temperaturabhängigkeit des Arbeitspunktes.

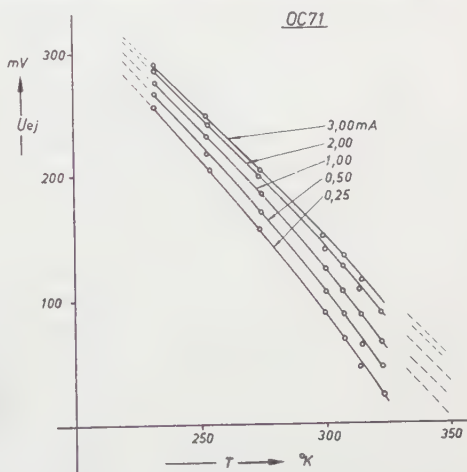
a) Der Basisstrom variiert bei konstantem Kollektorstrom wie in Figur 16 dargestellt mit der (absoluten) Temperatur.

Als Temperatur ist hier die innere Temperatur des Transistors aufgetragen, die sich zum Beispiel aus dem Kollektorsperrstrom ermitteln lässt. Der Kollektorsperrstrom zeigt in sehr guter Näherung eine exponentielle Abhängigkeit



Figur 16

Basisstrom  $I_b$  als Funktion der inneren Temperatur mit dem Kollektorstrom als Parameter. Ge-p-n-p-Flächentransistor OC 71.



Figur 17

Emitter-Junction Spannung  $U_{ej}$  als Funktion der inneren Temperatur mit dem Kollektorstrom als Parameter. Ge-p-n-p-Flächentransistor OC 71. Die Kurven nähern sich mit abnehmender Temperatur den gestrichelt eingezeichneten Geraden, welche sich bei  $T = 0^\circ\text{K}$  im Punkt  $U_{ej} = 760 \text{ mV}$  schneiden.

von der (absoluten) Temperatur. Der Schnittpunkt der Kurven mit der Abszisse ist in grober Näherung durch das Überhandnehmen der Ladungsträgererzeugung in der Basis zu deuten. Bei steigenden Temperaturen kehrt der Basisstrom sein Vorzeichen um.

b) Emitter-Junction-Spannung: In Figur 17 ist die Emitter-Junction-Spannung  $U_{ej}$

$$U_{ej} = U_{eb} - R_b I_b$$

als Funktion der absoluten Temperatur bei konstantem Kollektorstrom aufgetragen.

Den Zusammenhang zwischen  $U_{ej}$  und  $T$  kann man qualitativ verstehen. Für genügend grosse Kollektorspannung ist  $I_c$  im wesentlichen durch die Eigenschaften des Emitterüberganges bestimmt, das heisst

$$I_c \sim e^{(q U_{ej} - \Delta E)/kT} = \text{const}, \quad q U_{ej} < \Delta E.$$



Mit  $\Delta E$  bezeichnen wir die Breite der verbotenen Zone zwischen Valenz- und Leitungsband. Man erhält

$$\frac{q U_{ej} - \Delta E}{k T} = -\delta, \quad U_{ej} = \frac{\Delta E}{q} - \delta k T,$$

wobei  $\delta$  von  $I_c$  abhängen wird. Wie Figur 17 zeigt, gibt diese Beziehung die Verhältnisse qualitativ gut wieder, einschliesslich des extrapolierten Schnittpunktes für  $T = 0$ , für den  $U_{ej} = \Delta E/q$  gilt. Die von GÄRTNER [19] unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen, aber mit Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit usw. gerechneten Kurven zeigen dasselbe Verhalten.

Es lässt sich ferner anschaulich erklären, dass es Zustände des Transistors gibt, bei denen  $U_{ej} = 0$ , aber  $I_c \neq 0$  ist. Nehmen wir zum Beispiel an, dass ein Ge-*p-n-p*-Transistor bei einigen Volt Kollektorspannung einen Kollektorstrom von 2 mA führt. Zwischen der Löcherkonzentration in der Basis an der Emitter-Junction und der Spannung  $U_{ej}$  besteht dann ein wohldefinierter Zusammenhang [vgl. zum Beispiel [21], S. 276, Gl. (8–14)]. Die Gleichgewichtskonzentration in der Basis wird nun mit wachsender Temperatur zunehmen, das heisst bei konstantem  $I_c$  (konstantem Gradient der Löcher-Konzentration in der Basis), die Spannung  $U_{ej}$  abnehmen. Bei genügend hoher Temperatur wird  $U_{ej}$  schliesslich Null werden und sogar sein Vorzeichen umkehren können. Ähnliche Kurven wie in den Figuren 16 und 17 sind letzthin von GUGGENBÜHL und SCHNEIDER [18] publiziert worden.

Abschliessend sollen noch zwei Bemerkungen gemacht werden:

1. Unterwirft man einen Transistor nicht zu grossen Temperaturänderungen, so hat dies Schwankungen des Arbeitspunktes um einen festen Wert zur Folge. Diese Schwankungen kann man auf einfache Art erfassen, solange die Temperaturabhängigkeit der Parameter des Ersatzschemas nach Figur 1 vernachlässigbar ist. Man erhält so zum Beispiel Gleichung (19).

2. In grober Näherung sind Leistungstransistoren darstellbar durch Parallelschaltung vieler Niederleistungstransistoren<sup>14)</sup>. Insofern beanspruchen vor allem die in Figur 17 dargestellten Zusammenhänge eine gewisse allgemeinere Gültigkeit; dies um so mehr, als die Darstellung unabhängig vom speziellen Basiszuleitungswiderstand  $R_b$  ist.

Der Stiftung Hasler-Werke, Bern, haben wir sehr für die finanzielle Unterstützung zu danken, die es ermöglichte, die vorstehenden Untersuchungen auszuführen.

<sup>14)</sup> Allerdings bestimmt bei stark ausgesteuerten Leistungstransistoren im wesentlichen  $R_b$  die Eingangsimpedanz ( $R_b \gg R_2$ ); zum Beispiel beträgt bei 1 A für einen OC 16  $R_b \sim 6 \Omega$ , während  $R_2 < 0,5 \Omega$  ist.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. ZAWELS, J. appl Phys. 25, 976 (1954); RCA. Rev. 16, 360 (1955).
- [2] L. J. GIACOLETTO, RCA. Rev. 15, 506 (1954).
- [3] E. BALDINGER, W. CZAJA und M. NICOLET, ZAMP 7, 357 (1956).
- [4] E. BALDINGER, W. CZAJA und M. NICOLET, Helv. phys. Acta 29, 429 (1956).
- [5] H. W. BODE, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* (New York 1951).
- [6] F. V. HUNT und R. W. HICKMAN, Rev. sci. Instrum. 10, 6 (1939).
- [7] J. J. GILVARRY und D. F. RUTLAND, Rev. sci. Instrum. 22, 464 (1951).
- [8] J. G. THOMASON, *Linear Feedback Analysis* (London 1955).
- [9] F. H. CHASE, Electr. Engng. 75, 818 (1956).
- [10] J. W. KELLER, Electronics 29, Nr. 11, 168 (1956).
- [11] P. DOBRINSKI, H. KNABE und H. MÜLLER, NTZ 10, 1 (1957).
- [12] E. ENSLIN, Inst. Radio Engrs., Transactions on Instrumentation I-6, 2, 105 (1957).
- [13] M. LILLIENSTEIN, Electronics 29, Nr. 12, 169 (1956).
- [14] M. E. PEMBERTON, Marconi Rev. 20, No. 125, 39 (1957).
- [15] D. M. NEALE und F. OAKES, Wireless World, 62, Nr. 11, 529 (1956).
- [16] E. BALDINGER, Handb. Physik 44, (1957) im Druck.
- [17] E. BALDINGER und W. CZAJA, ZAMP 8, 324 (1957).
- [18] W. GUGGENBÜHL und B. SCHNEIDER, Arch. elektr. Übertr. 10, 361 (1956).
- [19] W. W. GÄRTNER, Proc. Inst. Radio Engrs., N. Y. 45, 662 (1957).
- [20] W. M. WEBSTER, Proc. Inst. Radio Engrs., N. Y. 42, 914 (1954).
- [21] A. W. LO *et al.*, *Transistor Electronics* (Prentice Hall, 1955).
- [22] R. D. MIDDLEBROOK, Proc. Inst. Radio Engrs. 45, 1502 (1957)<sup>15)</sup>.

## Summary

This paper deals with stabilized voltage supplies employing transistors. A theory is given which can readily be applied, and examples of existing devices are added.

With the transistors now available, stabilized voltage supplies may be designed to display highly satisfactory characteristics – especially a small temperature dependence of output voltage.

Some ideas concerning the influence of temperature on transistor-action are given in the appendix.

(Eingegangen: 6. Juli 1957.)

<sup>15)</sup> Anmerkung bei der Korrektur: Diese Arbeit erschien erst kürzlich und wurde der Vollständigkeit halber in das Literaturverzeichnis aufgenommen.

# Finite Difference Methods of Solution of the von Mises Boundary Layer Equation With Special Reference to Conditions Near a Singularity

By ANDREW R. MITCHELL and JOHN Y. THOMSON, St. Andrews, Scotland<sup>1)</sup>

## Introduction

The von Mises transformation of the boundary layer equations was first published in 1927 [1]<sup>2)</sup>. A discussion of this form of the equations was given in 1938 by PRANDTL [2], who had deduced the transformation before VON MISES without publishing it. GÖRTLER [3] considered the possibility of using this form of the equations to solve the problem of incompressible boundary layer flow along a semi-infinite flat plate against an adverse pressure gradient. The unpleasant singularity of the equation at the plate, however, caused GÖRTLER to abandon the transformation as a means of solving the problem. The singularity was avoided by LUCKERT [4], who used the von Mises equation to work out the flow in the wake of a finite plate lying in the direction of the stream.

In the present paper it is intended to show that the singularity of the von Mises equation at the plate in GÖRTLER's problem can be overcome by using an appropriate expansion for the velocity in the vicinity of the plate. As a result, conditions at the plate can be deduced from the values of the velocity in the boundary layer obtained from a step-by-step finite difference procedure. Once the difficulty of the singularity has been overcome in the incompressible case, it is intended to use the method to obtain a solution of the corresponding problem in compressible flow.

## The von Mises Equation and Its Finite Difference Replacement

The equations of motion and continuity for the incompressible boundary layer are in the usual notation

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \frac{du_1}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

and

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

<sup>1)</sup> The University, Department of Mathematics.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 36.

respectively. In terms of the von Mises variables  $x, \psi$  the above equations become

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - u_1 \frac{du_1}{dx} = v u \frac{\partial}{\partial \psi} \left( u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right),$$

or in non-dimensional notation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}, \quad (1)$$

where

$$z = u_1^2 / u^2,$$

and  $u, z, x, \psi$  now stand for  $u/U, z/U^2, x/L, \psi R^{1/2}/UL$ , respectively. The non-dimensional free stream velocity distribution outside the boundary layer is taken to be

$$u_1 = 1 - x,$$

where the semi-infinite flat plate lies along the positive part of the  $x$ -axis.

The four point forward difference replacement of (1) is

$$z_{j+1,k} = z_{j,k} + \delta [(u_1^2)_j - z_{j,k}]^{1/2} (z_{j,k+1} - 2z_{j,k} + z_{j,k-1}), \quad (2)$$

where  $\delta = \Delta x / (\Delta \psi)^2$ , and  $\Delta x$  and  $\Delta \psi$  are the non-dimensional mesh lengths in the  $x$ - and  $\psi$ -directions respectively. The calculation commences at  $x = 0.05$  with values of  $z$  taken from HOWARTH [5], and proceeds step-by-step in the  $x$ -direction. The problem is illustrated in Figure 1.

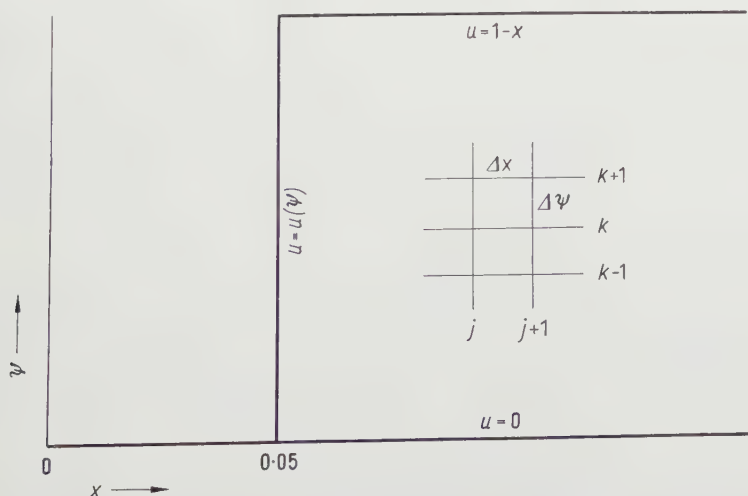


Figure 1  
Illustration of problem.

### Stability of the Finite Difference Equation

In a step-by-step calculation using a finite difference equation such as (2), care must be taken that round-off errors introduced at any stage do not grow with increasing  $x$ . This is usually accomplished by choosing a suitable value of the mesh ratio  $\delta$ . In the present problem the growth of error is governed by the equation

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{j+1,k} &= \varepsilon_{j,k} + \delta [(u_1^2)_j - z_{j,k}]^{1/2} (\varepsilon_{j,k+1} - 2\varepsilon_{j,k} + \varepsilon_{j,k-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(u_1^2)_j - z_{j,k}]^{1/2} (z_{j,k+1} - 2z_{j,k} + z_{j,k-1}) \cdot \varepsilon_{j,k} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

The latter is obtained by replacing  $z$  in (2) by  $z + \varepsilon$ , and neglecting higher powers of  $\varepsilon$ . In the manner of O'BRIEN, HYMAN, and KAPLAN [6], the substitution

$$\varepsilon_{j,k} = e^{\alpha j \Delta x} e^{i \beta k \Delta \psi}$$

is made in (3), and the result

$$e^{\alpha \Delta x} = 1 - \frac{\delta}{2 u_{j,k}^2} \left[ 8 u_{j,k}^2 \sin^2 \frac{\beta \Delta \psi}{2} + (z_{j,k+1} - 2z_{j,k} + z_{j,k-1}) \right]$$

obtained. The condition for stability is  $|e^{\alpha \Delta x}| \leq 1$ , which leads to

$$\delta \leq \frac{4 u_{j,k}}{10 u_{j,k}^2 - (u_{j,k+1}^2 + u_{j,k-1}^2)} \quad (4)$$

and

$$z_{j,k+1} - 2z_{j,k} + z_{j,k-1} \geq 0. \quad (5)$$

Provided conditions (4) and (5) are satisfied at every step during the calculation, round-off errors introduced at any stage do not grow and the step-by-step procedure using (2) is stable.

### The Finite Difference Calculation

The values of  $\Delta \psi$  and  $\delta$  are chosen to be 0.1 and 0.25 respectively, and the calculation carried out using (2) starts at  $x = 0.05$  with values of  $z$  taken from HOWARTH, and proceeds step-by-step with  $\Delta x = 0.0025$  as far as  $x = 0.125$ . During the calculation, stability condition (4) is satisfied at every point but condition (5) is violated slightly at nodes on  $\psi = 0.1$  beyond  $x = 0.08$ . With  $\Delta \psi = 0.1$ ,  $z$  is evaluated to four places of decimals and selected values are shown in Table 1. The boundary layer thickens from eleven mesh lengths at  $x = 0.05$  to eighteen mesh lengths at  $x = 0.125$ .



Table 1

$\psi \backslash x$	0.05	0.07	0.09	0.10	0.11	0.12
0	0.9025	0.8649	0.8281	0.8100	0.7921	0.7744
0.1	0.6677	0.6801	0.6800	0.6770	0.6728	0.6675
0.2	0.4536	0.5004	0.5259	0.5337	0.5393	0.5430
0.3	0.2843	0.3478	0.3879	0.4025	0.4144	0.4241
0.4	0.1661	0.2283	0.2736	0.2913	0.3065	0.3195
0.5	0.0890	0.1419	0.1845	0.2025	0.2183	0.2325
0.6	0.0434	0.0829	0.1188	0.1350	0.1498	0.1634
0.7	0.0201	0.0454	0.0729	0.0862	0.0988	0.1108
0.8	0.0074	0.0232	0.0426	0.0526	0.0625	0.0724
0.9	0.0027	0.0110	0.0235	0.0306	0.0379	0.0455
1.0	0.0005	0.0047	0.0122	0.0169	0.0220	0.0275
1.1	0.0000	0.0018	0.0059	0.0088	0.0122	0.0159
1.2		0.0006	0.0027	0.0043	0.0064	0.0087
1.3		0.0002	0.0011	0.0019	0.0030	0.0046
1.4		0.0000	0.0004	0.0008	0.0015	0.0022
1.5			0.0001	0.0003	0.0006	0.0010
1.6			0.0000	0.0000	0.0002	0.0004
1.7					0.0000	0.0001
1.8						0.0000

The violation of condition (5) at nodes next to the plate can be explained by examining the original equation (1). At any station  $x$ ,  $\partial z/\partial x$  is zero in the stream outside the boundary layer, negative on the plate, and has a maximum inside the boundary layer. As a result,  $\partial z/\partial x$  is negative in a region adjacent to the plate. In this region, however,  $u$  is positive and so from (1) it follows that  $\partial^2 z/\partial \psi^2$  is negative. Since difference replacement (2) is of the same order in  $x$  and  $\psi$  as (1), it possesses the same inherent properties. Thus in a region next to the plate,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} = \frac{1}{(\Delta \psi)^2} (z_{j,k+1} - 2z_{j,k} + z_{j,k-1}) \leq 0,$$

and so condition (5) is violated. It should be pointed out that a difference equation of order higher than the original differential equation is also a minimum order replacement of a higher order differential equation, and so the higher order difference replacement need not possess the same properties as the original differential equation.

### The Unstable Region

In the previous section, it is shown that a finite difference step-by-step procedure with  $\Delta \psi = 0.1$  is mildly unstable at nodes beyond  $x = 0.08$  adjacent

to the plate. If the mesh length  $\Delta\psi$  is chosen to be smaller than 0.1 in the original calculation, condition (5) is violated at a correspondingly greater number of nodes. In fact, the smaller the mesh size  $\Delta\psi$  the more precisely is the region of instability determined and the more accurate are the values of  $z$  at nodes where condition (5) is not violated. Thus the initial step-by-step calculation using (2) with prescribed values of  $\Delta\psi$  and  $\delta$  divides the field of the boundary layer into two distinct sections, a large region covering most of the field where round-off errors do not grow, and a narrow region adjacent to the plate, where round-off errors may grow appreciably. The locus  $\partial^2 z / \partial \psi^2 = 0$ , which separates the two regions, diverges slightly from the plate as  $x$  approaches the value 0.125. It should be emphasized that this region of instability is not a result of  $\partial^2 z / \partial \psi^2$  being infinite, but of  $\partial z / \partial x$  being negative, on the plate. For example, if the free stream velocity distribution outside the boundary layer is taken to be  $u_1 = 1 + x$ , then  $\partial z / \partial x$  is positive on the plate and the stable region covers the entire field, although  $\partial^2 z / \partial \psi^2$  is still infinite on the plate. In general, the difference calculation is stable or unstable next to the plate depending on whether the flow is accelerating or decelerating in the main stream. This splitting-up of the boundary layer in the case of an adverse pressure gradient into two distinct regions can be compared with the method used in 1934 by VON KÁRMÁN and MILLIKAN [7], who obtained 'outer' and 'inner' solutions depending on whether  $\partial^2 z / \partial \psi^2$  is  $>$  or  $<$  0.

As explained in the previous section, the unstable nature of the difference calculation in the region next to the plate for the case of retarded flow is a direct consequence of the differential equation, and so there seems little hope of obtaining a finite difference replacement of (1) for which round-off errors do not grow in this region. In the present problem, therefore, an alternative procedure is required for finding  $z$  at nodes in the unstable region next to the plate.

### The Singularity at the Plate

At the plate,  $u = 0$  and  $\partial z / \partial x = -2(1 - x)$ , and so from (1) it follows that  $\partial^2 z / \partial \psi^2$  is infinite. This singularity caused GÖRTLER to abandon the von Mises transformation as a means of solving the present problem. Before proceeding further with the evaluation of  $z$  at nodes near the plate it is desirable to examine this singularity in detail.

Consider at any station  $x$ , the expansion

$$u = a\psi^{1/2} + b\psi + c\psi^{3/2} + d\psi^2 + \dots, \quad (6)$$

where the coefficients  $a, b, c, d, \dots$  are functions of  $x$ . This expansion gives  $\partial^2 z / \partial \psi^2$  infinite and  $u(\partial u / \partial \psi) = a^2/2$  at  $\psi = 0$ . The coefficients are not all arbitrary, but must be chosen to satisfy the following conditions of compatibility

at the plate;

$$(i) \quad u \frac{\partial^2(u^2)}{\partial \psi^2} = - \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\psi=0} = 2(1-x),$$

$$(ii) \quad u \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ u \frac{\partial}{\partial \psi} \left( u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \right\} = 0.$$

It can easily be verified that the above conditions lead to the results

$$b = -\frac{2}{3a^2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\psi=0}$$

and

$$c = \frac{7}{18a^3} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\psi=0}^2$$

respectively, and so (6) becomes

$$u = a \psi^{1/2} - \frac{2}{3a^2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\psi=0} \psi - \frac{7}{18a^3} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\psi=0}^2 \psi^{3/2} + a \psi^2 \dots \quad (7)$$

The corresponding expansions

$$\left. \begin{aligned} z = z_0 - a^2 \psi + \frac{4}{3a} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\psi=0} \psi^{3/2} + \frac{1}{3a^4} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\psi=0}^2 \psi^2 \\ + d' \psi^{5/2} + e' \psi^3 + f' \psi^{7/2} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

and

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\psi=0} + d'' \psi + e'' \psi^{3/2} + f'' \psi^2 + \dots, \quad (9)$$

where  $d', e', f', \dots, d'', e'', f'', \dots$  functions of  $a, b, c, d, \dots$ , are obtained from (7) using  $z = u_1^2 - u^2$  and (1) respectively. It should be noted that if, for example,  $u$  is terminated at  $\psi^2$ , the comparable expansions for  $z$  and  $\partial z/\partial x$  contain terms up to and including  $\psi^4$ . The expansions (7), (8), (9) can be used for interpolating  $u, z, \partial z/\partial x$  respectively in the vicinity of the plate.

The basic formula (7) is now used to find  $\partial u/\partial y$  on the plate at a station  $x$ . LEIGH [8] using the boundary layer equations with  $u$  as a function of  $y$ , obtained accurate results for the velocity in the problem of the present paper for a small range of  $x$  upstream of and including the separation point  $x = 0.1198$ . LEIGH's results at  $x = 0.1198$  are converted to give  $u$  in terms of  $\psi$  and are shown in Table 2. From any two pairs of corresponding values of  $u$  and  $\psi$ , and expansion (7) terminated at  $\psi^2$ , a sextic equation is obtained for  $a$ . This equation in all cases yields two real roots, one positive and one negative, the positive root being the one required. The values of  $a^2/2$  obtained from different pairs of corresponding values of  $u$  and  $\psi$  are shown in Table 2, where in each case the smaller of the two values of  $\psi$  is used in the tabulation. The results are also illustrated in Figure 2 where it is seen that  $a^2/2 (\equiv \partial u/\partial y)$  extrapolates to zero as

$\psi$  tends to zero. Thus provided the expansion (7) is used, the singularity does not prevent an accurate value of  $\partial u/\partial y$  being obtained on the plate, the accuracy depending only on the values of the velocity in the field. Of course, the closer to the plate the values of the velocity are known, the easier is the extrapolation and so the more accurate is the value obtained for  $\partial u/\partial y$  on the plate. It can be stated that if a set of values of the velocity is given in the field in terms of both  $\psi$  and  $y$  at any station  $x$ , then  $u (\partial u/\partial \psi) (\equiv \partial u/\partial y)$  on the plate can be obtained just as easily and with as much accuracy using expansion (7), as using

Table 2

$\psi$	$u$	$a^2/2$
0.2	0.4780	
0.1	0.3200	0.254
0.05	0.2075	0.187
0.025	0.1325	0.164
0.0125	0.0830	0.126
0.00625	0.0548	0.118
0.003125	0.0345	0.088
0.0015625	0.0210	0.065
0.00078125	0.0125	0.045

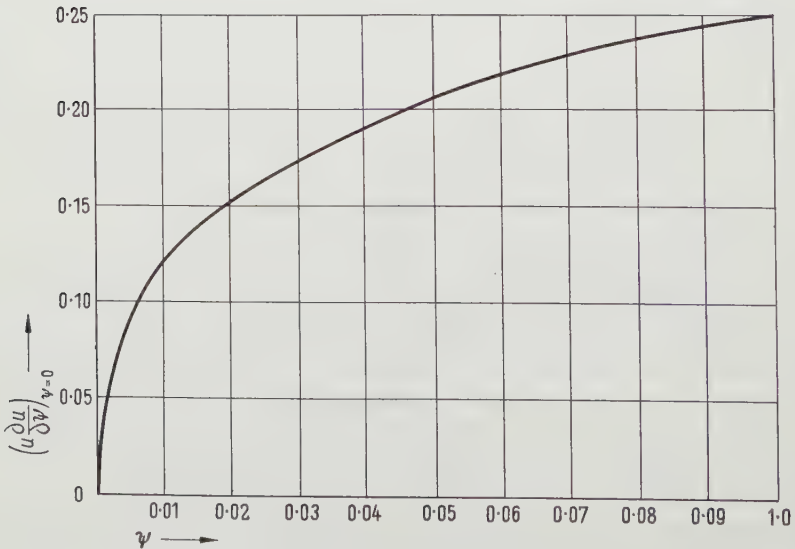


Figure 2

Separation point at  $x = 0.1198$  from LEIGH's results.

the standard expansion for  $u$  in terms of  $y$ , in which no singularity exists on the plate.

### Evaluation of the Velocity in the Unstable Region

As shown previously, an initial step-by-step calculation, using (2) with prescribed values of  $\delta$  and  $\Delta\psi$ , produces a narrow region adjacent to the plate where round-off errors may grow. Accordingly an alternative method is required for finding the values of the velocity in this unstable region.

In the actual calculation carried out with  $\Delta\psi$  and  $\delta$  equal to 0.1 and 0.25 respectively, the stability condition is violated slightly at nodes on  $\psi = 0.1$  beyond  $x = 0.08$ . The method used to find revised values of  $z$  at these nodes is now explained.

At  $x = 0.0825$ ,  $\partial z/\partial x$  is known at  $\psi = 0.2, 0.3, 0.4$ , and so  $\partial z/\partial x$  at  $\psi = 0.1$  can be obtained by using (9) terminated at  $\psi^2$ . However,  $z$  is known on  $\psi = 0.1$  at  $x = 0.0775, 0.08$ , and so  $z$  can be obtained at  $x = 0.0825$  from the three point backward difference formula

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{0.0825} = 200 (z_{0.0775} - 4 z_{0.08} + 3 z_{0.0825}) .$$

This procedure is repeated to find  $z$  at  $x = 0.085$  and so on up to  $x = 0.125$ . The new values of  $z$  obtained at the nodes on  $\psi = 0.1$  beyond  $x = 0.08$  differ slightly from the original values (see Table 3), showing that only mild insta-

Table 3

$x$	$z$	
	Original	Corrected
0.080	0.6812	0.6813
0.085	0.6809	0.6810
0.090	0.6800	0.6803
0.095	0.6787	0.6793
0.100	0.6770	0.6776
0.105	0.6751	0.6767
0.110	0.6728	0.6750
0.115	0.6703	0.6725
0.120	0.6675	0.6700

bility exists in the original step-by-step calculation. It should be mentioned that the changes in the values of  $z$  at nodes on  $\psi = 0.1$  cause minor alterations in  $z$  at nodes on  $\psi = 0.2$ .

The method described can be continued to find the velocity within the region  $0.05 < x \leq 0.125, 0 < \psi < 0.1$ . At  $x = 0.0525$ ,  $\partial z/\partial x$  is known at  $\psi = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ , and so a formula for  $\partial z/\partial x$  is obtained from (9) terminated at  $\psi^2$ .



From HOWARTH'S results,  $z$  is known at  $x = 0.0475, 0.05$ , and so  $z$  is evaluated at nodes within the range  $0 < \psi < 0.1$  on  $x = 0.0525$  from the three point backward difference formula for  $(\partial z / \partial x)_{0.0525}$ . This procedure is repeated to find  $z$  for  $0 < \psi < 0.1$  at  $x = 0.055$  and so on up to  $x = 0.125$ . Of course, once the separation point ( $\partial u / \partial y = 0$  on the plate) is obtained by the method described in the previous section, the values of the velocity at stations  $x$  downstream of the separation point can be discarded. Although it is considerably simpler to obtain the velocity in the region  $0 < \psi < 0.1$  directly from (7), the values are in fact less accurate. This is due to the direct method not making use of HOWARTH'S values of  $z$  at  $x = 0.0475, 0.05$ .

An alternative method for finding the velocity at nodes within the region  $0 < \psi < 0.1$  is now described. At a station  $x$ ,  $\partial z / \partial x$  is known at  $\psi = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ , and so from (9) terminated at  $\psi^2$ , an expansion is obtained for  $\partial z / \partial x$  which can be used within the region  $0 < \psi < 0.1$  at the appropriate station  $x$ . The velocity at  $\psi = 0.05$  at a station  $x$  is now obtained from

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{0.05} = 400 (u_1^2 - z_{0.05})^{1/2} (z_{0.1} - 2z_{0.05} + z_0),$$

which is the central difference replacement of (1) at  $\psi = 0.05$ . In a similar manner, the velocity at  $\psi = 0.025$  is got from

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{0.025} = 1600 (u_1^2 - z_{0.025})^{1/2} (z_{0.05} - 2z_{0.025} + z_0),$$

and so on. This process is carried out at the section  $x = 0.12$ , and the values of the velocity obtained at  $\psi = 0.05, 0.025, \dots, 0.0015625$ , are shown in Figure 3

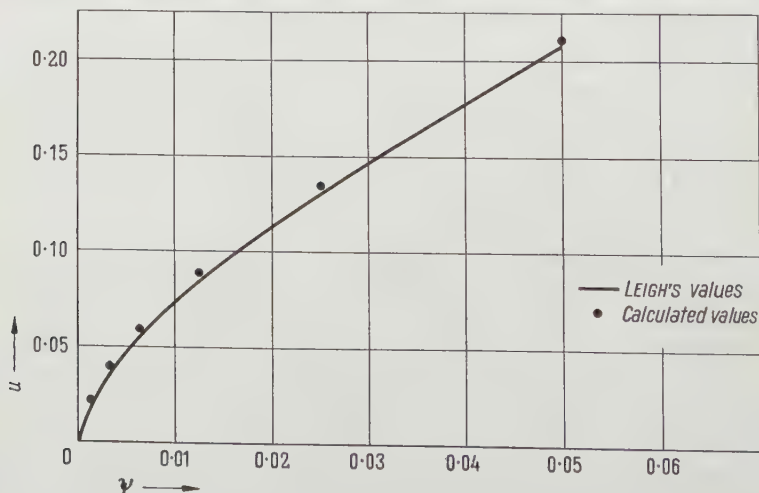


Figure 3  
Comparison of results at  $x = 0.12$ .

long with the corresponding values obtained by LEIGH at  $x = 0.1198$ . The agreement is surprisingly good considering the large increments  $\Delta\psi$  used in the early stages of the present calculation.

More accurate results can be obtained by this alternative method if

(1) the initial step-by-step calculation is carried out using a value of  $\Delta\psi$  less than 0.1.

(2) at each station  $x$ , the range of  $\psi$  within the unstable region is divided up into more than two equal parts. For example, if the range  $0 < \psi < 0.1$  is divided up into four equal parts, a central difference replacement of (1) with  $\Delta\psi = 0.025$  is used at  $\psi = 0.025, 0.05, 0.075$ , and so it is required to solve three equations for the three unknowns  $z_{0.025}, z_{0.05}, z_{0.075}$ . The range  $0 < \psi < 0.025$  is then divided up into four equal parts, and the above process used to find  $z_{0.00625}, z_{0.0125}, z_{0.01875}$ , and so on.

(3) expansion (9) is used with values of  $d'', e'', f''$  revised at each stage. For example, if the range  $0 < \psi < 0.1$  is divided up into four equal parts at three neighbouring stations  $x$ , and  $z$  is obtained at each node, then  $\partial z / \partial x$  at the station  $x$  furthest downstream can be calculated from a three point backward difference formula at  $\psi = 0.025, 0.05, 0.075$ . A revised expansion for  $\partial z / \partial x$ , which can be used in the range  $0 < \psi < 0.025$ , at the appropriate station  $x$  is obtained from (9) using the values of  $\partial z / \partial x$  calculated above.

### Concluding Remarks

(1) The primary object of the present paper is not to obtain an accurate value for the separation point in the problem of boundary layer flow along a flat plate against an adverse pressure gradient, but to explore generally the possibility of using finite difference methods, based on the comparatively simple von Mises equation, to solve boundary layer problems. The values of velocity computed are generally in good agreement with those obtained by LEIGH, while separation, according to our calculation, occurs slightly downstream of the accepted position,  $x = 0.1198$ . The accuracy of the solution obtained from the numerical calculation depends on the mesh size used, which in turn is governed by the computing facilities available.

(2) Previous investigators did not consider the von Mises transformation as a means of solving the present problem because  $\partial^2 z / \partial \psi^2$  is infinite at the plate. However, provided an expansion like (7) is used, which incorporates the conditions of compatibility at the plate, there is no difficulty in obtaining a value for  $\partial u / \partial y$  on the plate from the computed values of the velocity in the boundary layer.

(3) The errors in the initial step-by-step calculation in the region next to the plate are caused not by  $\partial^2 z / \partial \psi^2$  being infinite on the plate, but by  $\partial^2 z / \partial \psi^2$  being negative in the vicinity of the plate. This violates the stability condition

for the initial step-by-step calculation, and so an alternative procedure is adopted in order to find the velocity in the region next to the plate.

(4) An apparent disadvantage of all step-by-step techniques based on finite differences for solving boundary layer problems is that values of the velocity are required at some station  $x$  in order to start the calculation. In the present example, HOWARTH'S values are used at  $x = 0.05$ . This disadvantage can be overcome to some extent by commencing the calculation at the nose of the plate ( $x = 0$ ) with the values  $z = 1$  at  $\psi = 0$  and  $z = 0$  for  $\psi > 0$ . This was tried out in the present problem with  $\Delta\psi$  and  $\delta$  equal to 0.1 and 0.25 respectively. At each station  $x$ , the computed values are compared with the theoretical values of HOWARTH, the agreement between the two sets of values improving as the calculation proceeds. In fact, by the time the station  $x = 0.05$  is reached, the values of  $z$  are within three per cent of HOWARTH'S values. This agreement is of course improved if a smaller value of  $\Delta\psi$  is used in the calculation.

(5) The velocity is obtained as a function of  $y$  by evaluating numerically  $y = \int_0^\psi d\psi/u$  at each station  $x$ . The integrand is infinite at the lower limit and so it is necessary to evaluate  $y$  in the form

$$y = \int_0^{u_1} \frac{du}{u \frac{du}{d\psi}} + \int_{\psi_1}^\psi \frac{d\psi}{u},$$

where  $u_1$  is the velocity corresponding to  $\psi_1$ , an arbitrary small value of  $\psi$ , and  $u (\partial u / \partial \psi)$  takes the value  $a^2/2$  on the plate.

(6) Finally, it is hoped to use the methods outlined in the present paper to obtain a solution for the corresponding problem in compressible flow. The governing equations are of course much more complicated, and as a result a greater amount of numerical work is necessary in order to obtain a solution. The expansions (6), (7), (8), which are based on incompressible boundary layer flow, are sufficient provided that the coefficients in the expansions are obtained from compressible flow calculations in a region near the plate where the velocity is sufficiently small.

### Acknowledgement

Mr. J. Y. THOMSON'S share of the work was performed whilst in receipt of a Carnegie Research Scholarship. The Summary in German was prepared by Mr. E. V. K. BRILL.

### REFERENCES

- [1] R. VON MISES, *Z. angew. Math. Mech.* 7, 425 (1927).
- [2] L. PRANDTL, *Z. angew. Math. Mech.* 18, 77 (1938).

- 3] H. GÖRTLER, Z. angew. Math. Mech. 19, 129 (1939).
- 4] H. J. LUCKERT, Doctoral thesis (University of Berlin 1933).
- 5] L. HOWARTH, Proc. roy. Soc., London [A] 164, 547 (1938).
- 6] G. G. O'BRIEN, M. A. HYMAN and S. KAPLAN, J. Math. Phys. 29, 223 (1951).
- 7] TH. VON KÁRMÁN and C. B. MILLIKAN, N. A. C. A. Report 504 (1934).
- 8] D. C. F. LEIGH, Proc. Camb. phil. Soc. 51, 320 (1955).

### *Zusammenfassung*

Frühere Forscher haben die Misessche Gleichung als Mittel zur Lösung des Problems der Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit Druckanstieg nicht verwendet wegen ihrer unangenehmen Singularität an der Platte. In der vorliegenden Untersuchung wird eine Geschwindigkeitsverteilung berechnet, welche die Plattenbindungen berücksichtigt und folglich den Hautreibungswert durch die Geschwindigkeitswerte in der Grenzschicht berechnen lässt. Diese Werte werden ermittelt durch ein Fortsetzungsdifferenzenverfahren auf der Grundlage der Misesschen Gleichung sowie durch ein modifiziertes Differenzenverfahren in der Nähe der Platte. Dieses letzte Verfahren ist nötig wegen der Instabilität der ursprünglichen Fortsetzungsberechnung in der Nähe der Platte. Angesichts der verhältnismässig geringen Rechnerarbeit stimmen die Ergebnisse gut überein mit den Lösungen anderer Forscher, die andere Formen der Grenzschichtgleichung benutzten. Die Genauigkeit der in dieser Untersuchung erreichten Ergebnisse lässt sich natürlich noch vermehren durch Anwendung einer kleineren Schrittweite bei der ersten Fortsetzungsberechnung.

(Received: May 24, 1957.)

## A Method for the Evaluation of Hail Suppression

By HERBERT C. S. THOM, Washington, D. C.<sup>1)</sup>

### Table of Contents

1. Introduction . . . . .	38
2. The General Problem . . . . .	39
3. Tests of Hypotheses. . . . .	40
4. Estimates of Distribution Parameters . . . . .	43
5. The Sequential Test. . . . .	45
6. The Negative Binomial Test . . . . .	49
7. The Poisson Test . . . . .	52
8. Operating Characteristics . . . . .	54
9. Average Sample Number . . . . .	58
10. Discussion of Results . . . . .	62
11. Acknowledgments . . . . .	63
References . . . . .	63

<sup>1)</sup> Technical Staff, Advisory Committee on Weather Control, Technical Report No. 4.

## 1. Introduction

Although there is some difference of opinion on the approach to the theoretical and experimental phases in studying the hail control problem (cf. e. g. WEICKMANN [1]<sup>2)</sup> and DESSENS [2]), most will agree that proof is a matter of theory and verification is a matter of experimentation and these must go hand in hand in the development of science. While theoretical development in meteorology presents no peculiar difficulties, experimentation presents a major difficulty resulting from the fact that nature ultimately controls all experiments in the atmosphere. WEICKMANN [3] aptly points out the main factor in this difficulty as the necessity of accounting for the natural variability in time of meteorological phenomena. With proper understanding of meteorological data, however, we believe this difficulty can be overcome to an extent that allows valid conclusions to be drawn from experiments now being conducted in the atmosphere. Certainly this can always be accomplished with properly designed experiments.

Although it is not our present objective to evaluate the results from a specific hail project, it would be advantageous to work within practical limits of hail occurrence as might be associated with an actual hail suppression project. In order to develop and apply the methods we have in mind, the suppression project target should contain at least one but preferably more than one long record meteorological station with good hail records. Examination of our records showed no United States project meeting this requirement. The situation in Europe, however, was better, for hail suppression has been practiced much more extensively there.

There are, at present, at least two experimental operations to suppress hail underway in Europe: One is in France and has been described by H. DESSENS [4] and the other is in the Magadino Plain in Switzerland under direction of R. SÄNGER, H. STAUB and J. C. THAMS [5]. The latter operation is especially well controlled and seemed most appropriate as a site around which we could develop our methodology.

A review of the Swiss reports [5] showed that there are three good meteorological stations in the Magadino Plain observing hail occurrence. Although, as pointed out to us by Prof. SÄNGER in correspondence, these stations are not properly located to sample the hail suppression operations as conducted adequately, this was not critical since our main objective was to develop methods, and the station arrangement and records were good for this purpose. Long, carefully kept records were readily available in the Swiss Meteorological Office publications [6].

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 63.



## 2. The General Problem

It would appear that hail suppression efforts might be evaluated either by using some meteorological variable or some related variable such as damage to crops. In this paper we discuss only the use of a meteorological variable, the related variable being left to another study.

The only hail variable on which historical data are ordinarily available is the frequency of days with hail, and it suits our present purposes best to use the number of hail-days per year as our variable. From a consideration of the stochastic aspects of hail occurrence, it is seen that the number of hail-days will be proportional to the total area of hailstorms. This depends on the area of individual storms as well as on the frequency of storms. If it is assumed that hail suppression attempts could either prevent a storm from producing hail altogether or reduce the area over which hail occurs, then the total area of hailstorms is in either case reduced and hence the frequency is reduced. Presumably, then, if the conventional frequency of hail-days is reduced, the damage from hail would also be reduced.

It must not be forgotten that hail damage might be reduced by the suppression operation having affected some physical properties of the hail such as size, intensity, and hardness. Hence, while it might appear that damage is related to frequency, it might also be affected by other factors so that frequency would seem to provide a conservative measure of hail damage.

Since the covariance method of using a control area in conjunction with the target proved so useful in evaluating seeding for precipitation augmentation, it was natural to give it first consideration for hail suppression. There were, however, some already existing questions on its applicability. In the first place, hail is associated with summer convectional storms for which the correlation with distance on precipitation drops off rapidly with increasing distance because of the sporadic nature of convectional precipitation. Second, since the hail pattern is usually a small part of the rain pattern, it tends to be even more sporadic than rain and hence have a more rapidly decreasing correlation with distance. This is borne out by correlations found between the Magadino-Plain stations Locarno-Muralto, Bellinzona, and Lugano. These stations are located approximately on an isosceles triangle with Locarno-Muralto and Bellinzona on the base which runs roughly West-East and Lugano to the South at the apex. Locarno-Muralto and Bellinzona are about 10 miles apart and each is about 14 miles from Lugano. Even with these short distances between stations the correlations coefficient between Locarno and Bellinzona is only 0.5318, between Locarno and Lugano 0.3085, and between Bellinzona and Locarno 0.3971. These stations are all in the target area. If we went outside of the target area, as we must do for a control, the correlations would be still lower.

Since  $|1 - r^2|$  is a measure [7] of the advantage gained from a control, it can be seen that for  $r = 0.50$  the gain is only 13%. Consequently, it is nearly useless to employ a control where correlations are near 0.50 or less. There may be some instances where a satisfactory control may be found, but this is much more unlikely for hail than it is for rainfall and hence we must look to other tools for effective evaluation methods.

As with precipitation [7] if the seeding effect had been very large, it would have been very noticeable and hence there would have been little need for a sensitive evaluation method. With hail, however, the situation is perhaps even more difficult than rain, for the effect is not as easily observed and tends to be more obscured by the natural variability of weather. This is no doubt largely due to the lack of a more complete understanding of the theory of hail formation as well as to a lack of engineering techniques necessary to be able to transmit effective quantities of nuclei to proper regions of the atmosphere at will. As is often the case where benefits from an operation could be large compared to costs, there is a great urge to bypass difficult, and therefore slow to develop, theory with application. Immediately there is also then an urge to evaluate the effectiveness of such operations. This is the situation at the present time.

In such evaluation one is not only faced with the variability in the skill of the operator but with the variability due to the uncertainty of the theoretical effect. These, together with the great weather variability in atmospheric operations, make the evaluation of hail suppression at present largely one of statistical analysis based on whatever physical knowledge is available. Of course, since evaluation must inevitably use the results of observation and the atmosphere has a certain uncontrollable random variability, evaluations must always be partly statistical in nature. This inherent random variability at the same time limits the sensitivity of purely statistical methods and so we must look ultimately to improved physical models or theory for major improvements in the sensitivity of evaluations. For the present we must make best use of the data available to us.

Since the covariance method using the classical method of testing hypotheses is of little aid, and we need a method of testing which makes the best use of observations on the target alone, we decided to devise a so-called sequential method of testing the hypothesis that hail suppression was effective. The sequential test of hypothesis can be shown to reach a decision on the average with fewer observations than the classical test. See WALD [8], p. 54. This partly compensates for the lack of a control area.

### 3. Tests of Hypotheses

Every experiment, if carried to a proper conclusion, ends with a decision being made as to whether to reject or accept the hypothesis which the experi-

ment was meant to test. In many fields, experiments can be controlled or replicated to such an extent that the probability of committing errors in making decisions is so small that the correct decision seems quite obvious at the end of the experiment. This type of experiment is so prevalent in the physical sciences that many do not realize that a probability of coming to a wrong decision even exists; and so the need is not recognized, nor in fact, is there much need for systematizing the decision-making procedure.

In some fields, such as meteorology, replication is costly and time consuming because the trials of an experiment must be made in a time sequence of nature's choosing and the possibilities of control are severely limited. Here the probability of making a wrong decision is not often negligibly small. Hence a knowledge of this probability becomes important, and a systematized decision-making procedure is indispensable to the making of enlightened decisions. This is provided by the tests of hypothesis developed by statisticians.

In simplest terms, the statistical test of hypothesis consists of an hypothesis and a rule for accepting or rejecting that hypothesis on the basis of a set of experimental trials called a sample. A sample clearly can only lead to making a decision which is correct with a certain probability. There are chances then that two kinds of errors may be committed: Type 1, the hypothesis may be rejected when it is actually true or type 2, it may be accepted when it is false. In addition, sample size must be involved since this must affect the confidence we place in our decision. Thus the basic elements of the decision-making procedure may be said to be the two types of errors and the sample size or number.

The two forms of test we have under consideration here involve fixing two of these elements and allowing the third to vary. For the classical test the sample size and the first type error are fixed, and the second type error is minimized [7]. One test is then made on the entire sample. For the sequential test the two types of errors are fixed and the sample size is allowed to vary, i. e., the sample is tested progressively as it accumulates. After each trial a computation is made which provides one of three results: accept the hypothesis, reject the hypothesis, or make another trial. Owing to the fact that the probability of accepting or rejecting the hypothesis approaches one for a proper test, the process always terminates in one of two decisions—acceptance or rejection of the hypothesis.

In order to arrive at a test procedure the hypothesis we have been discussing must be expressed in numerical terms. Suppose we are concerned with a parameter  $\mu$  being less than or greater than  $C$ . Then one hypothesis of interest might be expressed as follows:  $\mu$  is less than  $C$ . In the hail problem if  $C$  is the mean hail frequency before seeding, we would like to be able to accept or reject  $\mu < C$  on the basis of a series of trials. To do this we need a rule for accepting or rejecting our hypothesis.

Since, as we have seen, the acceptance or rejection of an hypothesis, say  $H$ , involves probabilities of being correct and in error, the rule must entail a population of values of  $\mu$ . Thus in general we accept the hypothesis  $H$  if a sample value  $\mu$  is a member of the population associated with  $H$ , and we reject  $H$  if  $\mu$  is not a member of the population of  $H$  and hence is a member of some other or alternative population, say  $H'$ .

Except in very special instances the populations  $H$  and  $H'$  overlap, so for any sample value of  $\mu$  we merely know its position with respect to  $H$  and  $H'$  in terms of probability. Hence a reasonable rule would be to favor the acceptance of  $H$  when the probability that  $\mu$  came from population  $H$  is high and to favor rejection of  $H$  when the probability that  $\mu$  came from  $H$  is low. To determine such probabilities we must have some knowledge of the frequency distributions on  $H$  and  $H'$ . These must be obtained from the climatological record.

In a previous paper [9] we developed the application of the Poisson and negative binomial distributions (n. b.) to hail frequency series. We reasoned there that for low average frequency of hail occurrence successive hailstorms are independent and hail frequency tends to follow the Poisson distribution in which the variance is equal to the mean. With higher average hail frequency the hailstorms occur closer together resulting in some pairing or correlation which makes the variance of annual frequencies exceed the mean annual frequency—a departure from requirements for a Poisson distribution. In these circumstances we found the n. b. or Polya distribution, which has a variance exceeding the mean, fit the hail series very well. Here, however, our interest is in the total hail frequency for a network of several stations in the target area since this would seem to be a more efficient indicator of hail suppression.

It is well known that the sum of independent Poisson series, such as those from several hail observing stations, would also be distributed in a Poisson distribution with mean equal to the sum of the means of the several series. This implies also that the variance of this series would be equal to the sum of the means. If the stations are in close proximity, the station hail series will not be independent but will tend to be positively correlated. Hence, while the means will again add to produce the mean total, the variance of the total will be greater than the sum of the variances by a covariance which is proportional to the correlations between the stations. Here the departure from the Poisson series takes place in a similar way as it did when we went from stations with low hail frequency to stations with higher hail frequency. The difference is that we have substituted a space variable for a time variable. Although this is a special case and convolution does not take place generally in this manner because n. b. distributions do not combine to form an n. b. distribution except under special conditions, our experience shows that n. b. fits the distributions of totals quite well. We shall therefore assume that the principles applied



through time also apply over space (area) and employ the same distributions for network totals of hail frequency as we have for point totals.

#### 4. Estimates of Distribution Parameters

Before we can undertake development of specific tests, we shall need estimates of the distribution parameters both on the hypothesis and its alternative. Our test series will consist of the total frequency of hail-days at the three stations: Lugano, Locarno-Muralto, and Bellinzona. Although Locarno-Monti is a main station in the hail-suppression project for the Magadino Plain, we could not use it because there was only a short record available to us. It also appeared to us that the effects of hail suppression, if real, might be less pronounced at Monti although this did not affect our choice of stations. The three stations were chosen for no other reasons than that they had the only records that met our requirements in the target area. The choice was made before any computation or testing was done and so it was absolutely independent of the methods or results later obtained.

It is well known that the sequential test is sensitive to non-randomness in the climatological series. Such non-randomness we reasoned could come from two causes: (a) long term fluctuations in the climate which most agree would be relatively gradual and (b) changes in observational technique (regulated or unregulated) which could either be gradual or abrupt. The hail-occurrence observation being aperiodic is a difficult observation and in some instances is subject to unregulated change from observer to observer. It is also subject to some regulated variations caused by changes in rules, e. g., ruling that a hail-storm extending past midnight or the end of the day is two hail-days as against one. Clearly, this should be one hail-day since only one hailstorm is involved. If two occurrences are assigned to such an event the hail-days are erroneously inflated and the number pairs increased which artificially emphasizes the Polya effect. Here is an excellent example of the difference between the requirements for climatological and synoptic observations. Notwithstanding the possible weakness in the hail observation, every indication we have is that the hail records at these Swiss stations are of good quality and have been little affected either by regulated or unregulated changes.

Henceforth we treat only the total annual hail frequency at the three target stations Lugano, Locarno-Muralto, and Bellinzona. Complete record for their total frequency of hail-days was available to us back through 1888 with the exception of 1896 for which the total was incomplete. Hail-suppression operations began in the Magadino Plain in 1948 and have been conducted in two phases: The first five year's operations were with rockets 1948-1952; the next three year's operations and still continuing are with ground based AgI generators ([5], No. 6). We therefore had an undisturbed record which begins in



1888 and extends through 1947 excluding 1896. Of this, use was also made of the period 1925–1947 as we shall see presently.

To support our contention that the two series are essentially unaffected by climatic and artificial change and are therefore random, we have made simple run and pair tests. The entire record 1888–1947 gave 29 runs above and below the median which is well enclosed by the 0.90 acceptance region (24, 37). The same period showed 31 pairs above and below the median which is below the 0.05 limit 35. The shorter period 1925–1947 had 10 runs which is on the middle of 0.90 acceptance region (6, 15). For the pair test this period gave 13 pairs which is below the 0.05 limit 15. Though we do not maintain these are powerful tests for randomness, they do confirm the opinion stated above.

We view these results as justification for proceeding with a sequential test although we took one further precaution against trend in the record. This was to use the parameters for the period ending in 1947 with greater than 20 years record and having the least mean. This was the 1925–47 period which has a mean of 4.78 hail-days as compared to a mean of 5.31 for the full record 1888–1947. It was also chosen without knowledge of the outcome, and before any tests of hail suppression were made with a view to forestalling arguments that the mean hail-days had decreased naturally up to the time the experiments began. Thus we have chosen a mean on the low side with respect to the long time experience and if suppression operations gave some indication of even lowering this, it would seem worthwhile to at least continue the experiments with greater emphasis on developing the physical theory and the engineering aspects of the operations.

N. b. distributions were fitted to the periods according to methods described in [9]. In both instances the method of moments was adequate. Results are shown in Table 1:

Table 1  
*Distribution Statistics*

Period	$\bar{x}$	$s^2$	$p$	$k$
1925–1947	4.78	6.632	0.3875	12.33
1888–1947	5.31	7.630	0.4381	12.11

Here  $\bar{x}$  is the arithmetic mean,  $s^2$  the variance, and  $p$  and  $k$  the parameters of the negative binomial distribution. For the longer record SUKHATME's  $\chi^2$  test showed the variance definitely to exceed the mean so that the n.b. gives the better fit. For the shorter period the results are indifferent and the Poisson distribution gives as good a fit as the n.b. Since our test is based on the parameters of the shorter period, we use this lack of preference for n.b. against Poisson distribution as a basis for developing tests on both distributions.

## 5. The Sequential Test

The sequential test as we have seen is a type of test of hypothesis suited to deciding whether to accept or reject the hypothesis that a parameter estimated from a sample is different from some preassigned value of that parameter. Suppose  $C$  is the value of a parameter for some undisturbed hail regime and  $D$  is a value of that parameter which would be considered a successful reduction from  $C$  if attained by hail-suppression operations. A sequential test might then be made during hail-suppression operations to decide whether or not the parameter had been reduced to less than  $D$ . Such a test would be made in annual stages on hail frequency as we propose to do later.

Inasmuch as many meteorologists will not have encountered sequential methods before, we shall present the developments in some detail even though much of this is already in the literature. After we had completed the analysis presented here, we found that G. B. OAKLAND [10] had performed a similar analysis in a quite different field. With some modification of the hypothesis this served as an excellent check of our own work. We give the analysis for both the Poisson and the n.b. distributions realizing that the n.b. may have much wider although somewhat more difficult application.

The basic tool for the development of sequential as well as the classical tests is the likelihood ratio ([11], pp. 249 and 365) defined by

$$\lambda_m = \frac{f_1(x_1) f_1(x_2) \cdots f_1(x_m)}{f_0(x_1) f_0(x_2) \cdots f_0(x_m)}, \quad (1)$$

where  $f_0(x)$  is the probability density function when  $H_0$  is true, and  $f_1(x)$  the probability density when  $H_0$  is false.  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  is a random sample. (1) is called the likelihood ratio because the products in the numerator and denominator are likelihoods as defined by R. A. FISHER. All the common tests of hypothesis developed by FISHER can be derived by means of equation (1).

For the classical or fixed sample-size test we choose an interval  $(0 < \lambda < A)$  called the critical region so that the probability of  $\lambda$  being on  $(0, A)$  is  $\alpha$ . This is the probability of a type 1 error or the error of rejecting  $H_0$  when it is true. The likelihood ratio ensures choice of the best critical region which is one for which the probability of rejecting  $H_0$  when it is false is a maximum or the type 2 error  $\beta$ , the probability of accepting  $H_0$  when it is false is a minimum. The probability of rejecting  $H_0$  when it is false is called the power of the test and is  $1 - \beta$ . The test is made by drawing a sample  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  and computing  $\lambda$  by (1). If  $\lambda$  is on  $(0, A)$ ,  $H_0$  is rejected; if  $\lambda > A$ ,  $H_0$  is accepted.

For the sequential test we have seen that  $\alpha$  and  $\beta$  are fixed, but the sample size is allowed to vary. Thus  $\lambda_m$  is computed for each term of the sequence  $n = 1, 2, \dots, m$ . An interval  $(B < \lambda_m < A)$  is established on the basis of prescribed values of  $\alpha$  and  $\beta$ , such that for each  $m$  beginning with  $m = 1$  if  $\lambda_m$  is

in this interval  $\lambda_{m+1}$  is computed, and if  $\lambda_m$  is *not* on the interval the sequence is terminated. If further  $\lambda_m \leq B$ ,  $H_0$  is accepted; if  $\lambda_m \geq A$ ,  $H_0$  is rejected. Thus at each term of the sequence 1, 2, ...,  $m$  a test is made which gives either the decision to accept or reject  $H_0$  or to take another sample. Since we require a two decision test the process must terminate. WALD [8] has demonstrated that whatever the form of  $f(x)$ , the sequence must terminate with the acceptance or rejection of  $H_0$ . He has also given much other ingenious analysis which will enable us to measure the effectiveness of the test as well as the expected value of  $m$  for termination of the sequence or reaching a decision.

The sequential test is in some respects simpler to develop than the classical test. For example, establishment of the limits on  $\lambda_m$  is done very easily. For convenience the logarithm of the likelihood ratio is usually employed because it reduces products to sums which are easier to handle. Taking logarithms of (1) we have

$$\sum_{i=1}^m z_i = \log \lambda_m, \quad (2)$$

where  $z_i$  represents the individual ratio for each sample. The inequality for the test correspondingly becomes

$$\log B < \sum_{i=1}^m z_i < \log A. \quad (3)$$

The essential simplicity of the test arises from the fact that as WALD [8] has shown  $A$  and  $B$  to be closely approximated by the relations

$$A \cong \frac{1-\beta}{\alpha} \quad \text{and} \quad B \cong \frac{\beta}{1-\alpha}. \quad (4)$$

For all practical purposes these may be accepted as equalities as they will be here. These four equations as we shall see are the four basic relationships for devising sequential tests.

As we have agreed previously, our measure of the effectiveness of hail suppression will be based on whether the hypothesis that the mean total hail frequency at Lugano, Locarno-Muralto, and Bellinzona has been decreased can be accepted and with what risks. When the decision to accept or reject such an hypothesis is based on the methods we have been discussing, it is necessary to employ the device of setting up some plausible alternative hypothesis which, if accepted, is equivalent to rejecting the hypothesis that there was no decrease. The problem is relatively simple if the distribution has a single parameter like the Poisson, for then one needs only to assume some value for the mean hail frequency based on past experience or on the desired magnitude of the effect. If, however, the distribution has two parameters like the negative binomial, it is necessary to consider a composite hypothesis or

reduce the latter to a simple hypothesis by assuming a constant value for one of the parameters. We shall attempt the latter.

We have observed in connection with the evaluation of precipitation augmentation that the correlation in storm precipitation amounts between two stations  $A$  and  $B$  in the same climatic regime is very much lower in convectional storms than in cyclonic storms. This is due to the fact that the cyclonic precipitation pattern being extensive is much more likely to cover both stations than the small convection pattern. In fact, the stations do not have to be very far apart before a single convection cell cannot possibly cover both stations. When we consider the totals of storms for the convectional season or a fixed period in it, we found the correlation higher. Further examination showed that this increased correlation was due mainly to the correlation in frequency of occurrence. This is not caused by the same cell covering both stations, but by the fact that increased frequency tends to be associated with weather situations that affect the whole climatic region. Consequently weather situations with a large number of convection cells tend to raise the frequency at individual stations. The higher the areal frequency in such situations the greater will be the chance that stations  $A$  and  $B$  will be covered by cells and hence the higher the correlation between  $A$  and  $B$ . It follows that we would expect that the correlation between  $A$  and  $B$  would be proportional to the mean frequency at  $A$  and  $B$ . Since hail is a typical form of precipitation from a convective cell, hail frequency could be expected to behave like precipitation in general. We were able to test the proportionality of frequency and correlation for Denver (Colorado) and Amarillo (Texas) where the correlation between annual hail frequencies was 0.45. When only those pairs of frequency were selected whose Amarillo frequency was below a certain value, the total frequency was reduced to 0.62 of its former value and the correlation to 0.67 of its completed series value. Thus a reduction in the hail frequency caused a proportionate reduction in the correlation coefficient so the ratio  $\mu/r$  remained nearly constant.

Consider now two stations  $A$  and  $B$  in the same climatic regime whose hail-day series are each distributed in Poisson distributions with mean  $\mu$ . Since the variance at  $A$  and  $B$  will also be  $\mu$ , if there is a correlation  $r$  between  $A$  and  $B$ , the variance of the total frequency will be

$$\sigma^2 = 2\mu + 2r\mu.$$

If we fit a n.b. distribution to the total frequency of  $A$  and  $B$ , we find by substitution in equation (9) of [9] that

$$\bar{k} = \frac{2\mu}{r}.$$

In general for  $l$  stations

$$\sigma^2 = l\mu + l(l-1)\bar{r}\mu,$$



where  $\bar{r}$  is the mean correlation for the  $l$  stations. This yields by a similar substitution

$$k = \frac{l \mu}{(l-1) \bar{r}}.$$

Thus if as hypothesized above  $r$  is proportional to  $\mu$ , reduction in frequency by hail suppression should leave the ratio  $\mu/r$  constant and hence  $k$  will not change. This will be our hypothesis in using the n.b. in the sequential test.

From the relationship

$$\mu = k \phi \quad (5)$$

for the n.b., it follows that if  $k$  is constant any change in  $\mu$  results from a change in  $\phi$ . Hence the composite hypothesis is reduced to a simple hypothesis on  $\phi$  by assuming  $k$  constant. This is the same assumption OAKLAND [10] made on the basis of quite different observational material. It makes the test on  $\phi$  equivalent to a test on  $\mu$  which is what we desire.

Referring back to the table of *Distribution Statistics* we see that the period 1925–1947 chosen for its low mean has nearly the same value of  $k$  as for the full record. This agreement has little significance because the standard error of  $k$  is large, although there is some satisfaction in knowing that  $k$  for the shorter record is very close to a better estimate obtained from a longer record. The test on the Poisson distribution will also be made, of course, using the mean directly. We proceed now to the development of the tests.

We shall speak generally at first in terms of a parameter  $\mu$  which could be either  $\phi$  of the n.b. or the mean of the Poisson distribution. Suppose that if  $\mu$  is near  $\mu'$  we are only indifferent whether we accept or reject a hail-suppression operation as effective. If however  $\mu < \mu'$ , we would tend to want to accept the hypothesis  $H_0$  either that seeding was effective or that it would be worthwhile to conduct more stringent tests based on more extensive data. If on the other hand  $\mu > \mu'$  we would tend to accept the hypothesis  $H_1$  that the operation produced no worthwhile effect and we would want to discontinue operations or change to another system which had greater possibilities of being effective. More specifically our preference for accepting  $H_0$ , or hail suppression, would increase the farther  $\mu$  was below  $\mu'$  and our preference for rejecting hail suppression the farther  $\mu$  was above  $\mu'$ . Hence it will be possible in general to find two values  $\mu_0$  and  $\mu_1$  ( $\mu_0 < \mu'$  and  $\mu_1 > \mu'$ ) such that rejection of seeding effect is considered an important error when  $\mu \leq \mu_0$  and acceptance of seeding an important error when  $\mu \geq \mu_1$ . We may say that the zone of preference for accepting seeding as effective is  $\mu \leq \mu_0$ , and the zone of preference for rejecting seeding as being effective is  $\mu \geq \mu_1$ . The zone of indifference would be all values of  $\mu$  between  $\mu_0$  and  $\mu_1$ .

Clearly the choice of  $\mu_0$  and  $\mu_1$  is not a statistical problem; neither is the setting of the risks of making the errors referred to above. If the cost of seeding



is cheap compared to the potential benefit, or if we are making an exploratory experiment on a highly desired effect, we should want a high probability of finding the effect when it is real and would more readily tolerate a larger probability of accepting the effect when it is not real. Thus in general for an exploratory operation, the probability of rejecting seeding should not exceed some small value  $\alpha$  when  $\mu \leq \mu_0$ , and the probability of accepting seeding when  $\mu \leq \mu_1$  should not exceed a value  $\beta$  with  $\beta \geq \alpha$ .

Without any knowledge of possible results we chose  $\mu_1$  equal to the mean or  $\bar{p}$  for the period 1925-1947,  $\bar{p}_0 = 0.5 \bar{p}_1$ ,  $\mu_0 = 0.5 \mu_1$ ,  $\alpha = 0.01$ , and  $\beta = 0.20$ . Equations (2), (3), and (4) then lead directly to the desired sequential tests.

## 6. The Negative Binomial Test

In reference [9] the n.b. distribution was expressed in the form

$$f(x) = \frac{\Gamma(k+x)}{\Gamma(x+1) \Gamma(k)} \cdot \frac{p^x}{(1+p)^{k+x}}. \quad (6)$$

When  $\bar{p}_0$  and  $\bar{p}_1$  are substituted in (6) to obtain  $f_0$  and  $f_1$  for the likelihood ratio, we note that the factor involving the gamma functions cancels in the ratio since it does not contain  $p$ . Substituting in the  $i$ -th ratio factor of (1) and taking logarithms yields

$$z_i = x_i \log \left( \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} \right) + (k + x_i) \log \left( \frac{1 + \bar{p}_0}{1 + \bar{p}_1} \right).$$

For simplification let

$$b = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} \quad (7)$$

and

$$c = \frac{1 + \bar{p}_1}{1 + \bar{p}_0}. \quad (8)$$

Substitution of these values gives

$$z_i = x_i \log b + (k + x_i) \log \frac{1}{c}. \quad (9)$$

Summing (9) over the sample  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  yields

$$\sum z_i = \left( \sum x_i \right) \log \frac{1}{c} + k m \log \frac{1}{c}. \quad (10)$$

By (3) we set (10) successively equal to  $\log A$  and then  $\log B$  which gives the acceptance and rejection lines for the sequential test in the form of the pair of equations

$$\sum x_i = S m + h_0, \quad \sum x_i = S m + h_1. \quad (11)$$

The values of the slope  $S$  and the intercepts  $h_0$  and  $h_1$  are easily found from the substitution of the two values of equation (3) into equation (10) to be

$$S = k \frac{\log c}{\log(b/c)}, \quad (12)$$

$$h_0 = \frac{\log B}{\log(b/c)}, \quad (13)$$

$$h_1 = \frac{\log A}{\log(b/c)}. \quad (14)$$

Substituting  $\alpha = 0.01$  and  $\beta = 0.20$  in (4) and taking logarithms gives  $\log A = 4.382$  and  $\log B = -1.599$ . These, together with our assumed values  $p_1 = 0.3875$ ,  $k = 12.33$ ,  $b = 2$ , and  $c = 1.1622$ , give the slope and intercepts for the critical lines from equations (12), (13), and (14) and hence the equations (11) in the form

$$\sum_{i=1}^m x_i = 3.4195 m - 2.9475, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 3.4195 m + 8.0774. \quad (15)$$

These are shown in Figure 1 as the two parallel lines.

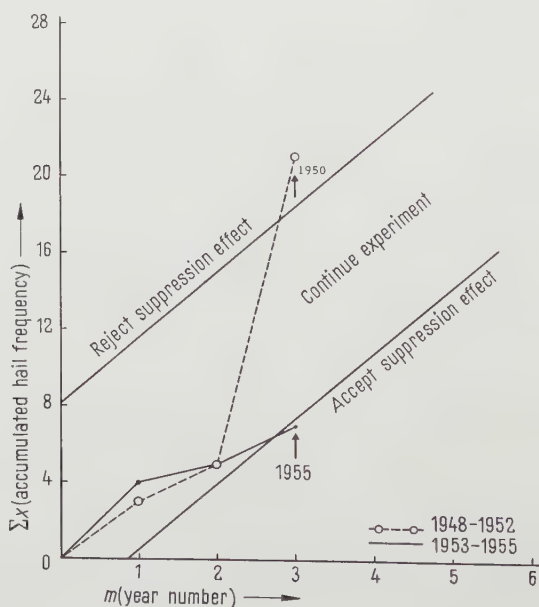


Figure 1  
Sequential tests, negative binomial distribution.  
 $\alpha = 0.01$ ;  $\beta = 0.20$ .

To make the test, the accumulation of hail-days by years  $\sum^m x_i$  is plotted against the year number  $m$ . As soon as the accumulation falls outside of the band formed by equations (15) the  $t$ -test is terminated. If the accumulation is above the band, the evidence from the test is that we should reject the hypothesis that there was a suppression effect. If the accumulation is below the band, the evidence from the test is that suppression had some effect. If the accumulation remains within the band, the trials are continued another year.

As mentioned above, there have been two experiments on the Magadino: The experiment with rockets which was begun in 1948 and terminated in 1952, and the experiment using ground based AgI generators begun in 1953 and still continuing. Since the sampling by our network of three stations was especially poor for the rocket series, we shall employ this period only in a test of heterogeneity. This means that since the stations did not sample a rocket effect, their records were essentially undisturbed by the rocket experiment and hence the record should be homogeneous through the rocket test period. This is verified by the dotted line of Figure 1 which gives the accumulation of annual total hail-days through 1948, 1949, and 1950. In 1950, the dotted line exceeds the upper critical line indicating that we should reject the hypothesis that the period beginning in 1948 was different from the previous record, and therefore accept the hypothesis of homogeneity for the entire record including the rocket-trial period. If our stations had been properly sampling the effects of the rocket trials and the sequential tests were being conducted during the rocket period, it might have been used to make a decision about the trials. As it was, this decision had to be made on the basis of other evidence [12].

Since data from our three stations were available through 1955, we may, in a similar fashion, test whether the period beginning with 1951 is also homogeneous with respect to the historical record. The test is shown by the solid line giving the accumulated annual total hail-days for the years 1953, 1954, and 1955. In 1955, the accumulation falls below the lower critical line indicating that we should reject the hypothesis that the period beginning with 1953 is a sample from the population which produced the record before that date. Since the test was arranged to evaluate decreases in hail frequency, the decision given by the test is to accept the hypothesis that the hail frequency was lower beginning in 1953.

As we have seen above, the test has been arranged to readily accept the hypothesis that there was a decrease in hail frequency, but at the same time, making the acceptance of the hypothesis that there was no decrease 20 times more difficult to accept. Thus, even though there was considerable difficulty in accepting the hypothesis of no increase or homogeneity for the first period, this hypothesis was accepted at average sample size 3 which is near the value 4 predicted by Figure 4.

The test period beginning in 1953 as we saw includes the AgI ground generator trials. Due to the nature of ground generator operations, the sampling of the target by our three-station network is somewhat better but was not considered adequate according to correspondence with Prof. SÄNGER. However, there seems to be little doubt that the three-station network does sample the suppression effect of the AgI generators at least part of the time. If this is true, the results given by the test are quite interesting. They tell us to accept the hypothesis that the total hail frequency was reduced somewhat during AgI ground-generator operations. This, of course, can be considered only as exploratory information, for the probability of coming to this decision, when actually the hail frequency had not been decreased, is high, i.e., 0.20. If we reduce this risk of error to 0.10, a more common value used in precipitation augmentation evaluations, no decision can be reached with sample size 3 and at least another year is required. This lowering of the risk does not, however, change the conclusion reached concerning the first experimental period.

Clearly the deficiency in the sampling of the network and the high risk of error we have chosen for this *exploratory* test makes it impossible to say anything conclusive about the experiment. It does seem, however, to show that (1) the method of evaluation has some merit, especially if experiments were designed for its application, and (2) that the specific application to the AgI generator trials gives at least a suspicion of effectiveness which is worthwhile following up by further experimentation.

## 7. The Poisson Test

As mentioned above, we give this test for completeness. Because it provides a simple hypothesis directly, it is to be preferred in any instance where the Poisson distribution gives a good fit to the available data. This distribution has the density function

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad (16)$$

where  $\mu$  is the mean value. Taking  $\mu_0$  and  $\mu_1$  for the hypothesized parameter values and proceeding in the same manner as with the n.b. we find the logarithm of the  $i$ -th factor in the likelihood ratio to be

$$z_i = x_i \log \frac{\mu_1}{\mu_0} - (\mu_1 - \mu_0). \quad (17)$$

Substituting the analogy of equation (7), i.e.,  $b = \mu_1/\mu_0$ , and summing over  $i = 1, 2, \dots, m$  gives

$$\sum_{i=1}^m z_i = (\log b) \sum_{i=1}^m x_i - \frac{b-1}{b} \mu_1 m. \quad (18)$$

As with the n.b. the setting of (18) in turn equal to  $\log A$  and  $\log B$  gives the acceptance and rejection lines in the form of a pair of equations like (11). From these the slope  $S$  and the intercepts  $h_0$  and  $h_1$  are readily found to be

$$S = (b - 1) \frac{\mu_1}{b \log b}, \quad (19)$$

$$h_0 = \frac{\log B}{\log b}, \quad (20)$$

$$h_1 = \frac{\log A}{\log b}. \quad (21)$$

These values substituted into (11) give the critical lines.

Although the  $\chi^2$  for the excess of the variance over the mean was significant for the 1888–1947 series, it was not for the 1925–1947 series. Tests of goodness of fit applied to each series fitted by the n.b. and Poisson distributions indicated ‘good’ fits for both distributions, i.e., neither of the series departed significantly in their frequencies from either distribution. This seems to be due to the fact that as  $k$  becomes large the n.b. approaches the Poisson and since we are dealing with a fairly large  $k$  the Poisson distribution fits well. On this basis it appeared reasonable to illustrate the application of the Poisson test on the same series of total hail-days.

The procedure is very similar to that for the n.b. Since  $\alpha$  and  $\beta$  are the same,  $\log A$  and  $\log B$  remain unchanged,  $\mu_1$  was chosen to be 4.78 hail-days, the value for the 1925–1947 period, and  $b$  is again 2, i.e.,  $\mu_0$  is one half of  $\mu_1$ . Substituting these values in equations (19), (20), and (21) we obtain the slope and intercepts which are in turn substituted in (15) to give the critical lines

$$\sum_{i=1}^m x_i = 3.4483 m - 2.3070, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 3.4483 m + 6.3223. \quad (22)$$

The critical lines and test results are shown in Figure 2. As was to be expected, the results are quite similar to those for the n.b., hence there is little further to add in respect to the interpretation of the experimental results. One difference may be noted, however, this is that the critical lines are somewhat closer together for the Poisson test indicating greater sensitivity. In contrast to the n.b. test, this test, performed with 0.10 risk of accepting the decrease hypothesis when it is false, gave decisions identical with those obtained with the 0.20 risk test for both periods. The Poisson distribution also has the advantage of having no parameter other than the test parameter and therefore is to be preferred where applicable. We shall have a better insight into the sensitivity of sequential tests after developing the operating characteristic and average sample number curves in the next two sections.



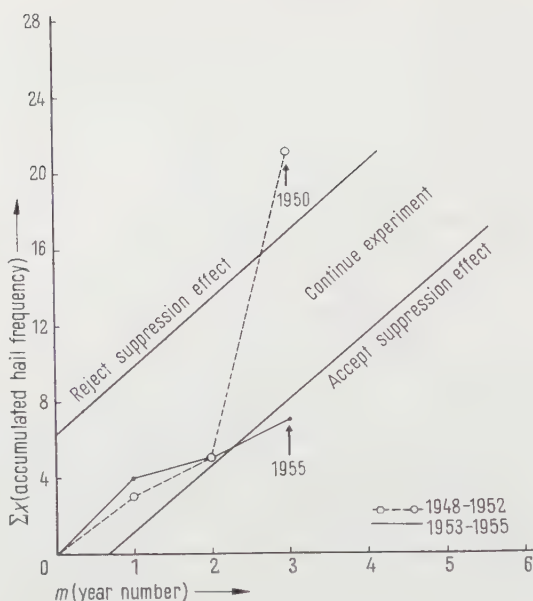


Figure 2

Sequential tests, Poisson distribution.  
 $\alpha = 0.01$ ;  $\beta = 0.20$ .

## 8. Operating Characteristics

We are clearly more interested in accepting the hypothesis  $H_0$  that hail suppression is effective than in accepting the hypothesis  $H_1$  that it is not effective. This does not mean that we would like to accept  $H_0$  entirely falsely, and so we have guarded against this by choosing probabilities of acceptance and rejection at  $\mu_0$  and  $\mu_1$  according to our preassigned estimate of their importance. This defines the capabilities of the sequential test at these two points. To know the capabilities of the test completely, we need to give its operating properties at other values of  $\mu$ . In view of our first interest in accepting  $H_0$ , an appropriate measure of the operating properties would be the probability of accepting  $H_0$  when the true but unknown hail frequency parameter is  $\mu$ . Hence we are interested in a function  $L(\mu)$  which is the probability of accepting  $H_0$  when  $\mu$  is the true value or power. This is appropriately called the operating characteristic (OC), c.f. WALD [8], p. 24.

From our discussion in the latter part of section 5 it is clear that when  $\mu = \mu_1$ ,  $L(\mu_1) = \beta$ ; when  $\mu = \mu_0$ ,  $L(\mu_0) = 1 - \alpha$ . Since we have chosen  $\alpha = 0.01$ ,  $L(\mu_0) = 0.99$  and as  $\mu$  becomes small,  $L(\mu)$  approaches one, or the ability to reject  $H_1$  becomes very high. This is what we need in an exploratory experiment where we wish to give a phenomenon a reasonable chance to show itself.

Apart from  $L(0) = 1$  and  $L(\infty) = 0$  which are not of great interest here, we have only two points on the OC curve which is not sufficient for our purposes. Other points on the OC curve must be obtained by more complex methods. WALD [8], pp. 49-50, gives the required analysis which we shall apply to the Poisson and n.b. distributions.

For a discrete variable such as we are dealing with here, WALD, by an ingenious analysis, found the basic equations

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left[ \frac{f(x, \mu_1)}{f(x, \mu_0)} \right]^h f(x, \mu) = 1, \quad (23)$$

and

$$L(\mu) \cong \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} \quad (24)$$

such that  $h$  is a function of  $\mu$  and  $h \neq 0$ . Note that equation (23) expresses the fact that the expected value of the factor immediately after the summation is unity. These two equations determine  $L(\mu)$ .

We recall that the density function for the Poisson distribution is given by equation (16). Substituting this with the parameter values  $\mu_0$  and  $\mu_1$  into (23), after some simplification we have

$$[\exp(h(\mu_0 - \mu_1) - \mu)] \sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_1^h \mu}{\mu_0^h x!} \right)^x = 1. \quad (25)$$

Since the summation term is the power series expansion of  $\exp(\mu_1^h \mu / \mu_0^h)$ , we find making this substitution in (25) that

$$\exp[h(\mu_0 - \mu_1) \mu] \exp \frac{\mu_1^h \mu}{\mu_0^h} = 1. \quad (26)$$

Taking logarithms and solving for  $\mu$  gives finally

$$\mu = \frac{h(\mu_1 - \mu_0)}{(\mu_1/\mu_0)^h - 1}. \quad (27)$$

In terms of  $b$  this becomes

$$\mu = \frac{h \frac{b-1}{b} \mu_1}{b^h - 1}. \quad (28)$$

The OC function may now be drawn from a series of points obtained from equations (27) or (28) and (24). The easiest way to do this is to choose a convenient set of values of  $h$  and make a table (see Table 2). The last three rows have been added to facilitate later computations. The calculation is straight forward except for  $h = 0$  where equation (27) is indeterminate. For this value a simple application of the l'Hospital rule gives the limit. Thus differentiating

numerator and denominator of (27) with respect to  $h$  gives

$$\mu = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h (\mu_1 - \mu_0)}{(\mu_1/\mu_0)^h - 1} = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\log (\mu_1/\mu_0)}. \quad (29)$$

The values from Table 2 were used to draw the dashed curve in Figure 3.

Table 2  
*Poisson OC Function*

$h$	$\mu$	$L(\mu)$
— 2	6.37	0.041
— 1	4.78	0.200
— 1/2	4.08	0.420
0	3.45	0.733
1/2	2.89	0.935
1	2.39	0.990
2	1.59	1.000
2 1/2	1.28	1.000
3	1.02	1.000

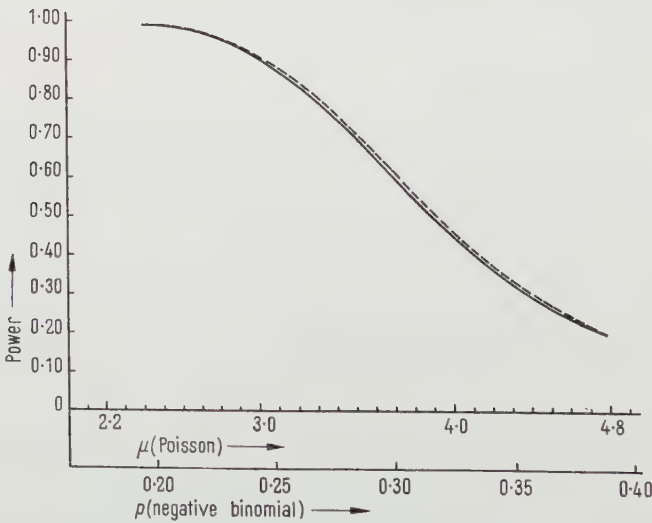


Figure 3

Power curves, Poisson and negative binomial distributions.

----- Poisson:  $\mu_1 = 4.78$ ;  $\mu_0 = 2.39$ ;  $\alpha = 0.01$ ;  $\beta = 0.20$ .

———— Negative binomial:  $p_1 = 0.3875$ ;  $p_0 = 0.1938$ ;  $k = 12.33$ ;  $\alpha = 0.01$ ;  $\beta = 0.20$ .

The OC for the n.b. test is found in a similar manner. Substituting the density-function equation (6) with the parameter values  $p_1$  and  $p_0$  into (23)

after some simplification we find

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{hx} \left( \frac{1+p_0}{1+p_1} \right)^{hk} \left( \frac{1+p_0}{1+p_1} \right)^x \frac{\Gamma(k+x)}{\Gamma(x+1) \Gamma'(k)} \cdot \frac{p^x}{(1+p)^{k+x}} = 1. \quad (30)$$

If this is multiplied by  $[p_0(1+p_0)]^{hk}$ , the result is the negative binomial form

$$[p_0(1+p_0)]^{hk} \{ (1+p) [p_0(1+p_1)]^h - p [p_1(1+p_0)]^h \}^{-k}. \quad (31)$$

Raising both sides to the  $k$ -th power and solving for  $p$  gives

$$p = \frac{\left( \frac{1+p_0}{1+p_1} \right)^h - 1}{1 - \left( \frac{p_1(1+p_0)}{p_0(1+p_1)} \right)^h}. \quad (32)$$

Substitution of  $b$  and  $c$  for the proper terms gives the simplified form

$$p = \frac{(1/c)^h - 1}{1 - (b/c)^h}. \quad (33)$$

Proceeding in the same manner as with the Poisson for convenient values of  $h$ , we obtain a similar table from equations (24) and (33). We can save computing  $L(p)$  by choosing the same values of  $h$  as for Table 2; whence  $L(p) = L(\mu)$  for a given  $h$  since  $A$  and  $B$  are the same as before.

Table 3  
Negative Binomial OC Function

$h$	$p$	$L(p)$
-2	0.530	0.041
-1	0.387	0.200
-1/2	0.329	0.420
0	0.277	0.733
1/2	0.232	0.935
1	0.194	0.990
2	0.132	1.000
2 1/2	0.109	1.000
3	0.089	1.000

Again there is a difficulty at  $h = 0$  which can be resolved as before by taking the limit of equation (33). This gives

$$p = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1/c)^h - 1}{1 - (b/c)^h} = \frac{\log c}{\log(b/c)}. \quad (34)$$

Values of Table 3 have been used to draw the OC for the n.b. shown as the solid line in Figure 3.

The OC curves for the Poisson and the n.b. are remarkably similar and close together so there is little reason to differentiate between them. The curves show the rather obvious fact that it is much easier to detect big effects of hail suppression than it is small effects. At 2.3 total hail-days for the three stations the ability to detect the effect is nearly perfect whereas near the natural mean for the 1925-47 period  $\mu$ , the ability is low. Thus if hail suppression operations could reduce the total number of hail-days to two at the three stations in the Magadino, there would seem to be little chance of not finding the effect. Of more direct interest in evaluation by sequential testing is the length of time an operation would have to run to reach a decision. This comes under a part of the theory concerning average sample number which we will now consider briefly.

### 9. Average Sample Number

If a sequential test were applied to a number of sample sequences from the same population, the tests would terminate at various sample numbers  $m$ . These  $m$ 's would comprise a random variable and would consequently form a frequency distribution and have a mean value. This mean or average sample number (ASN), as it is commonly called, would seem to be very helpful since it would tell us on the average how long our operations must continue in order to come to a decision.

WALD [8], p. 53, has developed the theory necessary to determine the ASN. The ASN as we might have expected depends not only on  $\mu_0$  and  $\mu_1$ , considering these again as general parameters, but on the true value  $\mu$ . The formula given by WALD for the expected sample size or ASN is approximate but gives values very close to the true ASN. It is

$$E(m | \mu) \simeq \frac{L(\mu) \log B + [1 - L(\mu)] \log A}{E(z | \mu)} . \quad (35)$$

Here  $E(m | \mu)$  is read the expected value of  $m$  for the parameter value  $\mu$ . All other quantities have been met in previous discussions except the expected value of  $z$ . Since we wish to draw the ASN as a function for all values of  $\mu$ , there is also a difficulty at  $h = 0$  as with the OC function; equation (35) becomes indeterminate at its maximum value which corresponds to  $h = 0$ . Here let us assume that  $\mu$  has the value  $\mu'$ . WALD has surmounted this difficulty for us by providing an approximate expression for the ASN at its maximum. This is

$$E(m | \mu') \cong \frac{-\log B \log A}{E(z^2 | \mu')} . \quad (36)$$

Expressions (35) and (36) require that  $E(z | \mu)$  and  $E(z^2 | \mu')$  be evaluated. This we now proceed to do for the Poisson test.



Taking the expected value of (17) and substituting the expression for  $b$  we have

$$E(z) = E(x) \log b - \left( \frac{b-1}{b} \right) \mu_1. \quad (37)$$

Since  $E(x) = \mu$ , substitution gives

$$E(z | \mu) = \mu \log b - \left( \frac{b-1}{b} \right) \mu_1. \quad (38)$$

Hence by substitution in (35) we have finally the ASN

$$E(m | \mu) \cong -\frac{L(\mu) \log B + [1 - L(\mu)] \log A}{\mu \log b - \left( \frac{b-1}{b} \right) \mu_1}. \quad (39)$$

To evaluate  $E(z^2 | \mu')$  we begin by squaring and taking the expected value of equation (17) and substituting  $b$  which yields

$$E(z^2) = E(x^2) \log^2 b - 2 E(x) \mu_1 \left( \frac{b-1}{b} \right) \log b + \left( \frac{b-1}{b} \right)^2 \mu_1^2. \quad (40)$$

For  $\mu = \mu'$ ,  $E(x) = \mu'$  and  $E(x^2) = u' + \mu'^2$  by the ordinary power moment relationships. Hence

$$E(z^2 | \mu') \cong \mu' (1 + \mu') \log^2 b - 2 \mu' \mu_1 \left( \frac{b-1}{b} \right) \log b + \left( \frac{b-1}{b} \right)^2 \mu_1^2. \quad (41)$$

Since this expression is rather long and is only computed for one value, it is easier to find the numerical value of (41) and substitute into (36) rather than write one expression of the maximum value of the ASN.

The values of  $L(\mu)$  of Table 2 may now be employed in equation (39) with  $\mu' = 3.45$  in (41) and (36) to obtain Table 4.

Table 4  
*Poisson ASN Function*

$h$	$L(\mu)$	$\mu$	$E(m   \mu)$
-2	0.041	6.37	2.04
-1	0.200	4.78	3.45
-1/2	0.420	4.08	4.27
0	0.733	3.45	4.23
1/2	0.935	2.89	3.10
1	0.990	2.39	2.10
2	1.000	1.59	1.24
2 1/2	1.000	1.28	1.07
3	1.000	1.02	0.95
	1.000	0	0.67

Note that the approximate relationship does not give a true maximum in this instance. These values were plotted against the  $\mu$ -scale in Figure 4 and used for drawing the lower curve.

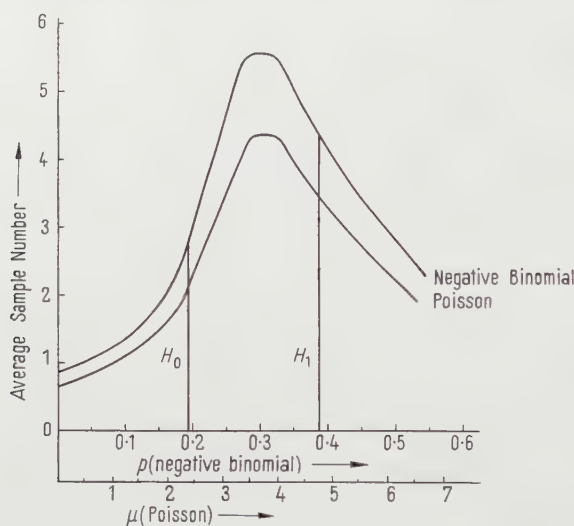


Figure 4  
Average sample number curves.

For the n.b. distribution the ASN function is developed in a similar fashion to that for the Poisson. From equation (9) we see after taking expected values that

$$E(z) = E(x) \log b + [k + E(x)] \log \frac{1}{c}. \quad (42)$$

Since  $E(x) = k p$  we find after substitution

$$E(z | p) = k p \log b + k (1 + p) \log \frac{1}{c}. \quad (43)$$

Hence substituting in (35) we find the ASN function

$$E(m | p) \cong \frac{L(p) \log B + [1 - L(p)] \log A}{k [p \log b - (1 + p) \log c]}. \quad (44)$$

Proceeding to the ASN at  $h = 0$  we obtain squaring (9) and taking the expected value

$$\left. \begin{aligned} E(z^2) &= \log^2 b E(x^2) + 2 [k E(x) + E(x^2)] \log b \log \frac{1}{c} \\ &\quad + [k^2 + 2 k E(x) + E(x^2)] \log^2 \frac{1}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

For the n. b. [9] with parameter  $p'$ ,  $E(x) = k p'$  and the variance  $\sigma^2 = k p'(1 - p')$ . From the moment formulae it is clear that  $E(x^2) = \sigma^2 + E^2(x)$ . Using these relationships we readily find

$$E(x^2) = k p' (1 + p' + k p'). \quad (46)$$

Substituting  $E(x)$  and  $E(x^2)$  in equation (45) would give  $E(z^2 | p')$ . Since this would make an awkward expression and is only needed for one value of the ASN, it is simpler to compute  $E(x)$  and  $E(x^2)$  separately for  $p = p'$ , substitute in equation (45) to find  $E(z^2 | p')$ , and finally substitute this value in (36) to find the maximum value of the ASN.

Using the required values of Table 2 in equation (44) together with  $p' = 0.2773$  in (46), (45), and (36) in succession we prepared Table 5.

Table 5  
*Negative Binomial ASN Function*

$h$	$(p)$	$p$	$E(m   p)$
-2	0.041	0.530	2.45
-1	0.200	0.387	4.31
-1/2	0.420	0.329	5.39
0	0.733	0.277	5.44
1/2	0.935	0.232	4.04
1	0.990	0.194	2.76
2	1.000	0.132	1.65
2 1/2	1.000	0.109	1.42
3	1.000	0.089	1.27
	1.000	0	0.86

Using the values from Table 5 on the  $p$ -scale of Figure 4, we drew the ASN curve for the n. b. test shown as the upper curve.

The ASN curves are quite different, the Poisson requiring somewhat less sample size on the average to come to a decision. Both distributions show rather favorable ASN's, however, and since ASN is number of years on the average for our tests to reach a decision, with appreciable suppression of hail frequency by seeding this would be detected in about three years. Near the center of the interval of indifference as to which hypothesis is accepted the ASN's have maxima. If we consider  $\mu_0$  and  $\mu_1$  or  $p_0$  and  $p_1$  as the true values, the ASN's for these values may be read on the lines labelled  $H_0$  and  $H_1$ . Had we chosen the conventional risks  $\alpha = 0.05$  and  $\beta = 0.05$  the ASN's would have been 2.88 for either hypothesis on the Poisson and 3.64 for either hypothesis on the n. b. Note that these are higher for  $H_0$  and lower for  $H_1$  because we have made  $H_0$  harder and  $H_1$  easier to accept than the test chosen and applied previously. If a test with  $\alpha$  and  $\beta$  equal 0.05 had been selected, the decision for

the first experimental period would have been unchanged. The test for the second experimental period provided no decision at the third year indicating that at least another year of experimental data must be obtained.

## 10. Discussion of Results

As we were careful to point out previously, we consider our results first of all a development of methodology, and the application to the Magadino Plain operations only an example of the use of this methodology. The development we put forth is not in any sense meant to be a final finished product; it is simply the beginning of one line of development of evaluation methods. There are many ways to develop and adapt these to the individual experiment, some of which would certainly involve even the use of other observations and frequency distributions. If, however, there is one result to be emphasized, it would appear to be the futility of using areal controls. One way to compensate partly for the lack of a control is to take advantage of the favorable ASN of the sequential test.

On the experimental aspects we must reiterate that much is yet to be learned about the physics of hail suppression and to emphasize that our tests prove nothing conclusively about the suppression effects of AgI ground generators. A phenomenon which was suspected might exist was given a preassigned favorable chance to exhibit itself and did, in fact, show itself in the results of our tests. This would appear to be exploratory information of some value in planning future experimentation.

Further consideration we feel should be directed toward both the theoretical and experimental aspects of artificial suppression. At present the theoretical basis of hail suppression by artificial nuclei as well as qualitative experimental evidence obtained by eye and radar seems to be much weaker than that on the stimulation of rainfall at cloud level. It would appear therefore that the results presented above as well as other clues of recent years on hail suppression now more than ever need confirmation or refutation by theory and case study by radar and other means. It would appear that this project should be continued so that experimental results might be tested under more stringent probability levels on the hypothesis that suppression is effective. Concurrently, the physical model, on which such testing is based, should be strengthened wherever possible by design and additional observation.

It should be emphasized that experiment II, for which the above analysis has been made, was *not* a statistically designed experiment, and therefore our analysis had to be designed for data which had already been collected according to procedures beyond our control. In this sense our analysis had to be planned in much the same way as for commercial operations. It seems unnecessary for a statistician to have to say that data from an experiment, for

which the observational program and analysis have been designed in advance, would be much preferred to the data which were available. We understand that the operators of this experiment have also recognized this and have now designed a new experiment.

## 11. Acknowledgments

I wish to express my sincere appreciation to Professor R. SÄNGER, President of the Swiss Hail Commission for providing me with the reports of his Commission and for his interest in this work. I also wish to thank his colleague Dr. P. SCHMID for this very helpful comments on the analysis presented here. To Professor J. LUGEON, Director, and Dr. M. SCHÜEPP, Climatologist of the Swiss Meteorological Service, I am indebted for their kind cooperation in furnishing official Swiss hail records. I wish also to express my appreciation to colleagues in my own organization for aid through discussion and to my assistants Mr. MAURICE KASINOFF and Mrs. IDA VESTAL for ably performing all computations.

## REFERENCES

- [1] H. WEICKMANN, *Entstehung und Bekämpfung des Hagels*, Met. Rundschau 6, 175-180 (1953).
- [2] H. DESSENS, *Bibliographie - Expériences de modifications des nuages naturels*, (b) *Lutte contre la grêle*, Bull. Obs. Puy de Dôme 1955, No. 1, 20-23.
- [3] H. WEICKMANN, *Discussion sur la formation et la prévention de la grêle*, Bull. Obs. Puy de Dôme 1955, No. 2, 33-36.
- [4] H. DESSENS, *Compte rendu de la 4<sup>e</sup> année d'expériences de prévention de la grêle* (Association d'études des moyens de lutte contre les fléaux atmosphériques), brochure No. 3 (1954).
- [5] R. SÄNGER, H. STAUB and J. C. THAMS, *Grossversuch II zur Bekämpfung des Hagels auf der Magadinoebene*, Tätigkeitsberichte Nr. 6-8 (1953, 1954, 1955), Abteilung für Landwirtschaft des Eidgenössischen Volkswirtschaftsdepartements, Bern.
- [6] *Annalen der Schweizerischen Meteorologischen Zentralanstalt* (1900-1947).
- [7] H. C. S. THOM, *A Method of Evaluating Cloud Seeding Effects on Precipitation* (Advisory Committee on Weather Control, September 1955), Manuscript.
- [8] A. WALD, *Sequential Analysis* (John Wiley, New York 1947).
- [9] H. C. S. THOM, *The Frequency of Hail Occurrence*, Arch. Meteorol., Geophys., Bioklimatol. [B] 8, No. 2, 185-194 (1957).
- [10] G. B. OAKLAND, *An Application of Sequential Analysis to Whitefish Sampling*, Biometrics, 6, No. 1, 59-67 (1950).
- [11] A. M. MOOD, *Introduction to the Theory of Statistics* (McGraw-Hill, New York 1950).
- [12] R. SÄNGER, J. C. THAMS, and E. FÄH, *Schlussbericht über den Grossversuch Nr. 1 auf der Magadinoebene zur Bekämpfung des Hagels*, Wiss. Mitt. Nr. 6 ETH (Zürich 1955).



*Zusammenfassung*

Ein Sequenztest-Verfahren wurde für die Prüfung der Annahme entwickelt, dass Hagelverhinderungsversuche die Frequenz der Hageltage verkleinern. Das Verfahren ist auf die Angaben über den Grossversuch II zur Unterdrückung des Hagels in der Magadinoebene (Schweiz) angewandt worden. Funktionen für die Versuchskenngrossen und Stichproben-Mittelwerte sind ebenfalls entwickelt und am selben Beispiel zur Anwendung gebracht worden. Schliesslich werden die Folgerungen, die sich hinsichtlich der Versuchsverfahren und Testergebnisse abzeichnen, erörtert.

(Received: July 20, 1957.)

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

**An Asymptotic Method for Free Convection Past a Vertical Plate<sup>1)</sup>**

By JOE R. FOOTE, West Lafayette, Indiana, USA<sup>2)</sup>

In a recent note FINSTON [1]<sup>3)</sup> observed that the transformation given by E. POHLHAUSEN, used to reduce the free convection equations to ordinary differential equations, belongs to a family of similarity transformations which allow the plate temperature to be a function of  $x$  rather than a constant:

$$\theta_0(x) = 1 + \alpha x^\omega h(0). \quad (1)$$

Besides permitting this function, the generalization may also permit bringing  $f'$ , hence  $u$ , into closer agreement with experiments made on large plates, without much change in agreement with  $\theta_y$ . Conceivably  $\omega$  would be chosen differently for each plate size.

It is the purpose of this note to give two terms of the solution of the equations in addition to the obvious first terms of the asymptotic expansions. This solution will hold for arbitrary  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ , where  $\alpha$  is used for the  $B$  of [1]. Details of this theoretical method were given by FETTIS [2], who gave as a concluding remark: the first term, beyond the obvious first term, for the usual case  $\omega = 0$ .

The streamfunction and temperature ratio are respectively:

$$\psi(x, y) = A x^m f(\eta), \quad \eta = y x^n, \quad (2)$$

$$\theta(x, y) = \frac{T(x, y)}{T_\infty} = 1 + \alpha x^\omega h(\eta). \quad (3)$$

When these functions are used in the convection equations, it is found that  $A$  is inessential and that equation (1) can be satisfied if  $\alpha$  is left arbitrary and  $h(0) = 1$ .

<sup>1)</sup> Written under the sponsorship of the National Science Foundation, Contract NSF-G3050, New York University. Reproduction in whole or in part permitted for any purpose of the United States Government.

<sup>2)</sup> Purdue University, Division of Engineering Sciences.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 67.

Also

$$m = \frac{\omega + 3}{4}, \quad n = \frac{\omega - 1}{4}, \quad (4)$$

and with  $\sigma$  as the Prandtl number the equations with boundary conditions are

$$f''' + m f f'' - (m + n) f'^2 + \alpha h = 0, \quad (5)$$

$$h'' + \sigma (m f h' - \omega f' h) = 0, \quad (6)$$

$$\eta = 0: \quad f = f' = 0, \quad h = 1; \quad \eta \rightarrow \infty: \quad f' \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (7)$$

It should be noted that to reach the equations of POHLHAUSEN we would use  $\omega = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $f = 4 F$ ,  $h = 4 H$ .

The method uses a series for  $f(\eta)$ ,  $h(\eta)$ , beginning with  $\beta$  and 0 respectively, since we assume

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = \beta = \text{const},$$

and the boundary conditions give

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} h(\eta) = 0.$$

Then assume a series in powers of some parameter  $p$ :

$$f(\eta) = \beta + p f_1(\eta) + p^2 f_2(\eta) + \dots, \quad h(\eta) = 0 + p h_1(\eta) + p^2 h_2(\eta) + \dots. \quad (8)$$

Comparing equation (8) to the boundary conditions (7), it is found that it is sufficient to take as boundary conditions:

$$\left. \begin{aligned} f'_k(0) = 0, \quad f_k(\infty) = 0 \\ f'_k(\infty) = 0, \quad h_k(\infty) = 0 \end{aligned} \right\} k \geq 1, \quad \left. \begin{aligned} h_1(0) = \frac{1}{p}, \quad h_2(0) = 0, \quad j \geq 2, \\ 0 = \beta + p f_1(0) + p^2 f_2(0) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

The last equation of (9) is  $f^{(1)} = 0$ , and will be used to determine  $\beta$ . Thus, with  $\beta$  and 0 to care for the conditions at  $\infty$ , and  $f_1(\eta)$ ,  $h_1(\eta)$  to care for the remaining conditions, the terms  $f_k(\eta)$ ,  $h_k(\eta)$ ,  $k \geq 2$ , serve to bring the expansions (8) into agreement with the solution.

Substituting equation (8) into equations (5) and (6), and collecting terms by powers of  $p$ :

$$p^1: \left\{ \begin{aligned} h_1'' + m \beta \sigma h_1' &= 0, \\ f_1''' + m \beta f_1'' &= -\alpha h_1, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$p^2: \left\{ \begin{aligned} h_2'' + m \beta \sigma h_2' &= \sigma (\omega f_1' h_1 - m f_1 h_1'), \\ f_2''' + m \beta f_2'' &= (m + n) f_1'^2 - m f_1 f_1'' - \alpha h_2, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$p^3: \left\{ \begin{aligned} h_3'' + m \beta \sigma h_3' &= \sigma [(f_1' h_2 + f_2' h_1) - m (f_1 h_2' + f_2 h_1')], \\ f_3''' + m \beta f_3'' &= 2 (m + n) f_1' f_2' - m (f_1 f_2'' + f_2 f_1'') - \alpha h_3. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Clearly the equations for  $h_k(\eta)$ ,  $f_k(\eta)$  could also be written, and each pair of equations has the same homogeneous part as the first pair. Since the equations have constant coefficients, it is merely a matter of algebra to carry  $k$  to as large an integer as we please. It is found that  $f_k$  and  $h_k$  each contain the factor  $1/p^k$ ; hence, we take  $p = 1$  in equation (8). For  $\sigma \neq 2^{-r}$ ,  $r$  any non-negative integer,

the first three pairs of functions are

$$\begin{aligned} & \{h_0(\eta) = 0, \\ & f_0(\eta) = \beta, \\ & \left\{ \begin{aligned} h_1(\eta) &= e^{-m\beta\sigma\eta}, \\ f_1(\eta) &= -\frac{\alpha}{(m\beta)^3\sigma^2(1-\sigma)} (e^{-m\beta\sigma\eta} - \sigma e^{-m\beta\eta}), \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} h_2(\eta) &= \frac{\alpha e^{-m\beta\sigma\eta}}{(m\beta)^4(1-\sigma)} \left[ \frac{\omega - m\sigma}{1+\sigma} (1 - e^{-m\beta\eta}) - \frac{3n}{2\sigma^2} (1 - e^{-m\beta\sigma\eta}) \right], \\ f_2(\eta) &= \alpha^2 \left[ \frac{2\sigma^2(\omega - m\sigma) - 3n(1+\sigma)}{2(m\beta)^7\sigma^4(1-\sigma)^2(1+\sigma)} (\sigma e^{-m\beta\eta} - e^{-m\beta\sigma\eta}) \right. \\ & \quad + \frac{\sigma^3(1-\sigma)(\omega - m\sigma) - 2n\sigma(1+\sigma) + m(1-\sigma)^2(1+\sigma)}{(m\beta)^7\sigma^4(1-\sigma)^2(1+\sigma)^3} \\ & \quad \times (1 + \sigma - e^{-m\beta\sigma\eta}) e^{-m\beta\eta} \\ & \quad + \frac{n(3\sigma - 1)}{8(m\beta)^7\sigma^4(2\sigma - 1)(1-\sigma)^2} (2\sigma e^{-m\beta\eta} - e^{-2m\beta\sigma\eta}) \\ & \quad \left. + \frac{n}{4(m\beta)^7\sigma^2(1-\sigma)^2} (2 - e^{-m\beta\eta}) e^{-m\beta\eta} \right]. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

By using these functions in equation (8) it may be seen that the proper form of the series expansion is

$$f(\eta) = \beta + \alpha F_1(\eta) + \alpha^2 F_2(\eta) + \dots, \quad h(\eta) = h_1(\eta) + \alpha H_2(\eta) + \dots.$$

There is no difficulty in using a limiting process on the above functions if the solution for  $\sigma = 1$  is desired.

To determine the constant  $\beta$  from  $f(0) = 0$ , we have an eighth-degree biquadratic equation:

$$\begin{aligned} \beta^8 - \frac{\alpha\beta^4}{m^3\sigma^2} + \alpha^2 \left[ \frac{\sigma^3(1-\sigma)(\omega - m\sigma) - 2n\sigma(1+\sigma) + m(1-\sigma)^2(1+\sigma)}{m^7\sigma^3(1-\sigma)^2(1+\sigma)^3} \right. \\ \left. - \frac{2\sigma^2(\omega - m\sigma) - 3n(1+\sigma)}{2m^7\sigma^4(1-\sigma^2)} + \frac{n(2\sigma^2 + 3\sigma - 1)}{8m^7\sigma^4(1-\sigma)^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

To check this equation we may put  $\omega = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $m = 3/4$ ,  $n = -1/4$ , and  $\beta = 4x$ , knowing that POHLHAUSEN gave  $x = 0.6$  (see, e. g., [3], p. 449) when  $\sigma = 0.733$  for air:

$$\left. \begin{aligned} x^8 - \frac{x^4}{27 \times 64 \times 16 \sigma^2} + \frac{3(1-\sigma)^2(1+\sigma) + 2\sigma(1+\sigma) - 3\sigma^4(1-\sigma)}{48 \times 27^2 \sigma^3(1-\sigma)^2(1+\sigma)^3} \\ - \frac{1+\sigma - 2\sigma^3}{32 \times 27^2 \sigma^4(1-\sigma^2)} + \frac{1 - 3\sigma - 2\sigma^2}{24 \times 16 \times 27^2 \sigma^4(1-\sigma)^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

The appropriate root turns out to be  $x = 0.612$ . With only two terms of the series FERTIS found  $x = 0.513$ , so that the next term has given significant improvement. With patience one could easily solve also equation (12), and likely would find that four terms yield all that experimental data would require. As seen in equation (13), even for  $\eta = 0$  the higher-order terms are quite small, the constant term being about  $0.2 \times 10^{-3}$  for air.

Since a proof that this method converges is lacking, it is worth noting that the solutions (9) become power series in  $\alpha$ , so that convergence is assured for sufficiently small  $\alpha$ . However, an iterative numerical procedure, using perturbations from  $f_1$  and  $h_1$ , can be based on the prediction of three terms, and that method might well be the more economical one.

## REFERENCES

- [1] M. FINSTON, *Free Convection Past a Vertical Plate*, ZAMP 7, fasc. 6 (November 1956).
- [2] H. E. FETTIS, *On the Integration of a Class of Differential Equations Occurring in Boundary Layer and Other Hydrodynamic Problems*, Proc. Fourth Midw. Conf. Fluid Mech. (Purdue University 1956).
- [3] M. JAKOB, *Heat Transfer 1* (John Wiley and Sons, Inc., 1949).

## Zusammenfassung

Das Problem der freien Strömung an einer ungleichmässig erhitzten Wand wird auf die Berechnung einer Reihe von Funktionen zurückgeführt, von denen jede einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten genügt.

(Received: March 5, 1957.)

### Remarks on the Paper by M. Finston: 'Free Convection Past a Vertical Plate'

By FRANK NIUMAN and KARL POHLHAUSEN, Dayton, Ohio, USA<sup>1)</sup>

Recently M. FINSTON has shown in a 'Brief Report' [ZAMP 7, 527 (1956)] that under the assumptions of the boundary layer theory the problem of free convection past a vertical plate has an exact solution for a plate temperature which is proportional to a power of the distance from the leading edge of the plate. The well-known solution of a constant plate temperature is included as a special case.

By a similarity hypothesis FINSTON derives the following system of differential equations for the temperature and velocity distribution (the notations are those of FINSTON):

$$\frac{\omega + 1}{2} f'^2 - \frac{\omega + 3}{4} f f'' - f''' = B h, \quad \omega f' h - \frac{\omega + 3}{4} f h' = \frac{1}{Pr} f'';$$

where primes denote the differentiation with respect to the argument  $\eta$  of the functions  $f$  and  $h$

$$\eta = y x^{(\omega-1)/4}.$$

The boundary conditions are

$$\text{for } \eta = 0: \quad f = f' = 0, \quad h = 1;$$

$$\text{for } \eta = \infty: \quad f' = h = 0.$$

<sup>1)</sup> Aeronautical Research Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, USA.

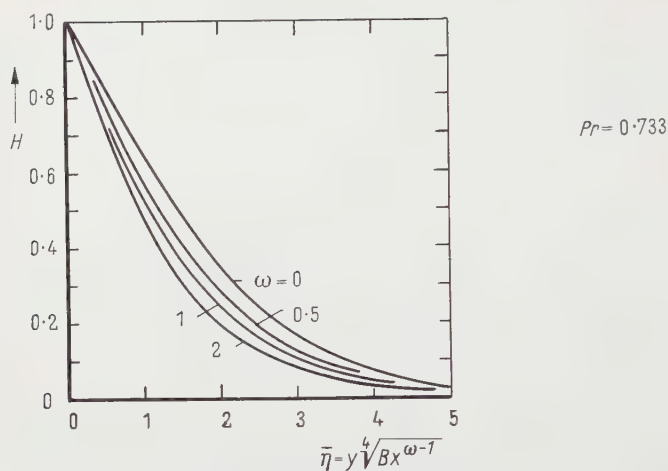


Figure 1a

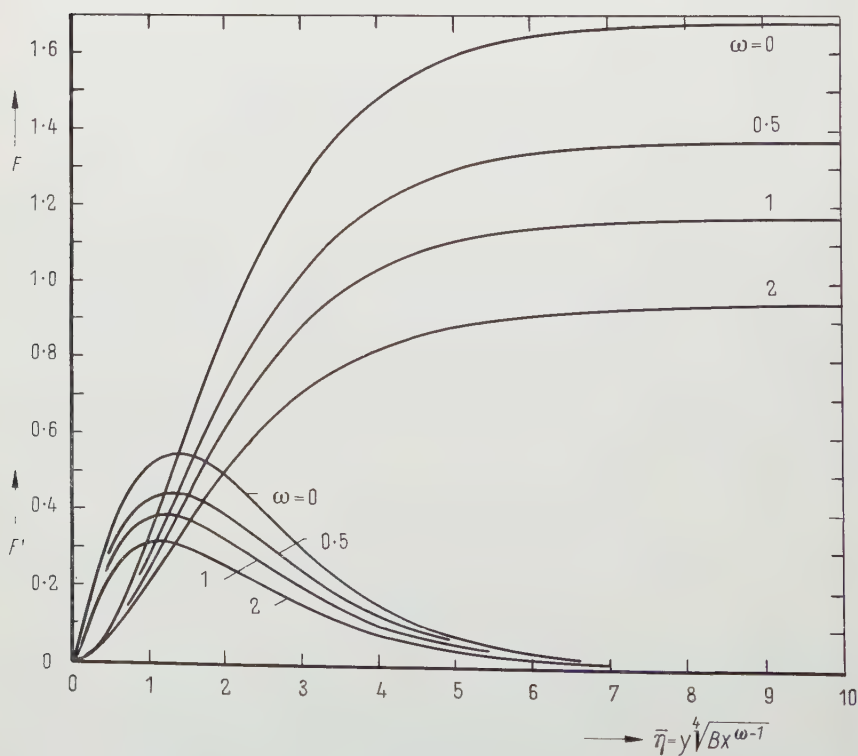


Figure 1b

Thermal and dynamical profiles and stream function for  $Pr = 0.733$  and for parametric values of  $\omega$ .



For a given Prandtl number the solutions form a two-parameter family with  $\omega$  and  $B$  as parameters. A *one*-parametric problem is obtained by the following substitutions:

$$f(\eta) = B^{1/4} F(\bar{\eta}), \quad h(\eta) = H(\bar{\eta}) \quad \text{with} \quad \bar{\eta} = B^{1/4} \eta.$$

One then finds

$$\frac{\omega + 1}{2} F'^2 - \frac{\omega + 3}{4} F F'' = F''' + H, \quad \omega F' H - \frac{\omega + 3}{4} F H' = \frac{1}{Pr} H''.$$

Here the differentiation is to be carried out with respect to  $\bar{\eta}$ . These equations were evaluated numerically for air ( $Pr = 0.733$ ) using the Bendix Digital Differential Analyzer. The figure shows the quantities  $H$ ,  $F$  and  $F'$  as functions of  $\eta$  for  $\omega = 0, 0.5, 1$  and  $2$ . The values of  $H'$  and  $F''$  at the plate, which determine the heat transfer and the shearing force as well as the asymptotic values of  $F$  are given in the following table.

$\omega$	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0
$H'(0)$	-0.359	-0.386	-0.410	-0.450	-0.483	-0.512	-0.536	-0.630
$F''(0)$	0.953	0.926	0.902	0.861	0.828	0.800	0.777	0.649
$F(\infty)$	1.684	1.610	1.550	1.412	1.327	1.241	1.169	0.957

For  $\omega = 0.2$  the heat transfer along the surface of the plate is constant. The case may be of some technical interest.

### *Zusammenfassung*

Die von M. FINSTON abgeleitete exakte Lösung für die natürliche Konvektion an einer vertikalen Platte, deren Oberflächentemperatur nach einem Potenzgesetz veränderlich ist, wird für gegebene Prandtl-Zahl auf eine einparametrische Schar zurückgeführt. Einige Lösungskurven für Luft ( $Pr = 0.733$ ) werden mitgeteilt.

(Received: July 6, 1957.)

## **An Inequality Relation Between Yule's Characteristic $K$ and Shannon's Entropy $H$**

By GUSTAV HERDAN, Bristol, England<sup>1)</sup>

If the entropy is used in linguistics in the form and with the interpretation given to it by the communication engineers [1]<sup>2)</sup>, as so and so many 'bits of information', it requires much additional explanation, and even then confusion is not always avoided. For one thing, it may be now regarded as established that the entropy  $H$  measures not the information, but rather the lack of it, and that,

<sup>1)</sup> University of Bristol.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 73.

therefore, the negative entropy – the negentropy – should be used for measuring information [2]; secondly  $H$  is a logarithmic quantity, and as such not readily interpretable in non-logarithmic terms; more especially the ‘bits of information’ have not really a linguistic meaning.

The transformation which we shall propose takes these shortcomings of the traditional expression of entropy into account, and by doing so changes it into an easily interpretable statistical quantity of general applicability and of interest to linguists – the *repeat rate*. It is based upon an inequality relation between the two parameters which are indigenous to literary statistics: SHANNON'S entropy  $H = -\sum p_i \log_2 p_i$ , where  $p_i$  is the probability of occurrence of the symbol  $i$ , and YULE'S characteristic (apart from a factor  $10^4$  to avoid decimals)

$$K = \frac{S_2 - N}{N^2},$$

where

$$N = \sum r n_r \quad \text{and} \quad S_2 = \sum r^2 n_r \quad (1)$$

and where  $n_r$  is the number of different words occurring with the frequency  $r$  [3, 4].

### The Transformation

The negative entropy  $-H = \sum p_i \log_2 p_i$  is the arithmetic mean of the logarithmic variable  $\log_2 p$ . Its antilog is, therefore, the *geometric mean*  $G$  of  $p_i$ . In symbols:

$$\text{Antilog}(-H) = G. \quad (2)$$

The *arithmetic mean*  $A$  of  $p$ , as a weighted average, or the expectation of  $p$ , is

$$A = \sum p_i p_i. \quad (3)$$

$\sum p_i^2$  is the repeat rate, i. e., the probability that two particular linguistic events, say words, selected at random from the text under consideration should turn out to be the same word.

Using the inequality between arithmetic and geometric mean

$$G \leq A, \quad (4)$$

we obtain the following inequality between the entropy and the repeat rate of particular events:

$$\text{Antilog}(-H) = G \leq A = \sum p_i^2. \quad (5)$$

On the other hand, it can be shown [5] that YULE'S characteristic  $K$  is an unbiased estimate of the sum of the repeat rates for particular linguistic events  $\sum p_i^2$ .

### Proof

We denote by  $c_m$  a measure of heterogeneity of the statistical populations such that  $c_m = p_1^m + p_2^m + \dots + p_s^m$ , where  $p_\mu$  is the probability of occurrence of the  $\mu$ -th word. Then the expectation of that parameter for which we will write

$\hat{c}_m$  is given by:

$$\hat{c}_m = \frac{1}{N^{[m]}} \sum_r r^{[m]} n_r = \frac{1}{N^{[m]}} \sum_r r^{[m]} \sum_{\mu=1}^s \binom{N}{r} p_\mu^r (r p_\mu)^{N-r} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\mu=1}^s \sum_r \frac{1}{N^{[m]}} r^{[m]} \binom{N}{r} p_\mu^r (1 - p_\mu)^{N-r} \\ &= \sum_{\mu=1}^s \sum_r \frac{(N - m)!}{(r - m)! [N - m - (r - m)]!} p_\mu^{r-m} (1 - p_\mu)^{N-m-(r-m)} p_\mu^m \\ &= \sum_{\mu=1}^s p_\mu^m [p_\mu + (1 - p_\mu)]^{N-m} \\ &= \sum_{\mu=1}^s p_\mu^m = c_{m,0} . \end{aligned} \tag{7}$$

In other words  $\hat{c}_m$  is an unbiased estimate of  $c_m$ .

For our case  $m = 2$ , and we write

$$\hat{c}_2 = \frac{1}{N^{[2]}} \sum_r r(r - 1) n_r = \frac{S_2 - N}{N(N - 1)} . \tag{8}$$

**The Inequality**

YULE's characteristic  $K$  can be shown to equal  $\hat{c}_2 (1 - 1/N)$ :

$$\hat{c}_2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{S_2 - N}{N(N - 1)} \cdot \frac{N - 1}{N} = \frac{S_2 - N}{N^2} = K , \tag{9}$$

and thus tends to  $p_1^2 + p_2^2 + \dots$  as  $N \rightarrow \infty$ . It appears thus to be the repeat rate of the linguistic events in question.

We write therefore:

$$\text{Antilog } (-H) \leq K . \tag{10}$$

In words:

*The repeat rate or the characteristic is at least equal to the antilog of the negentropy, or the antilog of the negentropy is a lower limit of the repeat rate or of Yule's  $K$ .*

The relation between the interpretation of  $K$  as the repeat rate and as the coefficient of variation of the mean, given in a former paper [4], is as follows:

In formula (1) both  $r$  and  $n_r$  are frequencies, of word occurrences and vocabulary respectively, and may by division through the corresponding totals be transformed into relative frequencies. For great samples, these relative frequencies are sensibly stable and may be regarded as estimates of the corresponding probabilities,  $p_r = r/N$  and  $\pi_r = n_r/n$  ( $n = n_1 + n_2 + \dots n_s$ ).

Using the first transformation, we have

$$K^* = \frac{S_2}{N^2} = \sum_{r=1}^s \frac{r^2}{N^2} n_r = \sum_{r=1}^s p_r^2 \pi_r ,$$

and summing over the individual  $p_r$  instead of over their groups  $\pi_r$ , we may

write:

$$K^* = \sum_{\mu=1}^n \dot{p}_{\mu}^2,$$

which shows  $K$  to be the repeat rate of particular words<sup>3</sup>).

For using the second transformation, we write

$$K^* - \frac{1}{n} = \frac{S_2}{N^2} - \frac{1}{n} = \frac{n \sum r^2 n_r - [\sum r n_r]^2}{n [\sum r n_r]^2}.$$

Dividing numerator and denominator by  $n^3$ , the expression on the right becomes

$$\frac{\{\sum r^2 \pi/n - [\sum r \pi]^2/n\}}{[\sum r \pi]^2} = \frac{\sigma_r^2/n}{M_r^2}$$

which shows  $K$ , for great  $n$ , to be equal to the coefficient of variation of the mean of the variable  $r$ .

Relation (10) is of great importance both practically and theoretically. From the practical angle, it enables us to obtain an estimate in terms of a lower limit of the repeat rate if  $K$  cannot be calculated because the variable is a qualitative one. Furthermore since, as a rule,  $H$  is easier calculated than  $K$ , it provides a method for obtaining quickly a lower limit for the latter. From the theoretical angle, it provides the sought-for correct linguistic interpretation of the entropy in terms of the repeat rate of linguistic forms.

### Application (Uni-Variate)

Using the inequality (10), we can express, for instance, the difference in the entropy for length of English words in terms of number of letters  $H = 2.628$  and that for word length in terms of sounds (phonemes)  $H = 2.274$  [6] by saying that the repeat rate for specified word lengths in English is at least 1 in 6.3 words, if word length is measured in terms of letter number, and 1 in 4.8 words, if word length is measured in phoneme number. In other words, picking two words at random from a very long text and examining them for word length, we shall find that word length repeats itself slightly more often if measured in terms of phonemes.

### Application (Bi-Variate)

Language translation may be regarded as bi-variate coding of messages [6]. If the entropy is calculated for a given quantitative characteristic, such as word length<sup>4</sup>), for each of the two languages, original and translation, independently, the values so obtained will differ, as a rule, among themselves and also from the value of the bi-variate entropy, that is the entropy calculated from the word length of translational equivalents (words denoting the same concept in the two languages). More precisely, the conditional entropy, i. e., the entropy for word length in translational equivalents of words in the original of a specified length is less than the unconditional entropy. Thus for translation from French into English we find the former as 0.923 bits and the latter as 1.410; in translation from German into English the former is 1.162 bits and the latter 1.648; in

<sup>3</sup>)  $K^*$  approximates to  $K$  as  $N \rightarrow \infty$ .

<sup>4</sup>) In terms of syllable number.

translation from Russian into English the former is 1.153 bits and the latter 2.100 [6].

These relations are not too clear as long as they are expressed by means of the entropy in its conventional form. The inequality relation (10) enables us to make the difference between the conditional and the unconditional entropy more readily understandable. In terms of that relation we express the differences as follows: for French-English translation the repeat rate of words in the French original is at least 1 in 2.6, or 1 in 3 approximately, and rises in the translational equivalents to at least 1 in 2; for German-English translation the repeat rate of word length in the original is also 1 in 3 approximately, and in the translational equivalents rises again to at least 1 in 2 approximately; for Russian-English translation the repeat rate of word length in the original is 1 in 4 approximately, and rises in the translational equivalents to 1 in 2 (2.4 precisely).

#### REFERENCES

- [1] C. E. SHANNON, *Mathematical Theory of Communication*, Bell Syst. tech. J. 27, 379–423 (1948).
- [2] L. BRILLOUIN, *Science and Information Theory* (Academic Press Inc., New York 1956).
- [3] G. U. YULE, *Statistical Study of Literary Vocabulary* (Cambridge University Press, 1944).
- [4] G. HERDAN, *A New Derivation and Interpretation of Yule's 'Characteristic' K*, ZAMP 6, 332–334 (1955).
- [5] I. J. GOOD, *The Population Frequencies of Species and the Estimation of Population Parameters*, Biometrika 40, 237–264 (1953).
- [6] G. HERDAN, *Language as Choice and Chance* (P. Noordhoff, Groningen 1956).

#### Zusammenfassung

Nach einer einleitenden Erörterung der Unzulänglichkeit der bisherigen Interpretation von SHANNONS Entropie  $H$  für Zwecke der strukturellen Linguistik wird gezeigt, dass zwischen SHANNONS Entropie  $H$  und YULES Charakteristik  $K$ , als einem Ausdruck für die Wiederholungshäufigkeit  $p_i^2$  von Sprachformen, eine Ungleichheitsrelation wie folgt besteht:

$$\text{Antilog } (-H) \leq K = \sum p_i^2,$$

die sich als eine Beziehung von ziemlichem praktischem und theoretischem Interesse erweist.

Was die praktische Seite betrifft, so ermöglicht sie bei Kenntnis von  $H$  die schnelle Berechnung einer unteren Grenze von  $K$ , wenn diese Grösse nicht direkt berechnet werden kann oder nur mit grösserem Arbeitsaufwand.

In theoretischer Hinsicht erweist sich die Relation als die lange gesuchte linguistisch relevante Formulierung der Entropie, im Sinne der Anwendung dieses Ausdruckes in der Informationstheorie, als eine untere Grenze der Wiederholungshäufigkeit von Sprachformen.

Die Anwendung der Ungleichheitsrelation, und die Vorteile der implizierten Auslegung von  $H$  gegenüber der früheren Auslegung dieser Grösse, werden anhand von Beispielen gezeigt.

(Received: July 25, 1957.)



# A New Approach to the Theory of an Oscillating Cylinder Viscometer by Dimensional Analysis

By ALI ABDEL KERIM IBRAHIM, Alexandria, Egypt<sup>1)</sup>

## The Theory

The experimental variables which influence the deflection  $\theta_0$  of the inner cylinder are listed below:

Table 1

Name of Quantity	Symbol	Dimensional formula
Moment of inertia of inner cylinder .	$I$	$ML^2$
Angular frequency of outer cylinder .	$\omega$	$T^{-1}$
Torsion constant of wire . . . . .	$\tau$	$ML^2 T^{-2}$
Viscosity . . . . .	$\eta$	$ML^{-1} T^{-1}$

Other variables such as the radius of the inner cylinder, the radius of the outer cylinder and the length of inner cylinder immersed in the liquid may also appear in the final solution, but since the dimensional formula of each is  $L$ , therefore we shall consider an apparatus constant  $K$  which include them and has the dimensional formula  $L^f$ , where  $f$  is an unknown constant number.

Now since  $I \omega^2$  and  $\tau$  have the same dimensions and each is acting opposite to the other, therefore  $(I \omega^2 - \tau)$  may be given as a single variable.

The dimensional formula of the several variables in terms of the unit chosen as fundamental (namely, mass, length, and time) are given in Table 1. The most general form of the product of powers of the variables is

$$\left(\frac{\theta_0}{\varphi_0}\right)^a K^b (I \omega^2 - \tau)^c \omega^d \eta^e,$$

where  $a, b, c, d, e$  are unknown constant numbers and  $\varphi_0$  is the deflection of the outer cylinder.

Substituting the dimensional formula for each of the variables into the previous expression and equating to zero the indices of the three fundamental units, we have the following three equations:

$$c + e = 0, \quad f b + 2c - e = 0, \quad -2c - e - d = 0. \quad (1)$$

Solving equations (1) for  $d, e$  and  $b$  in terms of the other index  $c$ , we obtain for the general dimensionless product

$$\left(\frac{\theta_0}{\varphi_0}\right)^a \left(\frac{I \omega^2 - \tau}{K^{3/f}}\right)^c.$$

Since the combination of variables within each bracket is raised to an arbitrary power, each such combination must form a subsidiary dimensionless product. The

<sup>1)</sup> Physics Department, Faculty of Science, The University.

general solution of the problem may then be written

$$\left(\frac{\varphi_0}{\theta_0}\right) = \varphi\left(\frac{I \omega^2 - \tau}{\eta \omega K^{3/f}}\right), \tag{2}$$

where  $\varphi$  is an unknown function of the dimensionless product whose form can be determined either from theoretical or experimental [1, 2]<sup>2)</sup> data.

For a particular apparatus  $K$  is constant, we may, therefore, conclude that under such circumstances:

$$\left(\frac{\varphi_0}{\theta_0}\right) = \varphi\left(\frac{I \omega^2 - \tau}{\eta \omega}\right). \tag{3}$$

**The Single General Curve**

It therefore follows from equation (3) that a plot of  $(\varphi_0/\theta_0)$  as  $Y$  against  $[(I \omega^2 - \tau)/\eta \omega]$  as  $X$  gives the single general curve. This curve does not depend on either the viscosity or the density of the liquid but does depend on the dimensions of the apparatus used.

Figure 2 represents the single general curve for our apparatus and Figure 4 that of OLDROYD's apparatus. This curve is based on either our theory [2] or an experimental data of a liquid of known viscosity. Also Figures 1 and 3 represent the variation of  $[(I \omega^2 - \tau)/\omega]$  versus  $n$  ( $n$  being the frequency where  $\omega = 2 \pi n$ ) for our apparatus and OLDROYD's apparatus respectively.

**Viscosity Determination**

The value of  $(\varphi_0/\theta_0)$  for a certain liquid is measured for a certain frequency  $n$ . Then it follows that:

- (1) From the  $(n [(I \omega^2 - \tau)/\omega])$  curve we get the value of  $[(I \omega^2 - \tau)/\omega]$  corresponding to the value of  $n$  used.
- (2) From the  $\{[(I \omega^2 - \tau)/\eta \omega], (\varphi_0/\theta_0)\}$  curve we get the value of  $[(I \omega^2 - \tau)/\eta \omega]$  corresponding to the value of  $(\varphi_0/\theta_0)$  measured.
- (3) From dividing the previously obtained values in step (1) and step (2) the value of  $\eta$  is determined.

**Experimental Measurements**

Experiments have been carried out on paraffin oil, glycerine and olive oil. The work was carried out at room temperature, which remained constant during the half hour required to take any one set of observations.

Tables 2 and 3 below give full details of the readings taken and results obtained. This offers a consistent and convenient method for measuring  $\eta$ .

Table 2

Liquid	Temperature °C	$n$ c/s	$\left(\frac{\varphi_0}{\theta_0}\right)$
Paraffin oil . . . . .	20	1.5	2.085
Glycerine . . . . .	20.5	3.0	1.746
Olive oil . . . . .	18.5	0.85	1.162
Paraffin oil [3] (OLDROYD's results)	25	4.0	1.934

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 78.

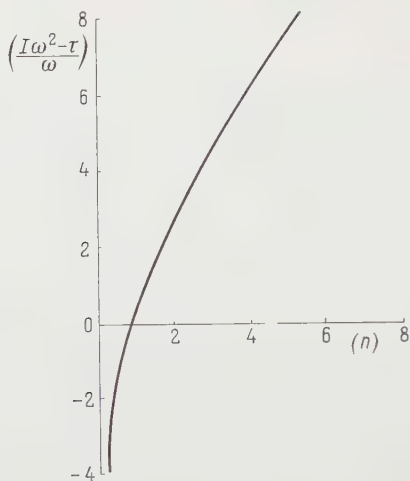


Figure 1

$\left(n - \frac{I\omega^2 - \tau}{\omega}\right)$  curve for our apparatus.

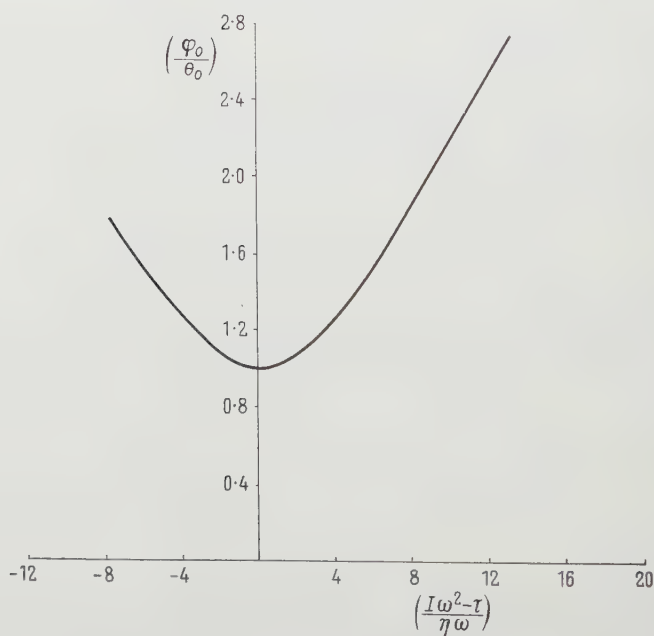


Figure 2

Single general curve for our apparatus.

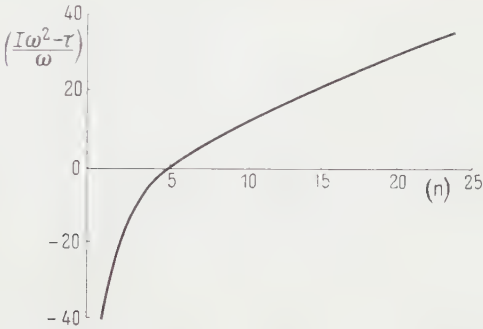


Figure 3

$\left(n - \frac{I\omega^2 - \tau}{\omega}\right)$  curve for OLDROYD'S apparatus.

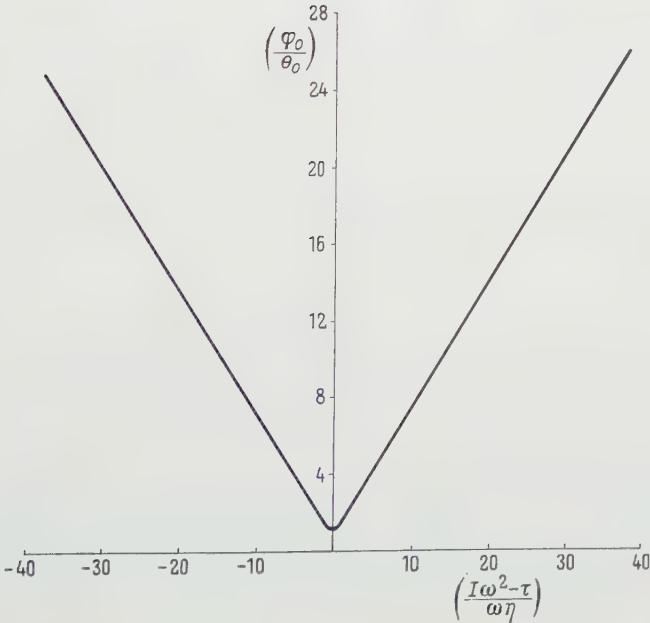


Figure 4

Single general curve for OLDROYD'S apparatus.

Table 3

Liquid	$\left(\frac{I \omega^2 - \tau}{\omega}\right)$	$\left(\frac{I \omega^2 - \tau}{\eta \omega}\right)$	$\eta$ Poise
Paraffin oil . . . . .	1.8	0.94	1.91
Glycerine . . . . .	4.37	0.75	5.83
Olive oil . . . . .	0.3	0.3	1.0
Paraffin oil [3] (OLDROYD's results)	0.049	0.0295	1.662

## REFERENCES

- [1] J. G. OLDROYD, Quart. J. Mech. appl. Math. 3, 271 (1951).  
 [2] A. A. K. IBRAHIM and A. M. KABIEL, ZAMP 5, 398 (1954).  
 [3] OLDROYD, STRAWBRIDGE and TOMS, Proc. phys. Soc. Lond. [B] 64, 44 (1951).

## Zusammenfassung

Es wurde ein Verfahren entwickelt, um den Viskositätskoeffizienten  $\eta$  einer Newtonschen Flüssigkeit mit Hilfe eines schwingenden Zylinderviskosimeters zu messen. Es wird gezeigt, dass die Ablesungen von  $(\theta_0/\varphi_0)$  für verschiedene Flüssigkeiten zu einer einzigen Kurve führen, wenn sie als dimensionsloses Produkt der verschiedenen Variablen aufgetragen werden. Diese einfache Kurve hängt nicht von der Viskosität und Dichte der Flüssigkeit ab, hingegen von den Dimensionen der Apparatur.

Experimente wurden an Paraffinöl, Glycerin und Olivenöl ausgeführt. Die Ergebnisse scheinen sowohl die Theorie wie das Verfahren zu stützen.

(Received: March 28, 1957.)

## A Note on the Second Fundamental Problem of Elasticity Applied to a Plane Circular Ring

By FRANTIŠEK KROUPA, Prague<sup>1)</sup>

A brief report by W. A. GROSS [1]<sup>2)</sup> from 1957 gives the general solution of the second boundary problem for annular regions by the method of MUSKHELISHVILI and as an example treats the mutual displacement of both circles. An interesting new point in this contribution is that attention is drawn to an error in the older paper by REISSNER.

I should like to point out that a detailed general solution of the second boundary problem for annular regions, together with specialization for an identical case of mutual displacement of the circles, also given by using expansion in series in a complex variable by the method of MUSKHELISHVILI, was published in 1952 [2]. The same results are obtained here as in paper [1], but the procedure is

<sup>1)</sup> Institute of Physics, Czechoslovakian Academy of Sciences.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 79.



calculation differs in details. Specialization for the mutual displacement of circles is also discussed in this paper with respect to technical applications and it is shown that this solution can be used as the first approximation in calculating a rubber damper in the shape of a hollow cylinder.

Another general solution of this problem, particularly suitable for numerical calculation, is given in the monograph [3] published in 1955, devoted to making more accurate and further developing the method of MUSKHELISHVILI. The solution here, on pages 308 to 322, is given as a combination of the Muskhelishvili method of the function of a complex variable and the variational method, and here too is a detailed calculation of the same special case of mutual displacement of the circles.

### REFERENCES

- [1] W. A. GROSS, ZAMP 8, 71 (1957).
- [2] F. KROUPA, Czechosl. J. Phys. 7, 137 (1952).
- [3] I. BABUŠKA, K. REKTORYS, and F. VYČICHLO, *Matematická teorie rovinné pružnosti* (Praha 1955), in Czech. (German translation is being prepared.)

(Received: July 29, 1957.)

### Comment on the Preceding Note

The author regrets that he was unaware of the publication by F. KROUPA. The aim of the present paper was to correct the classic solution of H. REISSNER.

It is of passing interest that the author was able to solve a plane circular ring problem with mixed boundary conditions of unknown extent. Solutions for the first, second, and mixed boundary value problems were programmed for digital computer evaluation using fifteen Fourier coefficients. The final result was obtained by successive improvements.

W. A. GROSS

(Received: November 28, 1957.)

### Nachtrag zu «Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen»

VON HANS-RUDOLF SCHWARZ, Zürich<sup>1)</sup>

Nach Erscheinen meiner Veröffentlichung [1]<sup>2)</sup> haben wir erfahren, dass das von mir dort auf Seite 474 zitierte Kettenbruchkriterium zuerst von H. S. WALL nur für Polynome mit reellen Koeffizienten aufgestellt und bewiesen wurde [2], während die Verallgemeinerung auf Polynome mit komplexen Koeffizienten auf E. FRANK zurückgeht [3, 4]. Für diesen wertvollen Hinweis von E. FRANK danken wir bestens.

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 80.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. R. SCHWARZ, *Ein Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwert-problemen*, Z. angew. Math. Phys. 7, 473–500 (1956).
- [2] H. S. WALL, *Polynomials Whose Zeros Have Negative Real Parts*, Amer. math. Monthly 52, 308–322 (1945).
- [3] E. FRANK, *On the Zeros of Polynomials with Complex Coefficients*, Bull. Amer. math. Soc. 52, 144–158 (1946).
- [4] E. FRANK, *The Location of the Zeros of Polynomials with Complex Coefficients*, Bull. Amer. math. Soc. 52, 890–898 (1946).

(Eingegangen: 4. November 1957.)

## The Flow of a Non-Newtonian Liquid Near a Stagnation Point

By ABINASH CHANDRA SRIVASTAVA, Kharagpur, India<sup>1)</sup>

### 1. Introduction

FROESSLING<sup>2)</sup> has obtained an exact solution for the flow of a viscous liquid near a stagnation point. A stagnation point occurs when a liquid stream impinges on a wall at right angles to it and flows away radially in all directions.

In this paper equations of motion for the flow of non-Newtonian liquid near a stagnation point have been set up in cylindrical coordinates and integrated by Kármán-Pohlhausen method. It is observed that the cross-viscous effect depends on a non-dimensional parameter  $K = \mu_c a / \mu$  (where  $\mu$ ,  $\mu_c$  are coefficient of viscosity and cross-viscosity respectively and  $a$  is a constant of dimension  $T^{-1}$ , depending on the velocity in potential motion). The boundary layer thickness decreases when  $K$  varies, from  $K = 0$  to  $K \simeq 0.15$  and then increases with  $K$ . The shearing at the wall decreases with the increase of  $K$ , while the normal stress at the wall is independent of both viscosity and cross-viscosity.

### 2. Equations of Motion

The equations of steady axisymmetric motion in cylindrical coordinates when the velocity component perpendicular to the meridian plane is zero, are

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} + \frac{p_{rr} - p_{\theta\theta}}{r}, \quad (1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial p_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{p_{rz}}{r}, \quad (2)$$

where  $u$  and  $w$  are velocities in directions of  $r$  and  $z$  respectively. The equation of continuity is

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Mathematics Department, Indian Institute of Technology.

<sup>2)</sup> H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory* (Pergamon Press Ltd., London 1955), p. 73–75.

The stress matrix  $\|p_{ij}\|$  and the rate of strain matrix  $\|e_{ij}\|$  in the case of non-Newtonian liquids are related as<sup>3)</sup>

$$\begin{vmatrix} p_{rr} & p_{r\theta} & p_{rz} \\ p_{\theta r} & p_{\theta\theta} & p_{\theta z} \\ p_{zr} & p_{z\theta} & p_{zz} \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{vmatrix} + \mu_c \begin{vmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{vmatrix} \dots, \quad (+)$$

where

$$e_{rr} = 2 \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = 2 \frac{u}{r}, \quad e_{r\theta} = e_{\theta r} = 0, \quad e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad e_{zz} = 2 \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (5)$$

A stream of non-Newtonian liquid impinges on a wall  $z = 0$ , and flows away radially in all directions. The stagnation point is at the origin and the flow is in the direction of the negative  $z$ -axis. We shall denote the radial and axial components of the velocity in frictionless flow by  $U$  and  $W$  respectively, whereas those in viscous flow will be denoted by  $u = u(r, z)$  and  $w = w(r, z)$ . The boundary conditions are  $u = 0$ ,  $w = 0$  at  $z = 0$  and  $u = U$  at  $z = \delta^*$ , where  $\delta^*$  is the boundary layer thickness.

For frictionless case we can write,  $U = a r$ ,  $W = -2 a z$ , where  $a$  is a constant. It is seen that such a solution satisfies the equation of continuity. Denoting the stagnation pressure by  $p_0$ , we find the pressure in ideal flow,

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2} (U^2 - W^2) = \frac{\rho}{2} a^2 (r^2 - 4z^2).$$

The frictionless case suggests that we should take the following form of the solution for the velocity in the boundary layer,

$$u = r f'(z), \quad w = -2 f(z), \quad (6)$$

the solution of this form satisfies the equation of continuity identically. Substituting from (6) into (1) and (2), we get

$$r (f'^2 - 2 f f'' - r f''' + 2 v_c f' f''') = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + r v_c f''^2, \quad (7)$$

$$4 f f' + 2 r f'' - 28 v_c f' f'' - 2 r^2 v_c f'' f''' = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (8)$$

The condition of integrability is

$$\frac{\partial}{\partial z} (2 f f'' - f'^2 + r f''' - 2 v_c f' f'' + v_c f''^2) = 4 v_c f'' f''.$$

Integrating,

$$2 f f'' - f'^2 + r f''' - 2 v_c f' f'' = v_c f''^2 + C, \quad (9)$$

where  $C$  is an integration constant. In view of the boundary conditions

$$f'(\delta^*) = a, \quad f''(\delta^*) = f'''(\delta^*) = 0, \quad C = -a^2.$$

From (7) and (9),

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = (2 v_c f''^2 - a^2) r.$$

<sup>3)</sup> I. BRAUN and M. REINER, Quart. J. Math. appl. Math. 5, 43 (1952).

Integrating,

$$p = -\frac{\rho}{2} v^2 [v^2 + 4 F(z)] + \mu_c v^2 f''^2, \quad (10)$$

where  $F(z)$  is an arbitrary function of  $z$ , to be determined from (8). Substituting for  $p$  in (7) and (8), we have

$$f'^2 - 2 f f'' = a^2 + v f''' - v_c (f''^2 + 2 f' f'''), \quad (11)$$

$$2 f f' = a^2 F' - v f'' + 14 v_c f' f'', \quad (12)$$

The boundary conditions are

$$f = f' = 0 \text{ and } F = 0 \text{ at } z = 0, \quad f' = a \text{ at } z = \delta^*.$$

The constants  $a^2$  and  $v$  can be removed from (11) by a similarity transformation  $\eta = \sqrt{a/v} z/\delta$  and  $f(z) = \sqrt{a/v} q(\eta, \delta)$ , where  $\delta = \sqrt{a/v} \delta^*$ . The non-dimensional form of (11) is

$$\delta [\varphi''' + 2 \delta \varphi \varphi'' - \delta \varphi'^2 + \delta^3] = K (\varphi''^2 + 2 \varphi' \varphi'''), \quad (13)$$

where a prime denotes differentiation with respect to  $\eta$ . Now, boundary conditions are

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(1) = \delta, \quad \varphi''(1) = 0 \quad \text{and} \quad \delta [\varphi'''(0) + \delta^3] = K \varphi''^2(0). \quad (14)$$

### 3. Solution of Equations by Kármán-Pohlhausen Method

Assume

$$\varphi(\eta) = a_1 + a_2 \eta + a_3 \eta^2 + b \eta^3 + c \eta^4. \quad (15)$$

Applying the boundary conditions (14), we get

$$\varphi(\eta) = \frac{3(\delta - b)}{4} \eta^2 + b \eta^3 - \frac{\delta + 3b}{8} \eta^4 \quad (16)$$

and

$$9 K b^2 - 6 b \delta (3 K + 4) + \delta^2 (9 K - 4 \delta^2) = 0. \quad (17)$$

Integrating equation (13) with respect to  $\eta$  between the limits 0 to 1, we get

$$[\varphi'']_0^1 + 2 \delta [\varphi \varphi']_0^1 - 3 \delta \int_0^1 \varphi'^2(\eta) d\eta + \delta^3 + \frac{K}{\delta} \int_0^1 \varphi''^2(\eta) d\eta = 0. \quad (18)$$

Substituting the value of  $\varphi(\eta)$  from (16) in equation (18) and putting  $\delta^2 = x$ ,  $b/\delta = p'$ , (11) becomes

$$\left( \frac{9}{10} x + \frac{39}{10} K \right) p'^2 - \left( \frac{11}{35} x + \frac{42}{5} K + 15 \right) p' - \frac{251}{70} x + \frac{21}{10} K + 3 = 0 \quad (19)$$

and equation (17) reduces to

$$9 K p'^2 - (18 K + 24) p' + 9 K - 4 x = 0. \quad (20)$$

Eliminating  $p'$  between (19) and (20), we have

$$\left. \begin{aligned} 9 x^4 + (132 - 624 K) x^3 + (10609 K^2 - 3916 K - 2736) x^2 \\ + (26523 K^3 + 15634.5 K^2 + 32235 K + 7560) x + 15876 K^4 \\ + 40131 K^3 + 54684 K^2 - 101430 K = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Putting  $K = 0$  in (21), we have the solution corresponding to the flow of a viscous liquid. In the reduced equation, either  $x = 0$ , which is not possible or

$$3x^3 + 44x^2 - 912x + 2520 = 0. \quad (22)$$

Equation (22) possesses two positive and one negative roots. We need not consider the negative root, since  $\delta$  cannot be imaginary. Two positive roots are 3.491 151 and 8.894 263. After plotting the velocity profile corresponding to these values of  $\delta^2$ , it is found that corresponding to  $\delta^2 = 8.894\ 263$ ,  $u/U$  becomes greater than 1 with in the boundary layer region which is absurd. The velocity profile corresponding to  $\delta^2 = 3.491\ 151$  agrees closely with that given by FROESSLING<sup>2</sup>). For  $K = 0.02, 0.04, 0.06, \dots, 0.30$ , we find that root of the equation (21) which is nearest to the smaller root of (22), namely,  $\delta^2 = 3.491\ 151$ . The shearing stress at the wall  $(p_{rz})_{z=0}$  is found to be  $\mu a r \sqrt{a/\nu} \varphi''(0)$  (table). The normal stress at the wall  $(p_{zz})_{z=0} = \rho a^2 r^2/2$ , which is independent of both viscosity and cross-viscosity. The stream function is  $\psi = r^2 f(z)$ . The stream lines are drawn for  $K = 0, 0.1, 0.2, 0.3$  (Figure 2). For the same value of  $\psi$  stream lines are drawn closer to the wall as well as to the axis with the increase of  $K$ .

$K$	$\delta$	$\varphi''(0)$	$K$	$\delta$	$\varphi''(0)$
0.00	1.8684	1.2699	0.16	1.5630	1.2523
0.02	1.8086	1.2670	0.18	1.6250	1.2208
0.04	1.7567	1.2649	0.20	1.7141	1.1836
0.06	1.7107	1.2635	0.22	1.8061	1.1506
0.08	1.6688	1.2628	0.24	1.8978	1.1216
0.10	1.6307	1.2625	0.26	1.9887	1.0961
0.12	1.5963	1.2625	0.28	2.0790	1.0735
0.14	1.5752	1.2587	0.30	2.1688	1.0534

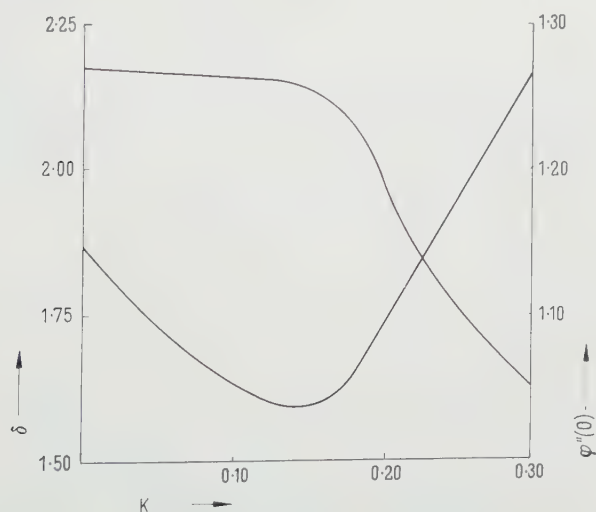


Figure 1  
The graph of  $\delta$  and  $\varphi''(0)$ .



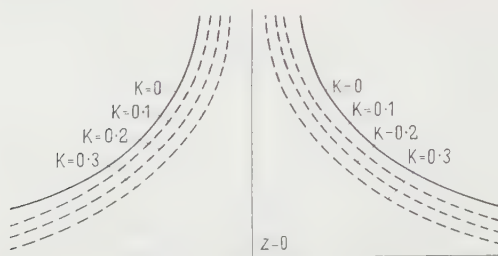


Figure 2  
The graph of  $\psi$ .

#### 4. Conclusion

The effect of cross-viscosity in the flow of non-Newtonian liquid with a stagnation point depends upon a non-dimensional parameter  $K = \mu_c a / \mu$ . The boundary layer thickness decreases when  $K$  varies, from  $K = 0$  to  $K = 0.15$  and then increases more rapidly (Figure 1). The shearing stress at the wall decreases slowly upto  $K = 0.15$  and then rapidly upto  $K = 0.30$  (beyond which calculations have not been made, Figure 1). It is interesting to see (Figure 1) that  $\delta$  has the same value when  $K = 0$  and  $K \simeq 0.22$  but the flow characteristics in the two cases are different. In the latter case, the difference arises due to the cross-viscosity. The normal stress at the wall is independent of both viscosity and cross-viscosity. The stream function is given by  $\psi = r^2 f(z)$ . We find that for the same value of  $\psi$  the stream lines are drawn closer to the wall as well as to the axis with the increases of  $K$ .

I thank Dr. S. D. NIGAM for his help in the preparation of this paper.

#### *Zusammenfassung*

Die Bewegungsgleichungen für die Strömung einer nicht-Newton'schen Flüssigkeit nahe einem Staupunkt sind integriert worden nach der Kármán-Pohlhausen Methode. Es ist gefunden worden, dass der Effekt der Querviskosität von einem dimensionslosen Parameter  $K = \mu_c a / \mu$  abhängt. Die Grenzschichtdicke nimmt ab von  $K = 0$  zu  $K = 0.15$  und wächst dann mit  $K$ . Die Wand-Scherbeanspruchung nimmt ab mit zunehmendem  $K$ , während die Normalkraft an der Wand unabhängig ist von Viskosität und Querviskosität.

(Received: August 12, 1957.)

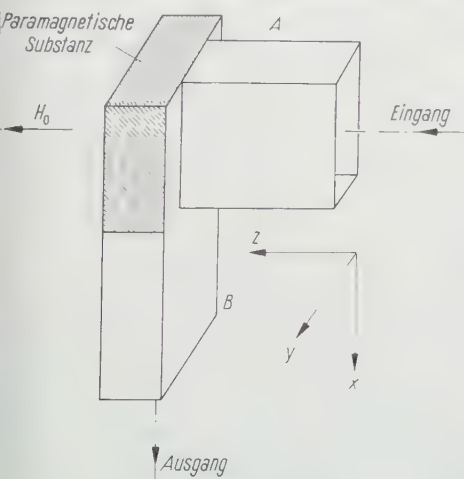
# Herbsttagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 22. September 1957 in Neuchâtel

## Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik

### Ein magnetisch abstimmbares Filter im Mikrowellengebiet, unter Verwendung der paramagnetischen Resonanz. Von E. BALDINGER und B. STADLER, Basel<sup>1)</sup>.

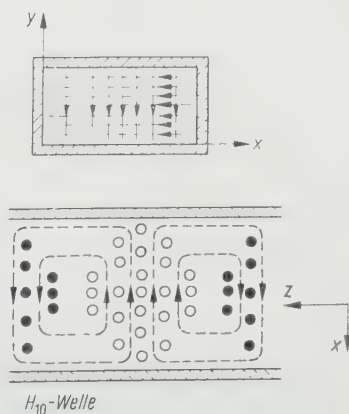
Um die Möglichkeit eines magnetisch abstimmbaren Filters im Mikrowellengebiet zu untersuchen, haben wir auf der Grundlage der paramagnetischen Resonanz eine Brückenordnung mit gekreuzten rechteckigen Hohlleitern aufgebaut. Im Gegensatz zu den bekannten Methoden zum Nachweis der paramagnetischen Resonanzabsorption<sup>2)</sup> verwenden wir in unserem Experiment den Induktions-effekt in Anlehnung an das Blochsche Prinzip der Kerninduktion.

Figur 1 zeigt zwei gekreuzte, rechteckige Wellenleiter, deren Seiten und Achsen paarweise aufeinander senkrecht stehen. Diese Anordnung besitzt die Eigenschaft einer Brückenschaltung. Bei vollkommener Symmetrie dieser Anordnung sind die beiden Hohlleiter elektrisch über ein breites Frequenzband entkoppelt. Um dies zu zeigen, betrachten wir die elektrischen und magnetischen Felder eines in seinem Grundzustand angeregten, rechteckigen Hohlleiters ( $H_{10}$ -Welle). Der elektrische Feldvektor liegt im Hohlleiter *A* parallel zur *y*-Richtung,



Figur 1

Prinzip des magnetisch abstimmbaren Filters.



Figur 2

$H_{10}$ -Welle im rechteckigen Hohlleiter.  
Feldlinien:  $\longrightarrow e$ ;  $\dashrightarrow h$ .

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität, Abteilung für angewandte Physik.

<sup>2)</sup> Siehe zum Beispiel G. FEHER, Bell Syst. techn. J. 36, 449 (1957).

die zugehörigen magnetischen Feldlinien verlaufen in der  $(x, z)$ -Ebene. Setzt man den in seiner  $(x, y)$ -Ebene geschnittenen Hohlleiter  $A$  symmetrisch auf die Breitseite eines zweiten Hohlleiters  $B$  gemäss Figur 1, so tritt dort durch die Öffnung ein hochfrequentes Magnetfeld, welches aus Symmetriegründen keine gemeinsamen Komponenten mit einem  $H_{10}$ -Zustand im Hohlleiter  $B$  besitzt. Daher wird im Hohlleiter  $B$  keine Welle im Grundzustand angeregt, sondern nur höhere Schwingungszustände, für welche durch die Wahl der Abmessungen die Randbedingungen nicht erfüllt sind.

Bringt man in die Verzweigung eine paramagnetische Substanz, so erzeugt ein äusseres statisches Magnetfeld  $H_0 = H_z$  einen selektiven Durchlassbereich in unserer Brücke. Der Durchlassbereich liegt bei der Frequenz

$$f = \gamma H_0,$$

wobei  $\gamma$  das gyromagnetische Verhältnis bedeutet.

Dieser selektive Durchlassbereich kommt wie folgt zustande: Vom Wellenleiter  $A$  her wirkt in der Verzweigung die  $h_x$ -Komponente auf die paramagnetische Substanz. Diese  $h_x$ -Komponente lässt sich in eine links- und eine rechtszirkuläre Komponente aufspalten. Ein in der Verzweigung befindliches magnetisches Moment nimmt dann im Resonanzfall Energie von jener Komponente auf, welche mit dem Drehsinn seiner Larmorpräzession im äusseren statischen Magnetfeld  $H_z$  übereinstimmt. Auf diese Weise wird im Hohlleiter  $B$  die Symmetrie gestört und damit ein magnetisches Wechselfeld in der  $(x, y)$ -Ebene angeregt, welches zu einer existenzfähigen  $H_{10}$ -Welle im Hohlleiter  $B$  Anlass gibt.

Mit einer derartigen Brücke ist es möglich, ein magnetisch abstimmbares Filter aufzubauen. Als Testsubstanz haben wir ein organisches freies Radikal, Diphenyl-Pikryl-Hydrazyl (DPPH), in Form eines kristallinen Pulvers verwendet.  $\gamma$  hat den Wert 2,8 MHz/Oe, die Linienbreite (und somit im wesentlichen auch der Durchlassbereich des Filters) beträgt etwa 5 MHz. Bei einer vorläufigen Messung ergab sich im Resonanzfall ein Übertragungsfaktor von  $-30$  db (Pulver-Füllfaktor rund 0,3) im Bereich 8–10 kHz. Der Abgleich der Brücke ausserhalb der Resonanz war etwa  $-50$  db. Der verwendete Magnet hatte einen Poldurchmesser von 25 cm und einen Polabstand von 4,5 cm. Die Feldinhomogenität betrug im Bereich der Brücke weniger als 0,5 Oe/cm.

Als Unterlage für die theoretische Abschätzung der Brückeneigenschaften haben wir folgende Daten an DPPH gemessen:

Dichte <sup>3)</sup> bei 20°C . . . . .	$\rho = 1,40 \pm 0,03 \text{ g/cm}^3$ ,
Dk. von DPPH-Pulver, Füllfaktor 0,4. . . . .	$\varepsilon = 2,01 \pm 2\%$ ,
Verlustwinkel . . . . .	$\text{tg } \delta = 0,02 \pm 10\%$ .

Da uns zurzeit keine Kristalle genügender Grösse zur Verfügung standen, haben wir die an Pulver gemessenen Grössen auf den festen Körper umgerechnet. Wir erhalten nach BÖTTCHER<sup>4)</sup>

$$\varepsilon_{\text{fest}} = 4,63, \quad \text{tg } \delta_{\text{fest}} \approx 0,05.$$

<sup>3)</sup> Bei F. und M. BRUIN, *Physica* 22, 130, wird die Dichte von DPPH mit  $1,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  angegeben, ein Wert, der uns zu klein erscheint. Unser Wert ist ein Mittelwert aus 3 verschiedenen sorgfältig durchgeführten Messungen. Bei 20°C ergab:

1. Schwebemethode, mit gut entgastem Pulver . . . . .  $\rho = 1,42 \pm 0,05 \text{ g/cm}^3$
2. Pyknometermethode, Kristall von rund 200 mg unter Wasser entgast (durch Anlegen eines leichten Unterdrucks) . . . . .  $\rho = 1,37 \pm 0,05 \text{ g/cm}^3$
3. Pyknometermethode, Kristallpulver im Vakuum (0,2 mm Hg) entgast, Wasser (mit Netzmittel versetzt) im Vakuum zugegeben . . . . .  $\rho = 1,40 \pm 0,05 \text{ g/cm}^3$

<sup>4)</sup> C. J. F. BÖTTCHER, *Theory of Electric Polarisation* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam 1952).



tation normale 9 V). Les variations de la charge ont une influence plus importante sur la fréquence; mais, la puissance de sortie utilisée étant faible, nous avons pu limiter cet effet à  $\Delta f/f_0 = 3 \cdot 10^{-4}$  entre sortie court-circuitée et sortie ouverte, par l'adjonction d'une charge fixe en série avec la charge utile. Pour des puissances de sortie supérieures à 0,5 mW, il est cependant nécessaire d'ajouter un étage de sortie neutrodyné et faiblement couplé à l'oscillateur.

### Récepteur

C'est un récepteur hétérodyne composé d'un étage changeur de fréquence, un étage moyenne fréquence (80 kHz), un étage démodulateur et deux étages basse fréquence (figure 2). Le tout prend place dans une boîte de  $25 \times 17 \times 17$  cm.

Le facteur de bruit de cet amplificateur est de 3,5 environ (en puissance). Ce chiffre pourra sans doute être amélioré, en sélectionnant le premier transistor et en remplaçant le changeur de fréquence par un étage HF.

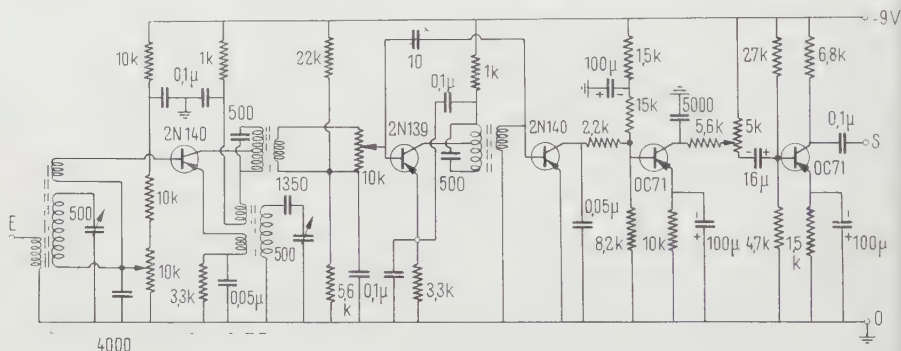


Figure 2  
Récepteur.

### Conclusion

Les paramètres qui décrivent le fonctionnement des transistors sont complexes et dépendent de la fréquence. Ceci rend le calcul des schémas long et laborieux. La dépendance des impédances d'entrée et de sortie de la fréquence, d'une part, et des impédances de charge et de source, d'autre part, est souvent très gênante. A ces inconvénients nous pouvons opposer les avantages suivants:

Facilité d'alimentation sur batteries tout à fait courantes et absence d'échauffement. Ces deux avantages entraînent les suivants: une stabilité exceptionnelle des performances et l'absence totale des perturbations de 50 Hz dues au réseau. Dans les oscillateurs pilotes, les transistors nous semblent préférables aux lampes pour des fréquences inférieures à 5 MHz (50 MHz pour drift-transistor), à condition de bien découpler le transistor du circuit oscillant.

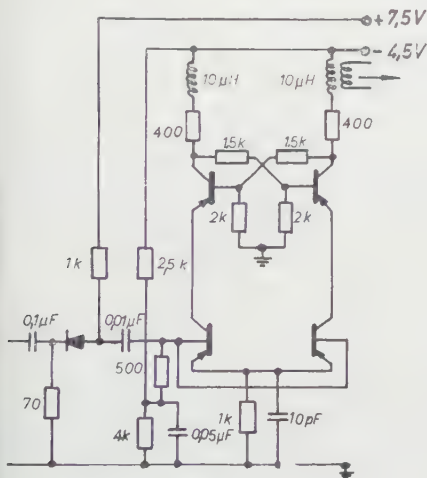
**Eine neue Untersetzerschaltung mit Transistoren.** Von E. BALDINGER und P. SANTSCHI, Basel<sup>1)</sup>.

In Figur 1 und 2 ist eine neuartige Untersetzerschaltung dargestellt, die mit vier Transistoren bestückt ist. Die Arbeitspunkte der Transistoren sind so gewählt, dass der dem sperrenden oberen Transistor zugeordnete untere stark über-

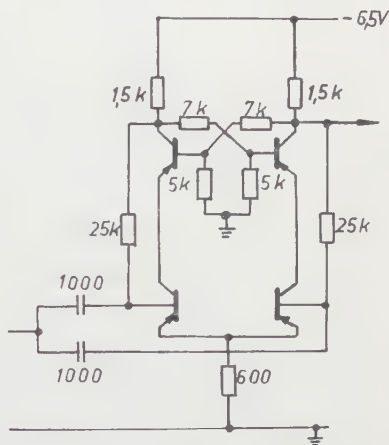
<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität, Abteilung für angewandte Physik.



steuert ist, der dem oberen leitenden zugeordnete dagegen nur schwach oder gar nicht. Die oberen Transistoren (im folgenden als « Haupttransistoren » bezeichnet) haben die gleiche Funktion wie die in den üblichen Schaltungen mit zwei stabilen Zuständen<sup>2)</sup> und sind nicht übersteuert. Die zwei unteren Transistoren (« Hilfstansistoren ») werden als « Gedächtnis » der Schaltung verwendet, das heisst, sie übernehmen die Funktion der Kondensatoren  $C_1$  in der Schaltung von BALDINGER und NICOLET<sup>2)</sup>; bzw. der Induktivität  $L_1$  in der Schaltung von CHAPLIN und OWENS<sup>3)</sup>.



Figur 1



Figur 2

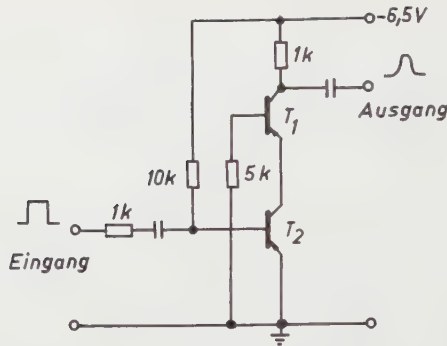
Kapazitäten in pF.

Der am Eingang eines Untersetzers angelegte Impuls hat die Aufgabe, die Schaltung von einem in den anderen stabilen Zustand überzuführen. Es ist deshalb wünschenswert, dass der Eingangsimpuls auf den vorher leitenden Haupttransistor in Sperrrichtung und gleichzeitig auf den vorher sperrenden Haupttransistor in Leitrichtung wirkt. In der vorliegenden Schaltung haben die beiden Hilfstansistoren die Aufgabe, den Eingangsimpuls, welcher in Sperrrichtung auf ihre beiden Basisanschlüsse wirkt, in der gewünschten Weise zu transformieren. Da der Hilfstansistor der leitenden Seite des Untersetzers nicht übersteuert ist, wird sein Kollektorstrom und damit der Strom durch die leitende Seite des Untersetzers unmittelbar gesperrt. Der Hilfstansistor der gesperrten Seite dagegen ist übersteuert, das heisst, sein Emittorstrom ist gleich seinem Basisstrom. Die Übersteuerung hat zur Folge, dass in der Basis dieses Transistors zahlreiche Ladungsträger gespeichert werden<sup>4)</sup>. Wird nun an der Basis des übersteuerten Transistors ein Impuls in Sperrrichtung angelegt, so bringt man gleichzeitig seinen zugeordneten oberen Transistor zum Leiten (Figur 3).

<sup>2)</sup> E. BALDINGER und M. NICOLET, *Untersetzer mit Flächentransistoren*, ZAMP 6, 503–506 (1955).

<sup>3)</sup> G. B. B. CHAPLIN und A. R. OWENS, *A Junction-Transistor-Scaling Circuit with 2 μs Resolution*, Proc. Inst. elect. Engrs. [B] 103, 510–515 (1956).

<sup>4)</sup> J. L. MOLL, *Large-Signal Transient Response of Junction Transistor*, Proc. IRE 42, 1773–1784 (1954).



Figur 3

Serieschaltung eines übersteuerten und eines gesperrten Transistors.

Die Basisspannung des Transistors  $T_1$  ist so gewählt, dass er im Ruhezustand sperrt. Die Basisspannung des  $T_2$  dagegen so, dass ein beträchtlicher Basisstrom fliesst. Ein positiver Eingangsimpuls, der also den Transistor  $T_2$  sperrt, bringt  $T_1$  kurzzeitig zum Leiten.

Die in Figur 1 dargestellte Schaltung zeichnet sich durch ein gutes Auflösungsvermögen aus. Mit dem Typ SB-100 wurde bei einem Spannungssprung am Kollektor von 0,5 V<sup>5</sup>) ein Auflösungsvermögen von 50 m $\mu$ s erreicht.

In diesem Zusammenhang sei noch auf die Schaltung von CHAPLIN und OWENS<sup>3</sup>) hingewiesen, die mit Niederfrequenztransistoren etwa das gleiche Auflösungsvermögen aufweist wie unsere Variante 1. Diese Schaltung<sup>3</sup>) hat jedoch den Nachteil, dass sie für Hochfrequenztransistoren des Typs SB-100 ungeeignet ist.

Gegenüber der Schaltung nach Figur 1 hat die in Figur 2 dargestellte Variante zusätzlich je einen Widerstand zwischen Kollektor des oberen und Basis des unteren Transistors. Sie zeichnet sich durch gute Toleranzen bezüglich der Variation der Schaltelemente aus.

Das gleiche Prinzip der Kombination von übersteuerten und nicht übersteuerten Transistoren wurde mit Erfolg auch bei Ringschaltungen angewendet.

Für die finanzielle Unterstützung dieser Untersuchungen sind wir der Hasler-Stiftung und der Schweizerischen Kommission für Arbeitsbeschaffung zu Dank verpflichtet.

### Couples de pivotement d'origine hydraulique et centrifuge agissant sur les pales de roues Kaplan. Par B. CHAIX, Genève<sup>1</sup>).

Les couples de pivotement agissant sur une aube de turbine hydraulique Kaplan ont la même origine que le moment de torsion auquel est soumise une pale d'hélice d'avion. A part les efforts résultant de la répartition de pression à la surface de l'aube, les forces centrifuges jouent un rôle — particulièrement bien connu en aéronautique.

Le couple d'origine centrifuge unitaire, tel qu'il agirait sur l'aube d'un modèle de turbine ayant pour diamètre  $D_2 = 1$  m et pour chute  $H_n = 1$  m, peut s'écrire :

$$M_{\omega_{11}} = \frac{M_{\omega}}{H_n D_2^3} = \frac{G}{D_2^3} \cdot \frac{4}{\psi} \left( \frac{\bar{L}}{D_2} \right)^2 \frac{J_{y_0} - J_{x_0}}{V L^2} \sin 2 \alpha_0 \quad \left[ \frac{\text{kg m}}{\text{m}^4} \right].$$

<sup>5</sup>) Dieser Spannungssprung reicht nicht aus, um die nachfolgende Stufe direkt anzukoppeln. Ausserdem sollte diese hochauflösende Stufe am Ausgang möglichst wenig belastet werden. Zur Kopplung der nachfolgenden Unterstzerstufe wurde deshalb vorläufig ein zweistufiger Röhrenverstärker mit anschliessender Kathodenstufe verwendet.

<sup>1</sup>) Ateliers des Charmilles S. A.

Dans le terme de droite:

- le 1<sup>er</sup> facteur, avec le poids  $G$  de l'aube, dépend surtout de la chute;
- le 2<sup>e</sup> facteur contient le coefficient de chute ou de pression usuel dans les turbo-machines;
- le 3<sup>e</sup> facteur, avec la valeur relative de la corde moyenne  $\bar{L}/D_2$ , dépend avant tout du nombre des aubes;
- le 4<sup>e</sup>, qui rapporte les moments d'inertie volumétriques principaux de la pale à son volume  $V$  et à  $L^2$ , varie remarquablement peu d'une roue à l'autre, généralement entre 0,05 et 0,06;
- le 5<sup>e</sup> est fonction de l'angle de calage  $\alpha_0$  repéré par la direction principale de l'aube.

Ce couple de pivotement tend toujours à la fermeture. A l'emballement, il peut atteindre 20 kg/m<sup>2</sup>. Cette valeur est alors, multipliée par le nombre des aubes, du même ordre de grandeur que le couple moteur unitaire de la turbine.

Pour une Kaplan tripale, le couple de pivotement d'origine hydraulique a été déterminé au Laboratoire de mécanique des fluides des Ateliers des Charmilles. L'angle de calage  $\alpha_0$  variant entre 0 et 30°; la vitesse de rotation passant de zéro à la vitesse d'emballement, et au delà; l'appareil directeur étant fixe. Les résultats de mesure ont été présentés d'une manière apparentée au coefficient de couple aérodynamique des profils isolés:

$$M_p = S L \frac{\rho}{2} (C_m^2 - U^2)$$

où  $S$  est la surface de l'aube et  $C_m$  la vitesse débitante moyenne.

Dans tout le domaine de mesures, ce coefficient restait dans les limites comprises entre - 0,1 et + 0,3. La tendance prédominante à la fermeture a été obtenue en déplaçant l'axe du tourillon jusqu'aux 50% de la corde des profils.

A vitesse normale, le rapport entre les maxima respectifs des couples centrifuges et hydrauliques est de 0,05 à 0,3 suivant l'installation.

Une publication intégrale aura lieu après que le travail ait été complété.

**Ein Gittergerät für Untersuchungen des Raman-Effektes.** Von E. LÜSCHER und F. TROYON, Lausanne<sup>1)</sup>.

In der Raman-Spektroskopie werden an die Spektrographen besonders hohe Anforderungen an Lichtstärke gestellt, da die Raman-Strahlung sehr schwach ist. Die Wahl eines Prismengerätes drängt sich in vielen Fällen auf, da man damit ein sehr günstiges Öffnungsverhältnis erzielen kann. Andererseits hat man an den vielen Grenzflächen Glas-Luft unerwünschte Schwächung des Lichtes durch diffuse Streuung. Da Untersuchungen sowohl mit der Resonanzlinie Hg 2536 Å als auch bis hinauf zu Hg 6908 Å auf unserem Programm sind und auch Strukturuntersuchungen an Raman-Linien angestellt werden sollen, entschlossen wir uns, ein Gittergerät zu bauen. Damit die Streuverluste möglichst klein gehalten werden können, wurde eine Montierung nach PASCHEN-RUNGE<sup>2)</sup> gewählt.

Der Durchmesser des Rowland-Kreises beträgt 2 m. Das Gitter ( $B + L$ ) besitzt 600 Furchen pro Millimeter, und die gravierte Fläche beträgt 65 × 104 mm, was eine hohe Lichtstärke gewährleistet. Das theoretische Auflösungsvermögen ist 62400 in erster Ordnung (praktisch erreichen wir 30000, da nicht die ganze gravierte Fläche ausgeleuchtet wird). Zur Aufnahme der Spektren kann sowohl

<sup>1)</sup> Laboratoire de Physique de l'EPUL. Unterstützt durch den Schweizerischen Nationalfond für wissenschaftliche Forschung, Nr. 623.

<sup>2)</sup> C. K. RUNGE und F. PASCHEN, Abh. königl. Akad. Wiss. Berlin, Anhang I (1902).

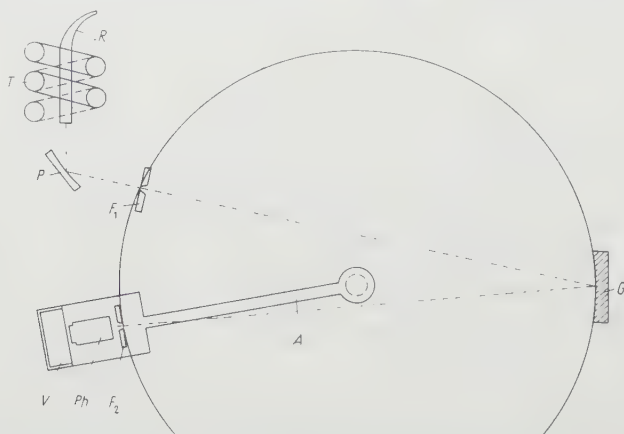
eine Filmkamera als auch ein Photomultiplier verwendet werden, der hinter einem Austrittsspalt montiert ist. Spalt mit Photomultiplier können mittels eines Antriebes längs des Rowland-Kreises das Spektrum kontinuierlich abtasten. Dieser Wagen wird vom Zentrum des Rowland-Kreises aus radial geführt. Der Gitterhalter wurde so konstruiert, dass er in 6 Freiheitsgraden genau justiert werden kann.

Als Lichtquellen zur Anregung der Raman-Spektren benützen wir den inneren Zylinder einer Westinghouse Mitteldruck-Hg-Lampe A-H12 für qualitative Untersuchungen und für Feinstruktur-Messungen eine Toronto<sup>3)</sup>-Spirallampe aus Quarz, hergestellt nach unseren Angaben von der Quarzlampengesellschaft in Hanau. Die Elektroden werden mit Wasser gekühlt, und die Betriebsdaten dieses Brenners sind: 100 V, 15 A.

Die Linien dieser Toronto-Lampe sind äusserst fein. Figur 1 zeigt schematisch die Anordnung des Brenners und des Spektrographen.

Zur Herabsetzung des Streulichtes wurden eine Reihe von Blenden, die mit schwarzem Stoff überzogen wurden, eingebaut.

Unser Dank geht an Herrn Prof. MERCIER für viele wertvolle Diskussionen und an Herrn RIEBEN für seine präzise Arbeit bei der Konstruktion.



Figur 1

*T* Torontobrenner; *R* Raman-Rohr; *P* Parabolspiegel; *F*<sub>1</sub> Eintrittsspalt; *G* Gitter; *A* drehbarer Arm für Kamera und Photomultiplier; *F*<sub>2</sub> Austrittsspalt; *Ph* Photomultiplier; *V* Vorverstärker.

## The Physics of Fluids

Published by the American Institute of Physics

Starting with January 1958, the American Institute of Physics will publish a new journal, *The Physics of Fluids*.

The new journal will be devoted to original contributions to the physics of fluids covering kinetic theory, statistical mechanics, structure and general physics of gases, liquids and other fluids; as well as certain basic aspects of physics of fluids bordering geophysics, astrophysics, biophysics and other fields of science.

<sup>3)</sup> J. W. KEMP, *J. opt. Soc. Amer.* **41**, 868 (1951).

The scope of these fields of physics includes: magneto-fluid dynamics, ionized fluid and plasma physics, shock and detonation wave phenomena, hypersonic physics, rarefied gases and upper atmosphere phenomena, physical aeronomy, transport phenomena, hydrodynamics, dynamics of compressible fluids, boundary layer and turbulence phenomena, liquid state physics and superfluidity.

The Board of Editors of the new journal consists of: J. W. BEAMS (University of Virginia), W. BLEAKNEY (Princeton University), J. M. BURGERS (University of Maryland), S. CHANDRASEKHAR (Yerkes Observatory), H. L. DRYDEN (National Advisory Committee for Aeronautics), W. M. ELSASSER (Scripps Institution of Oceanography), R. J. EMERICH (Lehigh University), J. C. EVVARD (Lewis Flight Propulsion Laboratory), J. O. HIRSCHFELDER (University of Wisconsin), J. KAPLAN (University of California, Los Angeles), J. G. KIRKWOOD (Yale University), G. KUERTH (Case Institute of Technology), A. M. KUETHE (University of Michigan), M. S. PLESSER (California Institute of Technology), S. A. SCHAAF (University of California, Berkeley), G. B. SCHUBAUER (National Bureau of Standards), E. TELLER (University of California, Berkeley), P. P. WEGENER (Jet Propulsion Laboratory), and F. N. FRENKIEL, editor (Applied Physics Laboratory, The Johns Hopkins University).

The new journal will consider appropriate for publication original papers containing sufficiently significant results not published in any other recognized publication. The Physics of Fluids will start as a bimonthly and will become a monthly as soon as it appears desirable.

Correspondence on editorial matters should be addressed to: F. N. FRENKIEL, editor, The Physics of Fluids, Applied Physics Laboratory, The Johns Hopkins University, Silver Spring, Maryland.

Subscription information can be obtained from the American Institute of Physics, 335 East 45th Street, New York 17, New York.

*American Institute of Physics*

### Internationale Tagung für Elektronenmikroskopie 1958 in Berlin

Der 4. Internationale Kongress für Elektronenmikroskopie 1958 findet in Berlin vom 10. bis 17. September statt. Das Organisationskomitee leitet Prof. Dr. ERNST RUSKA, Präsident der International Federation of Electron Microscope Societies, Berlin-Dahlem, Faradayweg 4–6. Auskünfte durch den geschäftsführenden Vorsitzenden Dr. H. KEHLER, Farbwerke Hoechst AG, Frankfurt am Main-Hoechst.

H. KEHLER

---

### Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

---

**Spheroidal Wave Functions – Including Tables of Separation Constants and Coefficients.** Von J. A. STRATTON, P. M. MORSE, L. J. CHU, J. D. C. LITTLE und F. J. CORBATO (The Technology Press of M. I. T. and John Wiley & Sons, New York 1956). 613 S.; \$12.50.

Tafeln der Entwicklungskoeffizienten der Sphäroidfunktionen (das heisst der Lösungen der in gestreckt- und abgeplattet-rotationselliptischen Koordinaten separierten Schwingungsgleichung  $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$  nach zugeordneten Kugelfunktionen und Bessel-Funktionen mit halbzahligem Index). Die Tabellen laufen



nach zwei Eigenwertindizes  $m$  und  $l$  sowie nach einem vom Koordinatensystem und von  $h$  abhängigen Parameter  $h$  bzw.  $g$ , und zwar in den Bereichen:

$$m = 0 \ (1) \ 8, \quad l = m \ (1) \ 8, \quad h \text{ bzw. } g = 0 \ (0,1) \ 1 \ (0,2) \ 8.$$

Eine ausführliche mathematische Einleitung ist dem Tabellenwerk beigegeben.  
P. LÄUCHLI

**Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation.**

VON GUSTAV DOETSCH (R. Oldenbourg, München 1956). 198 S., 12 Abb.; Hln. DM 22.-.

Das Buch richtet sich vor allem an die Praktiker, welche die Laplace-Transformation als mathematisches Hilfsmittel benutzen. Alle Operationsregeln und Sätze sind mathematisch korrekt und unter Angabe aller der bekanntlich oft mühsamen Voraussetzungen formuliert; es werden jedoch keine Beweise dargestellt. Die sehr in die Einzelheiten gehende Schilderung der Lösung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen macht das Buch zu einem sehr wertvollen Hilfsmittel, und auch speziellere Anwendungsgebiete (Differenzengleichungen, Integralgleichungen) werden leicht verständlich und leicht anwendbar auseinandergesetzt. Besondere Erwähnung verdient der kurze, aber sehr schöne Abschnitt über Asymptotik. Wie in der klassischen Laplace-Theorie überhaupt, bleibt auch in diesem Buch die «Impulsfunktion» (Dirac-Funktion) ein Fremdkörper.

Das Buch macht die Ergebnisse, die der Verfasser in seinem grossen mathematischen Werk über Laplace-Transformationen entwickelt hat, einem grösseren Kreis zugänglich und kann wärmstens empfohlen werden.  
E. STIEFEL

**Bibliography of Russian Mathematics Books.** VON GEORGE E. FORSYTHE (Chelsea, New York 1956). 104 S.; \$3.95.

Diese verdienstvolle Schrift enthält die bibliographischen Daten von über 600 Büchern über reine und angewandte Mathematik in russischer Sprache und die Buchtitel in englischer Übersetzung. Wie der Autor in der Einleitung richtig bemerkt, geht aus der russischen mathematischen Literatur hervor, dass Sowjet-Mathematiker die westlichen mathematischen Entwicklungen bedeutend genauer verfolgen als wir die russischen. Diese Unsymmetrie könnte dazu führen, dass man in Russland überhaupt mehr über Mathematik weiss als bei uns. Die durch den Verfasser gebotene Erleichterung in der Benützung russischer Bücher ist daher sehr willkommen.  
E. STIEFEL

**Proceedings of Symposia in Applied Mathematics.** Vol. VI; **Numerical Analysis.** Herausgegeben von John H. CURTISS (McGraw-Hill, New York 1956). 303 S., 22 Abb.; s. 73.-/\$9.75.

Das sechste Symposium der amerikanischen mathematischen Gesellschaft über ein Thema der angewandten Mathematik fand im August 1953 statt und war der numerischen Analysis gewidmet. Der vorliegende Sitzungsbericht gibt einen guten Querschnitt durch die damals aktuellen Probleme. Die Vorträge des Symposiums betrafen hauptsächlich folgende Gebiete: Methoden sukzessiver Approximation zur Lösung linearer Gleichungen und Differentialgleichungen, Anwendung der Funktionalanalysis auf Approximationsprobleme, lineare Planung und kombinatorische Aufgaben, Anwendung der numerischen Analysis auf die Zahlentheorie, konforme Abbildung. Der Bericht enthält die vorzüglich redigierten Ausarbeitungen von 19 Vorträgen.  
E. STIEFEL

**Fünfzig Jahre Relativitätstheorie.** Bern, 11. bis 18. Juli 1953. Helvetica Physica Acta, Supplement IV. Herausgegeben von A. MERCIER und M. KERVARE (Birkhäuser Verlag, Basel 1956). 284 S.; Fr./DM 36.—.

Seit einem halben Jahr liegen die Verhandlungen des Jubiläumskongresses vor, der als Geburtstagsfeier für die Relativitätstheorie EINSTEINS geplant war, der aber unerwartet zu einer Totenfeier für den Geehrten wurde. Diese Tatsache allein schon macht den vorliegenden Band zu einem Dokument von historischer Bedeutung. – In diesem Lichte interessieren besonders die persönlichen Erinnerungen von L. KOLLROS, vor allem aber die gut dokumentierte kritische Darstellung der entscheidenden Jahre der Entwicklung des Relativitätsprinzips von MAX BORN. – Die Vielschichtigkeit der Referate über Spezialprobleme sei in ein paar Stichworten angedeutet: Experimentelle Ergebnisse über die Lichtablenkung und Rotverschiebung und über die Expansion des Universums (hier ist das Fehlen des Referats von BAADE sehr zu bedauern), Kosmologie, Integration der Feldgleichungen, Gravitationswellen, Erweiterungen der Theorie, Deduktion der Bewegungsgleichungen, Schwierigkeiten der Quantisierung. Als Überblick und Bereicherung der Diskussion bedarf das überlegene Schlusswort des Präsidenten W. PAULI besonderer Erwähnung. – Im Ganzen kann man den Herausgebern, vor allem A. MERCIER, zu diesem hochinteressanten Bande nur gratulieren.

C. ENZ

**Elements of Partial Differential Equations.** Von IAN N. SNEDDON (McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London 1957), 327 S., 50 Fig.; £2.16.6.

Die vorliegende Einführung in das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser an der Universität Glasgow und anderswo gehalten hatte. Dem gesteckten Ziel entsprechend, steht die Bestimmung der Lösungen einer vorgelegten Gleichung im Vordergrund, wofür im allgemeinen mehrere (elementare) Lösungsmethoden angegeben werden, während die allgemeine Theorie nur immer so weit entwickelt und dargestellt wird, als dies für das Verständnis der Methoden erforderlich ist. Das Buch gliedert sich in die folgenden Kapitel:

I. *Ordinary Differential Equations in More Than Two Variables.* II. *Partial Differential Equations of the First Order.* III. *Partial Differential Equations of the Second Order.* IV. *Laplace's Equation.* V. *The Wave Equation.* VI. *The Diffusion Equation.*

Das Buch zeichnet sich durch einen sehr klaren und übersichtlichen Aufbau aus. Besonders wertvoll für den Anfänger sind die vielen durchgerechneten Beispiele sowie die bemerkenswert grosse Zahl von Übungsaufgaben, darunter viele angewandte Aufgaben aus dem Gebiet der Physik, der Technik und der Biologie. Als Ganzes gesehen, handelt es sich um eine ausgezeichnete und sehr empfehlenswerte Einführung für die Studierenden der Mathematik, der Physik und der Ingenieurwissenschaften; das Buch bietet aber auch dem Praktiker, der gelegentlich mit partiellen Differentialgleichungen zu tun hat, viele nützliche Hinweise.

E. ROTH-DESMEULES

**The Theory of Games and Linear Programming.** Von S. VAJDA (Methuen & Co., London 1956). 106 S., 14 Fig.; 8 s. 6 d.

Dieses in der Serie *Methuen's Monographs on Physical Subjects* herausgegebene Bändchen gibt einen guten Überblick über ein neues Gebiet der angewandten

Mathematik, das erst mit der Anwendungsmöglichkeit von elektronischen Rechenmaschinen seine volle Bedeutung erlangt hat.

Ausgehend von der elementaren Theorie der Spiele, wie sie von J. v. NEUMANN im Jahre 1928 entwickelt wurde, versteht es der Verfasser, die Problemstellung der «Linearen Programmierung» klar herauszuarbeiten. Anhand von vielen Beispielen aus den Gebieten der Technik, Statistik und Wirtschaft, von denen das bekannteste wohl das Transportproblem ist, wird der Leser mit Extremalaufgaben bekanntgemacht, die als Nebenbedingungen Systeme von linearen Ungleichungen besitzen und deren Lösung mit Hilfe der Variationsrechnung nicht mehr möglich ist.

Ein kurzes Kapitel ist der graphischen Darstellung des Problemkreises gewidmet, bevor – aufbauend auf elementaren algebraischen Kenntnissen – die Simplexmethode zur Lösung solcher Extremalprobleme hergeleitet wird. Die Verbindung mit der Theorie der Spiele, die sich als Spezialfall der Linearen Programmierung ergibt, wird durch die Anwendung der Simplexmethode auf sogenannte «Two-person games» hergestellt.

Viele im Detail durchgerechnete Aufgaben erlauben es dem Leser, sich schnell in das Gebiet einzuarbeiten, während die ausführliche Bibliographie das weitere Studium erleichtert.

TH. GINSBURG

**Interpolation and Allied Tables.** Prepared by H. M. Nautical Office. Published by order of The Lords Commissioners of the Admiralty (Her Majesty's Stationery Office, London 1956). 80 S.; 5 s.

Dieses kleine Buch enthält alles, was ein Rechner für die Interpolation in numerischen Tabellen braucht; es ist eine Ausgestaltung der Tabellen gleichen Titels, die erstmalig 1936 von L. J. COMRIE herausgegeben und häufig abgedruckt wurden. Das Buch enthält zunächst sehr bequeme Tafeln für lineare und quadratische Interpolation und dann Tafeln der höheren Besselschen und Everettschen Interpolationskoeffizienten. Weiter findet man eine Formelsammlung über Differenzenrechnung und numerische Integration. Erwähnt sei noch, dass ausgiebig der Comriesche «Rückwurf» der höheren Differenzen auf die niedrigeren benutzt wird und dass nun auch von der Tschebyscheffschen Abkürzung zu Interpolationszwecken Gebrauch gemacht wird.

E. STIEFEL

**Elektrische und magnetische Potentialfelder.** Von H. BUCHHOLZ (Springer-Verlag, Berlin 1957). 552 S., 202 Abb.; DM 72.—.

In diesem Werk werden, ausgehend von den physikalischen Grundlagen, zunächst die mathematischen Hilfsmittel für die Integration der Gleichung von LAPLACE gebracht. Diese werden dann auf ebene elektrische Felder, auf elektrische Felder von Hochfrequenzleitern, auf räumliche elektrische Felder, auf räumliche magnetische und hochfrequente Felder sowie auf ebene magnetische Felder angewandt. In jedem dieser Fälle werden mehrere Beispiele durchgerechnet, welche dazu geeignet sind, die Anwendungen der allgemeinen Grundsätze für die Bestimmung der Felder zu zeigen. Es ist sehr erfreulich, dass viele Beispiele auch numerisch durchgerechnet werden, wodurch der Leser ein klares Bild der angewandten Verfahren erhalten kann. Historisch ist einzuwenden, dass zwar M. ABRAHAM um die Jahrhundertwende hochfrequente Felder mittels elektrostatischer Felder angenähert berechnet hat, dass aber Lord KELVIN diese Analogie bereits mehr als 20 Jahre früher ausführlich begründet und veröffentlicht hat.

Das Buch erfordert ein eingehendes Studium, um den vollen Nutzen aus dem dargebotenen Stoff zu ziehen. Es ist jedem zu empfehlen, der sich mit der Bestimmung von Potentialfeldern beschäftigen muss oder will.

M. STRUTT

## Theory of Oscillation Type Viscometers III: A Thin Disk<sup>1)</sup>

By ALFONSO GIL AZPEITIA<sup>2)</sup> and GORDON FRANK NEWELL<sup>3)</sup>, Providence, R. I.

### Abstract

The small amplitude oscillation of a thin disk of finite radius suspended in an 'infinite' fluid is considered with a view toward its use as a viscometer. The fluid motion is analyzed under the assumption that the boundary layer thickness of the fluid is small compared with the radius of the disk but large compared with the thickness of the disk. Formulas are obtained relating the frequency and decrement of oscillation to the density and viscosity of the fluid.

### 1. Introduction

The slow oscillation of a disk suspended in an 'infinite' fluid by a torsion wire has been used by several investigators as a means of determining the viscosity of the fluid [1-5]<sup>4)</sup>. The simplest approximate relation between the decrement of the free oscillation of the disk and the viscosity of the fluid has been obtained by assuming that the effects of the edge of the disk are negligible, i. e. by assuming that the drag per unit area exerted on the disk by the viscous fluid is the same as that which would be exerted on a disk of infinite radius oscillating at the same rate. For most practical applications, this approximation is, however, too crude for accurate viscosity measurements. Measurements of the decrement can be made with an accuracy ranging from about 0.1 to 1% whereas the error in the approximate theory may be anywhere from a few percent to 100% in typical applications.

Several attempts have been made to improve the theory [1-5] by making corrections for the edge but in all cases these corrections have been of a semi-

<sup>1)</sup> This research was supported by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command, under contract No. AF 18 (600) 1548. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government. Part of the work was done while one of the authors (G. F. N.) was being supported by a grant from the Alfred P. Sloan Foundation.

<sup>2)</sup> Brown University, now at the University of Massachusetts.

<sup>3)</sup> Brown University.

<sup>4)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 117. An extensive bibliography and a review of both the theoretical and experimental situation is to be found in [3].



empirical type and, though qualitatively correct, do not give predictions of well defined accuracy. The difficulty is primarily a mathematical one. Though the equations of motion for the fluid and for the disk can be accurately formulated they can not be accurately solved (except in certain limiting cases).

It is the purpose of the following paper to analyze the equations describing the fluid motion and derive a relation between the decrement and viscosity assuming that the thickness of the disk is small compared with the boundary layer thickness of the fluid but the radius of the disk is large compared with the boundary layer thickness. This will extend the theory of the infinite disk mentioned earlier and include an approximate influence of the edge. It will however be obtained in such a way that the accuracy of the formulae and their range of applicability are both well defined.

A general formulation of the theory of oscillation type viscometers along with a list of notation is given in Part I [6]. We shall only very briefly outline here the formulae of Part I which are relevant to the present problem.

The mathematical difficulties arise mainly from trying to find solutions,  $w(\xi, \eta, s)$  of the equation, equations (13), (14) of Part I,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = s w, \quad (1)$$

subject to the boundary conditions

$$w(\xi, \eta, s) = 1 \quad \text{on the surface of the disk.} \quad (2)$$

We need not necessarily find the complete solution of equation (1) but we must obtain enough information regarding it to evaluate the integral, equation (16) of Part I,

$$D(s) = \frac{\varrho \delta^5 s}{I} \iint_A \xi^2 \frac{\partial w(\xi, \eta, s)}{\partial n} d\sigma. \quad (3)$$

After any possible transients have decayed, the angular displacement  $\alpha(\tau)$  of the disk is a decaying oscillation of the form, equation (18) of Part I,

$$\alpha(\tau) = A e^{-\Delta \omega \tau} \cos(\omega \tau + \psi). \quad (4)$$

The motion of the disk and that of the fluid are related in that the values of  $\Delta$  and  $\omega$  are obtained by solving the transcendental equation, equation (40) of Part I,

$$(S + \Delta_0)^2 + 1 + D(S) = 0 \quad (5)$$

for a pair of complex conjugate roots somewhere near  $S \sim \pm i$  and evaluating  $\omega$  and  $\Delta$  (real numbers) from the complex equation

$$S = (\pm i - \Delta) \omega. \quad (6)$$



# ZAMP VOL. IX (1958)

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik  
Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

---

Volumen IX (1958) der ZAMP erscheint in zwei Teilen, nämlich einerseits als

## VOL. IXa

mit 4 Faszikeln zu folgenden Publikationsdaten: *Fasz. 1* am 25. Januar, *Fasz. 2* am 25. Juli, *Fasz. 3* am 25. September und *Fasz. 4* am 25. November 1958, und anderseits als

## VOL. IXb

### FESTSCHRIFT JAKOB ACKERET

eine 777 Seiten umfassende Doppelnummer *Fasz. 5/6* im Juni 1958.

Die Einzelpreise pro Nummer betragen unverändert Fr. 12.- (DM 12.-), bzw. Fr. 24.- (DM 24.-) für die Doppelnummer.

---

Volume IX (1958) of ZAMP will be published in two parts,

## VOL. IXa

to be issued as follows: *No. 1* on January 25th, *No. 2* on July 25th, *No. 3* on September 25th and *No. 4* on November 25th 1958, whilst

## VOL. IXb

### FESTSCHRIFT JAKOB ACKERET

will appear as a double issue *No. 5/6* in June 1958, containing 777 pages. The price for a single copy per issue remains unchanged at SFr. 12.- or SFr. 24.- for the double issue.

---

Volume IX (1958) de ZAMP paraîtra en deux parties,

## VOL. IXa

comme suit: *fasc. 1* le 25 janvier, *fasc. 2* le 25 juillet, *fasc. 3* le 25 septembre et *fasc. 4* le 25 novembre 1958, tandis que le

## VOL. IXb

### FESTSCHRIFT JAKOB ACKERET

sera un fascicule double *No. 5/6*, de 777 pages et paraîtra au mois de juin 1958. Les prix des fascicules restent à frs. 12.- pour le fascicule simple ou à frs. 24.- pour le fascicule double.

---

**BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL/STUTTGART**



The fact that  $D(s)$  involves the viscosity  $\nu$  means that equations (5) and (6) define a relation between  $\omega$ ,  $A$  and  $\nu$  which would be used to find  $\nu$  from measured values of  $\omega$  or  $A$  or both.

Once  $D(s)$  has been found, the determination of  $\nu$  from known values of  $A$  and/or  $\omega$  can be done by a method of successive approximations. Although this step may be somewhat tedious it is straight-forward and presents no serious difficulties. The most serious problem is that of finding an accurate but manageable expression for  $D(s)$  in terms of the various physical parameters describing the fluid and the disk. It is this problem which will be of primary concern here.

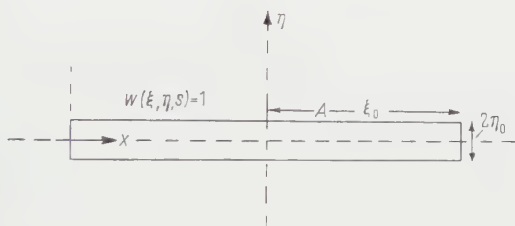


Figure 1  
Coordinates of disk.

The geometry of the disk is shown in Figure 1. We let  $2\eta_0$  and  $\xi_0$  be the thickness and the radius of the disk respectively, measured in units of the boundary layer thickness  $\delta$ . This differs from the notation for the cup in Part I only in that these same quantities now refer to outside dimensions of a disk rather than the inside dimensions of a cup. The condition that the thickness of the disk be small compared with the boundary layer thickness which in turn is small compared with the radius of the disk means that

$$\eta_0 \ll 1 \ll \xi_0. \quad (7)$$

Under these conditions, the equations for  $w$  must describe a situation consistent with the known fact that as one leaves the disk, the amplitude of the fluid motion decreases and  $|w|$  is appreciably less than 1 at a distance from the disk of order  $\delta$  or a distance 1 measured in units of  $\delta$ . The surfaces of constant  $w$  are nearly parallel with the top and bottom surfaces of the disk along most of these surfaces and deviate from planes only within a distance of the order of one boundary layer thickness from the edge.

To obtain a first approximation to  $D(s)$ , one is justified in neglecting the influence of the edge because the integral in equation (3) extends over the entire surface, of which the vicinity of the edge is only a small part. Large errors in  $\partial w / \partial n$  only near the edge will give only relatively small errors in  $D(s)$ .

We, therefore, neglect the dependence of  $w(\xi, \eta, s)$  upon  $\xi$  for  $\xi < \xi_0$  and choose<sup>5)</sup>

$$w_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \exp[-s^{1/2}(\eta - \eta_0)] & \text{for } \eta > \eta_0, \xi < \xi_0, \\ \exp[+s^{1/2}(\eta + \eta_0)] & \text{for } \eta < -\eta_0, \xi < \xi_0, \\ 0 & \text{for } \xi > \xi_0, \end{array} \right\} \quad (8)$$

which is a solution of equation (1) except for a discontinuity at  $\xi = \xi_0$ . Substitution of  $w_0$  into equation (3) gives

$$D(s) \sim D_0(s) = \frac{\varrho \delta^5 \pi \xi_0^4 s^{3/2}}{I} = m s^{3/2}, \quad (9)$$

in which  $m = \varrho \delta^5 \xi_0^4 \pi / I$  is the similarity parameter of [1].

The nature of this approximation is such that equation (8) is an accurate representation of  $w$  for  $\xi_0 - \xi \gg 1$ , i. e. sufficiently far from the edge, in fact the error,  $w - w_0$ , decreases exponentially as one moves inward from the edge. The error in  $D_0$  arises almost entirely from making a very bad approximation to  $w$  in the immediate vicinity of the edge.

The fact that the error is confined to the vicinity of the edge can be used to considerable advantage. To an observer sitting near the edge and viewing the influence of the edge over distances of the order of one boundary layer thickness, the center of the disk is very far away and he sees the edge moving with nearly a linear oscillation in a direction perpendicular to the radius vector from the origin rather than with a torsional oscillation.

The mathematical consequences of this can best be seen by choosing a coordinate system with origin at the edge. We let

$$x = \xi_0 - \xi, \quad (10)$$

and rewrite equation (1) in the form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{3}{(\xi_0 - x)} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = s w. \quad (11)$$

We anticipate that  $\partial^2 w / \partial x^2$ ,  $\partial^2 w / \partial \eta^2$  and  $\partial w / \partial x$  are all of order 1 over most of the region near the edge. The term  $(\xi_0 - x)^{-1} \partial w / \partial x$  is, however, of order  $\xi_0^{-1} \ll 1$ . Far from the edge ( $x > 0$ ) both  $\partial^2 w / \partial x^2$  and  $\partial w / \partial x$  are small in accordance with the previous approximation. For a next approximation we, therefore, can neglect the first derivative term in equation (11) and define

<sup>5)</sup> Although we are interested in solutions of equation (1) for complex values of  $s$  and particularly for  $s \sim i$ , it is convenient in deriving formulas to consider  $s$  as a real positive number and  $s^{1/2}$  as its positive square root. Formulae for complex values of  $s$  can always be obtained by appropriate analytic continuation into the complex plane.

$w_1(x, \eta, s)$  to be a solution of the equation

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = s w_1. \quad (12)$$

The solution of equation (12) with  $w_1 = 1$  on  $A$  is still a very difficult problem, but it is possible to find an exact solution for the special case  $\eta_0 = 0$ . This is done in section 2. In sections 3 and 4 we will obtain corrections for the curvature of the edge, the error due to neglecting the first derivative term in equation (13) and in section 5 we will obtain a correction for a non-zero but small value of  $\eta_0$ .

## 2. Edge Correction for Infinite Radius and Zero Thickness

We consider here the solution of equation (12) near the edge of a disk of very large (infinite) radius and zero thickness, i. e. the solution for which  $w_1 = 1$  on a semi-infinite line (Figure 2). The solution is obtained by the Wiener Hopf technique<sup>6</sup>).

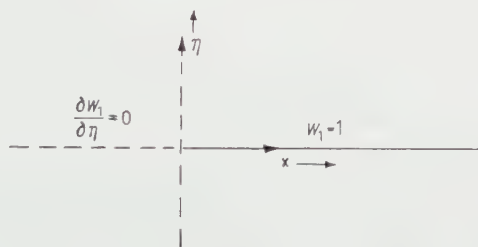


Figure 2  
Geometry of thin disk.

We first define the Fourier transform of  $w_1$  with respect to  $x$  as

$$w_1^*(p, \eta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx} w_1(x, \eta, s). \quad (13)$$

It is clear that this integral will not exist for  $p = 0$  or for  $\text{Imag } p > 0$  because we expect that  $w_1 \rightarrow w_0 = \exp(-s^{1/2} |\eta|)$  for  $x \rightarrow +\infty$ . We assume, however, that the integral exists in some region of the lower half plane, say for  $\text{Imag } p = -\varepsilon$  with  $\varepsilon > 0$ . The inversion formula for equation (13) in this case is given by

$$w_1(x, \eta, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon} dp e^{+ipx} w_1^*(p, \eta, s). \quad (14)$$

<sup>6</sup>) Most of the work described in this section was taken from unpublished notes written by G. F. CARRIER. A brief description of this is contained in [7]. The results were also recalculated by L. N. PERSEN.



The Fourier transform of equation (14) gives the differential equation

$$\frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} = (s + p^2) w_1^*$$

and the most general solution of this equation that remains finite for  $|\eta| \rightarrow \infty$  is

$$w_1^* = A(p, s) \exp[-(s + p^2)^{1/2} |\eta|] \quad (15)$$

in which  $A(p, s)$  is some arbitrary function to be determined so that  $w_1$  satisfies the boundary conditions at  $\eta = 0$ .

In addition to the boundary condition

$$w_1(x, 0, s) = 1 \quad \text{for } x > 0, \quad (16)$$

the condition

$$\frac{\partial w_1(x, \eta, s)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \quad \text{for } x < 0 \quad (16a)$$

is implied by the symmetry of  $w_1$  with respect to reflections across the line  $\eta = 0$ . The boundary conditions tell us nothing about  $w_1(x, 0, s)$  for  $x < 0$  or  $\partial w_1 / \partial \eta|_{\eta=0}$  for  $x > 0$ , in fact the latter quantity is what we particularly wish to find in order to evaluate  $D(s)$ .

Suppose we define

$$f(p, s) = \int_{-\infty}^0 dx e^{-ipx} w_1(x, 0, s) \quad (17)$$

to be the Fourier transform of the (unknown) function  $w_1$  along the semi-infinite line  $x < 0$  and

$$h(p, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx} \frac{\partial w_1(x, \eta, s)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0_+} = \int_0^{\infty} dx e^{-ipx} \frac{\partial w_1(x, \eta, s)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0_+} \quad (18)$$

to be the Fourier transform of the (also unknown) function  $\partial w_1 / \partial \eta$  along the top side of the infinite line  $\eta = 0$ , ( $\eta = 0_+$ ), or equivalently along the semi-infinite line  $x > 0$ .

These Fourier transforms can also be found in terms of  $A(p, s)$  through equations (15) and (16). We thus obtain two relations among the three unknowns  $f$ ,  $h$  and  $A$ , namely

$$A(p, s) = f(p, s) - \frac{i}{p}, \quad -(s + p^2)^{1/2} A(p, s) = h(p, s). \quad (19)$$

Although these are the only equations we can obtain from the boundary conditions, they do not describe all the information we know about these

functions. If we insist that  $w_1(x, 0, s) \rightarrow 0$  faster than  $e^{x\epsilon}$  as  $x \rightarrow -\infty$ , for some  $\epsilon > 0$ , then  $f(p, s)$  defined by equation (17), is analytic in  $p$  for all  $p$  with  $\text{Imag } p \geq -\epsilon$ . On the other hand,  $h(p, s)$ , is defined and analytic for  $\text{Imag } p < 0$ . We also insist that  $f(p, s) \rightarrow 0$  at least as fast as order  $|p|^{-1}$  for  $\text{Imag } p \rightarrow +\infty$  and  $h(p, s) \rightarrow 0$  for  $\text{Imag } p \rightarrow -\infty$ .

These requirements on  $h$  and  $f$  along with the one equation relating  $h$  and  $f$  obtained by eliminating  $A$  from equation (19),

$$h(p, s) = -(s + p^2)^{1/2} \left[ f(p, s) - \frac{i}{p} \right], \quad (20)$$

uniquely determine both  $h$  and  $f$ . The fact that  $f(p, s)$  is analytic for  $\text{Imag } p \geq -\epsilon$  means that the analytic continuation of  $h(p, s)$  into the upper half plane must have a simple pole at the origin and a branch point at  $p = i\sqrt{s}$ . The fact that  $h(p, s)$  is analytic in the lower half plane means that the analytic continuation of  $f(p, s)$  has a branch point at  $p = -i\sqrt{s}$ . These are the only singularities that equation (20) will allow. Equivalently, we could rearrange the terms of equation (20) into the form

$$-\frac{i s^{1/4}}{p} + \frac{h(p, s)}{(i\sqrt{s} + i p)^{1/2}} = \frac{i}{p} [(i\sqrt{s} - i p)^{1/2} - s^{1/4}] - (i\sqrt{s} - i p)^{1/2} f(p, s). \quad (20a)$$

We see that the right-hand side of equation (20a) is analytic and bounded at least for  $\text{Imag } p \geq -\epsilon$ . The left-hand side is analytic and bounded for  $\text{Imag } p < 0$  and vanishes for  $\text{Imag } p \rightarrow -\infty$ . Although equation (20a), as derived above, holds only in the strip  $0 > \text{Imag } p \geq -\epsilon$ , the analytic continuation is defined everywhere. We conclude that both sides of equation (20a) must be analytic and bounded everywhere in the  $p$ -plane and vanish for  $\text{Imag } p \rightarrow -\infty$ . However, the only function which is analytic and bounded everywhere and vanishes at  $\infty$  is the null function and therefore we conclude that both sides of equation (20a) must be identically zero, i. e.

$$h(p, s) = \frac{i s^{1/4} (i\sqrt{s} + i p)^{1/2}}{p} \quad (21a)$$

and

$$f(p, s) = \frac{i [(i\sqrt{s} - i p)^{1/2} - s^{1/4}]}{(i\sqrt{s} - i p)^{1/2} p}. \quad (21b)$$

Knowing  $h(p, s)$  explicitly, we can now work our way backwards and obtain  $A(p, s)$  from equation (19),  $w_1^*$  from equation (15) and finally  $w_1(x, \eta, s)$  from equation (14),

$$w_1(x, \eta, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\epsilon}^{+\infty - i\epsilon} dp \frac{s^{1/4} \exp[i p x - (s + p^2)^{1/2} |\eta|]}{p (i\sqrt{s} - i p)^{1/2}}. \quad (22)$$

The integrand of equation (22) has a pole at  $p = 0$  and branch points at  $p = \pm i\sqrt{s}$ . If  $x > 0$ , we can close the contour with a semi-circle as shown by the solid curve in Figure 3a, and for  $x < 0$  by a semi-circle shown by

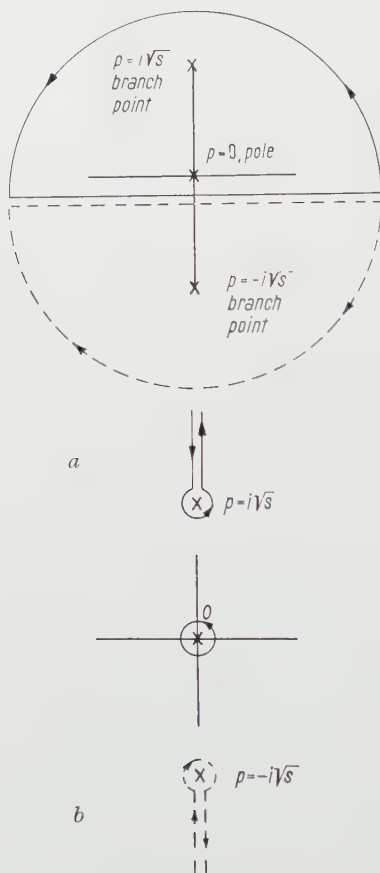


Figure 3

Deformed contour integrals in  $p$ -plane.

the broken curve. The two contours can then be deformed into those shown in Figure 3b. For  $x > 0$ , there are two contributions to  $w_1$ , one from the pole at  $p = 0$  and one from the branch cut in the upper half-plane. For  $x < 0$ , there is only the branch cut in the lower half-plane. The contribution to  $w_1$  from the pole at  $p = 0$  is quite interesting for it gives

$$w_0(x, \eta, s) = \left\{ \begin{array}{ll} \exp(-\sqrt{s} |\eta|) & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x < 0, \end{array} \right\} \quad (23)$$

which we recognize as the same function  $w_0$  given by equation (8) of the previous section for  $\eta_0 = 0$ .

The contribution to  $w_1$  from the two branch cuts describes the distortion of  $w_0$  caused by the edge. By changing the variables of integration so that  $p = i\sqrt{s}y$  for  $x > 0$  and  $p = -i\sqrt{s}y$  for  $x < 0$ , we can obtain integrals along the real line and so produce the relation

$$w_1 - w_0 = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{dy}{y(y+1)^{1/2}} \sin[\sqrt{s}(y^2-1)^{1/2}|\eta|] \exp(-\sqrt{s}yx) & \text{for } x > 0, \\ +\frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{dy}{y(y-1)^{1/2}} \cos[\sqrt{s}(y^2-1)^{1/2}|\eta|] \exp(+\sqrt{s}yx) & \text{for } x < 0. \end{cases} \quad (24)$$

We are not able to evaluate this integral explicitly but we can evaluate  $\partial w_1 / \partial \eta$  at  $\eta = 0$  which is a measure of the drag force per unit area exerted by the fluid on the disk and which appears in the integrand of equation (3). We find that

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = -\sqrt{s} \{ 1 + (\pi x \sqrt{s})^{-1/2} \exp(-x\sqrt{s}) - \operatorname{erfc}(x\sqrt{s})^{1/2} \}, \quad (25)$$

in which  $\operatorname{erfc}$  is the complementary error function. The first term,  $-\sqrt{s}$ , is the contribution from  $w_0$  and the remaining terms describe the influence of the edge. For small  $x$ , equation (25) gives a square root singularity,

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \sim -s^{1/4} (\pi x)^{-1/2} \quad \text{for } |x\sqrt{s}| \ll 1, \quad (25a)$$

whereas for large  $x$ , the influence of the edge decreases at least exponentially,

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \sim -\sqrt{s} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \pi^{-1/2} (x\sqrt{s})^{-3/2} \exp(-x\sqrt{s}) \right\} \quad \text{for } |x\sqrt{s}| \gg 1. \quad (25b)$$

Our next approximation to  $D(s)$ ,  $D_1(s)$  is obtained by substituting  $w_1$  into equation (3),

$$D_1(s) = D_0(s) - 4ms \xi_0^{-4} \int_0^{\xi_0} dx (\xi_0 - x)^3 \left[ \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \frac{\partial w_0}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}. \quad (26)$$

We have just seen that the integrand in equation (26) decreases very rapidly with increasing  $x$  and by the time  $x$  reaches  $\xi_0$ , it is dominated by a factor  $\exp(-\xi_0\sqrt{s})$ . We have assumed that  $|\xi_0\sqrt{s}| \gg 1$ , however, and we are in position to account for errors of this order of magnitude. We cannot hope to evaluate  $D(s)$  more accurately than to within some finite power of  $\xi_0^{-1}$ , never to within an exponentially small error. The upper limit of integration  $\xi_0$ , in

equation (26) can therefore be replaced by  $\infty$  with no significant loss of accuracy.

$D_1(s)$  can be found by substituting equation (25) into (26) but a simpler and more direct scheme is to express  $D_1(s)$  directly in terms of  $h(p, s)$  and its derivatives. From equations (18), (21a) and (23), we see that

$$\int_0^{\infty} dx x^n \left[ \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \frac{\partial w_0}{\partial \eta} \right]_{\eta=0+} = i^n \frac{d^n}{dp^n} \left\{ h(p, s) + \frac{i \sqrt{s}}{p} \right\}_{p=0} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(n+1) 2^{n+1} s^{n/2}}. \quad (27)$$

This gives the values of the integrals in equation (26) if we let  $\xi_0 \rightarrow \infty$  in the integration limit and expand  $(\xi_0 - x)^3$  in powers of  $x$ . We thus obtain

$$D_1(s) \sim m s^{3/2} \left[ 1 + 2 (\xi_0 | s)^{-1} - \frac{3}{2} (\xi_0 | s)^{-2} + \frac{3}{2} (\xi_0 | s)^{-3} - \frac{15}{16} (\xi_0 | s)^{-4} \right]. \quad (28)$$

The error in equation (28) is exponentially small [proportional to  $\exp(-\xi_0 \sqrt{s})$ ] but the error resulting from approximating  $D(s)$  by  $D_1(s)$  is of order  $(\xi_0 \sqrt{s})^{-2}$ . Only the first two terms of equation (28) are significant, therefore.

### 3. Curvature Correction, Zero Thickness

Assuming still that the thickness of the disk is zero, the chief source of error in the analysis of the previous section arises from the use of equation (12) instead of equation (11); we have neglected the curvature of the edge by using effectively a rectangular coordinate system rather than a cylindrical one.

Since the first derivative term of equation (11) is important only near the edge at most, the next approximation is obtained by replacing  $\xi_0 - x$  by  $\xi_0$  in this term and choosing  $w_2(x, s)$  as the solution of

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{3}{\xi_0} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} = s w_2, \quad (29)$$

with the same boundary conditions as  $w_1$ , equation (16).

The solution of equation (29) can be obtained by almost exactly the same procedure as used in the previous section. The only difference up to and including equation (20) is that  $(p^2 + s)$  is replaced by  $(p^2 + 3 i p \xi_0^{-1} + s)$ . The latter expression has roots at  $i \alpha$  and  $-i \beta$  with

$$\alpha = \left( s + \frac{9}{4 \xi_0^2} \right)^{1/2} - \frac{3}{2 \xi_0}, \quad \beta = \left( s + \frac{9}{4 \xi_0^2} \right)^{1/2} + \frac{3}{2 \xi_0} \quad (30)$$

instead of at the points  $\pm i \sqrt{s}$ . The two roots are on opposite sides of the real



axis, however, and a separation similar to equation (20a) is possible, namely

$$-\frac{i\sqrt{\beta}}{p} + \frac{h(p, s)}{(\alpha + i p)^{1/2}} = \frac{i}{p} [(\beta - i p)^{1/2} - \beta^{1/2}] - (\beta - i p)^{1/2} f(p, s). \quad (31)$$

Since the right-hand side is analytic in the upper half plane and the left-hand side analytic in the lower half plane, we conclude that

$$h(p, s) = \frac{i\sqrt{\beta}(\alpha + i p)^{1/2}}{p} \quad (32)$$

and

$$w_2(x, \eta, s) = \frac{\sqrt{\beta}}{2\pi i} \int_{i\epsilon}^{\infty - i\epsilon} dp \frac{\exp[i p x - (p^2 - 3 i p \xi_0^{-1} + s)^{1/2} |\eta|]}{p (\beta - i p)^{1/2}}. \quad (33)$$

This is the same type of expression as equation (22) and from it we obtain

$$\frac{\partial w_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0_+} = -\sqrt{s} \{1 + (\pi x \alpha)^{-1/2} \exp(-x \alpha) - \operatorname{erfc}(x \alpha)^{1/2}\}. \quad (34)$$

$D_2(s)$  is finally evaluated in the same way as  $D_1(s)$  and differs from  $D_1(s)$ , equation (28), only in that  $(\xi_0 \alpha)$  replaces  $(\xi_0 \sqrt{s})$ . If we expand  $\xi_0 \alpha$  in powers of  $(\xi_0 \sqrt{s})^{-1}$ , we obtain for  $D_2(s)$  the expansion

$$D_2(s) \sim m s^{3/2} \left\{ 1 + 2 (\xi_0 \sqrt{s})^{-1} + \frac{3}{2} (\xi_0 \sqrt{s})^{-2} - \frac{3}{4} (\xi_0 \sqrt{s})^{-3} - \frac{15}{16} (\xi_0 \sqrt{s})^{-4} + \dots \right\}. \quad (35)$$

Considered as an approximation to  $D(s)$ , the first three terms of  $D_2(s)$  are significant instead of just two terms as in equation (28).

#### 4. Variational Method

The procedure used in the previous sections can undoubtedly be extended further for  $\eta_0 = 0$  but with increasing complexity at each stage and no satisfactory extension to  $\eta_0 \neq 0$  appears obvious. We now shift the direction of attack to find a variational method. The chief advantage of this is that  $D(s)$  will be expressed as an integral which has a stationary value with respect to small changes in the function  $w(\xi, \eta, s)$ .  $D(s)$  will then be relatively insensitive to small errors in  $w$  and so we will be able to make better use of the approximations to  $w$  derived in the previous sections.

We begin with equations (1) and (2). Multiply equation (1) by  $\xi^2 w$  and integrate over the volume  $V$  outside the disk.

$$\iiint_V d\tau \xi^2 w \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - s w \right] = 0$$

with  $d\tau = 2\pi \xi d\xi d\eta$  a cylindrically symmetric volume element of  $V$ . If we integrate this by parts (or use the divergence theorem) and use the fact that  $w = 1$  on  $A$ , equation (2), and  $w = 0$  at  $\infty$ , we obtain the equation

$$\iint_V d\tau \xi^2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + s w^2 \right] = \int_A d\sigma \xi^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (36)$$

with  $d\sigma = 2\pi d\xi$ .

This equation is valid subject to the condition that  $w$  is a solution of equations (1) and (2). Comparing the right-hand side with equation (3) we see that

$$D(s) = \frac{\varrho \delta^5 s}{I} \iint_V d\tau \xi^2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + s w^2 \right]. \quad (37)$$

If we should ask under what conditions this integral has a stationary value with respect to changes in  $w$ , we will find that the Euler equations give back equation (1). In other words the value of  $D(s)$  given by equation (37) is insensitive to small variations in  $w$  from values of  $w$  which satisfy equations (1) and (2).

We can integrate equation (37) by parts, more or less reversing the procedure leading to this equation, assuming  $w = 1$  on  $A$ , but without necessarily assuming that  $w$  is a solution of equation (1) and arrive at the form

$$D(s) = \frac{\varrho \delta^5 s}{I} \left\{ \int_A d\sigma \xi^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} - \iint_V d\tau \xi^2 w \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - s w \right] \right\}. \quad (38)$$

If  $w$  is a solution of equation (1), the integral over  $V$  vanishes, but if  $w$  is only an approximation to the solution of equation (1), the integral over  $V$  describes a correction to the first term that considerably reduces the error resulting from taking only the first term, as was done in the previous sections.

As an illustration, we can apply this directly to the approximations  $w \sim w_1$ , and  $w \sim w_2$  for  $\eta_0 = 0$ . Using the fact that  $w_1$  and  $w_2$  satisfy equations (12) and (29) and that the first term of equation (38) is  $D_1$  and  $D_2$  respectively, equation (38) can be written in the form

$$D(s) \sim D_1(s) + 6 m s \xi_0^{-4} \int_{-\infty}^{\xi_0} dx (\xi_0 - x)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad (39a)$$

$$D(s) \sim D_2(s) + 6 m s \xi_0^{-5} \int_{-\infty}^{\xi_0} dx x (\xi_0 - x)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta w_2 \frac{\partial w_2}{\partial x}. \quad (39b)$$

The upper limit on the  $x$  integral can be made infinite with no significant loss

of accuracy and the functions  $w_1$  and  $w_2$ , from equations (22) und (33) used. The resulting four-fold integral can be evaluated by reversing the order of integration. The procedure is straight-forward though somewhat tedious and gives the results

$$D(s) \sim m s^{3/2} \left[ 1 + 2 (\xi_0 s^{1/2})^{-1} + \frac{3}{2} (\xi_0 s^{1/2})^{-2} + \frac{3}{2} (\xi_0 s^{1/2})^{-3} + \frac{9}{16} (\xi_0 s^{1/2})^{-4} + \dots \right], \quad (40a)$$

$$D(s) \sim m s^{3/2} \left[ 1 + 2 (\xi_0 s^{1/2})^{-1} + \frac{3}{2} (\xi_0 s^{1/2})^{-2} - \frac{3}{4} (\xi_0 s^{1/2})^{-3} + \frac{3}{2} (\xi_0 s^{1/2})^{-4} + \dots \right], \quad (40b)$$

The interesting feature of equation (40a), which is based upon  $w \sim w_1$ , is the fact that it gives the first three terms of  $D(s)$  correctly, as seen by comparing it with equation (35) whereas the original evaluation of  $D_1(s)$ , equation (28), gave only two terms correctly. Although  $D_2(s)$  was correct to only three terms we expect that equation (40b) which is also based upon  $w \sim w_2$  is correct to five terms.

## 5. Thickness Correction

By far the most difficult correction is that for a small but non-zero thickness of the disk,  $\eta_0 \neq 0$ . This perturbation in geometry causes a change in the analytic properties of  $w$  and causes singularities to appear at the two right angle turns of the edge instead of at the one  $180^\circ$  turn for  $\eta_0 = 0$ .

There are several ways in which we might proceed but most of the obvious ways lead to very complicated mathematical expressions which are almost impossible to handle. The scheme which would seem to give the greatest accuracy with the least effort (but which itself is by no means trivial) is the following.

(A) We consider the problem for  $\eta_0 \neq 0$  together with that for  $\eta_0 = 0$ . We denote by  $x', \eta'$  the spatial coordinates when  $\eta_0 = 0$  and by  $x, \eta$  the spatial coordinates when  $\eta_0 \neq 0$ . By means of a conformal mapping, we find a coordinate transformation  $x'(x, \eta), \eta'(x, \eta)$  which maps the boundary of the disk for  $\eta_0 = 0$  into the boundary of a disk for  $\eta_0 \neq 0$ .

(B) We take the function  $w_1(x', \eta')$  for  $\eta_0 = 0$  obtained in section 2 and map it into the  $(x, \eta)$ -space to obtain a function

$$w'_1(x, \eta) \equiv w_1(x'(x, \eta), \eta'(x, \eta)), \quad (41)$$

which will satisfy the boundary conditions, equation (2) exactly and which for  $\eta_0 \ll 1$  will be an approximate solution of equation (1).

(C) We substitute  $w'_1(x, \eta)$  into the variational form for  $D(s)$  and calculate the lowest order terms in  $\eta_0$ .

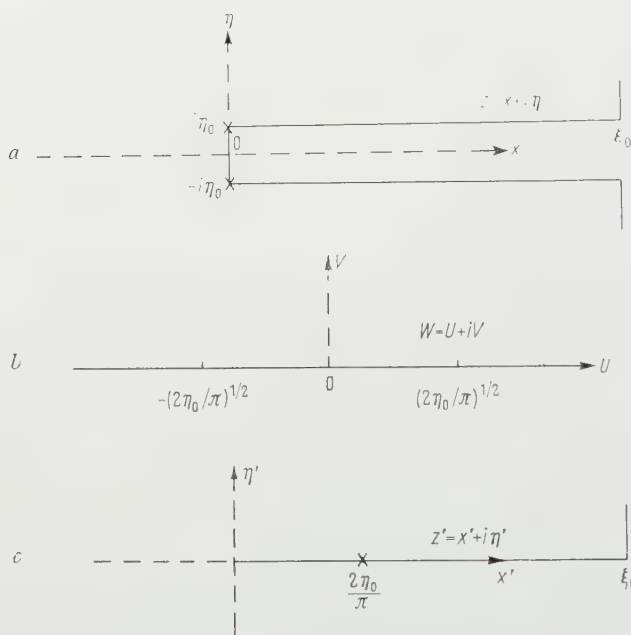


Figure 4  
Conformal mapping.

(A) to find the transformation  $x'(x, \eta)$ ,  $\eta'(x, \eta)$  is relatively simple. We think of  $x$  and  $\eta$  as real and imaginary parts of a complex variable

$$z = x + i\eta \quad (42a)$$

and similarly

$$z' = x' + i\eta'. \quad (42b)$$

The transformation  $z' = z'(z)$  can, if necessary, be found in two steps. One can first find a transformation  $W = W(z)$  that maps the geometry of Figure 4a into Figure 4b with the boundary of the disk mapping into the line  $V = 0$ . This is a standard Schwarz-Christoffel transformation determined by the differential equation

$$\frac{dz}{dW} = 2i \left( \frac{2\eta_0}{\pi} - W^2 \right)^{1/2}.$$

One can also map Figure 4c into 4b by a Schwarz-Christoffel transformation, the same transformation with  $\eta_0 = 0$

$$\frac{dz'}{dW} = 2W, \quad z' = W^2.$$

By combining these transformation we see that

$$\frac{dz}{dz'} = i \left( \frac{2\eta_0}{\pi z'} - 1 \right)^{1/2} \quad (43a)$$

and

$$\left. \begin{aligned} z &= i z'^{1/2} (2\eta_0 \pi^{-1} - z')^{1/2} + 2\eta_0 \pi^{-1} i \sin^{-1} \left( \frac{z' \pi}{2\eta_0} \right)^{1/2} \\ &= z'^{1/2} (z' - 2\eta_0 \pi^{-1})^{1/2} + i \eta_0 - \frac{2\eta_0}{\pi} \log \left[ \left( \frac{z' \pi}{2\eta_0} \right)^{1/2} + \left( -1 + \frac{z' \pi}{2\eta_0} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (43b)$$

The form of equation (43) for  $|z'| \gg 2\eta_0/\pi$  is of particular interest. It gives

$$z = z' - \frac{\eta_0}{\pi} + i \eta_0 - \frac{\eta_0}{\pi} \log \frac{2z' \pi}{\eta_0} + O\left(\frac{\eta_0^2}{|z'|}\right). \quad (43c)$$

From this we see that for  $x' \gg \eta' = O(1)$

$$x' \sim x + \frac{\eta_0}{\pi} + \frac{\eta_0}{\pi} \log \frac{2x\pi}{\eta_0}, \quad \eta' \sim (\eta - \eta_0) + \frac{\eta_0}{\pi} \cdot \frac{\eta - \eta_0}{x}. \quad (44)$$

The radii of the disk for  $\eta_0 = 0$  and for  $\eta_0 \neq 0$  as defined by this mapping are, therefore, not equal but are related by the equation

$$\xi'_0 \sim \xi_0 + \frac{\eta_0}{\pi} + \frac{\eta_0}{\pi} \log \frac{2\xi_0 \pi}{\eta_0}. \quad (45)$$

(B) An explicit expression for  $w'_1(x, \eta)$  is difficult to obtain although it is implicitly defined through equations (22), (41), (42) and (43). We can show however that  $w'_1$  satisfies the differential equation

$$\frac{\partial^2 w'_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'_1}{\partial \eta^2} = s \left| \frac{dz'}{dz} \right|^2 w'_1 = s \left[ \frac{x'^2 + \eta'^2}{(x' - 2\eta_0/\pi)^2 + \eta'^2} \right]^{1/2} w'_1 \quad (46)$$

whereas we would prefer to have a solution,  $w_1(x, \eta)$ , of equation (12).

If we compare equations (12) and (46) we see that the only difference is in the coefficients of  $s w_1$  or  $s w'_1$ . For  $x' \gg 2\eta_0/\pi$ , the difference in the coefficients is of order  $4\eta_0/\pi x \ll 1$ , at most, as compared with other terms in the equation which are of order 1. At  $x' = 2\eta_0/\pi$ ,  $\eta' = 0$ , the coefficient in equation (46) is infinite but one can show that for  $x' \sim 2\eta_0/\pi$  and  $\eta' = 0$ , the terms on the left side of



equation (46) are of order  $(x' - 2\eta_0/\pi)^{-2}$  whereas the term on the right-hand side is only of order  $(x - 2\eta_0/\pi)^{-1}$ . Throughout most of the region where  $x'$  and  $\eta'$  are of order  $\eta_0$ , the terms on the left side of equation (46) are of order  $\eta_0^{-1}$  whereas the terms on the right-hand side are of order 1.

We conclude from this that the difference between equations (12) and (46) is small in the sense that, for  $\eta_0 \ll 1$ , the fractional difference in the second derivatives of  $w'_1$  and  $w_1$  is of order  $\eta_0$ . This in turn guarantees that the first derivatives of  $w'_1$  and  $w_1$  and the functions themselves will be nearly equal everywhere.

A simpler approximation to  $w_1(x, \eta)$  than  $w'_1(x, \eta)$  would be  $w_1(x, \eta)$  itself for  $\eta_0 = 0$ . One can show that the difference between  $w_1(x, \eta)$  for  $\eta_0 = 0$  and  $w_1(x, \eta)$  for  $0 < \eta_0 \ll 1$  is also small (of order  $\eta_0$  at most places). The advantage of  $w'_1(x, \eta)$ , however, is that it has the correct type of singularities near the corners of the disk, gives a good approximation not only to  $w_1(x, \eta)$  but also to its first and second derivatives (even near the corner) and, most important, it satisfies the boundary conditions exactly.

Any improvement of  $w'_1$  by perturbation methods for example is certain to be very difficult since  $w'_1$  is already quite awkward to handle. Our best chance of evaluating the effects of a small  $\eta_0$  is to use  $w'_1$  in a variational calculation of  $D(s)$ .

(C) The evaluation of  $D(s)$  from equation (37) is the most difficult step. We first transform the volume integral back to the  $z'$ -space so that

$$D(s) = 2ms\xi_0^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta' \int_{-\infty}^{\xi'_0} dx' [\xi_0 - x(x', \eta')]^3 \times \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \eta'} \right)^2 + s w^2 \left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 \right\}. \quad (47)$$

If we substitute  $w_1(x', \eta')$  for  $w(x', \eta')$  we can expect to determine correctly only the lowest order term in  $\eta_0$  and in addition only the first two terms in the expansion of this in powers of  $\xi_0^{-1}$ , i.e. we can determine the first correction for a small thickness but infinite radius and the first correction to this due to a large but finite radius. We will concentrate on finding just these two things by discarding any parts of equation (47) that are of lower order and subtracting away the contribution for  $\eta_0 = 0$  which we have already evaluated.

We saw from equations (23) and (24) that  $w_1$  can be decomposed into two parts  $w_0$  and  $w_1 - w_0$ , the first of which has a long range in  $x > 0$  and the other is confined to the vicinity of the edge. It is also convenient to separate  $D(s)$  into two parts  $D^{(0)}$  and  $D^{(1)}$  the first arising only from  $w_0$  and the latter containing terms arising from cross-products of  $w_1 - w_0$  and  $w_0$  and from  $(w_1 - w_0)$  alone.

The easiest way to evaluate  $D^{(0)}$  is to use a mixed coordinate system  $(x, \eta')$  so that

$$D^{(0)} = 2 m s \xi_0^{-4} \iint dx d\eta' [\xi_0 - x]^3 s \exp[-2\sqrt{s}|\eta'|] \left[1 + \left|\frac{dz}{dz'}\right|^2\right] \frac{dx'}{dx} \quad (48)$$

in which the limits of integration are defined by the conditions  $x < \xi_0$  and  $x'(x, \eta') > 0$ .

Using equation (43a) we deduce that

$$\left[1 + \left|\frac{dz}{dz'}\right|^2\right] \frac{dx'}{dx} = 2 + O\left(\frac{\eta_0^2}{|z|^2}\right) \quad \text{for } |z| \gg \eta_0.$$

The region of the  $(x, \eta')$ -plane,  $|z| = O(\eta_0)$ , in which this relation is not valid, however, has an area of order  $\eta_0^2$  and, despite some singularities in the integrand, the contribution to  $D^{(0)}$  from this area will certainly be of order less than  $\eta_0$ . We will, therefore, replace this factor in equation (48) by 2 everywhere.

Equation (48) now depends upon  $\eta_0$  only through the limit of integration  $x'(x, \eta') > 0$  which for  $\eta_0 = 0$  would read  $x > 0$ . From equation (43c), we see that  $x'(x, \eta') > 0$  corresponds to

$$x > -\frac{\eta_0}{\pi} - \frac{\eta_0}{\pi} \log \frac{2|\eta'| \pi}{\eta_0} \quad \text{for } |\eta'| \gg \eta_0. \quad (49)$$

Again the contribution to equation (48) from the region  $|z'| = O(\eta_0)$  is negligible and we can use equation (49) for all  $|\eta'|$ .

If we subtract from equation (48) the contribution to  $D(s)$  for  $\eta_0 = 0$  and let  $D_1^{(0)}$  and  $D_2^{(0)}$  denote the first two terms in an expansion in powers of  $\xi_0^{-1}$  of the part of  $D^{(0)}$  that is proportional to  $\eta_0$ , we find that

$$D_1^{(0)} = \frac{4 m s^{3/2} \eta_0}{\pi \xi_0} \left[1 - \gamma + \log\left(\frac{\pi}{\eta_0 \sqrt{s}}\right)\right], \quad D_2^{(0)} = 0, \quad (50)$$

in which  $\gamma \sim 0.5772$  is the Euler-Mascheroni constant. An interesting feature of equation (50) is the fact that for  $\eta_0 \ll 1$ , the main contribution is of order  $\eta_0 \log \eta_0$ . As a practical matter, however,  $\eta_0$  is never so small that we can consider  $\log \eta_0$  as a large quantity and it is usually better to think of  $\log \eta_0$  as being of order 1.

That part of the integrand in equation (47) that gives  $D^{(1)}$  decays exponentially going away from the edge. Since we neglect errors of the type  $\exp(-\sqrt{s} \xi_0)$ , there is no necessity of restricting the range of integration and so we let  $\xi_0' \rightarrow \infty$  in equation (47). The only way that  $\eta_0$  influences the value of  $D^{(1)}$  now is through the fact that  $x(x', \eta')$  and  $|dz/dz'|^2$  depend upon  $\eta_0$ . If we denote by  $D_1^{(1)}$  and  $D_2^{(1)}$  the first two terms in an expansion in powers of  $\xi_0^{-1}$  of the part

of  $D^{(1)}$  that is proportional to  $\eta_0$  we obtain from equation (47) the expressions:

$$D_1^{(1)} = 2 m s^2 \xi_0^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta' (w_1^2 - w_0^2) \left( \left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 - 1 \right) \quad (51)$$

and

$$D_2^{(1)} = 6 m s \xi_0^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta' \left\{ (x' - x) \left[ \left( \frac{\partial w_1}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_1}{\partial \eta'} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial \eta'} \right)^2 + s (w_1^2 - w_0^2) \right] \right. \\ \left. - x' s (w_1^2 - w_0^2) \left( \left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 - 1 \right) \right\} \quad (52)$$

Except in a small region near the origin,

$$\left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 - 1 \sim \frac{-2 \eta_0 x'}{\pi (x'^2 + \eta'^2)} \quad (53)$$

and equation (51) can be written in the form

$$D_1^{(1)} = - \frac{4 m s^2 \eta_0}{\pi \xi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta' \frac{(w_1^2 - w_0^2) x'}{x'^2 + \eta'^2} \quad (54)$$

The integrand of equation (54) is a function only of the parameter  $s$  but not  $\eta_0$  or  $\xi_0$ . Even  $s$  can be eliminated from the integrand by rescaling the coordinates by  $\sqrt{s}$  in which case one can see immediately that  $D_1^{(1)}$  is proportional to  $m s^{3/2} \eta_0 / \xi_0$  with a rather complicated real integral as a constant of proportionality.

In view of the fact that only an integral representation of  $w_1$  is known, equation (54) involves a four-fold integration. Some integrations were done analytically but other parts were done numerically to obtain

$$D_1^{(1)} = m s^{3/2} \frac{\eta_0}{\xi_0} 0.73 \quad (55)$$

Equation (52) can be greatly simplified by some rather elaborate partial integrations. The object in this is to eliminate all first derivatives of  $w_1$  from the double integral at the expense of introducing second derivatives. At the same time, one does this in such a way that first derivatives of  $x' - x$  are also eliminated in favor of second derivatives. The second derivatives of  $w_1$  are then removed by using equation (12) while the second derivatives of  $x' - x$  are removed by using the fact that  $x' - x$  is the real part of an analytic function

and therefore a solution of LAPLACE's equation. This leads us to a form

$$D_2^{(1)} = \frac{12 m s}{\xi_0^2} \left\{ - \int_0^\infty dx' \left[ (x' - x) \frac{\partial(w_1 - w_0)}{\partial \eta'} \right]_{\eta'=0} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\eta' \left[ w_0^2 \frac{\partial(x' - x)}{\partial x'} \right]_{x'=0_+} \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^\infty dx' \int_0^\infty d\eta' x' s (w_1^2 - w_0^2) \left( \left| \frac{dz}{dz'} \right|^2 - 1 \right) \right\}. \quad (56)$$

By using some of the same types of approximations used above in evaluating  $D^{(0)}$ , the first and second integrals in equation (56) can be evaluated analytically with the first integral giving the term containing  $\eta_0 \log \eta_0$  that appears below. The third integral is similar to the one which appears in equation (51). It also can be reduced to a constant multiple integral, part of which was evaluated numerically. We finally obtain

$$D_2^{(1)} = \frac{6 m s \eta_0}{\xi_0^2 \pi} \left[ \log \left( \frac{\pi}{2 \eta_0 \sqrt{s}} \right) + 1.6 \right]. \quad (57)$$

## 6. Summary

By combining the terms from equations (40b), (50), (55) and (57); we arrive at our final expression for  $D(s)$ ,

$$D(s) = m s^{3/2} \left\{ 1 - \frac{2}{\xi_0 s^{1/2}} - \frac{3}{2 (\xi_0 s^{1/2})^2} - \frac{3}{4 (\xi_0 s^{1/2})^3} - \frac{3}{2 (\xi_0 s^{1/2})^4} \right. \\ \left. + \frac{4 \eta_0}{\pi \xi_0} [-\log(\eta_0 s^{1/2}) + 2.14] \right. \\ \left. + \frac{6 \eta_0}{\pi \xi_0 (\xi_0 s^{1/2})} [-\log(\eta_0 s^{1/2}) + 2.0] + \dots \right\}. \quad (58)$$

As a consequence of equation (7), the power series in  $(\xi_0 s^{1/2})^{-1}$  of the first line contains successively smaller terms and the error resulting from terminating this series after five terms is of order  $(\xi_0 s^{1/2})^{-5}$ . If we consider the slowly varying function  $\log \eta_0$  to be of order 1, the second line contains the first two terms in a similar power series expansion of the first thickness correction. The error resulting from terminating this series is of order  $(\eta_0/\xi_0) (\xi_0 s^{1/2})^{-2}$ . Finally there are errors due to neglecting higher power terms in  $\eta_0$ . This error is expected to be of order  $(\eta_0/\xi_0) (\eta_0 s^{1/2})$ .

If we denote the half thickness (in any desirable physical units of length) by  $h$  and the radius of the disk by  $R$  then  $h = \eta_0 \delta$  and  $R = \xi_0 \delta$  with  $h$  and  $R$  meas-

ured in the same units as the boundary layer thickness  $\delta$ . Equation (7) then implies

$$h \ll \delta \ll R. \quad (59)$$

This can be true only if  $h/R$  is *very* small, a severe restriction on the geometry of the disk.

Once a sufficiently thin disk has been chosen, the decision as to whether or not the value of  $\delta$  is suitable depends, among other things, on the viscosity of the fluid. Since the same disk would normally be used to measure viscosities of a number of gases, one question that will arise is: given the values of  $h$  and  $R$  (with  $h/R \ll 1$ ), for what values or range of values of  $\delta$  is equation (58) most accurate? If  $\delta$  is too large, then the error term of order  $|\xi_0 s^{1/2-5}| \propto \delta^5$  will dominate and if  $\delta$  is too small, the term of order  $(\eta_0/\xi_0) \eta_0 s^{1/2} \propto \delta^{-1}$  will dominate. The probable error will be a minimum when these two errors plus the error of order  $(\eta_0/\xi_0) |\xi_0 s^{1/2}|^2$  are all comparable. This situation obtains for

$$\frac{\delta}{R} = O\left[\left(\frac{h}{R}\right)^{1/3}\right], \quad \eta_0 = O(\xi_0^{-2}) \quad (60)$$

in which case all errors are of order  $\xi_0^{-5} = O[(h/R)^{5/3}]$ .

Since only the order of magnitude of the errors are known, it is impossible to put reliable bounds on the error although one can make a reasonable guess. There are three error terms in question and they may very well all have the same sign so as to add rather than cancel. Furthermore most coefficients in equation (58) are larger than one. A reasonable guess of the probable error under these most favorable conditions, equation (60), would be  $5(h/R)^{5/3}$  and a conservative estimate perhaps  $10(h/R)^{5/3}$ . Thus for  $h/R = 1/40$ , we can expect errors of about 1% and for  $h/R = 1/160$ , about 0.1% in the range of  $\delta$  given by equation (60).

Regarding the possibility of improving the accuracy of equation (58) by computing more terms, it seems likely that one could, by some way or another, evaluate more terms of the first series in powers of  $(\xi_0 s^{1/2})^{-1}$  and one could certainly improve the accuracy of the second series (first order terms in  $\eta_0$ ) by using  $w_2$  in the variational scheme of section 5 instead of  $w_1$ . Since the evaluation of the last few terms of equation (58) has already become quite tedious, any extension of this type would not appear to be very rewarding. More serious than this, however, is the fact that we see no practical way at all of evaluating terms proportional to  $\eta_0^2$ . We will discuss at the end of Part IV some improvements of a different sort, however.

In practical applications, equation (58) is to be used in conjunction with equations (5) and (6) to determine the viscosity of the fluid from measured values of  $\omega$  and  $A$ . Equation (5) is complex and so gives two real equations which could potentially be used to evaluate two unknowns but in practice, one



usually considers only one equation, the imaginary part of equation (5),

$$\pm 2 \omega (\Delta - \Delta_0) = \text{Im} D \{ (\pm i \omega - \Delta \omega) \}. \quad (61)$$

The imaginary part of  $D$  is easily obtained by writing  $s = (\pm i - \Delta) \omega$  in the form  $|s| \exp(\pm i \varphi)$  with  $0 \leq \varphi < \pi$  so that

$$s^j = |s| \cos(j \varphi) + i |s| \sin(j \varphi)$$

and

$$\log s^{1/2} = \frac{1}{2} \log |s| \pm \frac{1}{2} i \varphi.$$

The viscosity appears in  $D$  through  $m$ ,  $\xi_0$  and  $\eta_0$  all of which are proportional to  $r^{1/2}$  and it can be determined from equation (61) by a method of successive approximations. In most cases the fastest procedure would be to use an approximate value of  $r$  to estimate  $\xi_0$  and  $\eta_0$ . One uses this to estimate the values of the third, fourth and fifth terms of equation (58) and  $\log \eta_0$  leaving  $r$  unknown everywhere else in equation (58). Equation (61) then becomes a quadratic equation for the unknown value of  $r^{1/2}$ . A solution of this quadratic equation can then be used to re-estimate  $\xi_0$  and  $\eta_0$ . Successive approximations will converge very fast because the estimated  $r$  is used only in small or slowly varying terms.

Equation (58) has been compared with the experimental data described by KESTIN and WANG [4] and by KESTIN and MOSZYNSKI [3] for gases of accurately known viscosity. In the range where equation (58) is supposed to apply, the theory and experiment agree to within the estimated errors both of which are about 0.5% in this case. More detailed comparisons will, however, be described elsewhere.

### Acknowledgement

The authors are indebted to Professor J. KESTIN for suggesting this problem and for many helpful discussions of both the theoretical and experimental problems, to Professor G. F. CARRIER and Dr. L. N. PERSEN for making some of their unpublished calculations available, and to Mr. H. E. WANG for supplying numerous graphs of experimental data which helped greatly to show where the weaknesses of the theory were after each correction.

### REFERENCES

- [1] J. KESTIN and L. N. PERSEN, *Slow Oscillation of an Infinite Plate and an Infinite Disk in a Viscous Fluid*, Brown University Rep. AF 891/1, OSR Contr. AF 18(600)-891 (June 1954).
- [2] P. MARIENS and O. VAN PAEMEL, *Theory and Experimental Verification of the Oscillating Disk Method for Viscosity Measurements in Fluids*, Appl. sci. Res. 5, 411 (1956).

- [3] J. KESTIN and J. R. MOSZYNSKI, *On the Measurement of the Viscosity of Steam by the Observation of Small Oscillations*, Fifth International Conference on Steam Properties (London 1956).
- [4] J. KESTIN and H. E. WANG, *Corrections for the Oscillating Disk Viscometer*, J. appl. Mech. 24, 197 (1957).
- [5] J. G. DASH and K. D. TAYLOR, *Hydrodynamics of Oscillating Disks in Viscous Fluids: Density and Viscosity of Normal Fluid in Pure He<sup>4</sup> from 1.2° K to the Lambda Point*, Phys. Rev. 105, 7 (1957).
- [6] J. KESTIN and G. F. NEWELL, *Theory of Oscillation Type Viscometers, I. The Oscillating Cup*, Z. angew. Math. Phys. 8, 433–49 (1957).
- [7] G. F. CARRIER, *Integral Equation Boundary Layer Problems*, in: 50 Jahre Grenzschichtforschung, ed. by H. GÖRTLER and W. TOLLMIEH (Braunschweig 1955), p. 13.

### Zusammenfassung

Es wird untersucht, inwieweit eine dünne aufgehängte Scheibe endlicher Abmessung, wenn sie mit kleiner Amplitude schwingt, sich zur Messung der Zähigkeit verwenden lässt. Die Bewegung der Flüssigkeit wird unter der Voraussetzung analysiert, dass die Grenzschichtdicke klein ist im Vergleich zum Radius der Scheibe, aber gross verglichen mit der Scheibendicke. Die Formeln zeigen die Abhängigkeit der Frequenz und des logarithmischen Dekrements der Schwingung von der Dichte und der Zähigkeit der Flüssigkeit.

(Received: September 28, 1957.)

## Fehlerabschätzungen bei Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen mit unendlichem Grundgebiet

VON LOTHAR COLLATZ, Hamburg<sup>1)</sup>

Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen mit unendlichem Grundgebiet lassen sich oft durch einfache Transformationen in solche mit endlichem Grundgebiet überführen. Da Aufgaben mit unendlichem Grundgebiet häufig vorkommen, ist es vielleicht berechtigt, Typen solcher Aufgaben zusammenzustellen, bei welchen sich Fehlerabschätzungen für Näherungslösungen nach einfachen Randmaximum-Prinzipien durchführen lassen. Unter anderem zeigt sich dabei zum Beispiel, dass dies unter gewissen Voraussetzungen bei der (bei Umströmungsaufgaben auftretenden) 2. Randwertaufgabe in mehr als 2 Dimensionen möglich ist. Die folgenden Abschätzungsmethoden funktionieren bei den Umströmungsaufgaben der Potentialtheorie gerade in 3 Dimensionen, versagen in 2 Dimensionen und bilden somit in gewissem Sinne ein Gegenstück zu den Methoden der konformen Abbildung, die bei den genannten Aufgaben in 2, aber nicht in 3 Raumdimensionen anwendbar sind.

<sup>1)</sup> Institut für Angewandte Mathematik der Universität.

# I. Elliptische Differentialgleichungen

## 1. Die Differentialgleichung

Vorgelegt sei die homogene Differentialgleichung

$$LU \equiv -P(X_j) \Delta_X U + \sum_{k=1}^n Q_k(X_j) \frac{\partial U}{\partial X_k} + S(X_j) U = 0 \quad (1)$$

für eine Funktion  $U(X_1, \dots, X_n)$  der  $n$  reellen Veränderlichen  $X_j$  in einem offenen Bereich  $B$  des  $X_j$ -Punktraumes, der für ein passendes  $R_0$  alle Punkte mit  $R > R_0$  enthält; dabei sei

$$|X| = \left[ \sum_{j=1}^n X_j^2 \right]^{1/2} = R \quad (2)$$

gesetzt.

$\Delta_X$  bedeute den Laplaceschen Operator

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial X_k^2};$$

$P, Q_k, S$  seien gegebene Ortsfunktionen, die in  $B$  stetig sind.  $P(X_j)$  sei in  $B$  positiv und besitze für  $R \rightarrow \infty$  einen Grenzwert  $\tilde{P} > 0$ . Die Menge  $\Gamma$  der Randpunkte von  $B$  bilde einen stückweise glatten Rand. Durch reziproke Radien werden neue Koordinaten eingeführt:

$$x_j = \frac{X_j}{R^2}, \quad X_j = \frac{x_j}{r^2}, \quad r^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad r R = 1, \quad (3)$$

und als neue abhängige Veränderliche wird

$$u(x_j) = r^{2-n} U(x_j r^{-2}) \quad (4)$$

benutzt. Mit

$$p(x_j) = P(x_j r^{-2}), \quad q_k(x_j) = r^{-4} Q_k(x_j r^{-2}), \quad s(x_j) = r^{-4} S(x_j r^{-2}) \quad (5)$$

lautet dann die neue Differentialgleichung (mit  $\Delta_x$  als Laplaceschem Operator in den neuen  $x_j$ -Koordinaten)

$$\left. \begin{aligned} L_i u &\equiv -p(x_j) \Delta_x u + \sum_k \hat{q}_k(x_j) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x_j) u = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{q}_k = r^2 q_k - 2 x_k \psi, \\ c &= s - (n-2) \psi, \quad \psi = \sum_{i=1}^n x_i q_i. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Bei der Transformation (3) gehe  $B$  bzw. der Rand  $\Gamma$  in einen Bereich  $B_i$  bzw.

$I_i$  über, und es sei  $B_i$  bei Hinzunahme des Nullpunktes ein einfachzusammenhängender, beschränkter Bereich.

Es wird nun vorausgesetzt, dass die Funktionen  $\phi, q_k, s$  und damit auch  $\hat{q}_k$  und  $c$  im Nullpunkt  $r = 0$  stetig sind (bzw. für  $r = 0$  so definiert werden können, dass Stetigkeit bei  $r = 0$  besteht) und dass überdies  $c \geq 0$  in  $B_i$  und  $\phi > 0$  in  $B_i + I_i$  gilt.

Betrachtet man nun nur Lösungen  $U$  der Differentialgleichung (1), die für  $R \rightarrow \infty$  von der Grössenordnung  $U = o(R^{3-n})$  sind, so hat  $u$  für  $r \rightarrow 0$  nach (4) die Grössenordnung  $u = o(1/r)$ . Dann hat  $u$  bei  $r = 0$  eine hebbare Singularität, das heisst,  $u$  kann für  $r = 0$  so definiert werden, dass  $u$  in ganz  $B_i + I_i$  eine mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung einschliesslich versehene Lösung von (6) ist<sup>2)</sup>.

## 2. Die Randbedingung

Zu der Differentialgleichung (1) trete eine Randbedingung auf  $\Gamma$  hinzu.

$$MU \equiv A_1(X_j) U - A_2(X_j) \frac{\partial U}{\partial N} = A_3(X_j) \quad (\text{auf } \Gamma). \quad (7)$$

Die  $A_k(X_j)$  sind gegebene Funktionen auf  $\Gamma$ .

Es werden folgende 3 Randbedingungen betrachtet:

1. Randbedingung:  $A_1 = 1, A_2 = 0$ .
2. Randbedingung:  $A_1 = 0, A_2 = 1$ .
3. Randbedingung:  $A_1 = 1, A_2 \neq 0$ : in diesem Falle werde  $A_2 \geq 0$  vorausgesetzt.

In jedem Punkte von  $\Gamma$  sei entweder die 2. Randbedingung oder eine der beiden Randbedingungen 1, 3. vorgegeben.

Es werde bei der 2. und 3. Randbedingung überdies angenommen, dass in jedem Punkte von  $\Gamma$  entweder von vornherein (Fall 1) eine eindeutig bestimmte, ins Innere von  $B$  weisende Normalenrichtung definiert ist oder (Fall 2) eine Normalenrichtung so definiert werden kann, dass ein endliches Stück dieser Normalen  $N$  zu  $B + \Gamma$  gehört. Damit ist Bedingung (7) erklärt. Bei der winkeltreuen Transformation (3) geht die Richtung von  $N$  in die Richtung der inneren Normale  $v$  auf  $I_i$  über, und es gilt

$$\frac{\partial U}{\partial N} = r^n \frac{\partial u}{\partial v} + (n-2) r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial v} u. \quad (8)$$

[Auch im Falle 2 wird durch (3) eine Richtung  $v$  festgelegt, und es gilt (8).] Die

<sup>2)</sup> Dies gilt sogar unter etwas schwächeren Voraussetzungen. Vergleiche PH. HARTMAN, *On the Local Behavior of Solutions of  $\Delta u = g(x, u, \nabla u)$* , Comm. pure appl. Math. 9, 435–445, speziell 437 (1956).

neue Randbedingung für  $u$  lautet dann

$$g(x_j) M_i u \equiv g(x_j) u - a_2(x_j) r^2 \frac{\partial u}{\partial \nu} = r^{2-n} a_3(x_j) \quad (9)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} a_k(x_j) &= A_k(x_j) r^{-2} \quad (\text{für } k = 1, 2, 3) \\ g(x_j) &= a_1(x_j) - (n-2) a_2(x_j) r \frac{\partial r}{\partial \nu} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Der Randoperator  $M_i$  ist durch (9) erklärt, falls  $g(x_j) \neq 0$  ist. Es sei  $g(x_j) > 0$ .

Es gilt nun der erweiterte Randmaximumsatz:

Eine Lösungsfunktion  $\varphi(x_j)$  von (6) lässt sich in  $B_i$  im Falle der 1. und 3. Randbedingung unter den getroffenen Voraussetzungen und für  $a_2 \geq 0$  durch den Maximalbetrag von  $M_i \varphi$  auf  $\Gamma_i$  abschätzen<sup>3)</sup>:

$$|\varphi(x_j)| \leq \max_{\Gamma_i} |M_i \varphi| \quad (\text{gültig in } B_i + \Gamma_i). \quad (11)$$

### 3. Diskussion der verschiedenen Randbedingungen

Bei der Abbildung (3) geht die 1. Randbedingung wieder in die 1. Randbedingung über,  $A_1 = a_1 = g = 1$ ,  $A_2 = a_2 = 0$ .

Für die 2. Randbedingung werde  $\partial R / \partial N \geq 0$  (Bereich  $B$  als «Sternbereich») vorausgesetzt, dann ist  $\partial r / \partial \nu \leq 0$  in den nach (3) entsprechenden Randpunkten von  $\Gamma_i$ . Es ist jetzt  $A_2 = a_2 = 1$ , und (10) ergibt

$$g(x_j) = (n-2) r \frac{\partial r}{\partial \nu}.$$

Im ebenen Falle ( $n=2$ ) wird  $g \equiv 0$ , und man erhält wieder eine 2. Randbedingung auf  $\Gamma_i$ . Aber in mehr als 2 Dimensionen ( $n > 2$ ) entsteht die 3. Randbedingung, und zwar mit dem «richtigen» Vorzeichen bei der Normalableitung, so dass die Abschätzungsformel anwendbar wird.

Die 3. Randbedingung geht bei der Transformation (3) wieder in die 3. Randbedingung über, und zwar wegen  $\partial r / \partial \nu \leq 0$  wieder mit dem richtigen Vorzeichen bei der Normalableitung. Rechnet man  $M_i \varphi$  nach den Transformationsformeln in Grössen des Aussengebietes um mit

$$\varphi(x_j) = r^{2-n} \Phi(x_j, r^{-2}),$$

so ergibt sich

$$M_i \varphi = \frac{r^{n-2}}{g(x_j)} \left( A_1 \Phi - A_2 \frac{\partial \Phi}{\partial N} \right). \quad (12)$$

<sup>3)</sup> Vergleiche zum Beispiel L. COLLATZ: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, 2. Aufl. (Berlin, Göttingen und Heidelberg 1955), S. 372; oder Schiffstechnik 4, 67–68 (1957).



Die Abschätzung (11) lautet daher

$$|\Phi(X_j)| \leq \frac{1}{R^{n-2}} \max_r \left( \frac{R^{n-2}}{g} \left| A_1 \Phi - A_2 \frac{\partial \Phi}{\partial N} \right| \right) \quad (\text{gültig in } B + \Gamma), \quad (13)$$

und es gilt der

**Satz:** Es sei  $\Phi(X_j)$  eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (1) mit stetigen Koeffizienten  $P, Q_k, S$  von der Grössenordnung  $\Phi = o(R^{3-n})$ , und es sei  $P > 0$  in  $B + \Gamma$ . Die durch die Transformation (3) mit reziproken Radien nach (5) hervorgehenden Funktionen  $p, q_k, s$  seien im Nullpunkt  $r = 0$  stetig, und es gelte  $R^2 S \geq (n-2) \sum_{k=1}^n X_k Q_k$ .

Ausser den obigen allgemeinen Voraussetzungen über den Bereich  $B$  und seinen Rand  $\Gamma$  gelte bei der Randbedingung (7) entweder  $A_1 = 1, A_2 \geq 0$  oder  $A_1 = 0, A_2 = 1$ . Im Falle der 2. und 3. Randbedingung sei  $B$  ein Sternbereich mit  $\partial R / \partial N \geq 0$ . Dann fällt die Grösse

$$g - A_1 + (n-2) \frac{A_2}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial N} > 0 \quad (14)$$

aus, und es gilt die Abschätzung (13) bei der 1. und 3. Randbedingung und bei der 2. Randbedingung, falls die Dimensionszahl  $n > 2$  ist.

**Fehlerabschätzung:** Ist  $V$  eine Näherungsfunktion für die (als existierend vorausgesetzte) Lösung  $U$  der Randwertaufgabe mit der inhomogenen Differentialgleichung  $LU = H(X_j)$  und der Randbedingung (7), wobei  $V$  die Differentialgleichung exakt erfüllt und die Grössenordnung  $o(R^{3-n})$  hat, so gilt für den Fehler  $\Phi = V - U$  die homogene Differentialgleichung  $L\Phi = 0$ . Ist  $D$  der Defekt in der Erfüllung der Randbedingung

$$D = A_1 V - A_2 \frac{\partial V}{\partial N} - A_3, \quad (15)$$

so geht (13) über in

$$|V - U| \leq \frac{1}{R^{n-2}} \max_r \left( \frac{R^{n-2}}{g} |D| \right) \quad (\text{gültig in } B + \Gamma). \quad (16)$$

Bei der 1. Randwertaufgabe ist  $g \equiv 1$ .

#### 4. Beispiele

1. Erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den Aussenraum eines Ellipsoids.

Es sei  $U = 1$  auf dem Rande  $\Gamma$  des abgeplatteten Rotationsellipsoids  $X^2 + Y^2 + 2Z^2 = 1$  und  $LU = 0$  ausserhalb des Ellipsoids. Im Unendlichen gehe  $U$  gegen Null.

Für eine Näherung  $V$ , die  $\Delta V = 0$  erfüllen muss, werde der Ansatz

$$V = \sum_{k=1}^m a_k V_k \quad (17)$$

gemacht mit den Potentialfunktionen ( $\varrho^2 = X^2 + Y^2$  und  $R^2 = \varrho^2 + Z^2$ )

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{R}, & V_2 &= \frac{\varrho^2 - 2Z^2}{R^5}, & V_3 &= \frac{3\varrho^4 - 24\varrho^2 Z^2 + 8Z^4}{R^9}, \\ V_4 &= \frac{1}{R^{13}} (5\varrho^6 - 90\varrho^4 Z^2 + 120\varrho^2 Z^4 - 16Z^6). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die Fehlerabschätzung (16) besagt hier

$$|V - U| \leq \frac{1}{R} \max_F |RV - R| \quad (\text{gültig auf und ausserhalb } \Gamma). \quad (19)$$

Die Konstanten  $a_k$  sind so zu bestimmen, dass auf  $\Gamma$  das Betragsmaximum von  $RV - R$  möglichst klein ausfällt (man zeichnet sich dazu zweckmässig den Verlauf von  $RV_k$  für  $k = 1, \dots, m$  längs eines Ellipsoidmeridians auf). Man erhält:

Benutzung von	Näherungsausdruck $V$	
$V_1$	$0,8535 V_1 \left( a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$	
$V_1$ und $V_2$	$0,901 V_1 + 0,05858 V_2$	
$V_1, V_2$ und $V_3$	$0,9005 V_1 + 0,075 V_2 + 0,0038 V_3$	
$V_1, V_2, V_3$ und $V_4$	$0,90013 V_1 + 0,075 V_2 + 0,00526 V_3 + 0,000053 V_4$	
Benutzung von	Fehlerabschätzung	Beispiel Wert $U$ für $X = Y = 0, Z = 1$
$V_1$	$ V - U  \leq \frac{1}{R} 0,147$	$ U - 0,854  \leq 0,147$
$V_1$ und $V_2$	$ V - U  \leq \frac{1}{R} 0,041$	$ U - 0,784  \leq 0,041$
$V_1, V_2$ und $V_3$	$ V - U  \leq \frac{1}{R} 0,0158$	$ U - 0,7809  \leq 0,0158$
$V_1, V_2, V_3$ und $V_4$	$ V - U  \leq \frac{1}{R} 0,00663$	$ U - 0,7837  \leq 0,00663$

## 2. Zweite Randwertaufgabe eines Umströmungsproblems.

Es sei  $\tilde{U}$  das Geschwindigkeitspotential für die Potentialströmung um das Ellipsoid  $\Gamma$ :  $X^2 + Y^2 + Z^2/2 = 1$ , das in Richtung der  $Z$ -Achse mit der Geschwindigkeit 1 angeströmt werde. Auf  $\Gamma$  gilt dann  $\partial\tilde{U}/\partial N = 0$ . Zieht man das

Potential  $\tilde{U} - Z$  für die nicht durch den Körper gestörte Potentialströmung ab, so liegt für  $U = \tilde{U} - \tilde{Z}$  genau eine 2. Randwertaufgabe der oben betrachteten Art vor; es ist  $\Delta U = 0$  ausserhalb  $\Gamma$ , im Unendlichen verschwindet  $U$ , und auf  $\Gamma$  hat man  $\partial U / \partial N = -\partial Z / \partial N$ . Für eine Näherung  $V$  werde der Ansatz (17) mit den Potentialfunktionen

$$V_1 = \frac{Z}{R^3}; \quad V_2 = \frac{Z}{R^7} (4 Z^2 - 6 \varrho^2); \quad V_3 = \frac{Z}{R^{11}} (8 Z^4 - 40 Z^2 \varrho^2 + 15 \varrho^4);$$

$$V_4 = \frac{Z}{R^{15}} (16 Z^6 - 168 Z^4 \varrho^2 + 210 Z^2 \varrho^4 - 35 \varrho^6)$$

[Abkürzungen  $\varrho$ ,  $R$  wie bei (18)]

durchgeführt. Die Fehlerabschätzung (16) lautet jetzt<sup>4)</sup>:

$$|V - U| \leq \frac{1}{R} \max_{\Gamma} \left| \frac{R^2}{\partial R / \partial N} \left( \frac{\partial V}{\partial N} + \frac{\partial Z}{\partial N} \right) \right|. \quad (20)$$

Man erhält mit diesen wenigen Ansatzfunktionen noch etwas grobe Resultate; es soll hier auch nur die Methode illustriert werden.

Benutzung von	Näherungsausdruck	Fehlerabschätzung
$V_1$	$0,9 V_1$	$ V - U  \leq \frac{1}{R} 0,73$
$V_1$ und $V_2$	$0,7 V_1 + 0,1 V_2$	$ V - U  \leq \frac{1}{R} 0,45$
$V_1, V_2$ und $V_3$	$0,65 V_1 + 0,1 V_2 + 0,032 V_3$	$ V - U  \leq \frac{1}{R} 0,25$
$V_1, V_2, V_3$ und $V_4$	$0,63 V_1 + 0,1 V_2 + 0,037 V_3 + 0,011 V_4$	$ V - U  \leq \frac{1}{R} 0,15$

Es sei bemerkt, dass nur der Einfachheit halber ein Rotationskörper mit axialer Anströmung gewählt wurde, die Methode ist natürlich für beliebige (nicht notwendig rotationssymmetrische) Körper, sofern sie Sternbereiche mit stückweise glatter Randfläche sind, und für beliebige «Anstellwinkel» verwendbar.

<sup>4)</sup> Meinem Assistenten, Herrn Dipl. Math. *Alfred Meyer*, danke ich herzlich für die Durchführung numerischer Rechnungen. Er hat ausserdem eine entsprechende Fehlerabschätzung für die kompressible Unterschallströmung um einen rotationssymmetrischen Körper bei axialer Anströmung aufgestellt, was demnächst veröffentlicht werden soll.

## II. Parabolische Differentialgleichungen

### 5. Monotoner Charakter der Aufgaben

Die Differentialgleichung laute

$$TU \equiv U_t - F(X_j, t, U, U_j, U_{jj}) = 0 \quad (21)$$

mit den Abkürzungen

$$U_j = \frac{\partial U}{\partial X_j}, \quad U_{jj} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_j^2}, \quad U_t = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Es tritt zu den Veränderlichen  $X_1, \dots, X_n$  gegenüber Nr. 1 noch die Variable  $t$  (etwa die Zeit) hinzu.

Im  $(X_1, \dots, X_n)$ -Raum sei  $B$  ein offener, zusammenhängender Bereich mit stückweise glattem Rand  $I'$ . Auf  $B$  seien die Anfangswerte von  $U$  vorgegeben. Es sei  $\tilde{B} = B - I'$ , und  $B_t, I_t, \tilde{B}_t$  seien die Punktmengen des  $(X_1, \dots, X_n, t)$ -Raumes, für die  $X_1, \dots, X_n$  zu  $B$  bzw.  $I'$  bzw.  $\tilde{B}$  gehören und  $0 < t < t_a$  mit festem  $t_a$  gilt.

Die Funktion  $F$  sei monoton nicht fallend in den  $U_{jj}$  bei fester Wahl der Argumente  $X_j, t, U, U_j$ , das heisst, aus  $a_j \geq b_j$  (für  $j = 1, \dots, n$ ) soll

$$F(X_j, t, U, U_j, a_j) \geq F(X_j, t, U, U_j, b_j) \quad (22)$$

folgen.

Auf  $I_t$  sei für  $0 < t < t_a$  wieder die Randbedingung (7) gegeben, und es werden wieder die 3 Randbedingungen wie in Nr. 2 betrachtet mit denselben Voraussetzungen über  $A_1, A_2$  und  $A_3$ . (Es lassen sich durch die folgenden Betrachtungen ohne weiteres auch Randbedingungen erfassen, bei denen der Rand  $I_t$  mit  $i$  variiert; jedoch sei der einfacheren Schreibweise wegen hiervon abgesehen.) Auf  $B$  seien die Werte von  $U$  gegeben; das ist in (7) für  $A_1 = 1, A_2 = 0$  enthalten.)

Wenn  $B$  beschränkt ist, hat der Operator monotonen Charakter<sup>5)</sup>: Für 2 Funktionen  $U, V$  (es wird hier stets vorausgesetzt, dass die auftretenden Funktionen  $U, V$  stetige partielle Ableitungen so hoher Ordnung besitzen, wie sie in den Überlegungen vorkommen) mit

$$TV < TU \text{ in } B_t \quad \text{und} \quad MV < MU \text{ auf } \tilde{B} \text{ und } I_t \quad (23)$$

gilt  $V < U$  in ganz  $\tilde{B}_t$ . Hat die Differentialgleichung (21) die speziellere Form

$$TU \equiv U_t - g(U) - h(X_j, t, U_j, U_{jj}) = 0 \quad (24)$$

[ $g(U)$  stetig differenzierbar,  $h$  in den  $U_{jj}$  monoton nicht fallend], so folgt bei

<sup>5)</sup> L. COLLATZ, *Fehlerabschätzungen für Näherungslösungen parabolischer Differentialgleichungen*, Anais Acad. Brasileira de Ciencias 28, 1-9 (1956).

beschränktem  $B$  aus

$$|TU| \leq \varepsilon_1, |TV| \leq \varepsilon_2 \text{ in } B_t \quad \text{und} \quad |MU - MV| \leq \delta \text{ auf } \tilde{B} + \Gamma_t:$$

Für  $g'(U) \leq 0$  gilt

$$|U - V| \leq \delta + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) t \text{ in } \tilde{B}_t, \quad (25)$$

und für

$$g'(U) \leq \gamma \quad \text{mit} \quad \gamma > 0$$

gilt

$$|U - V| \leq e^{\gamma t} \left( \delta + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\gamma} \right) - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\gamma}. \quad (26)$$

Ist überdies  $V \equiv 0$  eine Lösung von (24), so gilt im Falle  $g'(U) \leq 0$  sogar der gewöhnliche Randmaximumsatz: Eine Funktion  $U$  mit  $TU \leq 0$  (bzw.  $\geq 0$ ) kommt auf dem Rande  $\tilde{B} + \Gamma_t$  der oberen (bzw. unteren) Grenze aller Werte, die  $U$  in  $\tilde{B}_t$  annimmt, beliebig nahe.

Erstreckt sich der Bereich  $B$  ins Unendliche, so hat man ihn durch passende Transformation so in einen endlichen Bereich überzuführen, dass die eben genannten Sätze anwendbar werden. Hierzu ist nicht immer die Inversion (3) brauchbar. Es liegt nahe, allgemeiner anzusetzen

$$u(x_j, t) = a(x_j) U(b_k(x_k), t) \quad \text{mit} \quad X_k = b_k(x_k). \quad (27)$$

Es sei  $a(x_j) > 0$ . Bei  $b_j$  werden Ableitungen nach dem Argument durch Striche, bei  $a$  und  $u$  Ableitungen nach  $x_j$  bzw.  $t$  durch Indizes  $j$  und  $t$  bezeichnet.

Man erhält

$$\left. \begin{aligned} U_t &= \frac{1}{a} u_t, & U_j &= \frac{1}{b_j'} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{u}{a} \right), \\ U_{jj} &= \frac{1}{a^3 b_j'^3} \\ &[a^2 b_j' u_{jj} - (a^2 b_j'' + 2 a a_j b_j') u_j + (a a_j b_j'' + 2 a_j^2 b_j' - a a_{jj} b_j') u]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Dabei geht (21) in eine neue Gleichung über:

$$\tilde{T} u = u_t - f(x_j, t, u, u_j u_{jj}) = 0,$$

wobei  $f$  dieselbe Monotonieeigenschaft bezüglich der  $u_{jj}$  besitzt wie  $F$  bezüglich der  $U_{jj}$ .

Man hat also nur nachzuprüfen, ob die Randbedingungen nach der Transformation die geforderten Voraussetzungen erfüllen. Dabei geht das Verhalten von  $U$  im Unendlichen ein. Ist zum Beispiel gefordert, dass  $U$  für  $R \rightarrow \infty$  die Größenordnung  $U = o(R^{2-n})$  hat, so hat bei der Inversion (3), (4)  $u$  die Größen-



ordnung  $o(1)$ , also den Grenzwert 0 für  $r \rightarrow 0$ ; man hat dann die 1. Randbedingung  $u = 0$  für  $r = 0$  und  $0 < t < t_a$ . Die weitere Diskussion verläuft entsprechend Abschnitt I.

### 6. Spezialfall von nur einer Raumkoordinate

Es werde der Spezialfall  $n = 1$  herausgegriffen.

1. Es liege ein «halbunendlicher» Bereich vor:  $B$  sei das Intervall

$$X_0 < X < \infty,$$

wobei  $X_0 > 0$  angenommen werden darf ( $X$  steht für die Veränderliche  $X_1$ ).

1a) Es werde die folgende Transformation verwendet:

$$x = \frac{1}{X}, \quad u(x, t) = x U\left(\frac{1}{x}, t\right), \quad U_X = u - x u_x; \quad U_{XX} = x^3 u_{xx}. \quad (29)$$

Verlangt man von  $U$  Beschränktheit für  $X \rightarrow \infty$  und  $0 < t < t_a$ , so hat man für  $u$  die 1. Randbedingung  $u(0, t) = 0$  auf dem Randteil  $x = 0$ ,  $0 < t < t_a$ . Die Randbedingung

$$A_1(t) U - A_2(t) \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) = A_3(t)$$

geht über in

$$\left[ A_1(t) \frac{1}{x} - A_2(t) \right] u + A_2(t) x \frac{\partial u}{\partial x} = A_3(t).$$

Die 1. Randbedingung ( $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0$ ) wird also wieder eine 1. Randbedingung, und die 3. Randbedingung ( $A_1 = 1$ ,  $A_2 \neq 0$ ) eine 3. Randbedingung, wobei auch das Vorzeichen bei  $\partial u / \partial x = -\partial u / \partial r$  die geforderten Voraussetzungen erfüllt, sofern man nur  $1/x - A_2 > 0$  sichert, was durch Wahl von  $X_0$  bei beschränktem  $A_2$  stets möglich ist [es muss  $X_0 > A_2(X)$  sein]. Dagegen hat  $\partial u / \partial x$  bei der 2. Randbedingung nicht das gewünschte Vorzeichen.

1b) Man benutzt dann die folgende Transformation. Bei

$$x = \frac{1}{X}, \quad u(x, t) = (a - x) U\left(\frac{1}{x}, t\right)$$

und der 2. Randbedingung ( $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 1$ ) für  $X = X_0$  mit  $X_0 > 0$  erhält man als transformierte Randbedingung

$$u + (a - x_0) \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{a - x_0}{x_0} \right)^2 A_3,$$

also die 3. Randbedingung, wobei das Vorzeichen bei  $\partial u / \partial x$  die obigen Voraussetzungen erfüllt, wenn nur  $a - x_0 \geq 0$  gilt, also  $a \geq 1/X_0$  gewählt ist.

2. Es seien längs der ganzen  $X$ -Achse  $(-\infty < X < \infty)$  die Werte von  $U$  vorgegeben, und für  $X \rightarrow \pm \infty$  sei  $U(X, t)$  für jedes feste  $t$  beschränkt. Bei der Transformation

$$X = \operatorname{tg} x, \quad u(x, t) = \cos x \, U(\operatorname{tg} x, t),$$

$$U_x = u \sin x + u_x \cos x,$$

$$U_{xx} = (u + u_{xx}) \cos^3 x$$

hat man  $u(\pm \pi/2, t) = 0$  und für  $u(x, t)$  eine 1. Randwertaufgabe. Allerdings tritt hier in der transformierten Gleichung neben  $u_{xx}$  das Glied  $u$  auf, so dass zum Beispiel bei der Wärmeleitungsgleichung  $U_{xx} = k U_t$  nach (26) die Fehlerschranke in  $t$  exponentiell anwächst. (Man kann erreichen, dass kein solches Glied mit  $u$  auftritt; der Faktor von  $u$  in (28) verschwindet im Falle  $n = 1$  für  $a(x) = 1/[c_1 + c_2 b_1(x)]$  mit beliebigen Konstanten  $(c_1, c_2)$ ; die Transformation (29) ordnet sich hier ein.) Doch ist dem Verfasser keine brauchbare Transformation bekannt, die in den Fällen 1 b und 2 das exponentielle Anwachsen der Fehlerschranke vermeidet.

### Summary

Types of boundary value problems of partial differential equations for infinite domains are discussed which can easily be transformed in such a manner as to allow estimations of error (for approximate solutions) similar to the boundary maximum principle. First, second und third boundary value problems for the outer domain of linear elliptic and certain linear and nonlinear parabolic differential equations are examined. For elliptic differential equations one of the results is that the second boundary value problem for more than two dimensions can be included. The estimates of the paper can thus be applied to problems of flow around some object, not in the case of two but of three dimensions. This is in a certain sense a counterpart to the conformal mappings method which is successful for two but not for three dimensions. Numerical examples show that estimations of error can easily be carried out.

(Eingegangen: 8. Oktober 1957.)

Contribution à la méthode des équations aux différences

Par JOSEPH HERSCH, Carouge-Genève<sup>1)</sup>

Table des matières

Introduction. . . . . 130

Première partie: *Equations aux différences exactes*

I. Equations différentielles ordinaires à coefficients constants

§ 1. Equations aux différences exactes. – Fonctions de nœuds et fonctions de cellules . . . . . 130

§ 2. Méthode: construction d'une distribution . . . . . 134

§ 3. Méthode récurrente . . . . . 143

II. Premiers essais de transposition à des équations aux dérivées partielles

§ 4. Le problème de Cauchy pour un demi-plan . . . . . 149

§ 5. Traduction finie de l'équation  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^2\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \eta^2\right) \varphi(x, y) = \varrho_0$  . . . . . 151

Deuxième partie: *Calcul approché*

III. Equations différentielles ordinaires: Problèmes aux limites

§ 6. Méthode: calcul local des perturbations . . . . . 153

§ 7. Exemple:  $y'' + (1 + x^2) y = -1$  avec  $y(-1) = y(1) = 0$  . . . . . 154

IV. Equations différentielles ordinaires: Problèmes aux valeurs propres

§ 8. Méthode . . . . . 156

§ 9. Exemple:  $y'' + \lambda (1 + x^2) y = 0$  avec  $y(-1) = y(1) = 0$  . . . . . 156

V. Equations aux dérivées partielles: Problèmes aux limites

§ 10. Quelques remarques générales . . . . . 158

§ 11. Exemple: Equilibre d'une plaque hexagonale encastrée, uniformément chargée . . . . . 158

VI. Equations aux dérivées partielles: Problèmes aux valeurs propres

§ 12. Réseau triangulaire (nœuds) ou hexagonal (cellules): membrane vibrante . . . . . 160

§ 13. Mêmes réseaux: plaque vibrante . . . . . 169

§ 14. Réseaux quadratiques: membrane vibrante . . . . . 172

§ 15. Réseaux quadratiques: plaque vibrante . . . . . 177

Bibliographie . . . . . 179

Summary . . . . . 180

<sup>1)</sup> Institut Battelle, Genève, et Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich.

## Introduction

Une équation différentielle étant donnée, quelle équation aux différences faut-il lui faire correspondre pour obtenir des valeurs approchées de ses solutions? La recette classique pour le remplacement des dérivées successives d'une fonction  $q(x)$  par des différences  $\sum_1^n a_i q(x_i)$ , est simple et facile à appliquer; mais elle repose entièrement sur des propriétés des polynômes; *cette recette ne tient aucun compte du fait que la fonction  $q$  satisfait précisément à une équation différentielle connue*. C'est pourquoi l'équation aux différences classique ne fournit en général pas les valeurs exactes de  $q$ , même lorsque l'équation différentielle est simple et se laisse résoudre élémentairement.

Dans la *première partie* de cet article, je me contente d'étudier quelques cas simples, où la solution exacte est connue. Cette étude préliminaire conduit à plusieurs méthodes générales. — Celles-ci sont ensuite appliquées, dans la *deuxième partie* du travail, à la construction de bonnes équations aux différences dans des cas non triviaux. — Dans ce travail, j'insiste davantage sur les méthodes générales que sur telle ou telle formule approchée obtenue grâce à elles: d'où la place considérable accordée à la première partie, qui ne traite que de problèmes «triviaux». — Je ne m'occupe ici que d'équations *linéaires*.

Les principaux résultats ont été annoncés dans deux notes [6, 7]<sup>2)</sup> aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. — J'exprime ma vive gratitude au Centre National de la Recherche Scientifique à Paris et au Fonds National Suisse pour la recherche scientifique (par l'Ecole Polytechnique Fédérale): c'est grâce à leurs bourses (1954–55, resp. 1955–57) que le présent travail a pu être réalisé.

### PREMIÈRE PARTIE:

#### *Équations aux différences exactes*

#### **I. Equations différentielles ordinaires à coefficients constants**

§ 1. *Equations aux différences exactes. — Fonctions de nœuds et fonctions de cellules*

1.1 La solution générale de l'équation différentielle est connue: il est dès lors clair que les méthodes qu'on va développer ne sont intéressantes que dans la mesure où elles se laissent transposer à des cas non triviaux.

Soit  $L[q] = 0$  l'équation différentielle donnée dans un intervalle  $I: 0 < x < nh$ ; on impose en outre des conditions aux extrémités: nous y reviendrons. Intéressons-nous aux valeurs de  $q$  aux points  $0, h, 2h, \dots, nh$  ( $h$  est la «maille») et

<sup>2)</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 179.

## 1.2 Quelques exemples simples:

L'opérateur différentiel $L$	Solutions fondamentales	Leurs valeurs aux points						L'opérateur exact $L_h^*$						Un opérateur aux différences classiques			
		$x_0 - 2h$	$x_0 - h$	$x_0$	$x_0 + h$	$x_0 + 2h$	$\alpha_{-2h}$	$\alpha_{-h}$	$\alpha_0$	$\alpha_h$	$\alpha_{2h}$	$\alpha_{-2h}$	$\alpha_{-h}$	$\alpha_0$	$\alpha_h$	$\alpha_{2h}$	
(2) $\frac{d}{dx}$	1		1	1				-1	1				-1	1			
(3) $\frac{d}{dx} + \eta$	$e^{-\eta(x-x_0)}$		$e^{\eta h}$	1				-1	$e^{\eta h}$				-1	$1 + \eta h$			
(4) $\left\{ \frac{d^2}{dx^2} \right\}$	$\frac{1}{h}$		1	1	1			1	-2				1	-2	1		
(5) $\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2$	$\frac{\cos[\eta(x-x_0)]}{\sin[\eta(x-x_0)]}$		$c$	1	$c$			1	-2c				1	$-2 + \eta^2 h^2$	1		
(6) $\frac{d^4}{dx^4}$	1	1	1	1	1												
	$\frac{x-x_0}{h}$	-2	-1	0	1	2											
	$\frac{(x-x_0)^2}{h^2}$	4	1	0	1	4	1	-4	6	-4	1	1	-4	6	-4	1	
	$\frac{(x-x_0)^3}{h^3}$	-8	-1	0	1	8											
(7) $\frac{d^4}{dx^4} - \eta^4$	$\frac{\cos[\eta(x-x_0)]}{\sin[\eta(x-x_0)]}$	$c_2$	$c$	1	$c$	$c_2$											
	$\frac{\text{Ch}[\eta(x-x_0)]}{\text{Sh}[\eta(x-x_0)]}$	$-s_2$	$-s$	0	$s$	$s_2$											
		$C_2$	$C$	1	$C$	$C_2$	1	$-2C - 2c$	$2 + Cc$	$-2C - 2c$	1	1	-4	$6 - \eta^4 h^4$	-4	1	
		$-S_2$	$-S$	0	$S$	$S_2$											

$c = \cos(\eta h)$ ,  $s = \sin(\eta h)$ ,  $C = \text{Ch}(\eta h)$  (cosinus hyperbolique),  $S = \text{Sh}(\eta h)$  (sinus hyperbolique);  $c_2 = \cos(2\eta h)$ ,  $s_2 = \sin(2\eta h)$ , etc.

$c = \cos(\eta h)$ ,  $s = \sin(\eta h)$ ,  $C = \text{Ch}(\eta h)$  (cosinus hyperbolique),  $S = \text{Sh}(\eta h)$  (sinus hyperbolique);  $c_2 = \cos(2\eta h)$ ,  $s_2 = \sin(2\eta h)$ , etc.



cherchons à quelle équation aux différences elles satisfont *exactement*. Pour cela, nous considérons d'abord la méthode la plus immédiate:

L'énumération des solutions fondamentales de  $L[\varphi] = 0$ : on construit une équation aux différences satisfaite par chacune d'elles.

Cette façon de procéder est tautologique: quand on connaît la solution générale de l'équation différentielle, nul n'est besoin d'équations aux différences!

Nous écrivons l'équation aux différences

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \varphi(x_0) + \alpha_h \varphi(x_0 + h) + \alpha_{-h} \varphi(x_0 - h) + \alpha_{2h} \varphi(x_0 + 2h) \\ + \alpha_{-2h} \varphi(x_0 - 2h) + \dots = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

où un nombre fini de coefficients  $\alpha$  sont différents de zéro, sous la forme

$$L_h^*[\varphi] = \langle L_h^*, \varphi \rangle = 0^3)$$

avec

$$L_h^* = \alpha_0 \delta_{(x_0)} + \alpha_h \delta_{(x_0+h)} + \alpha_{-h} \delta_{(x_0-h)} + \alpha_{2h} \delta_{(x_0+2h)} + \alpha_{-2h} \delta_{(x_0-2h)} + \dots; \quad (1')$$

$\delta_{(x_0)}$  est la mesure de DIRAC au point  $x_0$ .

On voit que les équations aux différences classiques sont exactes pour les solutions des équations différentielles (2), (4) et (6), qui sont des *polynômes*. Dans les autres cas, les équations classiques sont données par les quelques premiers termes du développement de l'équation exacte pour  $h \rightarrow 0$ .

*Remarque.* Ainsi s'explique en partie la réputation des équations aux différences d'être inutilisables pour le calcul des valeurs propres supérieures: pour un  $h$  donné, les coefficients des équations classiques sont d'autant plus mauvais que  $\eta$  est plus grand.

### 1.3 Condition d'encastrement

1.31 Comment faut-il traduire dans le langage des équations aux différences la condition d'encastrement

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \quad (8)$$

pour une fonction  $\varphi(x)$  solution, dans un intervalle  $0 < x < a$ , d'une équation différentielle donnée  $L[\varphi] = 0$ ? – La recette *classique* est simple: on prend un point virtuel  $x = -h$  et l'on y pose

$$\varphi(-h) = \varphi(h); \quad (9)$$

le raisonnement heuristique suivant y conduit: la première dérivée de  $\varphi$  qui

<sup>3)</sup>  $\langle f, g \rangle$  désigne le produit scalaire  $\int f(x) g(x) dx$ .

puisse ne pas s'annuler en 0 est la seconde: au voisinage de 0, on approxime  $q(x)$  par  $x^2$ , qui est une fonction paire. — Critique: la relation (9) n'est exacte que si  $\varphi$  est elle-même paire; c'est le cas si  $L[\varphi] \equiv \varphi'''$ . Mais en général ce n'est pas le cas: l'expression finie de la condition aux limites doit dépendre de l'équation différentielle (c'est du reste évident).

1.32 Cas où  $L[\varphi] = d^4q/dx^4 = 0$ . Solutions fondamentales: 1,  $x/h$ ,  $(x/h)^2$ ,  $(x/h)^3$ ; seules les deux dernières satisfont (8); la condition (9) est inexacte, car la fonction  $(x/h)^3$  ne la satisfait pas! On cherche une relation  $\varphi(-h) = \alpha \varphi(h) + \beta \varphi(2h)$ , satisfaite par  $(x/h)^2$  et  $(x/h)^3$ ; donc le vecteur  $(-1, \alpha, \beta)$  est parallèle au produit vectoriel  $(1, 1, 4) \times (-1, 1, 8) = (4, -12, 2)$ ;  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -1/2$ .

$$\varphi(-h) = 3 \varphi(h) - \frac{1}{2} \varphi(2h) \quad (10)$$

est la condition exacte d'encastrement correspondant à l'équation  $d^4q/dx^4 = 0$ . Cette relation équivaut, vu l'équation finie  $\varphi(-h) = 4\varphi(0) + 6\varphi(h) - 4\varphi(2h) + \varphi(3h) = 0$ , à l'équation exacte

$$9\varphi(h) - \frac{9}{2}\varphi(2h) + \varphi(3h) = 0; \quad (10')$$

tandis que (9) équivaut à l'équation inexacte  $7\varphi(h) - 4\varphi(2h) + \varphi(3h) = 0$ , qui n'est vraie qu'asymptotiquement pour  $h \rightarrow 0$ : sacrifice inutile.

Remarque. Cet exemple simple montre aussi qu'il est artificiel d'exiger que l'équation aux différences donne un système symétrique en même temps que l'équation différentielle: car ce n'est pas le cas avec la condition exacte (10').

1.33 Cas où  $L[\varphi] = d^4q/dx^4 = \eta^4 q = 0$ . Solutions fondamentales satisfaisant (8):  $\text{Ch}(\eta x) - \cos(\eta x)$  et  $\text{Sh}(\eta x) - \sin(\eta x)$ ; écrivons de nouveau  $C = \text{Ch}(\eta h)$ , etc., nous obtenons

$$\varphi(-h) = \left(-1 + \frac{2Sc - 2sc}{C^2s - S^2c}\right) \varphi(h) - \frac{S - s}{C^2s - S^2c} \varphi(2h). \quad (11)$$

La relation (10) est le début du développement de (11) pour  $\eta \rightarrow 0$  (tandis que (9) est le début pour  $h \rightarrow 0$ , et n'est exacte pour aucun  $\eta$ ).

1.4 Fonctions de cellules (ou d'intervalles). La valeur  $q(x_0)$  de la fonction  $q$  en un point  $x_0$  n'est qu'un cas particulier d'une fonctionnelle locale  $\Psi[q] = \langle \Psi, q \rangle$ , produit scalaire de  $q$  avec une distribution  $\Psi$  à support compact: si  $\Psi = \delta_{(x_0)}$ ,  $\Psi[q] = q(x_0)$ . Nous considérerons le cas où le support de  $\Psi$  est dans un intervalle  $I$ :  $0 \leq x < h$ ; à chaque intervalle  $I_k$ :  $x_k \leq x < x_{k+1} = x_k + h$  de longueur  $h$  correspond une distribution  $\Psi_k$ : la translatée de  $\Psi$  ayant son support dans  $I_k$ ; nous définissons une fonction de cellules (ou d'intervalles)  $u = u_h$  par l'égalité

$$u_h(I_k) = \langle \Psi_k, \varphi \rangle.$$

Cas particuliers: (a) Si  $\Psi = \delta_{(0)}$  est la mesure de DIRAC,  $u_h(I_k)$  est égale à la fonction  $\varphi$  à l'origine du segment  $I_k$ : c'est la *fonction de nœuds* des paragraphes 1.1 à 1.3.

(b) Si  $\Psi = -\delta'$ , les valeurs de  $u$  sont celles des dérivées de  $\varphi$ .

(c) Si  $\Psi$  est la fonction caractéristique de  $I$  ( $\Psi = 1$  sur  $I$ , 0 ailleurs), alors

$$u_h(I_k) = \int_{I_k} \varphi \, dx.$$

Considérons maintenant une équation différentielle  $L[q] = 0$  à coefficients constants; cherchons une équation aux différences  $L^\square[u] = 0$  satisfaite par la fonction d'intervalles  $u(I_k) = \langle \Psi_k, \varphi \rangle$  pour toute solution  $\varphi$  de  $L[\varphi] = 0$ ! On peut naturellement énumérer les solutions fondamentales de  $L[q] = 0$  et calculer les fonctions d'intervalles  $u$  correspondantes. Il suffit cependant de remarquer que  $\langle \Psi_k, \varphi \rangle = \langle \Psi(x), \varphi(x + x_k) \rangle$  pour déduire de (1) la relation

$$L^\square[u] = \alpha_0 u(I_0) + \alpha_h u(I_1) + \alpha_{-h} u(I_{-1}) + \alpha_{2h} u(I_2) + \dots = 0, \quad (12)$$

où la somme est en réalité finie. Nous voyons que, quelle que soit la distribution  $\Psi$ ,  $L^\square$  a les mêmes coefficients que  $L^*$ . Bien entendu, cela n'est vrai que pour la «traduction finie» de l'équation différentielle et non pas pour les conditions aux limites!

## § 2. Méthode: construction d'une distribution

2.1 Les considérations suivantes sont indépendantes de l'hypothèse que les coefficients de  $L[\varphi] = 0$  soient constants.

Nous revenons au problème initial (§ 1.1) de déterminer une équation aux différences  $L^*[\varphi] = 0$  satisfaite par toute solution  $\varphi$  de  $L[\varphi] = 0$ . L'équation aux différences cherchée n'est autre qu'une *combinaison linéaire* des équations différentielles relatives à tous les points d'un segment: nous multiplions donc scalairement l'équation  $L[\varphi] = 0$  par une distribution  $T$  à support compact:  $0 = \langle T, L[\varphi] \rangle = \langle L[T], \varphi \rangle$ , où  $L$  est l'opérateur différentiel adjoint à  $L$ . Nous voulons donc avoir, conformément à (1'),

$$L[T] = L_h^* = \alpha_0 \delta_{(x_0)} + \alpha_h \delta_{(x_0+h)} + \alpha_{-h} \delta_{(x_0-h)} + \alpha_{2h} \delta_{(x_0+2h)} + \dots; \quad (1'')$$

les coefficients  $\alpha_0, \alpha_h, \dots$  (en nombre fini) sont à déterminer en sorte qu'il existe une telle distribution  $T$ . Mais, comme nous allons le voir, la distribution  $T$  elle-même n'est pas sans intérêt.

2.2 Si l'équation différentielle donnée est  $L[\varphi] = f(x)$ , nous obtenons *immédiatement* sa «traduction discrète»: c'est l'équation aux différences

$$L_h^*[\varphi] = \langle T, f \rangle. \quad (13)$$

Pour autant qu'on ne s'intéresse qu'aux valeurs de  $\varphi$  en un nombre fini de points, nul n'est donc besoin de connaître exactement la fonction  $f(x)$ : seuls jouent un rôle les produits scalaires  $\langle T, f \rangle$ , qui sont en nombre fini.

2.3 Cette méthode permet également de traduire par des équations finies les conditions linéaires *aux limites* imposées à la fonction  $q(x)$ . Supposons que la fonction  $\varphi$  soit cherchée dans un intervalle  $0 < x < b = n h$ , et que l'on impose au point 0 les conditions aux limites suivantes, en nombre fini:

$$L_i^0[\varphi] \equiv \beta_{i0} \varphi(0) + \beta_{i1} \varphi'(0) + \dots = \beta_i,$$

$$L_j^0[\varphi] = \beta_{j0} \varphi(0) + \beta_{j1} \varphi'(0) + \dots = \beta_j,$$

$$\dots\dots\dots$$

où toutes les sommes ont un nombre fini de termes. Nous construirons alors des distributions  $T$  telles que ces expressions données apparaissent:

$$\begin{aligned} L_h^*[ \varphi ] &= \langle L[T], \varphi \rangle = \gamma_0 \varphi(0) + \gamma_h \varphi(h) + \gamma_{2h} \varphi(2h) + \dots + \zeta_1 L_1^0[\varphi] + \zeta_2 L_2^0[\varphi] + \dots \\ &= \gamma_0 \varphi(0) + \gamma_h \varphi(h) + \dots + \sum_i \zeta_i \beta_i; \end{aligned}$$

c'est-à-dire, si nous écrivons  $L_i^0 = \beta_{i0}(-1)^0 \delta + \beta_{i1}(-1)^1 \delta' + \dots$ , etc. ( $\delta = \delta_{(0)}$ ),

$$L_h^* = \bar{L}[T] = \gamma_0 \delta_{(0)} + \gamma_h \delta_{(h)} + \gamma_{2h} \delta_{(2h)} + \dots + \zeta_1 L_1^0 + \zeta_2 L_2^0 + \dots; \quad (1''')$$

les coefficients  $\gamma$  et  $\zeta$  doivent être déterminés en sorte qu'il existe une telle distribution  $T$ . Si l'on a  $L[q] = f(x)$ , l'équation (13) reste valable pour notre  $L_h^*$  défini selon (1''').

Les conditions aux limites se traduisent par autant d'équations aux différences complémentaires. Le cas le plus banal est la condition aux limites  $\varphi(0) = a$  ( $a$  donné).

Tout cela est valable, que les coefficients de  $L[\varphi]$  soient constants ou variables.

## 2.4 Exemples

2.41 L'exemple le plus trivial est fourni par l'«équation»  $q(x) = f(x)$ : l'opérateur «différentiel»  $L = 1$  est de degré zéro;  $\bar{L} = 1$ ; on veut avoir  $1 \cdot T = \delta_{(x_0)}$ , donc  $T = \delta_{(x_0)}$ ;  $L_h^* = \bar{L}[T] = T = \delta_{(x_0)}$ , d'où naturellement  $\varphi(x_0) = f(x_0)$ ! (L'équation aux différences ne concerne que la valeur en un point.)

2.42 Exemple un peu moins trivial:  $L[\varphi] = \varphi'(x) = f(x)$ ;  $\bar{L}[T] = -T' = \alpha_0 \delta_{(x_0)} + \alpha_{-h} \delta_{(x_0-h)}$ ;  $T$  devant être à support compact,  $T = 0$  en dehors du segment  $[x_0 - h, x_0]$ ;  $T$  est constante à l'intérieur de ce segment: nous y posons  $T = 1$ ; d'où  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_{-h} = -1$ ;  $L_h^* = -\delta_{(x_0-h)} + \delta_{(x_0)}$ ; l'équation aux diffé-

rences (13) devient

$$-\varphi(x_0 - h) + \varphi(x_0) = \int_{x_0 - h}^{x_0} f(x) dx.$$

2.43  $L[\varphi] = \varphi'(x) + \eta \varphi(x) = f(x)$ ; alors

$$L[T] = -T' + \eta T = \alpha_0 \delta_{(x_0)} + \alpha_{-h} \delta_{(x_0 - h)};$$

nous prenons

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{en dehors de } [x_0 - h, x_0]; \\ e^{\eta(x - x_0 + h)} & \text{dans } [x_0 - h, x_0]; \end{cases}$$

d'où  $\alpha_0 = e^{\eta h}$  et  $\alpha_{-h} = -1$ ; donc

$$\varphi(x_0 - h) + e^{\eta h} \varphi(x_0) = \int_{x_0 - h}^{x_0} f(x) e^{\eta(x - x_0 + h)} dx$$

(en accord avec la méthode de variation des constantes).

2.44 Pour l'opérateur  $L = d^2/dx^2$ , on construit la fonction

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq x_0 - h; \\ x - x_0 + h & \text{pour } x_0 - h \leq x \leq x_0; \\ -x + x_0 + h & \text{pour } x_0 \leq x \leq x_0 + h; \\ 0 & \text{pour } x \geq x_0 + h; \end{cases}$$

d'où  $L_h^* = \bar{L}[T] = \delta_{(x_0 - h)} - 2\delta_{(x_0)} + \delta_{(x_0 + h)}$ .

2.45 Pour l'opérateur  $L = d^2/dx^2 + \eta^2$ , on construit la fonction

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq x_0 - h; \\ \frac{1}{\eta} \sin[\eta(x - x_0 + h)] & \text{pour } x_0 - h \leq x \leq x_0; \\ \frac{1}{\eta} \sin[\eta(-x + x_0 + h)] & \text{pour } x_0 \leq x \leq x_0 + h; \\ 0 & \text{pour } x \geq x_0 + h; \end{cases}$$

d'où  $L_h^* = \bar{L}[T] = \delta_{(x_0 - h)} - 2 \cos(\eta h) \delta_{(x_0)} + \delta_{(x_0 + h)}$ .

2.46 Pour l'opérateur  $L = d^4/dx^4$ , on construit la fonction

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |\xi| \geq 2h; \\ \frac{(2h - |\xi|)^3}{6} & \text{pour } h \leq |\xi| \leq 2h; \\ \frac{(2h - |\xi|)^3 - 4(h - |\xi|)^3}{6} & \text{pour } |\xi| \leq h, \text{ où } \xi = x - x_0; \end{cases}$$

d'où  $L_h^* = \bar{L}[T] = \delta_{(x_0 - 2h)} - 4\delta_{(x_0 - h)} + 6\delta_{(x_0)} - 4\delta_{(x_0 + h)} + \delta_{(x_0 + 2h)}$ .



Montrons ici, à titre d'exemple, la construction détaillée de  $T(x)$ :  $T$  étant à support compact,  $T(x) = 0$  pour  $|x - x_0| > 2h$ ; comme  $\bar{L}[T] = d^4 T/dx^4$  doit être une combinaison linéaire de mesures de DIRAC  $\delta$  et non pas de  $\delta'$ ,  $\delta''$  ou  $\delta'''$ ,  $T(x)$  doit être *continue ainsi que ses dérivées première et seconde*;  $T'''$  sera discontinue aux seuls points  $x_0 - 2h$ ,  $x_0 - h$ ,  $x_0$ ,  $x_0 + h$ ,  $x_0 + 2h$ . Désignons les intervalles

$$I_1: x_0 - 2h \leq x \leq x_0 - h; \quad I_2: x_0 - h \leq x \leq x_0;$$

$$I_3: x_0 \leq x \leq x_0 + h; \quad I_4: x_0 + h \leq x \leq x_0 + 2h;$$

et posons  $x_1 = x - (x_0 - 2h)$ ;  $x_2 = x - (x_0 - h)$ ;  $x_3 = x - x_0$ ;  $x_4 = x - (x_0 + h)$ . Dans chacun des intervalles  $I_1, I_2, I_3, I_4$ ,  $\bar{L}[T] = d^4 T/dx^4 = 0$ ,  $T$  y est donc un polynôme du troisième degré. — Pour  $x_1 < 0$ , nous avons  $T = 0$ ; donc en  $x_1 = 0$ :  $T = T' = T'' = 0$ ; d'où dans  $I_1$ :  $T = \text{const} \cdot x_1^3$ ; nous normons cette constante en sorte d'avoir  $T'''(x_1 = +0) = 1$ :

$$T = \frac{1}{6} x_1^3;$$

en  $x_1 = h - 0$ :

$$T = \frac{1}{6} h^3, \quad T' = \frac{1}{2} h^2, \quad T'' = h, \quad T''' = 1;$$

nous devons donc avoir dans  $I_2$ :

$$T = \frac{1}{6} h^3 + \frac{1}{2} h^2 x_2 + \frac{1}{2} h x_2^2 + k x_2^3 = \frac{1}{6} (x_2 - h)^3 + \left(k + \frac{1}{6}\right) x_2^3,$$

où la constante  $k$  reste à déterminer. En  $x_0$ , on a  $x_2 = h$ :

$$T = \left(\frac{7}{6} - k\right) h^3, \quad T' = \left(\frac{3}{2} - 3k\right) h^2, \quad T'' = (1 - 6k) h, \quad T''' = 6k.$$

Dans  $I_3$  et  $I_4$ , nous posons naturellement  $T(x) = T(2x_0 - x)$ ; la continuité de  $T'$  en  $x_0$  impose donc que  $T'(x_0) = 0$ , c'est-à-dire  $k = -1/2$ . Nous avons alors dans  $I_1$ :  $T''' = 1$ ; dans  $I_2$ :  $T''' = 6k = -3$ ; dans  $I_3$ :  $T''' = +3$ ; dans  $I_4$ :  $T''' = -1$ ; nous obtenons bien

$$L_h^* = \bar{L}[T] = \delta_{(x_0-2h)} - 4 \delta_{(x_0-h)} + 6 \delta_{(x_0)} - 4 \delta_{(x_0+h)} + \delta_{(x_0+2h)}.$$

2.47 Pour l'opérateur  $L = d^4/dx^4 - \eta^4$ , on construit de même la fonction

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |\xi| \geq 2h; \\ \frac{1}{2\eta^3} \{\text{Sh}[\eta(2h - |\xi|)] - \sin[\eta(2h - |\xi|)]\} & \text{pour } h \leq |\xi| \leq 2h; \\ \frac{1}{2\eta^3} \{S \cdot \text{Ch}[\eta(h - |\xi|)] - (C + 2c) \text{Sh}[\eta(h - |\xi|)] \\ \quad - s \cdot \cos[\eta(h - |\xi|)] + (2C + c) \sin[\eta(h - |\xi|)]\} & \text{pour } |\xi| \leq h, \end{cases}$$

où  $\xi = x - x_0$ ,  $S = \text{Sh}(\eta h)$ ,  $C = \text{Ch}(\eta h)$ ,  $s = \sin(\eta h)$ ,  $c = \cos(\eta h)$ ;

$$\text{d'où } L_h^* = L[T] = \delta_{(x_0-2h)} - 2(C+c) \delta_{(x_0-h)} + (2+4Cc) \delta_{(x_0)} \\ - 2(C+c) \delta_{(x_0+h)} + \delta_{(x_0+2h)}.$$

2.48 *Condition d'encastrement*  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$  avec l'opérateur  $L = d^4/dx^4$ .

Nous étudions la fonction  $\varphi$  dans un intervalle  $0 \leq x \leq nh$ . Les distributions  $T$  et les équations aux différences relatives à l'intérieur de l'intervalle ont été construites au § 2.46 ci-dessus.  $\varphi(0) = 0$  est maintenant connue; mais il faut une seconde équation finie pour traduire la condition d'encastrement. Conformément au § 2.3, nous construisons une distribution  $T$  telle que  $L[T]$  soit une combinaison linéaire de  $\delta_{(0)}$ ,  $\delta'_{(0)}$ ,  $\delta_{(h)}$ ,  $\delta_{(2h)}$ ,  $\delta_{(3h)}$ :

Désignons les intervalles  $I_2$ :  $0 \leq x \leq h$ ;  $I_3$ :  $h \leq x \leq 2h$ ;  $I_4$ :  $2h \leq x \leq 3h$ . Nous posons  $T = 0$  en dehors de ces trois intervalles.

Dans  $I_4$ : de façon analogue au § 2.46, on a

$$T = \frac{1}{6} (3h - x)^3;$$

d'où dans  $I_3$ :

$$T = \frac{1}{6} (3h - x)^3 + \left(k_1 - \frac{1}{6}\right) (2h - x)^3,$$

la constante  $k_1$  étant à déterminer.

Dans  $I_2$ :  $T$  et  $T'$  doivent être continues en 0, donc nulles;

$$T = k_2 h x^2 + k_3 x^3.$$

Il nous reste à déterminer  $k_1, k_2, k_3$  par les trois conditions que  $T, T'$  et  $T''$  soient continues en  $x = h$ : on obtient  $k_1 = -7/12$ ,  $k_2 = 3/2$ ,  $k_3 = -11/12$ ; donc dans  $I_2$ :

$$T = \frac{3}{2} h x^2 - \frac{11}{12} x^3, \quad T''' = -\frac{11}{2}; \quad T''(+0) = 3h;$$

dans  $I_3$ :

$$T = \frac{1}{6} (3h - x)^3 - \frac{3}{4} (2h - x)^3, \quad T''' = \frac{7}{2};$$

dans  $I_4$ :

$$T = \frac{1}{6} (3h - x)^3, \quad T''' = -1;$$

d'où

$$L_h^* = \bar{L}[T] = \frac{d^4 T}{dx^4} = -\frac{11}{2} \delta_{(0)} + 3h \delta'_{(0)} + 9 \delta_{(h)} - \frac{9}{2} \delta_{(2h)} + \delta_{(3h)}.$$

Si  $d^4\varphi/dx^4 = 0$ , l'équation aux différences est donc

$$\begin{aligned} 0 &= L_h^*[\varphi] = -\frac{11}{2} \varphi(0) - 3h \varphi'(0) + 9\varphi(h) - \frac{9}{2} \varphi(2h) + \varphi(3h) \\ &= 9\varphi(h) - \frac{9}{2} \varphi(2h) + \varphi(3h), \end{aligned}$$

en accord avec (10').

Si  $d^4\varphi/dx^4 = f(x)$ , il suffit de remplacer à gauche 0 par  $\langle T, f \rangle$ .

Toutes nos formules sont naturellement en accord avec celles que nous avons obtenues par énumération aux §§ 1.2 et 1.3; la connaissance des distributions  $T$  permet en outre de transposer immédiatement nos équations aux différences pour l'équation différentielle  $L[\varphi] = f(x)$ . — D'autre part, ces distributions peuvent être utilisées avec succès pour le *calcul approché* de problèmes à coefficients variables (calcul local des perturbations, cf. chapitres III et IV).

## 2.5 Comparaison avec d'autres méthodes aux différences

2.51 Notre méthode par construction d'une distribution à plusieurs points communs avec celle de H. SASSENFELD, que R. ZURMÜHL ([12], p. 404 ss.) appelle *Quadraturverfahren*: (a) les deux méthodes font usage de l'équation différentielle donnée en tous les points d'un segment; (b) l'intégration par parties intervenant dans la méthode de SASSENFELD correspond à notre passage de l'opérateur  $L$  à l'opérateur adjoint  $L$ . (c) Cependant, contrairement à SASSENFELD, nous construisons la distribution  $T$  qui seule peut fournir l'équation aux différences exacte; c'est pourquoi nous ne sommes pas amenés à une équation intégrale.

2.52 Contrairement aux deux méthodes comparées ci-dessus, celles que L. COLLATZ et R. ZURMÜHL appellent *Mehrstellenverfahren* et *Differenzenverfahren höherer Annäherung* n'utilisent l'équation différentielle qu'en un nombre fini de points. Le dernier procédé a le défaut important de faire intervenir dans chaque équation finie plus d'inconnues qu'il n'est nécessaire. — Nous verrons cependant (§§ 7 et 9) que le «*Mehrstellenverfahren*» donne des résultats souvent proches de ceux de notre méthode.

2.53 Il est essentiel, pour la deuxième partie de ce travail, que notre méthode fournisse l'équation aux différences *exacte* lorsque les coefficients sont constants. Cet avantage n'est pas réalisé par les autres méthodes: c'est pourquoi je peux dire qu'elles consentent des sacrifices inutiles.

## 2.6 Une loi de composition pour les opérateurs aux différences

Soient

$$L_h^{(1)*}[\varphi] = \sum_m \alpha_{mh}^{(1)} \varphi(x_0 + mh) \quad \text{et} \quad L_h^{(2)*}[\varphi] = \sum_m \alpha_{mh}^{(2)} \varphi(x_0 + mh)$$

deux opérateurs aux différences à coefficients constants; je définis leur *produit de composition* comme celui de deux distributions:

$$(L_h^{(1)*} * L_h^{(2)*})[\varphi] = \sum_k \alpha_{kh}^{(12)} \varphi(x_0 + k h), \quad \text{où} \quad \alpha_{kh}^{(12)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{mh}^{(1)} \alpha_{(h-m)h}^{(2)};$$

les sommes n'ayant en réalité qu'un nombre fini de termes.

*Loi de composition:* Soient  $L^{(1)}$  et  $L^{(2)}$  deux opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants; alors

$$(L^{(1)} L^{(2)})_h^* = L_h^{(1)*} * L_h^{(2)*};$$

de plus, si  $T_L^{(1)}$  assure le passage de  $L^{(1)}$  à  $L_h^{(1)*}$  et  $T_L^{(2)}$  de  $L^{(2)}$  à  $L_h^{(2)*}$  (cf. § 2.1), alors la distribution

$$T_{L^{(1)} L^{(2)}} = T_{L^{(1)}} * T_{L^{(2)}},$$

obtenue par produit de composition<sup>4)</sup>, assure le passage de  $L^{(1)} L^{(2)}$  à  $(L^{(1)} L^{(2)})_h^*$ .

Démonstration: Par hypothèse,

$$L^{(1)}[T_{L^{(1)}}] = L_h^{(1)*} \quad \text{et} \quad L^{(2)}[T_{L^{(2)}}] = L_h^{(2)*};$$

donc

$$L^{(1)} L^{(2)}[T_{L^{(1)}} * T_{L^{(2)}}] = L^{(1)}[T_{L^{(1)}}] * L^{(2)}[T_{L^{(2)}}] = L_h^{(1)*} * L_h^{(2)*}.$$

*Exemples:* Reprenons les cas traités au § 1.2 (et au § 2.4): il suffit de décomposer

$$\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 - \left( \frac{d}{dx} + i\eta \right) \left( \frac{d}{dx} - i\eta \right)$$

et

$$\frac{d^4}{dx^4} - \eta^4 - \left( \frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 \right) \left( \frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 \right)$$

pour voir que les opérateurs aux différences exacts (4), (5), (6), (7) peuvent être obtenus par composition à partir de (2) et (3). Par exemple:

$$\left( \frac{d}{dx} + i\eta \right)_h^* = -\delta_{(-h)} + e^{i\eta h} \delta_{(0)}$$

et

$$\left( \frac{d}{dx} - i\eta \right)_h^* = -\delta_{(0)} + e^{-i\eta h} \delta_{(h)};$$

donc

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 \right)_h^* = \delta_{(-h)} - 2 \cos(\eta h) \delta_{(0)} + \delta_{(h)}.$$

On vérifie également la loi de composition pour les distributions  $T$  construites au § 2.4.

<sup>4)</sup> Si  $T_1(x)$  et  $T_2(x)$  sont des fonctions,  $(T_1 * T_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_1(\xi) T_2(x - \xi) d\xi$ .

## 2.7 Généralisation: distributions $T^\square$ conduisant à des équations aux différences pour des fonctions d'intervalles

2.71 Comme au § 1.4, nous considérons une distribution  $\Psi$  à support dans l'intervalle  $[0, h)$ , et nous nous intéressons aux valeurs de la fonction d'intervalles  $u_h$  définie par  $u_h(I_k) = \langle \Psi_k, q \rangle$ ; où  $I_k$  est un intervalle  $x_k \leq x < x_{k+1} = x_k + h$  du réseau et  $\Psi_k$  est la translatée de  $\Psi$ , à support dans  $I_k$ .

De même qu'au § 2.1, nous multiplions scalairement l'équation différentielle  $L[q] = 0$  par une distribution  $T^\square$  à support compact:

$$0 = \langle T^\square, L[q] \rangle = \langle L[T^\square], q \rangle$$

mais à présent nous voulons avoir

$$L_h^\square = L[T^\square] = \alpha_0^\square \Psi_0 + \alpha_h^\square \Psi_1 + \alpha_{-h}^\square \Psi_{-1} + \alpha_{2h}^\square \Psi_2 + \alpha_{-2h}^\square \Psi_{-2} + \dots,$$

et les coefficients  $\alpha^\square$  sont à déterminer en sorte qu'une telle distribution  $T^\square$  existe. Nous aurons alors

$$0 = L_h^\square[u_h] \equiv \alpha_0^\square u(I_0) + \alpha_h^\square u(I_1) + \alpha_{-h}^\square u(I_{-1}) + \dots$$

Si  $L[q] = f(x)$ , il suffira de remplacer à gauche 0 par  $\langle T^\square, f \rangle$ .

On remarque (comme au § 2.2) que les valeurs  $u(I_i)$  sont déterminées dès qu'on connaît ces produits scalaires  $\langle T^\square, f \rangle$ , qui sont en nombre fini. Il n'est pas nécessaire de connaître exactement  $f(x)$ .

## 2.72 A l'intérieur (traduction de l'équation différentielle):

Soit  $T$  la distribution assurant le passage de  $L$  à  $L_h^*$  (pour les fonctions de nœuds, cf. 2.1);  $L$  étant à coefficients constants, la distribution

$$T^\square = T * \Psi,$$

obtenue par produit de composition, assure le passage de  $L$  à  $L_h^\square$ ; et les coefficients  $\alpha_0^\square, \alpha_h^\square, \alpha_{-h}^\square, \alpha_{2h}^\square, \dots$  de  $L_h^\square$  sont identiques aux  $\alpha_0, \alpha_h, \alpha_{-h}, \alpha_{2h}, \dots$  de  $L_h^*$ .

En effet:

$$\bar{L}[T^\square] = \bar{L}[T] * \Psi = (\alpha_0 \delta_{(x_0)} + \alpha_h \delta_{(x_0+h)} + \dots) * \Psi = \alpha_0 \Psi_0 + \alpha_h \Psi_1 + \dots$$

L'équation aux différences est donc, à l'intérieur de l'intervalle considéré, indépendante de la distribution  $\Psi$ ; cela, en accord avec le § 1.4.

2.73 Il en va tout autrement pour les extrémités: on doit maintenant construire des distributions  $T^\square$  (indépendamment des  $T$ ), telles que (je garde les notations du § 2.3)

$$L_h^\square = L[T^\square] = \gamma_0^\square \Psi_0 + \gamma_h^\square \Psi_1 + \gamma_{2h}^\square \Psi_2 + \dots + \zeta_1^\square L_1^0 + \zeta_2^\square L_2^0 + \dots;$$

on doit prendre les coefficients  $\gamma^\square$  et  $\zeta^\square$  en sorte qu'une telle  $T^\square$  existe.

2.74 Exemples de conditions aux limites. Je me borne au cas où  $\Psi$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $I_0 = [0, h]$ :  $\Psi(x) = 1$  pour  $0 \leq x < h$ , 0 ailleurs.

(a) Equation donnée:  $d\varphi/dx = f(x)$  pour  $x > 0$ , condition en 0:  $\varphi(0) = a$ .

$$L = \frac{d}{dx}; \quad \bar{L} = -\frac{d}{dx}; \quad \text{je cherche } T^\square \text{ telle que } -\frac{dT^\square}{dx} = \gamma \Psi + \zeta \delta_{(0)};$$

c'est-à-dire:  $T^\square$  doit être à support compact, continue sauf en 0, et de dérivée première constante dans  $[0, h]$ , nulle ailleurs. Je prends donc

$$T^\square = h - x \quad \text{pour } 0 < x \leq h, \quad 0 \text{ ailleurs}; \quad \gamma = 1, \quad \zeta = -h;$$

d'où

$$T^\square, f = T^\square, \varphi' = -T^{\square'}, \varphi = \Psi, \varphi = h \delta_{(0)}, \varphi = u(I_0) = ah;$$

$$u(I_0) = ah + \int_0^h (h-x) f(x) dx$$

(c'est d'ailleurs trivial).

(b) Equation donnée:  $d^2\varphi/dx^2 = f(x)$  pour  $0 < x < nh$ ; condition en 0:  $\varphi(0) = a$ ,  $\bar{L} = L = d^2/dx^2$ ; je cherche  $T^\square(x)$  telle que  $T^{\square''} = \gamma_0 \Psi_0 + \gamma_1 \Psi_1 + \zeta \delta_{(0)}$  ( $I_1$  est l'intervalle  $h \leq x < 2h$ ).  $T^\square$  doit être continue,  $T^{\square'}$  continue sauf en 0. Je prends:

$$I_1: T^\square = \frac{1}{2} (x - 2h)^2; \quad I_0: T^\square = -\frac{3}{2} x^2 + 2hx.$$

Alors

$$T^{\square''} = -3\Psi_0 + \Psi_1 + 2h\delta_{(0)},$$

d'où

$$\langle T^\square, f \rangle = \langle T^\square, \varphi'' \rangle = \langle T^{\square''}, \varphi \rangle = -3u_0 + u_1 + 2ha.$$

Si  $f \equiv 0$ , on peut donc écrire  $u_{-1} - 2u_0 + u_1 = 0$  avec (cellule virtuelle)  $u_{-1} = 2ha - u_0$  (réflexion à l'extrémité).

(c) Equation  $d^2\varphi/dx^2 = f(x)$  pour  $0 < x < nh$ ; condition en 0:  $\varphi'(0) = b$ . Je cherche  $T^\square(x)$  telle que  $T^{\square''} = \gamma_0 \Psi_0 + \gamma_1 \Psi_1 + \zeta \delta'_{(0)}$ .  $T^\square$  doit être continue sauf en 0,  $T^{\square'} = \zeta \delta_{(0)}$  continue partout. Je prends:

$$I_1: T^\square = \frac{1}{2} (x - 2h)^2; \quad I_0: T^\square = -\frac{1}{2} x^2 + h^2.$$

On a

$$T^{\square''} = -\Psi_0 + \Psi_1 + h^2 \delta'_{(0)}; \quad \langle T^\square, f \rangle = \langle T^\square, \varphi'' \rangle = \langle T^{\square''}, \varphi \rangle = -u_0 + u_1 - h^2 b.$$

Si  $f \equiv 0$ , on peut écrire  $u_{-1} - 2u_0 + u_1 = 0$  avec  $u_{-1} = u_0 - h^2 b$  (réflexion).

(d) Si l'équation donnée est  $d^4\varphi/dx^4 = f(x)$  pour  $0 < x < nh$ , avec les conditions en 0:  $\varphi(0) = a$  et  $\varphi'(0) = b$ , on traduit ces deux conditions par deux équations aux différences: l'une («centrée en  $I_0$ ») fait intervenir  $u_0, u_1$  et  $u_2$ ;



l'autre («centrée en  $I_1$ »),  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$ . En particulier, si  $a = b = 0$  et  $f \equiv 0$ , on obtient

$$\frac{85}{4} u_0 - \frac{23}{4} u_1 + u_2 = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{5}{4} u_0 + \frac{23}{4} u_1 - 4 u_2 + u_3 = 0.$$

Il reste bien entendu que les coefficients ainsi déterminés ne sont valables que lorsque  $\Psi_k$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $I_k$ .

2.75 En vertu du § 2.72, on a de nouveau ici  $(L^{(1)} L^{(2)})_h^\square = L_h^{(1)\square} * L_h^{(2)\square}$  en définissant ce produit de composition comme au § 2.6; mais il n'est pas vrai que  $T_{L^{(1)}L^{(2)}}^\square = T_{L^{(1)}}^\square * T_{L^{(2)}}^\square$ : le § 2.72 montre que  $T^\square = T * \Psi$ , donc

$$T_{L^{(1)}L^{(2)}}^\square = T_{L^{(1)}L^{(2)}} * \Psi = T_{L^{(1)}} * T_{L^{(2)}} * \Psi = T_{L^{(1)}} * T_{L^{(2)}}^\square = T_{L^{(1)}}^\square * T_{L^{(2)}}.$$

### § 3. Méthode récurrente

Contrairement aux méthodes exposées ci-dessus, celle dont nous allons parler est indépendante d'une connaissance préalable des solutions de l'équation différentielle. De plus, elle n'est nullement restreinte, par son principe, à l'étude d'équations linéaires (bien qu'ici nous nous bornions à ce cas). — Cette méthode jouit d'une grande autonomie vis-à-vis du calcul différentiel. Nous l'appliquerons, par la suite, à des problèmes aux dérivées partielles.

3.1 L'idée de base est la comparaison des opérateurs aux différences  $L_h^*$  et  $L_{h/2}^*$  (ou bien  $L_h^\square$  et  $L_{h/2}^\square$ ). — Essayons de déterminer une suite d'opérateurs discrets  $L_h^*, L_{h/2}^*, L_{h/2^2}^*, \dots, L_{h/2^N}^*, \dots$  tels que les solutions  $u_h, u_{h/2}, \dots$  des équations  $L_h^*[u_h] = 0, L_{h/2}^*[u_{h/2}] = 0, \dots$  coïncident en tous les nœuds relatifs à la maille  $h$  (opérateurs cohérents)! Si, lorsque  $N \rightarrow \infty$ , l'équation aux différences  $L_{h/2^N}^*[u_{h/2^N}] = 0$  devient équivalente à une équation différentielle  $L[q] = 0$ , nous saurons que la solution  $q$  du problème continu prend exactement les mêmes valeurs que  $u_h$  en tous les nœuds où celle-ci est définie.

En d'autres termes: L'équivalence de l'opérateur discret  $L_h^*$  et de l'opérateur continu  $L$  s'établit en trois étapes:

(a) Passage récurrent de  $L_h^*$  à  $L_{h/2}^*$ ;

(b) Résolution de la récurrence: trouver une expression des coefficients de  $L_h^*$  telle que la récurrence soit satisfaite;

(c) Passage à la limite pour  $h \rightarrow 0$ :  $L_h^* \rightarrow L$ .

Remarque générale: La difficulté pratique de la méthode réside dans la deuxième étape (b). On peut considérer cette étape (résolution de la récurrence), pour laquelle une recette générale fait défaut, comme correspondant au problème de l'intégration d'une fonction donnée.

3.2 Il est souvent plus facile de calculer la récurrence  $L_h^* \rightarrow L_{2h}^*$ . Nous partageons l'intervalle  $J$  considéré en  $2n$  intervalles  $I_1, \dots, I_{2n}$  de longueur  $h$ ; nous obtenons  $2n + 1$  nœuds, dont  $2n - 1$  sont intérieurs à  $J$ . Appelons  $u_h$  la fonction de nœuds solution de  $L_h^*[u_h] = 0$ ; j'appelle  $u_{2h}$  la restriction de  $u_h$  aux nœuds «pairs» (dont la distance aux extrémités est un multiple entier de  $2h$ ). Il faut déterminer des équations aux différences  $L_{2h}^*[u_{2h}] = 0$  satisfaites par  $u_{2h}$ !

Comme nous ne considérons ici que des équations linéaires, chaque opérateur  $L_{2h}^*$  sera construit comme combinaison linéaire de plusieurs opérateurs  $L_h^*$ . Nous avons ici l'analogie discret du § 2.1. Au lieu de passer du continu au discret, nous passons maintenant de la maille  $h$  à la maille  $2h$ . — Les coefficients de la combinaison linéaire cherchée peuvent être eux-mêmes considérés comme les valeurs d'une fonction de nœuds  $T_h$  (correspondant à la distribution  $T$  du § 2), à support compact. Nous complétons notre formalisme discret par analogie:

$$v_h, u_h = \sum_{\text{nœuds } x_i} v_h(x_i) u_h(x_i); \quad \langle \bar{L}_h^*[v_h], u_h \rangle = \langle v_h, L_h^*[u_h] \rangle.$$

Nous avons

$$0 = \langle T_h, L_h^*[u_h] \rangle = \langle L_h^*[T_h], u_h \rangle = L_{2h}^*[u_{2h}],$$

à condition que  $L_h^*[T_h]$  s'annule sur tous les nœuds «impairs». On construit  $T_h$  en sorte qu'il en soit ainsi, et l'on obtient  $L_{2h}^*$  en fonction de  $L_h^*$ . Si l'on avait  $L_h^*[u_h] = v_h$ , il faudrait remplacer à gauche 0 par  $\langle T_h, v_h \rangle$ .

### 3.3 Exemples

#### 3.31 L'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} + \eta \varphi = 0: \text{ Je pose } L_h^*[u_h] \equiv -u_h(x-h) + A_h u_h(x) = 0,$$

où  $A_h$  est à déterminer. (a) La récurrence est immédiate:

$$L_{2h}^*[u_{2h}] \equiv -u_h(x-2h) + A_{2h} u_h(x) = 0$$

avec  $A_{2h} = A_h^2$ . (b) On satisfait la récurrence en posant  $A_h = e^{a h}$ , la constante  $a$  étant à déterminer. (c) Passage à la limite  $h \rightarrow 0$ :

$$u_h(x) = \varphi, \quad u_h(x-h) = \varphi - h \varphi' + O(h^2), \quad A_h = e^{a h} = 1 + a h + O(h^2),$$

donc

$$0 = L_h^*[u_h] = -\varphi + h \varphi' + (1 + a h) \varphi + O(h^2), \quad \text{d'où } \varphi' + a \varphi = 0;$$

pour obtenir l'équation voulue, il faut donc poser  $a = \eta$ . L'opérateur  $L_h^*$  est déterminé par  $A_h = e^{\eta h}$ .

A titre de comparaisons: (x) Equation aux différences classique:  $A_h = 1 + \eta h$ ; c'est la «fonction linéaire tangente» à la fonction exacte  $A_h = e^{\eta h}$ .

( $\beta$ ) «*Mehrstellenverfahren*»:

$$\begin{aligned}\varphi(x-h) &= \varphi(x) - h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x) + O(h^3) \quad | \cdot 2 \\ \varphi'(x-h) &= \varphi'(x) - h\varphi''(x) + O(h^2) \quad | \cdot h\end{aligned}$$

d'où par combinaison linéaire:

$$2\varphi(x-h) + h\varphi'(x-h) = 2\varphi(x) - h\varphi'(x) + O(h^3);$$

on utilise l'équation différentielle  $\varphi' + \eta\varphi = 0$  aux points  $x$  et  $x-h$ :

$$(2 - \eta h)\varphi(x-h) = (2 + \eta h)\varphi(x)$$

et l'on pose donc

$$A_h = \frac{2 + \eta h}{2 - \eta h} = 1 + \eta h + \frac{\eta^2 h^2}{2} + \frac{\eta^3 h^3}{4} + \dots;$$

c'est la «fonction bilinéaire osculatrice» de

$$e^{\eta h} = 1 + \eta h + \frac{\eta^2 h^2}{2} + \frac{\eta^3 h^3}{6} + \dots.$$

3.32 *Corde vibrante*: Cet exemple est particulièrement important, car il me servira de modèle.

Equation différentielle:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \eta^2\varphi = 0, \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Je pose

$$L_h^*[u_h] \equiv u_h(x-h) - A_h u_h(x) + u_h(x+h) = 0$$

( $A_h$  est à déterminer).

(a) 1° Méthode: combinaison linéaire directe: [ $u_x = u_h(x)$ , etc.]

$$\begin{aligned}u_{x-2h} - A_h u_{x-h} + u_x &= 0 \quad | \cdot 1, \\ u_{x-h} - A_h u_x + u_{x+h} &= 0 \quad | \cdot A_h, \\ u_x - A_h u_{x+h} + u_{x+2h} &= 0 \quad | \cdot 1.\end{aligned}$$

D'où

$$u_{x-2h} - A_{2h} u_x + u_{x+2h} = 0 \quad \text{avec} \quad A_{2h} = A_h^2 - 2.$$

2°) Construction d'une fonction de nœuds  $T_h$  telle que  $L_h^*[T_h]$  ( $= L_h^*[T_h]$ ) soit différente de zéro aux seuls nœuds  $x - 2h, x, x + 2h$ :

$$\begin{array}{ccccc} x-2h & & x & & x+2h \\ | & & | & & | \\ \hline & & & & \\ L_h^*[T_h] & = & 1 & & A_{2h} & & 1 \\ T_h & = & & 1 & A_h & 1 & \end{array}$$

d'où

$$A_{2h} = A_h^2 - 2.$$

(b) Résolution de la récurrence:  $A_{2h}/2 = 2 (A_h/2)^2 - 1$ ; comme  $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$ , la récurrence est satisfaite si l'on pose  $A_h = 2 \cos(kh)$ .

Remarque: Si le problème physique n'était pas continu mais discret, la grandeur physique étant non pas  $\eta$  mais  $A_\varepsilon$ , on aurait pour  $h = n\varepsilon$ :

$$A_{n\varepsilon} = 2 \cos\left(n \arccos \frac{A_\varepsilon}{2}\right),$$

soit  $A_{n\varepsilon} = 2 T_n(A_\varepsilon/2)$ ,  $T_n(x)$  étant le  $n$ -ième polynôme de Tchebycheff.

(c) Le passage à la limite  $h \rightarrow 0$  donne  $\varphi'' + k^2 \varphi = 0$ : on rejoint l'équation différentielle donnée en posant  $k = \eta$ ;  $L_h^*$  est déterminé par

$$A_h = 2 \cos(\eta h).$$

Calcul des valeurs propres, en choisissant par exemple  $h = 1/4$ : Compte tenu des conditions aux limites  $u_0 - u_1 = 0$ , nous avons trois équations linéaires homogènes pour  $u_{1/4}, u_{1/2}, u_{3/4}$ :

$$\begin{array}{rcl} -A u_{1/4} + u_{1/2} & = & 0 \\ u_{1/4} - A u_{1/2} + u_{3/4} & = & 0, \quad \text{d'où} \quad 0 = \begin{vmatrix} -A & 1 & 0 \\ 1 & -A & 1 \\ 0 & 1 & -A \end{vmatrix} = A(2 - A^2); \\ u_{1/2} - A u_{3/4} & = & 0 \end{array}$$

donc  $\cos(\eta/4) = 0$  ou  $\pm 1/\sqrt{2}$ ,  $\eta = m\pi$  avec  $m = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, \dots$ , c'est-à-dire  $m \not\equiv 0 \pmod{4}$ .

L'absence des valeurs propres  $\eta = 4N\pi$  ne doit pas nous étonner: car les fonctions propres  $\varphi_{4N}$  correspondantes s'annulent aux cinq nœuds  $x = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$  et induisent donc la fonction de nœuds triviale  $u_{h=1/4} \equiv 0$ . — Ce phénomène («éclipse» de certaines valeurs propres) est fréquent. — Comme la fonction propre fondamentale n'a pas de nœuds à l'intérieur de l'intervalle, la fréquence fondamentale ne s'éclipse jamais.

A titre de comparaison:

$$2 \cos(\eta h) = 2 - \eta^2 h^2 + \frac{\eta^4 h^4}{12} - \frac{\eta^6 h^6}{360} + \dots;$$

α) Equation aux différences classique:

$$A_h = 2 - \eta^2 h^2;$$

β) «Mehrstellenverfahren»:

$$A_h = \frac{24 - 10 \eta^2 h^2}{12 + \eta^2 h^2} = 2 - \eta^2 h^2 + \frac{\eta^4 h^4}{12} - \frac{\eta^6 h^6}{144} + \dots$$

3.33 Barre vibrante:  $\partial^4 \varphi / \partial x^4 - \eta^4 \varphi = 0$ . Pour l'intérieur: Je pose

$$L_h^*[u] = u_{x-2h} + B_h u_{x-h} + A_h u_x + B_h u_{x+h} + u_{x+2h}.$$

(a) Construction de  $T_h$  telle que

$$\begin{array}{ccccccccc} x-4h & & x-2h & & x & & x+2h & & x+4h \\ | & & | & & | & & | & & | \\ L_h^*[T_h] = L_h^*[T_h] = 1 & & B_{-2h} & & A_{-2h} & & B_{2h} & & 1 \\ T_h = & & 1 & & -B_h & & A_h & & -B_h & & 1 \end{array};$$

d'où les formules de récurrence:

$$A_{2h} = A_h^2 - 2 B_h^2 + 2 \quad \text{et} \quad B_{2h} = 2 A_h - B_h^2.$$

(b) Résolution de la récurrence: là réside toute la difficulté. La récurrence est satisfaite si l'on pose

$$A_h = 4 \operatorname{Ch}(k h) \cos(k h) + 2 \quad \text{et} \quad B_h = -2 \operatorname{Ch}(k h) - 2 \cos(k h).$$

(c) Le passage à la limite ( $h \rightarrow 0$ ) conduit à l'équation différentielle  $d^4 \varphi / dx^4 - k^4 \varphi = 0$ ; on rejoint donc l'équation donnée en posant  $k = \eta$ :  $L_h^*$  est déterminé par

$$A_h = 4 \operatorname{Ch}(\eta h) \cos(\eta h) + 2 \quad \text{et} \quad B_h = -2 \operatorname{Ch}(\eta h) - 2 \cos(\eta h).$$

3.34 Les conditions aux limites peuvent être traitées de façon analogue (mais les calculs sont en général longs et la résolution de la récurrence (b) très difficile).

Exemple: Corde vibrante (cf. § 3.32 ci-dessus) à extrémités tenues élastiquement:

$$\varphi'(0) - \kappa \varphi(0) = 0.$$

Je pose

$$X_h u_0 + u_h = 0 \quad (X_h \text{ à déterminer}).$$

(a) Eliminons  $u_h$  avec  $u_0 - A_h u_h + u_{2h} = 0$ :

$$(1 + A_h X_h) u_0 + u_{2h} = 0, \quad \text{d'où} \quad X_{2h} = 1 + A_h X_h = 1 + 2 X_h \cos(\eta h).$$

(b) On peut résoudre cette récurrence en posant

$$X_h = -\cos(\eta h) + a \sin(\eta h).$$

(c) Le passage à la limite  $h \rightarrow 0$  donne  $\varphi'(0) + a \eta \varphi(0) = 0$ ; il faut donc poser  $a = -\kappa/\eta$  et nous avons

$$X_h = -\cos(\eta h) - \frac{\kappa}{\eta} \sin(\eta h).$$

(Selon la recette classique, on aurait posé  $X_h = -1 - h \kappa$ .)

Interprétation par la construction d'un nœud virtuel en  $x = -h$ :

$$u_{-h} - A_h u_0 + u_h = 0 \quad \text{avec} \quad u_{-h} = \left[ \cos(\eta h) - \frac{\kappa}{\eta} \sin(\eta h) \right] u_0.$$

Extrémité fixe:  $\kappa = \infty$ ,  $u_0 = 0$ ; extrémité libre:  $\kappa = 0$ ,  $u_{-h} = u_h$ .

### 3.4 Récurrence avec des fonctions de cellules

3.41 Pour l'intérieur de l'intervalle considéré, les relations de récurrence sont identiques à celles qu'on obtient pour des fonctions de nœuds. — En effet: Appelons  $u_h$  une fonction de cellules pour la maille  $h$ . Soient  $I_x^{(h)}$  et  $I_{x+h}^{(h)}$  deux  $h$ -intervalles adjacents, et  $I_x^{(2h)} = I_x^{(h)} \cup I_{x+h}^{(h)}$ ; nous définissons  $u_{2h}$  par

$$u_{2h}(I_x^{(2h)}) = \alpha u_h(I_x^{(h)}) + \beta u_h(I_{x+h}^{(h)}).$$

Nous supposons que  $u_h$  satisfasse une équation aux différences  $L_h^\square[u_h] = 0$ . Combinons linéairement ces équations exactement comme nous l'avons fait (pour  $L_h^*$ ) au § 3.2: nous obtenons des relations du type:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0 u_h(I_x^{(h)}) + \tilde{\alpha}_{2h} u_h(I_{x+2h}^{(h)}) + \tilde{\alpha}_{-2h} u_h(I_{x-2h}^{(h)}) + \tilde{\alpha}_{4h} u_h(I_{x+4h}^{(h)}) + \dots &= 0, \\ \tilde{\alpha}_0 u_h(I_{x+h}^{(h)}) + \tilde{\alpha}_{2h} u_h(I_{x+3h}^{(h)}) + \tilde{\alpha}_{-2h} u_h(I_{x-h}^{(h)}) + \tilde{\alpha}_{4h} u_h(I_{x+5h}^{(h)}) + \dots &= 0, \end{aligned}$$

où  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_{2h}, \tilde{\alpha}_{-2h}, \tilde{\alpha}_{4h}, \dots$  dépendent des coefficients de  $L_h^\square$  exactement comme les coefficients de  $L_{2h}^*$  dépendent de ceux de  $L_h^*$ .

Multiplions la première de ces équations par  $\alpha$ , la seconde par  $\beta$  et additionnons: nous obtenons une équation  $L_{2h}^\square[u_{2h}] = 0$  avec les mêmes coefficients.

N. B. Nous savions déjà (§ 1.4, § 2.72) que les coefficients de  $L_h^\square$  sont les mêmes que ceux de  $L_h^*$ . — Il n'en est plus de même aux extrémités!

3.42 Exemple: corde vibrante (cf. § 3.32). — Je prends de nouveau (cf. § 2.74) pour  $\Psi_i$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $I_{x_i}$ ; donc

$$u_{2h}(I_x \cup I_{x+h}) = u_h(I_x) + u_h(I_{x+h}).$$



Pour l'intérieur: Je pose

$$L_h^\square[u_h] \equiv u_h(I_{x-h}^{(h)}) - A_h u_h(I_x^{(h)}) + u_h(I_{x+h}^{(h)}) = 0.$$

Je dois combiner linéairement plusieurs équations de ce type; interprétons les coefficients de cette combinaison linéaire comme les valeurs d'une fonction de cellules  $T_h$ :

$$0 = \langle T_h, L_h^\square[u_h] \rangle = \langle L_h^\square[T_h], u_h \rangle = L_{2h}^\square[u_{2h}]$$

à condition que l'on ait:

$$\begin{array}{ccccccc} x-2h & & I_{x-2h}^{(2h)} & & x & & I_x^{(2h)} & & x+2h & & I_{x+2h}^{(2h)} & & x+4h \\ | & & | & & | & & | & & | & & | & & | \\ & & & & I_{x-h}^{(h)} & & I_x^{(h)} & & I_{x+h}^{(h)} & & I_{x+2h}^{(h)} & & \end{array}$$

$$L_h^\square[T_h] = L_h^\square[T_h] = \quad 1 \quad 1 \quad -A_{2h} \quad -A_{2h} \quad 1 \quad 1;$$

d'où

$$T_h = \quad 1 \quad A_h + 1 \quad A_h + 1 \quad 1,$$

et par conséquent  $A_{2h} = A_h^2 - 2$ , en accord avec le § 3.32.

Extrémité 0 tenue élastiquement:  $\varphi'(0) - \kappa \varphi(0) = 0$ .

Résultats du calcul: Construisons une cellule virtuelle  $I_{-h}$ :  $-h \leq x < 0$  et posons l'équation  $u(I_{-h}) - A_h u(I_0) + u(I_h) = 0$ ; il faut poser

$$u(I_{-h}) = \frac{\eta \sin(\eta h) - \kappa [1 - \cos(\eta h)]}{\eta \sin(\eta h) + \kappa [1 - \cos(\eta h)]} u(I_0).$$

Extrémité fixe:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\kappa = \infty$ ,  $u(I_{-h}) = -u(I_0)$ .

Extrémité libre:  $\varphi'(0) = 0$ ,  $\kappa = 0$ ,  $u(I_{-h}) = +u(I_0)$ .

Dans ces deux cas particuliers, on a un simple principe de réflexion.

3.43 Remarque générale: Le phénomène de l'éclipse (§ 3.32) se produit également pour les fonctions de cellules: lorsqu'une fonction propre  $q(x)$  induit une fonction de cellules identiquement nulle  $u_h$ :  $\langle \Psi_i, q \rangle = 0$ .

## II. Premiers essais de transposition à des équations aux dérivées partielles

### § 4. Le problème de Cauchy pour un demi-plan

Dans le demi-plan supérieur  $y > 0$ , construisons un réseau quadratique dont les droites soient inclinées à  $45^\circ$ , les nœuds inférieurs reposant sur l'axe des  $x$ . Appelons  $h\sqrt{2}$  le côté des carrés.  $Q_{x,v}^{(h)}$  sera le carré de centre  $(x, y)$ , c'est-à-dire de sommets  $(x-h, y)$ ,  $(x+h, y)$ ,  $(x, y-h)$ ,  $(x, y+h)$ ;  $T_x^{(h)}$  sera le triangle rectangle isocèle de sommets  $(x-h, 0)$ ,  $(x+h, 0)$ ,  $(x, h)$ .

## 4.1 Pour l'intérieur:

Pour les fonctions  $u_h$  définies aux nœuds du réseau, soit  $L_h^*$  l'opérateur aux différences défini, pour un carré  $Q_{x,y}^{(h)}$ , par

$$L_{h;x,y}^*[u_h] = u_{x-h,y} + u_{x+h,y} - u_{x,y-h} - u_{x,y+h},$$

où j'écris  $u_{x,y}$  pour  $u_h(x,y)$ . — En d'autres termes: l'opérateur  $L_h$  fait correspondre à chaque fonction de nœuds une fonction de carré.

(a) Récurrence: Partons d'un nœud arbitraire  $O$  sur l'axe des  $x$ , et définissons, dans le réseau précédent, les nœuds «pairs» comme ceux qu'on atteint en parcourant, à partir de  $O$ , des arêtes doubles du réseau (de longueur  $2\sqrt{2}h$ ). — Nous considérons maintenant le réseau quadratique de côtés  $2\sqrt{2}h$ , dont les nœuds sont «pairs». Appelons  $u_{2h}$  la restriction de  $u_h$  à ces nœuds; nous remarquons que

$$L_{2h;x,y}^*[u_{2h}] = u_{x-2h,y} + u_{x+2h,y} - u_{x,y-2h} - u_{x,y+2h}$$

est la somme des expressions  $L_h^*[u_h]$  relatives aux quatre carrés dont  $Q_{x,y}^{(2h)}$  est la réunion:

$$L_{2h;x,y}^* = L_{h;x-h,y}^* + L_{h;x+h,y}^* + L_{h;x,y-h}^* + L_{h;x,y+h}^*.$$

Par conséquent, si  $u_h$  satisfait l'équation aux différences  $L_h^*[u_h] = \varrho_h(Q^{(h)})$ , où  $\varrho_h$  est une fonction de cellules, il s'ensuit que  $u_{2h}$  satisfait l'équation

$$L_{2h}^*[u_{2h}] = \varrho_{2h}, \quad \text{où} \quad \varrho_{2h}(Q^{(2h)}) = \sum_{Q^{(h)} \subset Q^{(2h)}} \varrho_h(Q^{(h)}).$$

(b) La récurrence est satisfaite si l'on pose

$$\varrho_h(Q^{(h)}) = k \iint_{Q^{(h)}} \varrho(x,y) dx dy,$$

la fonction  $k\varrho(x,y)$  étant arbitraire.

(c) Passage à la limite  $h \rightarrow 0$ : Admettons qu'il existe une fonction  $\varphi(x,y)$  deux fois continûment dérivable et telle que  $u_{x,y} = \varphi(x,y)$  aux nœuds du réseau; développons:

$$L_h^*[u_h] = h^2(\varphi_{xx} - \varphi_{yy}) + O(h^4); \quad \varrho_h(Q^{(h)}) = 2k\varrho h^2 + O(h^3),$$

c'est-à-dire

$$0 = L_h^*[u_h] - \varrho_h(Q^{(h)}) = h^2(\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - 2k\varrho) + O(h^3);$$

d'où, si nous posons  $k = 1/2$ ,

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = \varrho(x, y) \quad \text{et} \quad \varrho_h(Q^{(h)}) = \frac{1}{2} \iint_{Q^{(h)}} \varrho(x, y) \, dx \, dy.$$

4.2 *Au voisinage de l'axe des  $x$* : Définissons encore l'opérateur  $L_h^*$  pour les triangles  $T_x^{(h)}$  par

$$L_{h;x}^*[u_h] = \frac{1}{2} u_{x-h,0} + \frac{1}{2} u_{x+h,0} - u_{x,h}.$$

(a) Récurrence: Soit  $(x, 0)$  un nœud pair; on vérifie immédiatement que  $L_{2h;x}^* = L_{h;x-h}^* + L_{h;x+h}^* + L_{h;x,h}^*$ ; cela signifie que, si  $L_{h;x}[u_h] = \varrho_h(T_x^{(h)})$ , il s'ensuit

$$\varrho_{2h}(T_x^{(2h)}) = \varrho_h(T_{x-h}^{(h)}) + \varrho_h(T_{x+h}^{(h)}) + \varrho_h(Q_{x,h}^{(h)}).$$

(b) La récurrence est satisfaite si l'on pose

$$\varrho_h(T_x^{(h)}) = \frac{1}{2} \iint_{T_x^{(h)}} \varrho(x, y) \, dx \, dy + \int_{x-h}^{x+h} \sigma(x) \, dx.$$

(c) Passage à la limite  $h \rightarrow 0$ :

$$L_h^*[u_h] = -h \varphi_y + O(h^2); \quad \varrho_h(T^{(h)}) = 2 \sigma h + O(h^2),$$

c'est-à-dire

$$0 = L_h^*[u_h] - \varrho_h(T^{(h)}) = -h (\varphi_y + 2 \sigma) + O(h^2),$$

d'où

$$\sigma(x) = -\frac{1}{2} \varphi_y(x, 0).$$

En posant  $h = y$ , nous retrouvons donc la formule bien connue:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{2} [\varphi(x-y, 0) + \varphi(x+y, 0)] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \varphi_y(\xi, 0) \, d\xi - \frac{1}{2} \int_{\eta=0}^y \int_{|\xi-x| < y-\eta} (\varphi_{xx} - \varphi_{yy}) \, d\xi \, d\eta. \end{aligned}$$

§ 5. Traduction finie de l'équation  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_l^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu_l^2 \right) \varphi(x, y) = \varrho_0$

5.1 Considérons un opérateur aux différences du type

$$\begin{aligned} L_h^*[u] &\equiv A_h u_{x,y} + B_h (u_{x-h,y} + u_{x+h,y} + u_{x,y-h} + u_{x,y+h}) \\ &+ u_{x-h,y-h} + u_{x-h,y+h} + u_{x+h,y-h} + u_{x+h,y+h}, \end{aligned}$$

où les coefficients  $A_h$  et  $B_h$  sont constants. On peut caractériser l'opérateur

$L_h^*$  par le schéma:

$$\begin{array}{ccc} 1 & B_h & 1 \\ B_h & A_h & B_h \\ 1 & B_h & 1 \end{array}$$

(a) Cherchons à établir une récurrence  $h \rightarrow 2h$ : nous voulons combiner linéairement quelques équations du type ci-dessus en sorte d'obtenir une équation du même type pour la maille  $2h$ .

Résultat: la récurrence n'est possible (exactement) que si  $A_h = B_h^2$ ; elle est alors donnée par  $B_{2h} = 2 - B_h^2$  et  $A_{2h} = B_{2h}^2$ . On voit – et c'est un point essentiel – que la condition de récurrence  $A = B^2$  se laisse elle-même itérer.

(b) J'écris la formule de récurrence pour  $B$  sous la forme

$$-\frac{B_{2h}}{2} = 2 \left( -\frac{B_h}{2} \right)^2 - 1;$$

elle est satisfaite si l'on pose

$$B_h = -2 \cos(\eta h), \quad A_h = 4 \cos^2(\eta h).$$

(c) Le passage à la limite  $h \rightarrow 0$  conduit à l'opérateur

$$h^4 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \eta^2 \right) + O(h^6).$$

Remarque: Si au contraire, partant de l'opérateur différentiel, on veut construire un opérateur aux différences correspondant, on retrouve immédiatement celui dont nous sommes partis, avec les valeurs ci-dessus de  $A_h$  et  $B_h$ : il suffit d'utiliser le § 3.32 et l'analogie pour deux dimensions de la loi de composition du § 2.6.

5.2 Si l'équation donnée est

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \eta^2 \right) \varphi = \varrho_0 = \text{const},$$

nous posons l'équation aux différences sous la forme  $L_h^*[u] = h^4 \varrho_h$  ( $\varrho_h$  est une fonction de nœuds constante):

(a) La récurrence est donnée par  $\varrho_{2h} = \varrho_h \cos^4(\eta h/2)$ ;

(b) elle est satisfaite si l'on pose  $\varrho_h = (k/h^4) \sin^4(\eta h/2)$ ;

(c) le passage à la limite  $h \rightarrow 0$  monte qu'on rejoint l'équation donnée à condition de poser  $k = 2^4 \varrho_0 / \eta^4$ , c'est-à-dire

$$\varrho_h = \varrho_0 \left( \frac{2}{\eta h} \sin \frac{\eta h}{2} \right)^4.$$

En particulier, si  $\eta = 0$ , on a  $\varrho_h = \varrho_0$  pour toute maille  $h$ .

## DEUXIÈME PARTIE :

*Calcul approché*

## III. Equations différentielles ordinaires: Problèmes aux limites

§ 6. *Méthode: calcul local des perturbations*

6.1 La méthode classique des perturbations ne s'applique avec succès que lorsque l'équation différentielle donnée est, *dans tout l'intervalle considéré*, «voisine» d'une équation dont on connaît la solution exacte. — Au contraire, nous ne faisons pas cette hypothèse globale; si les coefficients de l'équation différentielle sont suffisamment réguliers, ils varieront peu dans chaque petit intervalle (formé d'une ou plusieurs mailles): dans un tel intervalle, notre équation différentielle «non perturbée» sera à coefficients constants. Nous construisons ainsi d'abord un système d'équations aux différences «non perturbées»: sa solution sera déjà plus précise que celle de l'équation différentielle non perturbée du calcul global.

Calcul plus précis: Le *terme perturbateur* contient la fonction inconnue; il sera pris dans le membre de droite de l'équation différentielle; la *perturbation de l'équation aux différences* sera donnée par son produit scalaire avec une *distribution*  $T$  (cf. § 2.2), et calculée avec une précision à choisir.

6.2 Le procédé que je propose ici se situe donc *entre* le calcul global des perturbations et la méthode aux différences classique; cette dernière conduit à un partage fin de l'intervalle malgré une équation aux différences médiocre. — *Si l'on veut un résultat précis, il y a lieu de faire porter son effort non seulement sur le nombre des équations* (diminution de la maille  $h$ ), *mais aussi sur leur qualité.*

Nous avons en même temps l'avantage de disposer d'équations aux différences *exactes* pour le cas de coefficients constants (grâce aux méthodes du chapitre I), c'est-à-dire en l'absence de «perturbation».

*Remarque:* Les idées appliquées ici aux équations aux différences sont analogues à celles de CH. BLANC ([2], p. 187 notamment), qui, pour le cas de coefficients lentement variables, construit une fonction de GREEN solution (sauf en un point) d'une équation *proche* de l'équation adjointe.

§ 7. *Exemple:*  $y'' + (1 + x^2)y = -1$  avec  $y(-1) = y(1) = 0$

*On cherche la valeur  $y_0$  de  $y$  en  $x = 0$ .*

On comparera avec COLLATZ [5], pp. 136 (équations aux différences classiques), 154 (équations aux différences portant sur 5 points), 158 («Mehrstellen-

verfahren»), 176 (calcul global des perturbations), 195 (méthode de RITZ), 211: au moyen d'une série de puissances, COLLATZ montre que

$$|y_0 - 0,9320536| < 4,2 \cdot 10^{-7};$$

ainsi que ZURMÜHL [12], pp. 398 et 403.

7.1 Préparatifs: Nous partageons l'intervalle  $(-1, 1)$  en un nombre pair  $2/h$  de mailles. Soit  $x_0$  un nœud intérieur; pour toute distribution  $T$  à support compact, nous avons

$$\langle T'' + (1 + x_0^2) T, y \rangle = \langle T, y'' + (1 + x_0^2)y \rangle = - \langle T, (x^2 - x_0^2) y + 1 \rangle.$$

Je pose

$$1 + x_0^2 = \eta^2 \quad (\eta > 0) \quad \text{et} \quad \xi = x - x_0$$

et je choisis naturellement pour  $T(x)$  la fonction indiquée au § 2.45:

$$T(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |\xi| \geq h; \\ \frac{1}{\eta} \sin[\eta(h - |\xi|)] & \text{pour } |\xi| \leq h; \end{cases}$$

alors

$$T'' + \eta^2 T = \delta_{(x_0-h)} - 2 \cos(\eta h) \delta_{(x_0)} + \delta_{(x_0+h)},$$

d'où

$$y_{x_0-h} - 2 \cos(\eta h) y_{x_0} + y_{x_0+h} = - \langle T, (2x_0\xi + \xi^2) y + 1 \rangle.$$

Il s'agit de calculer approximativement le produit scalaire à droite:

$$y = y_{x_0} + \xi y'_{x_0} + \frac{\xi^2}{2} y''_{x_0} + \frac{\xi^3}{6} y'''_{x_0} + O(\xi^4); \quad y'_{x_0} = \frac{1}{h} (y_{x_0+h} - y_{x_0-h}) + O(h^2);$$

$$y''_{x_0} = -1 - \eta^2 y_{x_0}; \text{ etc.}$$

$$\langle T, 1 \rangle = \frac{2}{\eta^2} [1 - \cos(\eta h)]; \quad \langle T, \xi \rangle = \langle T, \xi^3 \rangle = 0 \text{ (symétrie);}$$

$$\langle T, \xi^2 \rangle = \frac{h^4}{6} - \frac{\eta^2 h^6}{180} + O(h^8); \quad \langle T, \xi^4 \rangle = \frac{h^6}{15} + O(h^8).$$



Si, dans le produit scalaire, on néglige les termes en  $h^4$ , on obtient l'équation aux différences non perturbée

$$y_{x_0-h} - 2 \cos(\eta h) y_{x_0} + y_{x_0+h} \simeq -\langle T, 1 \rangle = -\frac{2}{\eta^2} [1 - \cos(\eta h)].$$

## 7.2 Résultats numériques (comparés à ceux des autres méthodes):

Méthode	Perturbations locales, en négligeant les termes en			Equations aux différences ordinaires	Equations aux différences pour 5 points	« Mehr- stellen- verfahren »
	Maille	$h^4$	$h^6$			
$h = 1$	<b>0,851</b>	<b>1</b>	<b>0,93003</b>	1	—	0,8571
$h = \frac{1}{2}$	<b>0,922</b>	<b>0,9358</b>	<b>0,932105</b>	0,967	0,9288	0,9276
$h = \frac{1}{3}$	<b>0,927</b>	<b>0,9328</b>	<b>0,932059</b>	0,949	0,9314	0,9312
$h = \frac{1}{5}$				0,938		0,931945
$h = \frac{1}{10}$				0,9336		0,93205

*Remarque:* Cet exemple a été choisi à cause des ouvrages cités; il est clair que, si  $(1 + x^2)$  était remplacée par une fonction à comportement moins régulier, les trois méthodes «classiques» (à droite du tableau) seraient d'autant moins adéquates à traduire le problème fidèlement dans la langue des équations aux différences: car elles ne font intervenir que les valeurs de la fonction aux nœuds du réseau. — Ici (comportement régulier), le «Mehrstellenverfahren» s'avère excellent et fournit sensiblement la même précision que la méthode des perturbations locales où l'on néglige les termes en  $h^6$ .

A titre de comparaison: COLLATZ ([5], p. 196) a obtenu par la méthode de RITZ: avec deux termes  $y_0 \simeq 0,9334$ ; avec 3 termes  $y_0 \simeq 0,932070$ , ce qui est excellent.

*Conclusion:* Si l'on veut augmenter la précision, il est bon de perfectionner l'équation aux différences avant de réduire la maille. — Dans le tableau ci-dessus: les méthodes classiques aux différences progressent verticalement; au contraire, le calcul global des perturbations progresse horizontalement (partie de gauche de la 1<sup>re</sup> ligne); il est préférable de choisir une progression *de type diagonal*.

# IV. Equations différentielles ordinaires: Problèmes aux valeurs propres

## § 8. Méthode

Nous allons construire des équations aux différences presque exactement comme au § 6; la difficulté supplémentaire réside dans le fait que nous ignorons les valeurs propres exactes: il s'ensuit que *les fonctions auxiliaires*  $T(x)$  *dependent elles-mêmes du paramètre inconnu*  $\lambda$ . — On est ainsi conduit à des *équations transcendantes*.

Cette circonstance est évidemment désagréable; mais il faut remarquer qu'elle est dans la nature même du problème. D'autre part, elle présente un léger avantage: on obtient du même coup, comme racines d'une même équation transcendante, des valeurs approchées pour *plusieurs* valeurs propres.

$$\S 9. \text{ Exemple: } y'' + \lambda (1 + x^2) y = 0 \quad \text{avec} \quad y(-1) = y(1) = 0$$

On comparera avec COLLATZ [4], p. 297 (équations aux différences ordinaires), et [5], pp. 235 et 240:

$$2,177034 \leq \lambda_1 \leq 2,177259;$$

ainsi que ZURMÜHL [12], p. 403–405 («Mehrstellenverfahren») et p. 461.

9.1 Préparatifs: Je pose  $\eta^2 = \lambda (1 + x_0^2)$  (où  $\lambda$  est inconnue); l'équation donnée peut être écrite sous la forme

$$y'' + \eta^2 y = -\lambda (x^2 - x_0^2) y.$$

Ecrivons  $x - x_0 = \xi$  et multiplions scalairement cette équation par la distribution  $T$  déjà utilisée au § 7.1: nous obtenons l'équation aux différences

$$y_{x_0-h} - 2 \cos(\eta h) y_{x_0} + y_{x_0+h} = -\lambda \langle T, (2 x_0 \xi + \xi^2) \cdot y \rangle;$$

on a ici  $y''_{x_0} = -\eta^2 y_{x_0}$ ; pour le reste ( $\langle T, 1 \rangle$ ,  $\langle T, \xi \rangle$ , etc.), cf. le § 7.1. — Il est clair qu'il faut prendre d'autant plus de termes du développement que le produit  $\eta h$  est plus grand.

Si l'on néglige les termes en  $h^4$ , on obtient l'équation «non perturbée»

$$y_{x_0-h} - 2 \cos(\eta h) y_{x_0} + y_{x_0+h} = O(h^4);$$

d'où naturellement une équation transcendante pour  $\lambda$ .

9.2 Résultats numériques (comparés à ceux d'autres méthodes): Je me borne ici aux premières valeurs propres impaires (qui correspondent à des fonctions propres paires).

Valeurs approchées pour	Méthode	Perturbations locales, en négligeant les termes en		Equations aux différences ordinaires	« Mehr- stellen- verfahren »	Procédé « fort » de H. BÜCKNER [3]
	Maille	$h^4$	$h^6$			
$\lambda_1$	$h = 1$	<b>2,47</b>		2	2,4	2,286
	$h = \frac{2}{3}$	<b>2,221</b>	<b>2,180</b>	2,025	2,209	2,189
	$h = \frac{1}{2}$	<b>2,19</b>	<b>2,173,</b>	2,078	2,186	2,179
	$h = \frac{1}{3}$			2,129		
	$h = \frac{1}{5}$				2,1774	
$\lambda_3$	$h = 1$	<b>22,2</b>		—	—	—
	$h = \frac{2}{3}$	(éclipse)	—	—	—	—
	$h = \frac{1}{2}$	<b>20,1</b>		12,3	17,21	16,84
	$h = \frac{1}{3}$			13,9		
$\lambda_5$	$h = 1$	<b>61,7</b>		—	—	—
	$h = \frac{2}{3}$	<b>55,5</b>		—	—	—
	$h = \frac{1}{2}$	<b>53,9</b>		—	—	—
	$h = \frac{1}{3}$			30,6		
$\lambda_7$	$h = 1$	<b>120,9</b>		—	—	—
	$h = \frac{2}{3}$	<b>108,8</b>		—	—	—
	$h = \frac{1}{2}$	<b>111,6</b>		—	—	—

Les valeurs approchées calculées par la méthode des perturbations locales avec la maille  $h = 1/2$  sont racines d'équations transcendantes.

On voit que le «Mehrstellenverfahren» et le remarquable procédé de H. BÜCKNER [3], qui ne donnent que relativement peu de travail, sont très satisfaisants pour le calcul approché de la première valeur propre  $\lambda_1$ , et certainement de  $\lambda_3$ ; par contre, notre méthode a l'avantage de fournir une vue d'ensemble sur un nombre considérable de valeurs propres.

A titre de comparaison: COLLATZ ([5], pp. 235 et 240) a obtenu par la méthode de RITZ (avec deux termes)

$$\lambda_1 \leq 2,177486 \quad \text{et} \quad \lambda_3 \leq 18,361,$$

évaluations extrêmement satisfaisantes.

Je remarquerai de nouveau ici que le «Mehrstellenverfahren», pas davantage que l'équation aux différences ordinaire, ne peut tenir compte d'un comportement anormal des coefficients de l'équation *entre* les nœuds du réseau.

## V. Equations aux dérivées partielles: Problèmes aux limites

### § 10. Quelques remarques générales

10.1 Construction de l'équation aux différences: Il n'est (hélas!) en général pas possible de construire une équation aux différences «exacte»; on cherchera alors une équation aux différences fournissant une approximation la meilleure possible. – La méthode récurrente nous rendra des services appréciables au prochain chapitre, et nous comparerons ses résultats à ceux de la méthode classique et du «Mehrstellenverfahren».

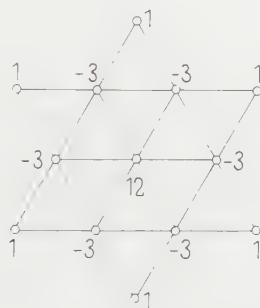
10.2 Si le domaine considéré n'est pas convexe, on utilisera avec avantage les *fonctions de cellules* (voir des exemples au chapitre suivant). Notamment, si l'on travaille avec des fonctions de nœuds, on introduit une grave erreur en prenant un coin rentrant du contour comme nœud du réseau.

10.3 La traduction discrète des *conditions aux limites* pose un problème très difficile. On peut transposer, par analogie, les règles (exactes pour une dimension) obtenues au chapitre I. Nous le ferons au prochain paragraphe pour la condition d'encastrement: nous allons montrer que notre règle est meilleure que la recette classique (comme on l'a vu, cette dernière n'est même pas exacte pour une dimension).

### § 11. Exemple: Equilibre d'une plaque hexagonale encastrée, uniformément chargée

Problème aux limites:  $\Delta\Delta\varphi(x, y) = 1$  avec  $\varphi = \partial\varphi/\partial n = 0$  sur le contour d'un hexagone régulier de côté 1; on cherche la valeur de  $\varphi$  au centre.

11.1 *Méthode classique*: L'opérateur aux différences caractérisé par le schéma ci-dessous (COLLATZ [5], p. 366) remplace l'opérateur différentiel  $9h^4/16$ ; et l'encastrement est traduit par la recette (9) du § 1.31.



Extrapolation: on admet que  $q(0) - u_0$  est approximativement proportionnel à  $h^2$ ; d'où, si l'on a obtenu  $u_0^{(h_1)}$  et  $u_0^{(h_2)}$  resp. par les mailles  $h_1$  et  $h_2$ , la formule approchée

$$q(0) \simeq \frac{h_2^2 u_0^{(h_1)} - h_1^2 u_0^{(h_2)}}{h_2^2 - h_1^2}.$$

11.2 *Notre expression de l'encastrement*: Nous nous inspirons du cas unidimensionnel, analogue au § 1.3: toutes les solutions  $F(x)$  de

$$\left\{ \frac{d^4 F}{dx^4} = a = \text{const} \quad \text{et} \quad F(0) = F'(0) = 0 \right\}$$

satisfont à

$$F(-h) = 3 F(h) - \frac{1}{2} F(2h) + \frac{h^4}{4} a. \quad (10'')$$

Pour simplifier, nous négligeons, dans notre problème à deux dimensions, la variation de  $\partial^4 q(x, y)/\partial n^4$  le long du contour de l'hexagone: nous appelons  $a$  cette quatrième dérivée normale.

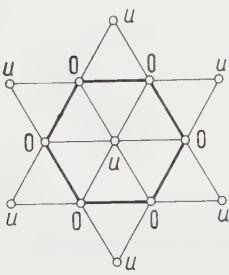
Nous utilisons de nouveau l'opérateur aux différences classique (voir le schéma ci-dessus).

Extrapolation: nous ne connaissons pas la valeur de  $a$ ; il est facile de l'extrapoler à partir de deux mailles successives  $h_1$  et  $h_2$ , en sorte d'obtenir une même valeur approchée  $u_0^{(h_1)} - u_0^{(h_2)}$  (on a deux équations linéaires à deux inconnues  $a$  et  $u_0$ ).

Voici quelques exemples illustrant la construction de nœuds virtuels en s'inspirant de (10''):

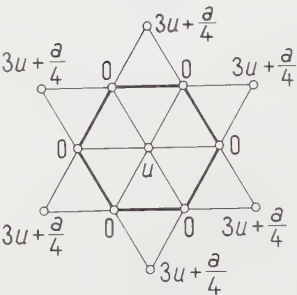
Méthode classique :

$h = 1$

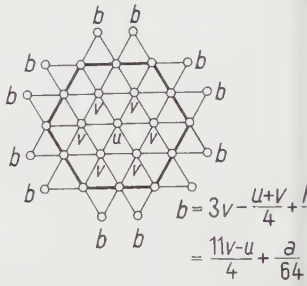


Notre expression de l'encastrement :

$h = 1$



$h = 1/2$



11.3 Résultats numériques :

Maille	Notre expression de l'encastrement		Méthode classique	Extrapolation classique
	en posant $a = 0$	en extrapolant $a$		
$h = 1$	<b>0,01875</b>	<b>0,01022</b> <b>0,01010</b>	0,031 25	0,00946 0,01021
$h = \frac{1}{2}$	<b>0,011 19</b>		0,014 91	
$h = \frac{1}{3}$	<b>0,01040</b>		0,012 30	

VI. Equations aux dérivées partielles: Problèmes aux valeurs propres

§ 12. Réseau triangulaire (nœuds) ou hexagonal (cellules): membrane vibrante

Nous voulons traduire l'équation

$\Delta \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 0$

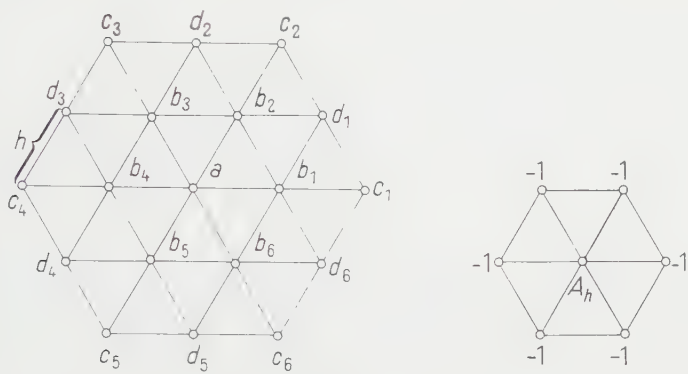
par une équation aux différences

$L_h^*[u_h] = 0$

pour les valeurs  $u_h$  de  $\varphi$  aux nœuds d'un réseau de triangles équilatéraux de côté  $h$  («maille»).

12.1 Nous allons procéder par *réurrence* (de  $h$  à  $2h$ ), en nous inspirant du § 3. Soient  $a, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$  les valeurs de  $u_h$  (aux nœuds ainsi désignés du réseau); nous caractérisons l'opérateur  $L_h^*$  par le schéma suivant (à droite):





c'est-à-dire que nous écrivons

$$L_h^*[a] = A_h a - \sum_i b_i .$$

Nous avons donc:

$$0 = L_h^*[a] = A_h a - \sum b \tag{14}$$

et

$$0 = \sum L_h^*[b] = -6 a + (A_h - 2) \sum b - \sum c - 2 \sum d . \tag{14'}$$

(a) Il faudrait combiner linéairement ces deux équations en sorte d'obtenir une relation du type

$$0 = L_{2h}^*[a] = A_{2h} a - \sum c ; \tag{15}$$

c'est malheureusement impossible. - Il faut donc sacrifier quelque chose lors du passage de (14) et (14') à (15), et on n'obtiendra ainsi que des *approximations* pour les valeurs et fonctions propres.

On évalue facilement l'expression

$$\begin{aligned} Z_h^*[a] &\equiv (b_1 + b_3 + b_5) - (b_2 + b_4 + b_6) = \left( 3 a + \frac{3}{4} h^2 \Delta \varphi |_a + h^3 * \right) \\ &\quad - \left( 3 a + \frac{3}{4} h^2 \Delta \varphi |_a + h^3 * \right) = h^3 Z[\varphi]_a , \end{aligned}$$

où  $Z[\varphi]_a$  dépend uniquement des dérivées de  $\varphi$  en  $a$ .

Calculons maintenant

$$\begin{aligned} Z_h^*[Z_h^*[u_h]]_a &= Z_h^*[b_1 + b_3 + b_5] - Z_h^*[b_2 + b_4 + b_6] \\ &= \sum c + 2 \sum b - (6 a + 2 \sum d) ; \end{aligned}$$

en itérant le résultat précédent, on obtient donc

$$- 6 a + 2 \sum b + \sum c - 2 \sum d = h^6 Z Z[\varphi]_a = O(h^6) . \tag{16}$$

Nous pouvons maintenant éliminer  $\sum b$  et  $\sum d$  entre (14), (14') et (16), ce qui donne

$$\left(\frac{A_h^2}{2} - 2 A_h\right) a - \sum c = O(h^6); \quad (15')$$

cette évaluation remplace (15). Nous devons donc choisir

$$A_{2h} = \frac{A_h^2}{2} - 2 A_h. \quad (17)$$

N.B. On peut aussi déterminer  $A_{2h}$  et les deux coefficients d'une combinaison linéaire de (14) et (14') en sorte que celle-ci diffère de (15) par une quantité petite d'ordre le plus élevé possible en  $h$ : par un développement en série (en utilisant par exemple le tableau IX de COLLATZ [5], p. 516), on obtient également (17).

(b) Il s'agit à présent de résoudre la récurrence (17): on peut l'écrire sous la forme

$$2 A_{2h} = A_h^2 - 4 A_h = (A_h - 2)^2 - 4,$$

soit

$$\frac{A_{2h} - 2}{4} = 2 \left( \frac{A_h - 2}{4} \right)^2 - 1.$$

La relation  $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$  permet de poser  $(A_h - 2)/4 = \cos(kh)$ , soit

$$A_h = 2 + 4 \cos(kh);$$

la constante  $k$  (indépendante de  $h$ ) est à déterminer.

(c) Passage à la limite  $h \rightarrow 0$ :

$$0 = L_h^*[a] = [2 + 4 \cos(kh)] a - \sum b = h^2 \left( -2 k^2 \varphi - \frac{3}{2} A\varphi \right) \Big|_a + O(h^4),$$

on rejoint donc l'équation

$$A\varphi + \lambda \varphi = 0$$

à condition de poser

$$k = \frac{\sqrt{3\tilde{\lambda}}}{2}.$$

Comme la récurrence n'est pas exacte, on n'obtient (pour une maille finie) qu'une valeur approchée  $\tilde{\lambda}$  pour  $\lambda$ . L'opérateur  $L_h^*$  est finalement caractérisé par

$$A_h = 2 + 4 \cos\left(\frac{h}{2} \sqrt{3\tilde{\lambda}}\right). \quad (18)$$

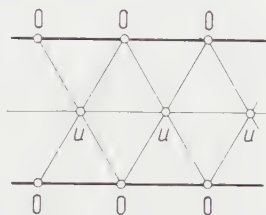
L'équation aux différences fournit un nombre fini de valeurs possibles pour  $A_h$ ; pour chacune d'elles, on obtient en général une infinité de  $\tilde{\lambda}$ , dont les premières sont effectivement utilisables (voir l'exemple, § 12.7).<sup>5)</sup>

<sup>5)</sup> Si, pour un  $A_h$  déterminé, les  $\tilde{\lambda}$  étaient complexes, on pourrait prendre leurs valeurs absolues  $|\tilde{\lambda}|$  comme valeurs approchées de quelques  $\lambda$ .

La récurrence est *exacte* si  $\varphi$  est telle que  $Z_h^* Z_h^*[u_h] = 0$  partout et pour tout  $h$ ; c'est le cas notamment si  $Z_h^*[u_h] = 0$ . Exemples:

12.11 Fréquence fondamentale d'une *bande* de largeur  $a$ :

$$h = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad A u - 2 u = 0, \quad A = 2, \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{\pi^2}{a^2} \text{ exact.}$$

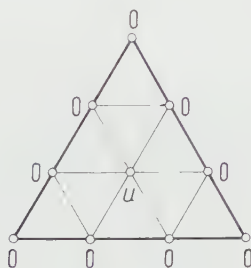


12.12 Fréquence fondamentale d'un *triangle équilatéral* de côté  $a$ :

$$h = \frac{a}{3}; \quad A u = 0, \quad u \neq 0, \quad \text{donc} \quad 0 = A = 2 + 4 \cos\left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}}{3}}\right),$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{16}{3} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \text{ exact.}$$

(Voir aussi la sixième partie du tableau numérique au § 12.7.)



12.2 Autre méthode: on connaît, pour toute fonction  $\varphi$  satisfaisant à  $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$ , la «formule de la moyenne»

$$J_0(h\sqrt{\lambda}) \varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} \varphi(z_0 + h e^{i\theta}) d\theta \quad (z = x + i y); \quad (19)$$

le terme de droite est égal à

$$\frac{1}{6} \sum_{m=0}^5 (z_0 + h e^{i m \pi/3}) + O(h^6);$$

par conséquent, si l'on caractérise  $L_h^*$  par  $A_h = 6 J_0(h\sqrt{\lambda})$ , on a  $L_h^*[u_h] = O(h^6)$ ; au lieu de (18), on peut donc poser

$$A_h = 6 J_0(h\sqrt{\lambda}), \quad (20)$$

et l'équation aux différences  $L_h^*[u_h] = 0$  déterminera des valeurs approchées  $\hat{\lambda}_i$  pour les  $\lambda_i$ . — Pour  $A_h \neq 0$ , on ne peut obtenir qu'un nombre fini de valeurs approchées réelles [contrairement à (18)].

12.3 *Méthode classique* (COLLATZ [5], pp. 366 et 368): On pose

$$A_h = 6 - \frac{3}{2} h^2 \lambda, \quad (21)$$

et l'on prend les valeurs propres discrètes  $\lambda_i$  comme valeurs approchées des  $\lambda_i$ . En effet, si l'on pose  $A_h = 6 - 3 h^2 \lambda/2$ , on a  $L_h^*[u_h] = O(h^4)$ .

12.4 «*Mehrstellenverfahren*» (COLLATZ [4], p. 297): On pose

$$A_h = \frac{96 - 18 h^2 \overset{m}{A}}{16 + h^2 \overset{m}{A}}, \quad \text{soit} \quad \overset{m}{A} = \frac{16}{h^2} \cdot \frac{6 - A_h}{18 + A_h}, \quad (22)$$

d'où des valeurs propres approchées  $\overset{m}{\lambda}_i$ . En effet, avec

$$A_h = \frac{96 - 18 h^2 \lambda}{16 + h^2 \lambda},$$

on a  $L_h^*[u_h] = O(h^6)$ .

12.5 Comparaison des développements en série. — On voit facilement que, des quatre méthodes indiquées, la méthode classique est la moins précise: comme indiqué,  $L_h^*[u_h] = O(h^4)$  pour celle-ci,  $= O(h^6)$  pour les trois autres. — Posons  $h\sqrt{\lambda} = x$ ;

$$2 + 4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) = 6 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{32} x^4 - \frac{3}{1280} x^6 + O(x^8),$$

$$6 J_0(x) = 6 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{32} x^4 - \frac{1}{384} x^6 + O(x^8),$$

$$6 - \frac{3}{2} x^2 = 6 - \frac{3}{2} x^2,$$

$$\frac{96 - 18 x^2}{16 + x^2} = 6 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{32} x^4 - \frac{3}{512} x^6 + O(x^8).$$

(On constate que les deux premières expressions sont très voisines.)

*Remarque:* Si le bord de la membrane est élastiquement lié, on pourra l'exprimer en s'inspirant du § 3.34.

12.6 *Réseau de cellules hexagonales*: On peut reprendre purement et simplement les expressions (18), (20), (21) ou (22) de  $A_h$ ; il faut seulement remarquer que, si  $h^\square$  est le côté des hexagones,  $h = \sqrt{3} h^\square$ . Pour exprimer les *conditions au contour*, on construit des cellules virtuelles extérieures au domaine, en s'inspirant du § 3.4.2 (principes de réflexion pour la membrane à bord fixe et pour la membrane libre).

12.7 Exemple: *Membrane hexagonale de côté 1, à bord fixe* ( $\varphi = 0$ )

En même temps que quelques valeurs propres approchées calculées par les procédés aux différences, j'indique des évaluations obtenues par des méthodes de G. PÓLYA:

( $\alpha$ ) G. PÓLYA [8]: des règles générales énoncées dans cet article, il s'ensuit que les six premières valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_6$  de notre membrane hexagonale satisfont les inégalités

$$\lambda_i < \frac{1}{j^2} \lambda_i^{(\text{cercle de rayon } j)},$$

$i = 1, \dots, 6$ ;  $j$  = rayon conforme (intérieur) maximum = 0,89850 pour notre hexagone. Comme on va le voir, ces évaluations par excès sont excellentes; pour  $i > 6$ , le membre de droite donne une valeur approchée de  $\lambda_i$ .

( $\alpha'$ ) Considération heuristique: avec  $j = 2,4048$ , on a (cf. PÓLYA et SZEGÖ [11], p. 268)  $j^{-1} \sqrt{\lambda_1} j = 1$  pour le cercle, = 0,9964 pour le carré, = 0,9860 pour le triangle équilatéral; on a lieu de penser que  $j^{-1} \sqrt{\lambda_1} j < 0,9964$  pour l'hexagone régulier.

( $\beta$ ) G. PÓLYA [9]: L'hexagone régulier étant un «pavé»,

$$\lambda_k \leq \frac{4 \pi k}{\text{surface}} = \frac{8 \pi}{3 \sqrt{3}} k.$$

( $\gamma$ ) G. PÓLYA [10]: Pour tout «quasi-trapèze» (par exemple le trapèze qui forme la moitié de l'hexagone) de hauteur  $h$  et de «longueur moyenne»  $m$ , on a

$$\lambda_k \geq \frac{\pi^2}{h^2} L\left(\frac{k h}{m}\right),$$


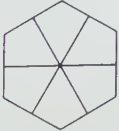
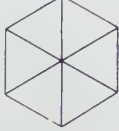

où  $t = L(q)$  est la fonction inverse de  $q = \sqrt{t-1^2} + \sqrt{t-2^2} + \dots + \sqrt{t-r^2}$  avec  $r$  entier,  $r^2 \leq t < (r+1)^2$ , les racines étant prises positivement. — Dans les cas qui nous intéressent ici,  $0 < k h/m < \sqrt{3}$ , donc  $1 < t < 4$  et  $r = 1$ , c'est-à-dire

$$\lambda_k \geq \frac{\pi^2}{h^2} \left(1 + \frac{k^2 h^2}{m^2}\right).$$

( $\delta$ ) Le produit ( $\lambda_1 \cdot \text{surface}$ ) est minimal pour un cercle et vaut alors  $2,4048^2 \pi$ ; par conséquent, si les lignes nodales de la  $k$ -ième fonction propre



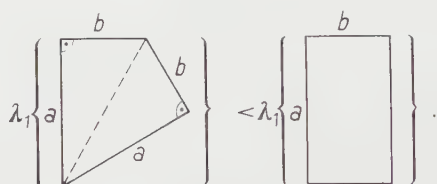


	$h = 1$ $h = \frac{1}{2}$ $h = \frac{1}{3}$ $h = \frac{1}{4}$	0 $1 - \sqrt{7}$ 1,2267 2,9752	23,4* 39,39 37,40 37,43	30,5* 37,04 37,23 37,36	— 20,4 28,6 32,3	— 29,9 35,75 36,92	$29,02 < \lambda < 37,75$
	$h = \frac{1}{2}$ $h = \frac{1}{3}$ $h = \frac{1}{4}$	-2 $\sqrt{2} - 1$ 2,3234	52,6 46,97 47,35	42,3 46,58 47,28	21,3 33,5 39,2	32 43,7 46,31	$41,96 < \lambda < 52,64$ $\lambda \sim 50,4$
	$h = \frac{1}{3}$ $h = \frac{1}{4}$ $h = \frac{1}{5}$	0 2 $1 + \sqrt{5}$	$\frac{16}{3} \pi^2$ $\frac{16}{3} \pi^2$ $\frac{16}{3} \pi^2$	52,05 52,50 52,58	36 42,7 46,1	48 51,20 52,06	Valeur exacte: $\lambda = \frac{16}{3} \pi^2 \simeq 52,64$
	$h = 1$ $h = \frac{1}{2}$ $h = \frac{1}{3}$ $h = \frac{1}{4}$	0 $1 - \sqrt{7}$ -1,6216 0,1594	93,6* 67,8* 87,7 89,6	74,9* 87,7* 82,7 88,7	— — 45,7 62,3	— — 67,0 82,3	$62,9 < \lambda \sim 92,8$

partagent l'hexagone en  $n_k$  sous-domaines, on a

$$\lambda_k \geq \frac{2,4048^2 \pi}{3 \sqrt{3}} n_k = 6,9929 n_k.$$

(ε) A l'aide du quotient de RAYLEIGH, PÓLYA démontre facilement que



Les nombres  $\tilde{\lambda}$  et  $\lambda$  indiqués par une astérisque \* ont été calculés à partir du même  $A_k$  qu'une valeur propre approchée précédente; cela tient au fait que les fonctions  $\cos$  et  $J_0$  ne sont pas biunivoques, et ne se produisent jamais dans les colonnes de  $\Lambda$  et  $\Lambda^m$ .

Les valeurs approchées  $\Lambda$  ont été pour la plupart calculées, pour cet exemple précisément, par L. COLLATZ ([5], p. 369); cette méthode classique est, comme on voit, bien moins satisfaisante que les trois autres; la formule (22) est du même auteur, et vaut mieux.

On remarquera les bonnes approximations fournies par  $\tilde{\lambda}$  et  $\lambda$  notamment pour les valeurs propres supérieures, en accord avec la remarque faite au § 1.2.

## 12.8 Remarque sur la méthode des distributions et la « formule de la moyenne »

12.81 On peut retrouver la formule (19) en construisant une distribution (ici: fonction) adéquate à support compact: on s'inspire du § 2. Prenons  $z_0$  comme origine et introduisons les coordonnées polaires  $r, \theta$ ; nous définissons

$$T(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r \geq h; \\ \frac{1}{4} [J_0(h\sqrt{\lambda}) N_0(r\sqrt{\lambda}) - N_0(h\sqrt{\lambda}) J_0(r\sqrt{\lambda})] & \text{pour } r \leq h; \end{cases}$$

où  $J_0$  et  $N_0$  sont les fonctions de BESSEL et de NEUMANN.

On vérifie que

$$\Delta T + \lambda T = J_0(h\sqrt{\lambda}) \delta_0 - \frac{1}{2\pi} \oint_{\theta=0}^{2\pi} \delta_{(h, \theta)} d\theta,$$

où  $\delta_0$  et  $\delta_{(h, \theta)}$  sont des mesures de DIRAC: l'une à l'origine, l'autre au point de

coordonnées polaires  $h, \theta$ . Donc

$$\Delta \varphi + \lambda \varphi, T \rangle = \langle \varphi, \Delta T + \lambda T \rangle = J_0(h\sqrt{\lambda}) \varphi(0) - \frac{1}{2\pi} \oint_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(h, \theta) d\theta,$$

d'où la «formule de la moyenne» (19) pour toute fonction  $\varphi$  satisfaisant  $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$ .

12.82 Si au contraire l'équation donnée est  $\Delta \varphi + \lambda \varphi = f(x, y)$ , la formule (19) est donc remplacée par

$$J_0(h\sqrt{\lambda}) \varphi(0) - \frac{1}{2\pi} \oint_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(h, \theta) d\theta = \langle T, f \rangle;$$

de cette formule exacte, on déduit immédiatement une formule approchée analogue à (20).

12.83 Pour l'équation de POISSON  $\Delta \varphi = f(x, y)$  (problème aux limites), on construit la distribution à support compact

$$T(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r \geq h; \\ -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{h}{r} & \text{pour } r \leq h; \end{cases}$$

alors

$$\Delta T = \delta_0 - \frac{1}{2\pi} \oint_{\theta=0}^{2\pi} \delta_{(h, \theta)} d\theta,$$

d'où

$$\langle T, f \rangle = \langle \Delta \varphi, T \rangle = \langle \varphi, \Delta T \rangle = \varphi(0) - \frac{1}{2\pi} \oint_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(h, \theta) d\theta;$$

on peut en déduire immédiatement la formule approchée

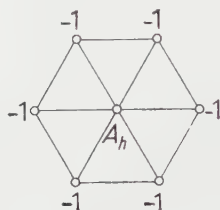
$$a - \frac{1}{6} \sum b = \langle T, f \rangle : O(h^6).$$

### § 13. Mêmes réseaux: plaque vibrante

L'équation est  $\Delta \Delta \varphi(x, y) - \lambda \varphi(x, y) = 0$ ; il sera seulement question ici de plaques *encastrées*:  $\varphi = \partial \varphi / \partial n = 0$  sur le contour.

13.1 Je décompose l'opérateur différentiel  $\Delta \Delta - \lambda = (\Delta + \sqrt{\lambda})(\Delta - \sqrt{\lambda})$ ; puis m'inspirant de la «loi de composition» du § 2.6, je construis le produit de composition des opérateurs aux différences correspondant à  $-3h^2(\Delta + \sqrt{\lambda})/2$

et à  $-3 \hbar^2 (\Delta - \sqrt{\tilde{\lambda}})/2$ . Comme on l'a vu au § 12.1, ceux-ci sont de la forme



avec

$$A_h = 2 + 4 \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} \right)$$

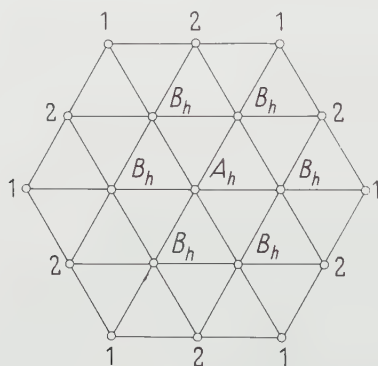
pour le premier, et donc

$$A_h = 2 + 4 \operatorname{Ch} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \sqrt[4]{\tilde{\lambda}} \right)$$

pour le second,  $\tilde{\lambda}$  étant une valeur approchée pour  $\lambda$ ; posons

$$\nu = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \sqrt[4]{\tilde{\lambda}}$$

et composons les deux opérateurs discrets; nous obtenons l'opérateur  $L_h^*$  suivant:

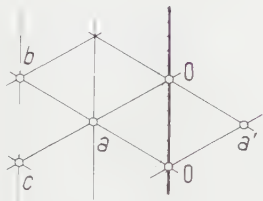


avec maintenant

$$\left. \begin{aligned} A_h &= (2 + 4 \operatorname{Ch} \nu) (2 + 4 \cos \nu) + 6, & B_h &= -2 - 4 \operatorname{Ch} \nu - 4 \cos \nu, \\ \tilde{\lambda} &= \frac{16}{9} \cdot \frac{\nu^4}{\hbar^4}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Il est clair que l'équation aux différences fournit une *équation transcendante* pour  $\nu$ , avec les désagréments que cela implique; mais cette circonstance n'est pas artificielle, elle est (comme au § 8) dans la nature du problème (déjà pour la *barre vibrante*).

13.2 *Conditions aux limites:* Je me contenterai d'exprimer l'encastrement en m'inspirant de la règle (10) du § 1.32 (pour une dimension): soient  $a, b, c$  les valeurs de  $u_h$  en trois points intérieurs au domaine (voir la figure ci-dessus);



nous définissons  $u_h = a'$  en un *nœud virtuel extérieur* par

$$a' = 3 a - \frac{b + c}{4} . \tag{24}$$

Il vaudrait mieux, en principe, s'inspirer de (11) (§ 1.33) [dont (10) est la limite pour  $\eta \rightarrow 0$ ]; mais (11) entraînerait des calculs très compliqués.

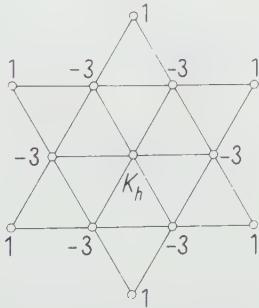
13.3 *L'opérateur classique* aux différences, correspondant à

$$\frac{9}{16} h^4 (\Delta\Delta - \lambda) ,$$

est caractérisé par le schéma ci-dessous, avec

$$K_h = 12 - \frac{9}{16} h^4 \lambda ,$$

$\lambda$  étant une valeur approchée pour  $\lambda$ .



Même si l'on utilise cet opérateur classique, on *remplacera avec avantage l'expression classique de l'encastrement* ( $a' = a$ ) *par la règle* (24) *ci-dessus*: les calculs n'en sont pas sensiblement augmentés, mais les résultats sont bien meilleurs, comme le montrera l'exemple suivant.

13.4 Exemple: *Plaque hexagonale encastrée, de côté 1*

(Comparer avec COLLATZ [5], p. 371.) Calcul approché des deux premières valeurs propres correspondant à des *fonctions propres symétriques*.

Valeur propre approchée	Maille	Méthode du § 13.1. Contour: selon le § 13.2 (équation transcendante)	Méthode classique <i>améliorée au contour</i> selon 13.2.	Méthode classique (COLLATZ)
$\lambda_1$	$h = 1$	<b>106</b>	<b>53</b>	32
	$h = \frac{1}{2}$	<b>159</b>	<b>136</b>	104
	$h = \frac{1}{3}$	<b>158</b>	<b>149</b>	129
$\lambda_{2\text{ sym}}$	$h = 1$	<b>468*</b>	—	—
	$h = \frac{1}{2}$	<b>2080</b>	<b>589</b>	524
	$h = \frac{1}{3}$	<b>2237</b>	<b>1397</b>	1150

L'astérisque \* a essentiellement la même signification qu'au tableau du § 12.7; ici: à partir d'un seul nœud intérieur, on se permet de calculer deux valeurs propres approchées; il est clair que c'est très osé.

Le calcul de la seconde colonne donne essentiellement le même travail que celui de la troisième; l'amélioration est sensible, surtout pour les valeurs approchées de  $\lambda_1$ ; par contre, pour  $\lambda_{2\text{ sym}}$ , la seconde colonne est presque aussi inexacte que la troisième: l'essentiel est ici l'opérateur aux différences utilisé, plutôt que l'expression de l'encastrement.  $\nu$  étant plus grand,  $\text{Ch } \nu$  et  $\cos \nu$  sont très différents des premiers termes de leur développement en série. — Le calcul de la première colonne est malaisé (équations transcendantes).

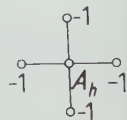
§ 14. *Réseaux quadratiques: membrane vibrante*

Nous traduisons cette fois l'équation

$$\Delta \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 0$$

approximativement par une équation aux différences pour les valeurs  $u_h$  de  $q$  aux nœuds d'un réseau de carrés de côté  $h$ .

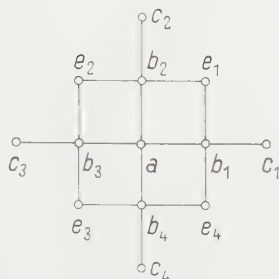
14.1 Soient  $a, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$  les valeurs de  $u_h$ ; nous caractérisons l'opérateur aux différences  $L_h^*$  par le schéma





c'est-à-dire

$$L_h^*[a] = A_h a - \sum_1^4 b_i.$$



Nous avons donc

$$0 = L_h^*[a] = A_h a - \sum b \quad (25)$$

et

$$0 = \sum L_h^*[b] = -4 a + A_h \sum b - \sum c - 2 \sum e. \quad (25')$$

(a) Relation de *réurrence*: L'idéal serait de combiner linéairement ces deux équations en sorte d'obtenir une relation du type

$$0 = L_{2h}^*[a] = A_{2h} a - \sum c; \quad (26)$$

c'est impossible. Nous voulons sacrifier le moins possible dans le passage de (25) et (25') à (26), c'est-à-dire nous cherchons à déterminer  $A_{2h}$  et des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  en sorte que l'expression

$$Q = L_{2h}^*[a] - \alpha L_h^*[a] - \beta \sum L_h^*[b] \text{ soit } = O(h^n)$$

avec le plus grand  $n$  possible. Pour cela, j'utilise par exemple le développement en série donné par COLLATZ [5] (tableau VIII, p. 515).

$$\begin{aligned} Q &= (A_{2h} - \alpha A_h + 4\beta) a + (\alpha - A_h \beta) \sum b + (\beta - 1) \sum c + 2\beta \sum e \\ &= \varphi|_a [A_{2h} - 4 + (4 - A_h)(\alpha + 4\beta)] + h^2 \Delta \varphi|_a [-4 + \alpha + (8 - A_h)\beta] + O(h^4); \end{aligned}$$

pour annuler les deux premiers termes du développement de  $Q$ , je choisis

$$\alpha = (A_h - 8)\beta + 4$$

et

$$A_{2h} - 4 = 4(A_h - 4) + (A_h - 4)^2 \beta, \quad (27)$$

le coefficient  $\beta$  restant *libre*.

*Remarque:* Il faut le reconnaître: il y a de l'arbitraire à vouloir annuler exactement les deux premiers termes du développement de  $Q$ : la récurrence est ici moins satisfaisante que dans le cas du réseau triangulaire (§ 12.1).

(b) Pour résoudre la récurrence (27), nous l'écrivons, si  $\beta \neq 0$ , sous la forme

$$\frac{\beta}{2} A_{2h} - 2\beta + 1 = 2 \left( \frac{\beta}{2} A_h - 2\beta + 1 \right)^2 - 1;$$

la relation  $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$  permet donc de poser

$$\frac{\beta}{2} A_h - 2\beta + 1 = \cos(kh);$$

la constante  $k$  reste à déterminer.

(c) Passage à la limite  $h \rightarrow 0$ :

$$0 = A_h a - \sum b = -\frac{k^2 h^2}{\beta} \varphi|_a - h^2 \Delta \varphi|_a + O(h^4).$$

On retrouve, à la limite, l'équation différentielle  $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$  à condition de poser  $k = \sqrt{\beta \lambda}$ . L'équation aux différences est donc finalement donnée (en fonction du choix de  $\beta$ ) par

$$\frac{\beta}{2} A_h - 2\beta + 1 = \cos(h \sqrt{\beta \tilde{\lambda}}), \quad (28)$$

$\tilde{\lambda}$  étant une valeur approchée pour  $\lambda$ .

Si au contraire  $\beta = 0$ : la récurrence (27) devient  $A_{2h} - 4 = 4(A_h - 4)$ , on la résout en posant  $A_h - 4 = \kappa h^2$ ; le passage à la limite  $h \rightarrow 0$  donne

$$0 = A_h a - \sum b = \kappa h^2 \varphi(a) - h^2 \Delta \varphi(a) + O(h^4);$$

on retrouve, à la limite,  $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$  à condition de poser  $\kappa = -\lambda$ . On obtient donc, si  $\beta = 0$ , l'expression classique

$$A_h = 4 - \lambda h^2, \quad (28')$$

$\lambda$  étant une valeur approchée pour  $\lambda$ .

**14.2 Extrapolation du coefficient  $\beta$ :** A cause des termes d'ordre supérieur qu'on a négligés dans le développement en série, aucun  $\beta$  ne donne, en général,  $\tilde{\lambda} = \lambda$  exactement pour toute maille  $h$ ; on constate cependant qu'il est essentiel, pour l'évaluation, de calculer avec un bon coefficient  $\beta$ : on peut l'extrapoler à partir des valeurs  $A_{h_1}$ ,  $A_{h_2}$  de  $A$  pour deux mailles successives  $h_1$  et  $h_2$ : on détermine

$\beta$  en sorte que les deux mailles donnent le même  $\tilde{\lambda}$ ; en d'autres termes,  $\beta$  et  $\tilde{\lambda}$  sont déterminés par un système de deux équations transcendantes du type (28).

*Utilisation des mailles  $h$  et  $2h$ :* Il est aisé de calculer  $\beta$  et  $\tilde{\lambda}$  à partir de  $A_h$  et  $A_{2h}$ : la formule de récurrence (27) donne

$$\beta = \frac{A_{2h} - 4A_h + 12}{(A_h - 4)^2} \quad (29)$$

et  $\tilde{\lambda}$  est donnée par (28).

### 14.3 Fonctions de cellules sur un réseau quadratique

Un raisonnement sur les fonctions de carrés donne naturellement, pour l'opérateur

$$L_h = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline -1 & A_h & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array},$$

les mêmes formules (27), (28). — *Conditions aux limites:* on construira, par réflexion, des *cellules virtuelles extérieures au domaine*, en s'inspirant du § 3.42.

Ainsi que je l'ai remarqué, il y a lieu d'utiliser les fonctions de cellules quand la frontière du domaine considéré présente des *coins rentrants*.

### 14.4 Exemples

#### 14.41 Carré de côté 1. Fréquence fondamentale: $\lambda_1 = 2\pi^2 \simeq 19,739$ .

A l'aide de fonctions de cellules:

$$h=1: \begin{array}{|c|c|c|} \hline -u & & \\ \hline -u & u & -u \\ \hline -u & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} A_1 u + 4u = 0 \\ A_1 = -4 \end{array} ; \quad h=2: \begin{array}{|c|c|c|} \hline -u & -u & \\ \hline -u & u & -u \\ \hline -u & u & -u \\ \hline -u & -u & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{1/2} u = 0, \\ A_{1/2} = 0. \end{array}$$

Extrapolons  $\beta$ : (29) donne



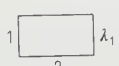
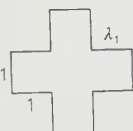
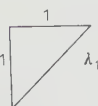
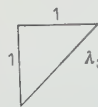
$$\beta = \frac{-4 + 12}{16} = \frac{1}{2};$$

(28) donne  $\tilde{\lambda}_1 = 2\pi^2$  exact.

A l'aide de fonctions de nœuds, on obtient  $A_{1/2} = 0$  et  $A_{1/4} = 2\sqrt{2}$ , d'où de nouveau  $\beta = 1/2$  et  $\tilde{\lambda}_1 = 2\pi^2$  exact.

Comparaison: la formule classique (28') donne  $A = 8$  pour  $h = 1$  et  $A = 16$  pour  $h = 1/2$ ; l'extrapolation classique (admettant que  $A = \lambda$  soit proportionnel à  $h^2$ ) donne  $\lambda \simeq 18,67$ .

## 14.42 Quelques résultats numériques:

Valeur propre approximée	Fonctions de	Maille	$A_h$	Méthode				Valeur exacte
				(28) avec $\beta = \frac{1}{2}$	(28) en extrapo- lant $\beta$ par (29)	(28') ( $\beta = 0$ ) classique	Extra- polation classique	
	cellules	$h = 1$ $h = \frac{1}{2}$	-4 0	$2\pi^2$ $2\pi^2$	$2\pi^2$	8 16	18,67	$2\pi^2$ $\simeq 19,739$
	cellules	$h = 1$ $h = \frac{1}{2}$	0 2	$\frac{1}{2}\pi^2$ $\frac{8}{9}\pi^2$	$\pi^2$	4 8	9,33	$\pi^2$ $\simeq 9,8696$
	cellules	$h = 1$ $h = \frac{1}{2}$	-2 $\sqrt{2}$	$\frac{8}{9}\pi^2$ $1,19\pi^2$	$1,24\pi^2$	6 10,34	11,79	$1,25\pi^2$ $\simeq 12,337$
	cellules	$h = 1$ $h = \frac{1}{2}$ $h = \frac{1}{3}$	1 2,7913 3,380	3,475 5,100 5,73	5,61 5,985	3 4,835 5,58	5,447 6,18	
 Cf. COLLATZ [4], p. 292	nœuds	$h = \frac{1}{2}$ $h = \frac{1}{4}$ $h = \frac{1}{8}$	-2 $\sqrt{2}$ 3,262	$3,556\pi^2$ $4,743\pi^2$ $4,94\pi^2$	$4,961\pi^2$ $4,998\pi^2$	24 41,37 47,23	47,2 49,18	$5\pi^2$ $\simeq 49,348$
 Cf. COLLATZ [4], p. 292	nœuds	$h = \frac{1}{2}$ $h = \frac{1}{4}$ $h = \frac{1}{8}$	-2 $-\sqrt{2}$ 2,18	$14,22\pi^{*2}$ $12,10\pi^2$ $12,82\pi^2$	$12,54\pi^{*2}$ $12,976\pi^2$	— 86,63 116,5	— 126,46	$13\pi^2$ $\simeq 128,31$

L'astérisque \* a le même sens qu'au § 12.7.

14.5 *Conjecture*: Dans les exemples ci-dessus, toutes les valeurs de  $\beta$ , calculées par extrapolation, étaient supérieures ou égales à  $1/2$ ;  $\beta = 1/2$  fournissait la valeur exacte de la fréquence fondamentale de la membrane carrée, et des bornes inférieures  $\tilde{\lambda}_1 < \lambda_1$  pour les autres exemples.

Je conjecture que, lorsqu'on travaille avec des *fonctions de cellules* (carrés) et que l'on pose dans (28)  $\beta = 1/2$ , c'est-à-dire  $A_h = 4 \cos(h\sqrt{\tilde{\lambda}}/2)$ ,  $\tilde{\lambda}_1$  soit une évaluation par défaut pour  $\lambda_1$ :  $\lambda_1 \geq \tilde{\lambda}_1$ .

J'ai démontré qu'il en est ainsi si, au lieu de procéder par réflexion sur le contour:

$$u \quad \Big| \quad -u,$$

on attribue la valeur *zéro* aux cellules virtuelles extérieures:

$$u \quad \Big| \quad 0;$$

mais cette recette est inadéquate pour un calcul numérique efficace.

Il semble bien que, d'une façon générale, la formule

$$A_h = 4 \cos\left(h\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}}{2}}\right) \quad \left(\beta = \frac{1}{2}\right)$$

soit, pour des fonctions de cellules, meilleure que la formule classique  $A_h = 4 - A h^2$  (qui correspond à  $\beta = 0$ ).

### § 15. Réseaux quadratiques: plaque vibrante

Nous considérons une plaque vibrante *encastrée* le long de son contour  $\Gamma$ :

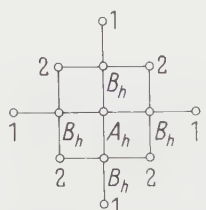
$$\Delta\Delta\varphi - \lambda\varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma;$$

nous travaillons ici avec des fonctions de nœuds.

15.1 Nous retenons, pour l'opérateur différentiel  $h^2(\Delta + \mu)$ , l'opérateur aux différences correspondant (28) avec

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \text{soit} \quad \begin{array}{c} -1 \\ | \\ -1 \circ -1 \\ | \\ -1 \end{array} \quad 4 \cos(h\sqrt{\frac{\mu}{2}});$$

à  $-h^2 (\Delta - \mu)$  correspond donc l'opérateur discret obtenu en remplaçant  $\cos$  par  $\text{Ch}$ . — Comme au § 13.1, je m'inspire de la « loi de composition » du § 2.6: je construis le produit de composition des deux opérateurs aux différences considérés, avec  $\mu \rightarrow \lambda$ : j'obtiens l'opérateur discret suivant, qui correspond à  $h^4 (\Delta \Delta - \lambda)$ :



avec 
$$\begin{cases} A_h = 4 + 16 \text{Ch} \xi \cos \xi, \\ B_h = -4 (\text{Ch} \xi + \cos \xi), \\ \tilde{\lambda} = \left( \frac{\xi}{h} \right)^4, \end{cases} \quad (30)$$

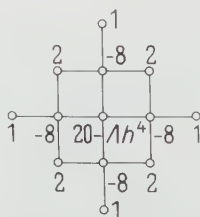
$\tilde{\lambda}$  étant une valeur approchée pour  $\lambda$ . Il est clair qu'on est amené ainsi à résoudre une *équation transcendante* en  $\xi$ .

15.2 *Conditions aux limites*: Comme au 13.2, je me contenterai de transposer la règle (10) du § 1.32 pour exprimer l'encastrement: soient  $a, b, \dots$  les valeurs de  $u_h$  aux nœuds intérieurs du domaine; nous définissons

$$b \quad a \quad \left| \quad a' \right.$$

$u_h = a' = 3a - b/2$  en un *nœud virtuel* extérieur au domaine.

15.3 L'opérateur classique aux différences correspondant à  $h^4 (\Delta \Delta - \lambda)$  est ( $\Delta$  étant une valeur approchée pour  $\lambda$ ):



De nouveau ici: Même si l'on utilise cet opérateur classique, il y a avantage à remplacer l'expression classique de l'encastrement:

$$b \quad a \quad \left| \quad a' \right.$$

$a' = a$  par la règle ci-dessus:  $a' = 3a - b/2$ .



15.4 Exemple: *Plaque carrée encastrée, de côté 1*

ARONSAJN et DONOGHUE ([1], part I, p. 34) ont démontré:

$$1293,8 \leq \lambda_1 \leq 1300,3.$$

Voici les valeurs approchées fournies pour  $\lambda_1$  par les trois méthodes:

Maille	Méthode du § 15. 1; contour: selon le § 15.2 (équation transcendante)	Méthode classique <i>améliorée au contour</i> selon 15.2	Méthode classique
$h = \frac{1}{2}$	<b>791</b>	<b>512</b>	384
$h = \frac{1}{3}$	<b>1076</b>	<b>891</b>	648
$h = \frac{1}{4}$	<b>1195</b>	<b>1068</b>	829
$h = \frac{1}{5}$	<b>1245</b>	<b>1154</b>	949

Notre expression de l'encastrement joue un rôle essentiel, bien qu'elle ne complique pas les calculs.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. ARONSAJN and W. F. DONOGHUE, *Variational Approximation Methods Applied to Eigenvalues of a Clamped Rectangular Plate*, University of Kansas ('Studies in Eigenvalue Problems', Tech. Report 12, 1954).
- [2] CH. BLANC, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients lentement variables*, Bull. tech. Suisse rom. 74, 185-188 et 209-213 (1948).
- [3] H. BÜCKNER, *Über Konvergenzsätze, die sich bei der Anwendung eines Differenzenverfahrens auf ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem ergeben*, Math. Z. 51, 423-465 (1948).
- [4] L. COLLATZ, *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung* (Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler 1945; Chelsea 1948).
- [5] L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, 2<sup>e</sup> éd. (Springer-Verlag, Berlin 1955).
- [6] J. HERSCH, *Une équation aux différences pour le calcul approché des fréquences propres d'une membrane (méthode récurrente)*, C. R. Acad. Sci. Paris 243, 1475 (1956).
- [7] J. HERSCH, *Le produit de composition des opérateurs aux différences; application aux vibrations de plaques encastrées*, C. R. Acad. Sci. Paris 244, 299 (1957).
- [8] G. PÓLYA, *On the Characteristic Frequencies of a Symmetric Membrane*, Math. Z. 63, 331-337 (1955).
- [9] G. PÓLYA, *Sur les fréquences propres des membranes vibrantes*, C. R. Acad. Sci. Paris 242, 708 (1956).

- [10] G. PÓLYA, *Sur quelques membranes vibrantes de forme particulière*, C. R. Acad. Sci. Paris 243, 469 (1956).
- [11] G. PÓLYA and G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press, 1951).
- [12] R. ZURMÜHL, *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker* (Springer-Verlag, Berlin 1953).

### Summary

Let a linear boundary value problem or an eigenvalue problem be given, in one or more dimensions. I look for such a construction of a corresponding difference equation that, in the case of ordinary differential equations with constant coefficients, its solutions be *exactly* those of the continuous problem. – This 'trivial' case is first investigated and several methods are pointed out; these are then applied to: (a) ordinary differential equations with variable coefficients ('method of local perturbations'); (b) vibration problems for membranes and clamped plates.

(Reçu: le 10 septembre 1957.)

## Kennzeichen atmosphärischer Eispartikeln

### 1. TEIL

#### *Graupeln als Wachstumszentren von Hagelkörnern*

Von ROLAND LIST, Weissfluhjoch-Davos<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

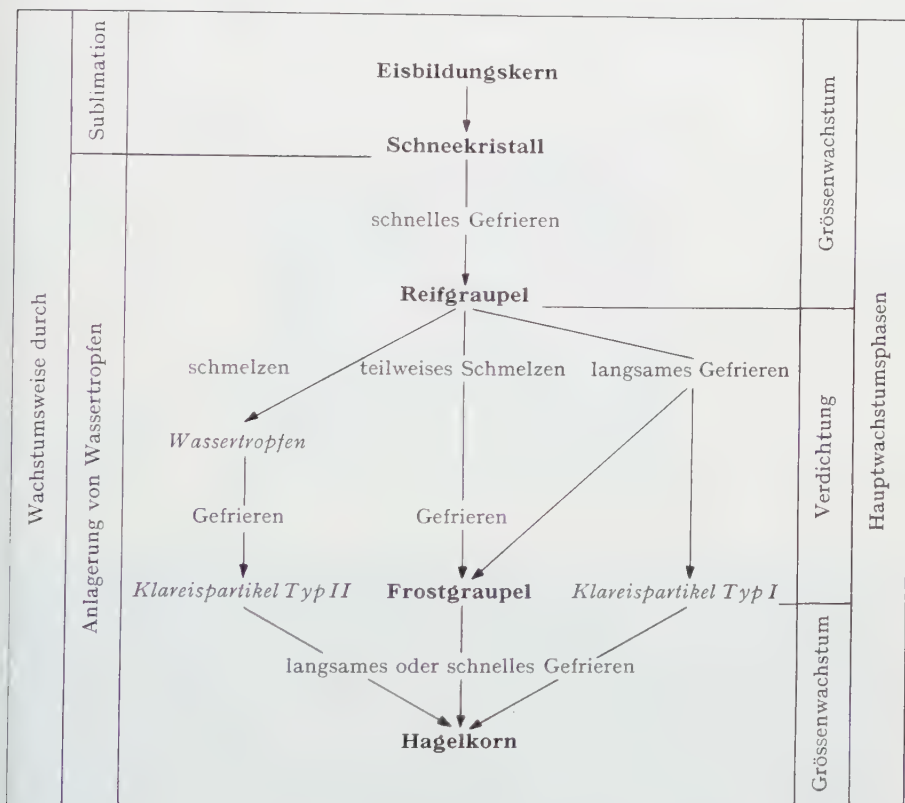
Beobachtungen und Messungen an über 60 Sammelproben von Graupel- und Hagelfällen der Jahre 1953 bis 1957 sollen Aufschluss geben über das Wachstum kleiner Eispartikeln zu grossen Hagelkörnern. Die verschiedenen Entwicklungsstufen, ausgehend vom Eisbildungskern, sind gemäss dem Schema in *Figur 1* in folgende Haupt- und Nebenphasen zu unterteilen:

- A. Wachstum durch Sublimation: vom Eisbildungskern zum Schneekristall.
- B. Wachstum durch Anlagerung von Wassertropfen: vom Schneekristall zum Hagelkorn.
  - a) vom Schneekristall zur Reifgraupel;
  - b) von der Reifgraupel zur Frostgraupel oder Klareispartikel;
  - c) von der Klareispartikel oder Frostgraupel zum Hagelkorn.

<sup>1)</sup> Eidgenössisches Institut für Schnee- und Lawinenforschung.

Phase A, B a) und B c) stellen dabei ein eigentliches Grössenwachstum dar, Phase B b) besteht in erster Linie in einer Verdichtung.

Währenddem viele Arbeiten über Eiskerne ausgeführt, zum Beispiel [1-3]<sup>2)</sup>, und Wachstum und Aufbau der Schneekristalle umfassend durch NAKAYA [4]



Figur 1

Wachstum vom Eiskern zum Hagelkorn.

behandelt wurden, sind in den Kenntnissen über grössere atmosphärische Eiskörner diverse Lücken festzustellen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, diesem Mangel zumindest teilweise abzuhelpen.

Bei der Charakterisierung von Eiskpartikeln traten in der Folge verschiedentlich Differenzen auf mit der Nomenklatur, wie sie von der «World Meteorological Organisation» vorgeschlagen wird. Der Grund liegt darin, weil neues Beobachtungsmaterial solche Abweichungen wünschenswert erscheinen lässt.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 192.

## 2. Reifgraupeln

### 2.1 Charakterisierung

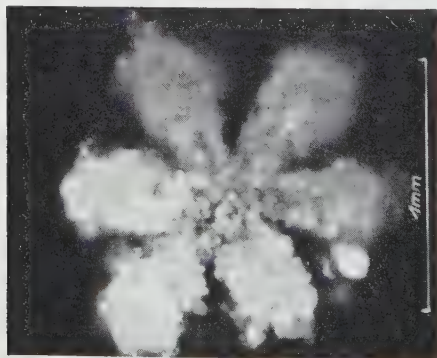
*Aussehen:* Reifgraupeln («soft hail, graupel or snow pellets») sind weisse, opake Partikeln kugelsektorartiger (kurz konischer), rundlicher oder unregelmässiger Form mit einem Durchmesser, der 7 mm selten überschreitet.

*Entstehung:* Reifgraupeln entstehen durch Anlagerung von Wolkentropfen an einen ursprünglichen, durch Sublimation gewachsenen Eiskristall. Das Angefrieren des eingefangenen Wassers erfolgt relativ rasch am Ort des Auftreffens (vergleiche auch mit MASON [3]).

(Die deutschsprachige Bezeichnung «Reifgraupel» ist insofern irreführend, als es sich nicht um durch Reifansatz, das heisst durch Sublimation gewachsene Teilchen handelt - eine Erkenntnis, die erst neueren Datums ist. Der Name ist damit nur in historischem Sinne als Bezeichnung für spezielle Eiskristallpartikeln aufzufassen.)

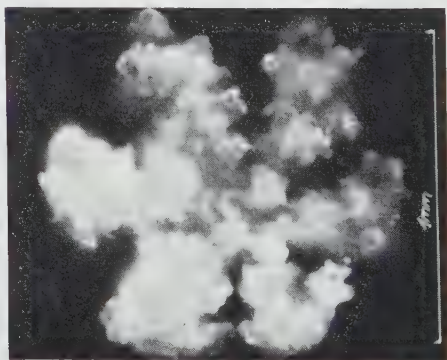
### 2.2 Äusserer Aufbau der Reifgraupeln

2.21 *Entstehungsphasen und Formen.* Bei der Auswertung der Graupelfälle vom 28. Juli und 2. September 1957 zeigten sich Teilchen verschiedener Wachstumsstadien, so die in *Figuren 2 und 3* dargestellten, mit gefrorenen



Figur 2

Vergraupelter Schneestern Nr. 1.

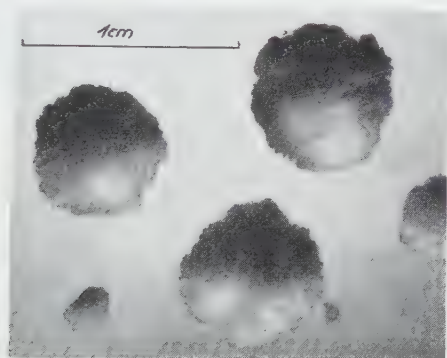


Figur 3

Vergraupelter Schneestern Nr. 2.

Wassertröpfchen bedeckten Schneesterne oder eigentliche konische Reifgraupeln, wie sie in *Figuren 4 und 8* zum Ausdruck kommen. Dass die Form mit der Partikelgrösse wesentlich zusammenhängt, zeigt die Tatsache, dass praktisch alle Teilchen mit einem Durchmesser von mehr als 2-3 mm kugelsektorartig befunden wurden. Der Grund hierzu dürfte darin liegen, dass bei

den kleineren Reifgraupeln teilweise noch die Struktur des ursprünglichen Schneekristalles zu erkennen ist, die durch die aerodynamisch bedingte Akkreszenz beim Fallen nach und nach verwischt wird. Die damit entstehenden grösseren Teilchen weisen daher meist symmetrische Formen auf, wie sie auch durch Winkelmessungen erhärtet wurden. Kegelöffnungswinkel an 80 konischen Graupeln vom 23. August 1954 ergaben Werte zwischen 80 und 90°, ebensogross waren die Übergangswinkel zwischen Kegel- und Kugelfläche.



Figur 4

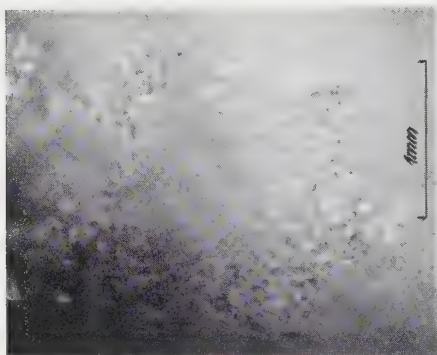
Kugelsektorartige Reifgraupeln, Achse senkrecht zur Bildebene.

Während letztere bei weiteren Beobachtungen konstant blieben, betrug der mittlere Kegelöffnungswinkel bei Sammelproben vom 28. Juli 1957 rund 70°.

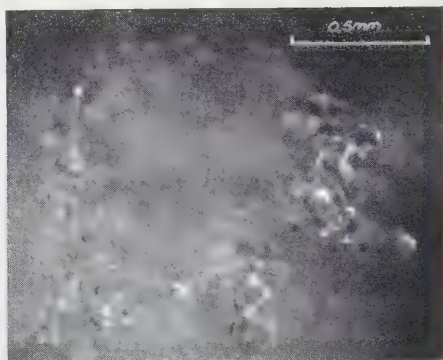
L. v. BUCH [5] stellte bereits 1813 fest, dass konische Reifgraupeln mit der Spitze nach hinten fallen, eine Ansicht, die von ARENBERG [6] nicht geteilt wurde. Später angeführte Photos von Hagelkörnern und Frostgraupeln zeigen jedoch die Berechtigung der älteren Behauptung. Da bei den vorkommenden Luftgeschwindigkeiten eine Vereisung immer gegen den Strom stattfindet, ergibt sich die Aussage, dass der primäre Eiskristall in der Graupelspitze zu suchen ist. Die Figuren 5 und 6 bestätigen dies, wird doch dort bei Scharfeinstellung des Mikroskopes auf eine Ebene senkrecht zur Kegelachse vielfach eine Andeutung einer dendritischen Struktur gefunden. Diese speziellen Kennzeichen bleiben manchmal teilweise über die ganzen Graupelkegel erhalten, wie es Unregelmässigkeiten der dieselben abschliessenden «Kreise» zeigen (zum Beispiel Figur 4).

Sind die Wachstumszentren keine eigentlichen Schneesterne, so wird es kaum mehr möglich, den Typ des Ausgangskristalls zu eruieren. Dies spielt speziell beim Versuch, auch auf Grund der Wachstumsbedingungen der verschiedenen Schneekristallarten auf die Ausgangsbedingungen des Reifgraupel-Wachstums zu schliessen, eine Rolle. Die hierfür von NAKAYA [4] angegebene





Figur 5

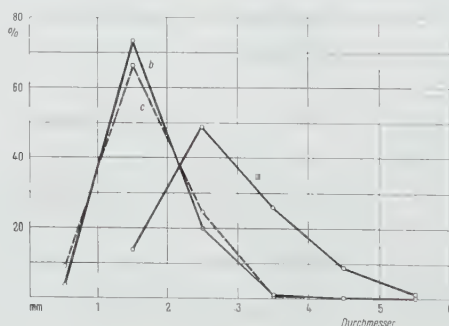


Figur 6

Graupelspitze mit Andeutung eines Schneesterns. Graupelspitze mit Andeutung eines Schneesterns.

Methode befriedigt jedoch nicht, da die angeführten Daten den Tatsachen nicht immer zu entsprechen scheinen. (NAKAYA fordert für das Auftreten von Dendriten Temperaturen zwischen  $-13$  und  $-18^{\circ}\text{C}$ ; da aber während der in Frage kommenden Graupelfälle bei einer Wolkenhöhe über der Station von maximal 200 m Bodentemperaturen zwischen  $+1$  und  $+2^{\circ}\text{C}$  gemessen wurden, scheint dies ganz unmöglich.)

2.22 Grössenverteilungen. Als Beispiele von Grössenverteilungen seien in Figur 7 drei Graupelfälle dargestellt.



Figur 7

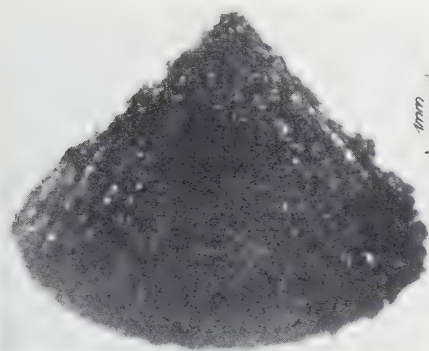
Grössenverteilung dreier Reifgraupelfälle.

Kurve *a* betrifft die Sammelprobe vom 19. August 1954, 16.25 Uhr, bei total 548 Partikeln.

Kurve *b* betrifft die Sammelprobe vom 23. August 1954, 13.30 Uhr, bei total 4912 Partikeln.

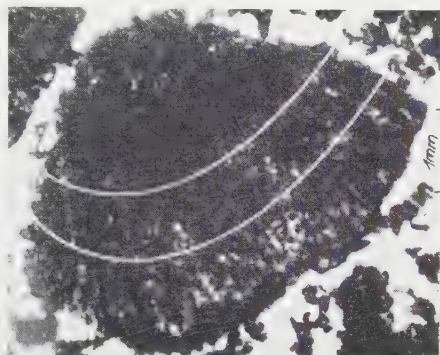
Kurve *c* betrifft die Sammelprobe vom 23. August 1954, 15.45 Uhr, bei total 1226 Partikeln.





Figur 8

Dünnschnitt einer Reifgraupel.



Figur 9

Dünnschnitt einer Reifgraupel.

**2.23 Grösse der Aufbauelemente.** Die Grösse der Aufbauelemente, das heisst der angelagerten Wolkentropfen, ist aus den früher erwähnten *Figuren 2 und 3* ersichtlich. Ihr Durchmesser liegt im Mittel um  $20\mu$ . Ein merkbarer Grössenunterschied zwischen direkt an den ursprünglichen Kristall gelagerten Teilchen und den im Endstadium angewachsenen Partikeln besteht, wie eine Ausmessung verschiedener, rund 0,35 mm dicker Dünnschnitte (*Figuren 8 und 9*) ergab, nicht. Spezielle Angaben über Dünnschnitttechnik siehe [7].

**2.24 Dichten von Reifgraupeln.** Die Dünnschnitte geben in durchscheinendem Licht Aufschluss über die in Eispartikeln eingebauten Luftblasen; sind diese gegenseitig so gekoppelt wie die bei Reifgraupeln auftretenden Kapillarsysteme, so können die Eiskörner direkt als eigentliche Eisgerüste angesprochen werden.

Eine direkte Dichtemessung durch Wägung und Bestimmung des Auftriebes in einer Flüssigkeit wird damit praktisch illusorisch. So wurde zur Ermittlung des Volumens geometrisch einfacher Graupeln eine Ausmessung vorgezogen. Die berechneten Dichten betragen für den Graupelfall vom 28. Juli 1957 im Mittel  $0,7\text{ g/cm}^3$ , für die Partikeln vom 3. September 1957 rund  $0,5\text{ g/cm}^3$ . Diese Werte, die mit einem Fehler von  $\pm 20\%$  behaftet sind, liegen im allgemeinen höher als die von andern Autoren angeführten Werte. NAKAYA [4] zum Beispiel gibt in seinem Standardwerk den allgemeinen und konstanten Wert von  $\rho = 0,125\text{ g/cm}^3$  an und lässt dabei die Abhängigkeit des spezifischen Gewichtes von der Packung der Wolkentropfchen unberücksichtigt, die ihrerseits von der Gefriereschwindigkeit des an ein Eispartikel angelagerten Wassers beeinflusst wird.

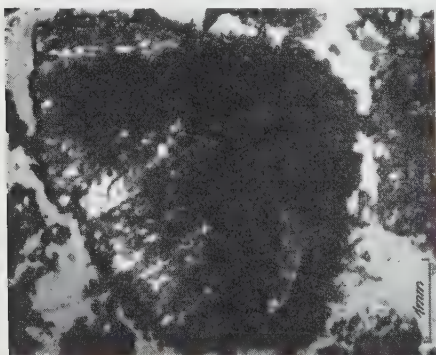
**2.25 Zonen gleicher Wachstumsbedingungen.** Eine stärkere Änderung der Wachstumsbedingungen von Reifgraupeln hat eine andere Dichte zur Folge,

so dass zusammenhängende Zonen gleicher Eiskonzentration als Wachstumsphasen angesprochen werden können. Ansätze hierzu zeigt *Figur 9*. Die darin abgezeichneten Kugelschalen-Ausschnitte sind gestaffelt bezüglich der Grauspitze, die auch damit als Wachstumsausgangszone oder Wachstumszentrum angesprochen werden darf.

Diese Kennzeichen sind aber speziell bei Vergleichen mit Bedacht zu interpretieren, da bei gleichen Umweltsbedingungen das Wachstum von Eiszonen von der Fallgeschwindigkeit der betrachteten Körner abhängt!

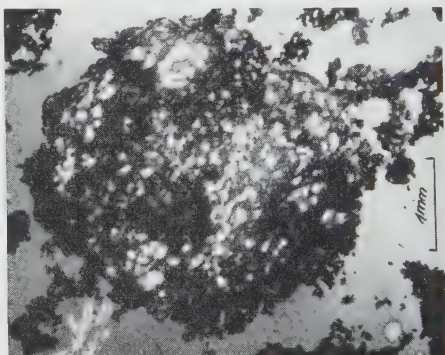
### 2.3 Kristallographie von Reifgraupeln

2.31 *Kennzeichen, die auf die Richtung des örtlichen Wachstums deuten.* Das Interesse an der Kristallographie natürlicher Eiskristalle basiert auf Hinweisen, die in polarisiertem Licht bezüglich deren Wachstum sichtbar werden könnten. Dünnschnitte zeigen denn auch die Anordnung der zu beobachtenden Eiseinkristalle – bei Reifgraupeln sind darunter eher Zonen gleicher Orientierung zu verstehen (*Figuren 10 und 11*). Irgendwelche Gesetzmässigkeiten über



Figur 10

Dünnschnitt durch die Achse einer Reifgraupel, mit polarisiertem Licht.



Figur 11

Dünnschnitt senkrecht zur Achse einer Reifgraupel, mit polarisiertem Licht.

Wachstumszonen und Wachstumsrichtungen sind aber infolge der geringen Anzahl von Kristalliten in Reifgraupeln nicht festzustellen, wohl aber, wie später gezeigt wird, bei grösseren Teilchen.

2.32 *Anzahl der wirksamen Eiskbildungskerne.* Unter der Annahme, dass ein einzelner Einkristall nur bei Anwesenheit eines Eiskernes entstehen kann, ist der Schluss nahe, dass die Zahl der Einkristalle gleichgesetzt werden kann mit der Zahl der wirksamen Sublimations- oder Gefrierkerne. Es gilt damit, die Zahl der Kristallite in einem Reifgraupel aus verschiedenen Dünnschnitten in

der Kornachse (zum Beispiel *Figur 10*) oder senkrecht dazu (*Figur 11*) zu interpolieren. Das ausgewertete Material lässt bezüglich dem Graupelfall vom 28. Juli 1957 ein Einkristallvolumen von rund  $1\text{--}5\text{ mm}^3$  erwarten, mit andern Worten kommen bei einer gemessenen Eisteilchendichte von  $0,7\text{ g/cm}^3$  pro Gramm Wasser 500 Eisbildungskerne. Daraus können wir auch die Eiskernkonzentration der Erzeugerwolke errechnen, die unter der Annahme eines Wassergehaltes von  $3\text{ g/m}^3$  rund 1,5 wirksame Teilchen pro Liter Luft ergibt.

### 3. Frostgraupeln

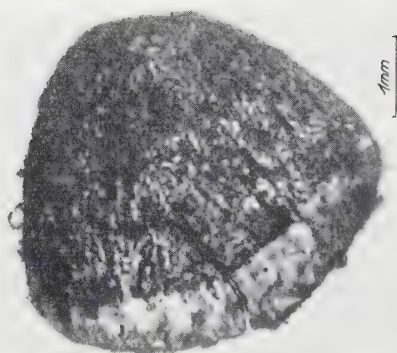
#### 3.1 Charakterisierung

*Aussehen:* Frostgraupeln («small hail») sind Partikel kugelig, kegelartiger oder unregelmässiger Form. Ihr Aussehen ist teilweise weiss und opak; die Oberfläche ist immer *zonenweise* glasartig. Der Durchmesser überschreitet selten 7 mm.

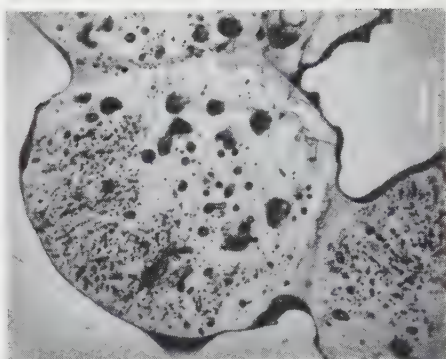
*Entstehung:* Frostgraupeln entstehen durch Anlagerung von Wassertropfen an Reifgraupeln; der Gefrierprozess findet langsam statt, so dass das angeschwabte Wasser Zeit hat zu zerfliessen.

#### 3.2 Äusserer Aufbau von Reifgraupeln

*3.21 Entstehungsstadien.* Ein Vergleich mit der Charakterisierung des Wachstums von Reif- und Frostgraupeln zeigt, dass der Unterschied in der Gefriereschwindigkeit liegt: Bei grosser Unterkühlung des angeströmten Wassers erfolgt ein schnelles Gefrieren direkt am Ort der Anlagerung, wobei die Tropfen ihre Form mehr oder weniger bewahren; langsames Gefrieren bei geringer Unterkühlung lässt jedoch dem Wasser Zeit, sich zu verteilen. Eine scharfe Trennung der Graupelarten kann trotz aller Zwischenphasen ausgeführt werden, wenn die augenfällige zonenweise Verglasung der Oberfläche bei teilweisem opakem Innern als Hauptcharakteristikum für Frostgraupeln angenommen wird. Der Übergang einer Reifengraupel in eine Frostgraupel sei anhand von *Figur 12* erklärt, wobei zu bemerken ist, dass das Korn streng kugelsektorartig war, der Schnitt jedoch nicht in der Kegelachse gelang. – Die Übergangsgraupel stellt ein Wachstumsstadium dar, wo der Habitus noch auf eine Reifengraupel schliessen lässt; die gut sichtbare teilweise Verglasung sowie der Dünnschnitt zeigen jedoch, dass die ursprüngliche Reifpartikel in wärmere Zonen mit weniger stark unterkühlten Wassertropfen gelangt sein muss, da die Kapillaren von der Gegenstromseite, vom kugeligen Flächenteil her zum Teil ausgefüllt worden sind. Dafür spricht die deutlich zu erkennende Dichteabnahme gegen die Spitze hin. – Nach Beginn der Verdichtung der Partikel bei konstantem Volumen erfolgte ein weiteres Grössenwachstum an der Stirn-



Figur 12  
«Übergangsgraupele».

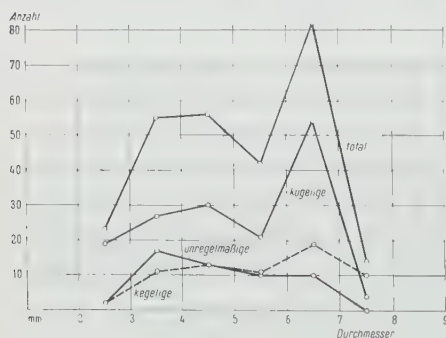


Figur 13  
Frostgraupele.

seite, wo eine blasenarme Schale auf Frostvergräupelung hinweist. In einem weiteren Stadium würde ein Zerfließen der angelagerten Wassertropfen in die Kegelfläche erfolgen, gekoppelt mit einem Vollsaugen der Kapillaren auch von diesen Seiten her. Die so entstehende Form lässt sich durch einen einer Kugel aufgesetzten Kegel charakterisieren.

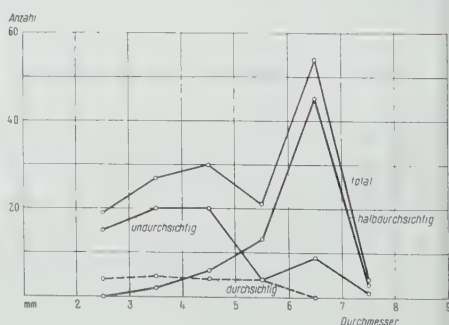
Ursprünglich kugelige oder unregelmässige Reifgräupeln behalten ihre Form beim Übergang zu Frostgräupeln bei.

3.22 *Grössen- und Formverteilungen.* Das Untersuchen von Frostgräupeln wird erschwert durch ihre nassen Oberflächen, die beim Sammeln ein gegenseitiges Verpappen der Körner und Dünnschnittbilder gemäss *Figur 13* zur Folge haben. Beim Graupelfall vom 18. Juli 1954 auf Weissfluhjoch waren die Partikeln jedoch relativ trocken, so dass es ohne Mühe gelang, Grössen- und Formverteilungen abzuklären. Diese sind in *Figur 14* dargestellt und zeigen



Figur 14

Grössen- und Formverteilung der Frostgräupeln vom 18. Juli 1954.



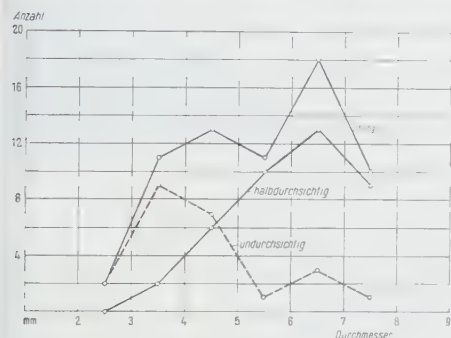
Figur 15

Durchsichtigkeitsverteilung kugeliger Frostgräupeln.



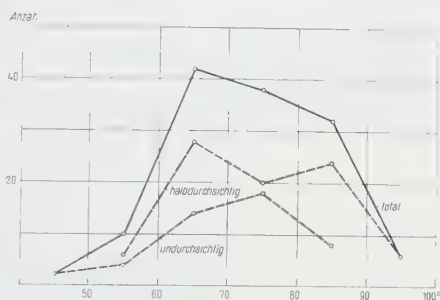
zwei Maxima bei 4,0 und 6,5 mm grösstem Durchmesser, eine Eigenheit, die von zwei zeitlich etwas gestaffelten Niederschlägen herrühren kann. In der gleichen Darstellung ist auch der Anteil der kugeligen, kegelligen und unregelmässigen Formen festgehalten.

Eine Unterscheidung nach der Durchsichtigkeit erfolgt für kugelige und kegellige Partikeln in den *Figuren 15 und 16*, wobei für konische Frostgraupeln



Figur 16

Durchsichtigkeitsverteilung kegelliger Frostgraupeln.



Figur 17

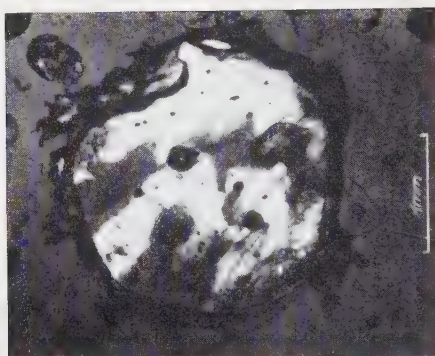
Kegelöffnungswinkelverteilung kegelliger Frostgraupeln.

der Sitz der opaken Zonen jeweils in der Gegend der Spitze zu suchen ist. Die Maxima der undurchsichtigen Teilchen liegen jeweils bei den kleinern Grössen, währenddem die halbdurchsichtigen eine Häufung bei grossen Durchmessern aufweisen. Bemerkenswert ist weiter, dass bei den kugeligen Frostgraupeln vereinzelt ganz durchsichtige, sogenannte Klareispartikeln festgestellt werden konnten. *Figur 17* gibt uns weiter Aufschluss über die Öffnungswinkelverteilung für die kegelligen Formen. Die Streuung in einem Bereich von 60° ist erwartungsgemäss wesentlich grösser als bei den untersuchten Reifgraupelfällen mit 10°. Der Grund hierfür dürfte darin liegen, dass der Kegelwinkel nicht nur von den Wachstumsbedingungen, sondern speziell auch vom Wachstumsstadium abhängt. Die in der gleichen Figur vorgenommene Unterteilung nach Durchsichtigkeitsgrad gibt keine speziellen Hinweise.

**3.23 Dichten von Frostgraupeln.** Die vorgenommenen Dichtemessungen ergaben Werte zwischen rund 0,8 und 0,9 g/cm<sup>3</sup>; sie liegen damit sehr nahe bei der Eisdichte, die 0,915 g/cm<sup>3</sup> beträgt [8].

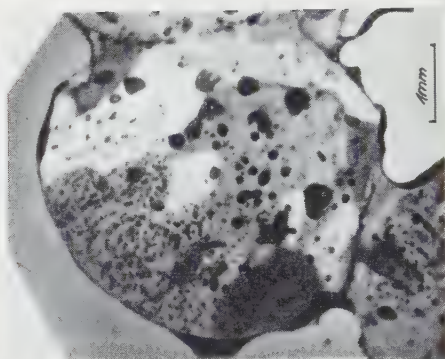
### 3.3 Kristallographie von Frostgraupeln

**3.31 Wachstum der Einkristalle.** Ein Teil der Reifgraupeln vom 28. Juli 1957 wurde nicht direkt in gekühlte Gefässe aufgefangen, sondern vom warmen, nassen Boden aufgenommen, wo eine Benetzung durch Ansaugen von



Figur 18

Künstliche Frostgraupel, mit polarisiertem Licht.



Figur 19

Frostgraupel, mit polarisiertem Licht.

flüssigem Wasser in das Eisgerüst hinein stattfand. Das Resultat war eine Art künstlicher Frostgraupeln (Figur 18), die von natürlichen (Figur 19) nicht zu unterscheiden sind. Die beobachtete mittlere Einkristallgrösse entsprach denjenigen der Reifgraupeln gleichen Datums. Dies bedeutet, dass das vom Eisgerüst aufgenommene Wasser beim Gefrieren die Kristallrichtung der Umgebung annahm. Zum gleichen Resultat führten auch Dünnschnitte, bei denen Reifgraupeln durch Auftauen und Angefrieren an Objektträger zubereitet wurden, anstatt wie normal mit der anderswo beschriebenen Phtalsäuretechnik [7].

Die Einkristallanordnung des Übergangsgraupels (Figur 20) zeigt weiter, dass vereinzelt eine Ausdehnung der Kristallite durch verschiedene Wachstumsphasen hindurch möglich ist.

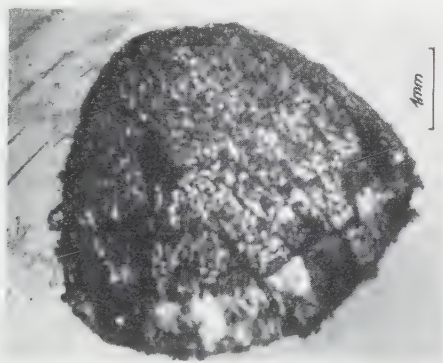
3.32 *Anzahl der wirksamen Eisbildungskerne.* Die Anzahl der wirksamen Eisbildungskerne bleibt auf Grund der oben gemachten Angaben ungefähr gleich wie bei den ursprünglich gleich grossen Reifgraupeln ( $350/\text{cm}^3$ ). Die spezifische Anzahl pro Liter Wolkenluft wird aber zufolge der grösseren Teilchendichte wesentlich reduziert. Dies ist leicht erklärlich, da das in die Kapillarsysteme eindringende Wasser die beste Gefrierkernausslösung antrifft: Das vorhandene Eisgerüst, dessen Einsatzpunkt bei  $0^\circ\text{C}$  liegt. Demgegenüber benötigen ja alle bekannten Kernsubstanzen Unterkühlungen von mindestens  $-4^\circ\text{C}$  [1, 2].

Ein Vergleich verschiedener natürlicher Proben ist in grössenordnungsmässiger Übereinstimmung mit den oben diskutierten Werten. Dabei muss aber klar sein, dass eine grössere Streuung erwartet und gefordert werden muss! Die Unterkühlungsfähigkeit der Wolkentropfen, die von der Anwesenheit und der Art der Fremdsubstanzen abhängt, beeinflusst die Wachstumsbedingungen atmosphärischer Eisteilchen in ausserordentlichem Masse und schafft erst durch ihre Variation die Vielfalt des Aufbaues natürlicher Graupel- und Hagelkörner.



#### 4. Klareispartikeln

Die vielfach eigenständig oder mit Frostgraupeln auftretenden Klareispartikel machen eine weitere Spezifizierung nötig:



Figur 20  
Übergangsgraupel, mit polarisiertem Licht.

##### 4.1 Klareispartikeln Typ I

*Aussehen:* Klareispartikeln Typ I sind klare, kugelige Teilchen mit vereinzelt ins Eis eingebauten Luftblasen.

*Entstehung:* Sie entstehen ähnlich wie Frostgraupeln, mit denen sie beobachtet werden können. Erforderlich sind neben spezifischen Gefriereschwindigkeiten ganz zusammenhängende Kapillarsysteme der ursprünglichen Reifgraupeln, die es der Luft erlauben, beim Eintreten von Wasser bei der Frostvergraupelung praktisch komplett zu entweichen.

*Kristallaufbau:* Klareispartikeln Typ I sind meist polykristallin.

##### 4.2 Klareispartikeln Typ II

*Aussehen:* Klareispartikeln Typ II («ice pellets») sind ebenfalls klare, kugelige Teilchen mit vereinzelt ins Eis eingebauten Luftblasen.

*Entstehung:* Sie bilden sich durch Gefrieren von Wassertropfen, was zur Folge haben kann, dass das Innere unter Umständen aus flüssigem Wasser bestehen kann.

*Kristallaufbau:* Klareispartikeln Typ II können mono- oder polykristallin sein.

### 4.3 Klareispartikeln Typ III

*Aussehen:* Klareispartikeln Typ III sind klare, teilweise oder ganz ebenflächige und kantige Kristalle mit einzelnen eingebauten Luftblasen.

*Entstehung:* Typ III wurde mit Frostgraupeln zusammen beobachtet. Trotzdem ist seine Entstehung unklar.

*Kristallaufbau:* Diese kristallartigen Klareispartikeln Typ III können mono- oder polykristallin sein.

(Beobachtungen an Klareispartikeln sind bereits in der Mitteilung *Zur Struktur von Hagelkörnern* von R. LIST und M. DE QUERVAIN [9] publiziert worden.)

Für die Unterstützung und Förderung dieser Arbeit möchte ich vor allem Herrn Dr. M. DE QUERVAIN sowie auch Herrn Dr. TH. ZINGG danken. Die Untersuchungen wurden im Rahmen des Forschungsprogrammes der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr an der Forschungsstelle Weissfluhjoch durchgeführt; zur Finanzierung standen teilweise Kredite des Schweizerischen Nationalfonds zur Verfügung.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. J. BIRNSTEIN, J. Met. 12, 324 (1955).
- [2] H. R. PRUPPACHER und R. SÄNGER, Z. angew. Math. Phys. 6, 407 (1955).
- [3] B. J. MASON, *The Physics of Clouds* (1957).
- [4] U. NAKAYA, *Snow Crystals* (1954).
- [5] L. v. BUCH, Berl. Akad. 1814.
- [6] D. L. ARENBERG, Bull. Amer. Met. Soc. 22, 113 (1941).
- [7] R. LIST und M. DE QUERVAIN, demnächst.
- [8] *Handbook of Chemistry and Physics* (1952).
- [9] R. LIST und M. DE QUERVAIN, Z. angew. Math. Phys. 4, 3 (1953).

### Summary

Observations and measurements of more than 15 samples of soft hail and small hail disclose the nature and the growing process of these particles.

(Eingegangen: 21. Januar 1958.)

# Normal Modes Methods for Boundary-Excited Wave Guides

By JEAN VAN BLADEL, Madison, Wisconsin, USA<sup>1)</sup>

**1. Introduction.** The electromagnetic field within a cavity is uniquely determined by the current density  $J(x, y, z)$  in the cavity volume, and the tangential component of the electric field  $E$  at the boundary surface  $S$  (Figure 1). This

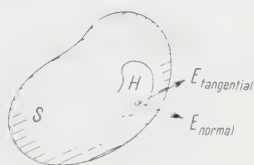


Figure 1  
Cavity with hole in the wall.

component vanishes along those parts of  $S$  which consist of a perfectly conducting wall, and is different from zero across the surface of any apertures which couple the cavity with outside space. Explicit formulas giving the cavity field in terms of 'volume' excitation  $J$  and 'boundary' excitation  $E_{\text{tang}}$  are important in a number of problems, such as the determination of the resonant frequencies of coupled cavities. Formulas of that type can be obtained by using either GREEN's dyadic ([1], p. 1782)<sup>2)</sup> or normal mode [2] methods. The two formulations are essentially equivalent, since GREEN's dyadic can be expressed in terms of the normal modes of the cavity ([1], p. 1777). In the latter form, which is used in most practical applications, GREEN's dyadic appears to be a mere intermediate step in the normal mode formulation. A similar situation arises in the study of boundary excited wave guides. Here again, GREEN's dyadic can be used in principle, but its analytical expression always involves the normal modes of the duct ([1], p. 1825). It is the purpose of the present paper to solve the boundary excitation problem directly by normal mode procedures. It is the author's experience that such procedures are eminently suitable for practical computations. The formalism is clearer,

<sup>1)</sup> Midwestern University Research Association (supported by contract AEC AT(11-1)-384) and Department of Electrical Engineering, University of Wisconsin.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 201.

the probability of mixing up coefficients is lower, and a very desirable flexibility is afforded by the independence of the method on the type of boundary conditions existing at the terminal planes  $S_1$  and  $S_2$  (Figure 2). In the mathe-

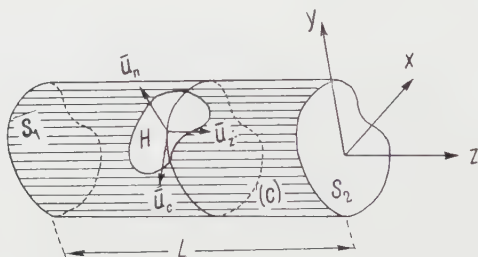


Figure 2  
Boundary-excited wave guide.

tical treatment which follows, volume excitation  $J$  is added for reasons of completeness, although its effects are quite satisfactorily analyzed in the existing literature.

2. Consider the following two-dimensional problems

$$(a) \quad \left. \begin{aligned} \nabla_{xy}^2 \varphi + k^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0, \\ \text{with } \varphi = 0 \text{ on the contour } C \text{ of the wave guide,} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$(b) \quad \nabla_{xy}^2 \psi + k^2 \psi = 0 \text{ with } \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ on } C \text{ (} n \text{ is the outward normal to } C \text{).} \quad (2.2)$$

The solutions of (2.1) form a denumerable infinite closed and complete set of orthogonal eigenfunctions, which will be denoted<sup>3)</sup> by  $\mathbf{E}_{zm}(x, y)$  and the corresponding eigenvalues by  $k_m^2$ . Another such set is formed by the solutions of (2.2), denoted by  $\mathbf{H}_{zn}(x, y)$ , with eigenvalues  $k_n^2$ . The eigenfunctions  $\mathbf{E}_{zm}$  and  $\mathbf{H}_{zn}$  will be used to expand the  $z$ -component of the electric and magnetic fields respectively.

$$(c) \quad \nabla_{xy}^2 V = 0, \text{ with } V = \text{const on each closed curve of boundary } C. \quad (2.3)$$

Equation (2.3) has  $0, 1, \dots, n$  linearly independent solutions depending on whether the wave-guide space is simply, doubly,  $\dots$ ,  $(n+1)$ -fold multiply-connected. The solutions of (2.3) will be denoted by  $V_0$ .

<sup>3)</sup> The subscripts  $m$  and  $n$  stand for a double set of indices  $j, k$ , not written explicitly for reasons of brevity.

Consider now the following two sets of vectors.

**Set 1**

- 1.1  $\text{grad}_{xy} \mathbf{E}_{zm}$ , denoted by  $\bar{\mathbf{E}}_{tm}(x, y)$ .
- 1.2  $\bar{u}_z \times \text{grad}_{xy} \mathbf{H}_{zn}$ , denoted by  $\bar{\mathbf{E}}_{tn}(x, y)$ .
- 1.3  $\text{grad}_{xy} V_0$ , denoted by  $\bar{\mathbf{E}}_{t0}(x, y)$ .

**Set 2**

- 2.1  $\text{grad}_{xy} \mathbf{H}_{zn}$ , denoted by  $\bar{\mathbf{H}}_{tn}(x, y)$ .
- 2.2  $\bar{u}_z \times \text{grad}_{xy} \mathbf{E}_{zm}$ , denoted by  $\bar{\mathbf{H}}_{tm}(x, y)$ .
- 2.3  $\bar{u}_z \times \text{grad}_{xy} V_0$ , denoted by  $\bar{\mathbf{H}}_{t0}(x, y)$ .

The first set comprises the mutually orthogonal<sup>4)</sup> eigenvectors of equation

$$\nabla_{xy}^2 A + k^2 A = 0 \quad (A \text{ perpendicular to } C, \text{div}_{xy} A = 0 \text{ on } C). \quad (2.4)$$

The second set comprises the mutually orthogonal eigenvectors of

$$\nabla_{xy}^2 \bar{B} + k^2 \bar{B} = 0 \quad \left( \bar{B} \text{ tangent to } C, \frac{\partial}{\partial n} (\text{div}_{xy} \bar{B}) = 0 \text{ on } C \right). \quad (2.5)$$

It will be noticed that  $\bar{\mathbf{E}}_{tm}, \bar{\mathbf{H}}_{tn}, \bar{\mathbf{E}}_{t0}, \bar{\mathbf{H}}_{t0}$  are irrotational,  $\bar{\mathbf{E}}_{tn}, \bar{\mathbf{H}}_{tm}, \bar{\mathbf{E}}_{t0}, \bar{\mathbf{H}}_{t0}$  solenoidal<sup>5)</sup>. Each set of vectors forms a closed set in terms of which a sufficiently 'smooth' two-dimensional vector can be expanded. Set 1 will be used to expand  $\bar{E}_t$ , transverse component of the electric field, set 2 to expand  $H_t$ . More explicitly:

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}(x, y, z, t) = & \sum_m a_m(z, t) \bar{\mathbf{E}}_{tm}(x, y) + \sum_n b_n(z, t) \bar{\mathbf{E}}_{tn}(x, y) \\ & + \sum_0 a_0(z, t) \bar{\mathbf{E}}_{t0}(x, y) + \sum_m c_m(z, t) \mathbf{E}_{zm}(x, y) \bar{u}_z, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}(x, y, z, t) = & \sum_m \alpha_m(z, t) \bar{\mathbf{H}}_{tm}(x, y) + \sum_n \beta_n(z, t) \bar{\mathbf{H}}_{tn}(x, y) \\ & + \sum_0 \alpha_0(z, t) \bar{\mathbf{H}}_{t0}(x, y) + \sum_n \gamma_n(z, t) \mathbf{H}_{zn}(x, y) \bar{u}_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

<sup>4)</sup> The orthogonality property is of the form  $\iint_S \bar{\mathbf{E}}_{ik} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{il} dS = \delta_{ik}$ .

<sup>5)</sup> The  $m, n$  and  $0$  functions are, except for multiplicative constants, the components of the  $TE, TM$  and  $TEM$  modes of classical wave-guide theory. The multiplicative constants have been dropped for reasons of clarity. They will be reintroduced automatically in the sequel [see equation (3.6)].

The equality sign must, as usual, be understood in the sense of convergence in the mean. The problem is to determine the differential equations satisfied by the various  $(z, t)$ -dependent coefficients. These equations are listed below without proof, a typical proof being given in the appendix.

(a) *For the O Modes*

$$\frac{\partial a_0}{\partial z} + \mu \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} = -\frac{1}{N_0^2} \int_C (\bar{u}_n \times E) \cdot \bar{\mathbf{H}}_{t0} d\mathbf{c} = \frac{1}{N_0^2} \int_C E_z \frac{\partial V_0}{\partial n} d\mathbf{c}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial a_0}{\partial t} = -\frac{1}{N_0^2} \iint_S \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{t0} dS. \quad (2.9)$$

(b) *For the M Modes*

$$\frac{\partial a_m}{\partial z} + \mu \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} = \frac{1}{N_m^2} \int_C (u_n \times E) \cdot \bar{\mathbf{H}}_{tm} d\mathbf{c} = \frac{1}{N_m^2} \int_C E_z \frac{\partial \mathbf{E}_{zm}}{\partial n} d\mathbf{c}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial a_m}{\partial t} = -\frac{1}{N_m^2} \iint_S \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{tm} dS, \quad (2.11)$$

$$\alpha_m + \frac{\varepsilon}{k_m^2} \cdot \frac{\partial c_m}{\partial t} = -\frac{1}{N_m^2} \iint_S \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{zm} dS. \quad (2.12)$$

(c) *For the N Modes*

$$\frac{\partial \beta_n}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial b_n}{\partial t} - \gamma_n = \frac{1}{N_n^2} \iint_S \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{tn} dS, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial z} - \mu \frac{\partial \beta_n}{\partial t} = \frac{1}{N_n^2} \int_C (\bar{u}_n \times E) \cdot \bar{\mathbf{H}}_{tn} d\mathbf{c} = \frac{1}{N_n^2} \int_C E_z \frac{\partial \mathbf{H}_{zn}}{\partial \mathbf{c}} d\mathbf{c}, \quad (2.14)$$

$$b_n - \frac{\mu}{k_n^2} \cdot \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} = \frac{1}{N_n^2} \int_C (\bar{u}_n \times E) \cdot \bar{\mathbf{H}}_{zn} d\mathbf{c} = \frac{1}{N_n^2} \int_C E_c \mathbf{H}_{zn} d\mathbf{c}. \quad (2.15)$$

Some of the notation should be clarified:

$$N_0^2 = \iint_S |\bar{\mathbf{E}}_{t0}|^2 dS,$$

$$N_m^2 = \iint_S |\bar{\mathbf{E}}_{tm}|^2 dS = \iint_S |\bar{\mathbf{H}}_{tm}|^2 dS = k_m^2 \iint_S \mathbf{E}_{zm}^2 dS,$$



$$N_n^2 = \iint_S |\bar{\mathbf{E}}_{tn}|^2 dS = \iint_S |\bar{\mathbf{H}}_{tn}|^2 dS = k_n^2 \iint_S \mathbf{H}_{zn}^2 dS,$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{zn} = \mathbf{E}_{zn} \bar{u}_z, \quad \bar{\mathbf{H}}_{zn} = \mathbf{H}_{zn} \bar{u}_z.$$

$\bar{u}_n$  = unit vector pointing out of the guide.  $(\bar{u}_n, \bar{u}_c, \bar{u}_z)$  form a right-handed frame.

The second members of equations (2.8) to (2.15) are known functions of  $z$  and  $t$ . One readily recognizes the formal analogy between the volume electric current  $J$ , which couples to the  $E$  field of the mode, and the fictive magnetic surface current  $\bar{u}_n \times E$ , which couples to the  $H$  field of the mode.

3. At this point the vectorial field problem has been reduced to a set of three independent systems of partial differential equations in  $z$  and  $t$ . The solution of the latter can now proceed, given suitable initial conditions at some time  $t = 0$ , and boundary conditions<sup>6)</sup> at terminal planes  $S_1$  and  $S_2$ . The usual arsenal of mathematical techniques is available for the purpose. Laplace and Fourier transforms can be used to eliminate the time dependence in the equations. Laplace and Fourier transforms, or finite Fourier transforms in  $z$  are helpful for guides of respectively infinite, semi-infinite or finite length. It is advisable to start from equations involving one function only. Such equations, which can be obtained by elimination, are:

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2} = \frac{1}{N_0^2} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \bar{J} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{t0} dS - \frac{\partial}{\partial z} \int_C (\bar{u}_n \times \bar{E}) \cdot \bar{\mathbf{H}}_{t0} dc \right], \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial t^2} = \frac{1}{N_0^2} \left[ \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_C (\bar{u}_n \times \bar{E}) \cdot \bar{\mathbf{H}}_{t0} dc - \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \bar{J} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{t0} dS \right], \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 b_n}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 b_n}{\partial t^2} - k_n^2 b_n &= \frac{1}{N_n^2} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \bar{J} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{tn} dS \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial z} \int_C (\bar{u}_n \times \bar{E}) \cdot \bar{\mathbf{H}}_{tn} dc - k_n^2 \int_C (\bar{u}_n \times \bar{E}) \cdot \bar{\mathbf{H}}_{zn} dc \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha_m}{\partial z^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \alpha_m}{\partial t^2} - k_m^2 \alpha_m &= \frac{1}{N_m^2} \left[ \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_C (\bar{u}_n \times \bar{E}) \cdot \bar{\mathbf{H}}_{tm} dc \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \bar{J} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{tm} dS + k_m^2 \iint_S \bar{J} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{zm} dc \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

<sup>6)</sup> Example:  $\gamma_n, a_m, a_0, b_n$  vanish at all times on a perfectly conducting terminal plane.

Equations (2.8) to (3.4) contain all the familiar [3] results for the normal modes in a region free of volume and boundary excitation. For an 'm' mode in sinusoidal time-dependence, for instance, equations (2.10) to (2.12) show that  $c_m$  must satisfy

$$\frac{d^2 c_m}{dz^2} + (\omega^2 \varepsilon \mu - k_m^2) c_m = \frac{d^2 c_m}{dz^2} + \gamma_m^2 c_m = 0. \quad (3.5)$$

If the solution  $e^{-j\gamma_m z}$  is chosen,  $a_m$  and  $\alpha_m$  can be computed as:

$$a_m = \frac{1}{k_m^2} \cdot \frac{dc_m}{dz} = -j \frac{\gamma_m}{k_m^2} e^{-j\gamma_m z}, \quad (3.6)$$

$$\alpha_m = -j \frac{\omega \varepsilon}{k_m^2} c_m = -j \frac{\omega \varepsilon}{k_m^2} e^{-j\gamma_m z}, \quad (3.7)$$

yielding the usual proportionality relations between the mode components of a progressive wave.

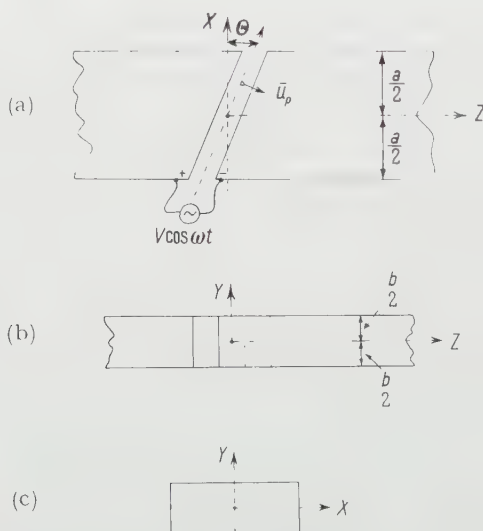


Figure 3

Gap-excited accelerator: (a) top view, (b) side view, (c) cross-sectional view.

4. To illustrate the preceding analysis by a practical example, consider an infinitely long rectangular wave-guide, cut in two by a plane making an angle  $\theta$  with the guide's longitudinal axis (see Figure 3). The gap is very narrow, and an alternating voltage of constant phase and amplitude is applied across it. Such a physical system can be encountered in particle accelerators, for instance. The fields inside the wave-guide can be calculated by setting  $J = 0$  (no volume

excitation) and

$$\bar{u}_n \times E = V \cos \omega t \delta(p) (\bar{u}_n \times \bar{u}_p)$$

in equations (2.8) to (3.4). If one assumes that the frequency of operation is less than the cut-off frequency  $c/2a$  of the guide, the various  $z$ -dependent coefficients  $\alpha_m$ ,  $b_n$ , etc., are required to vanish for  $z = \pm \infty$ . If this is taken into account, and noticing that

$$E_{zm} = \sin \frac{m\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{b} \left( y + \frac{b}{2} \right) \quad (m \text{ and } n \text{ integers}),$$

$$H_{zn} = \cos \frac{m\pi}{a} \left( x + \frac{a}{2} \right) \cos \frac{n\pi}{b} \left( y + \frac{b}{2} \right)$$

for a rectangular wave-guide, the following expressions are obtained for the  $y$ -component of the magnetic field:

(a) *Within the Gap Region* ( $0 \leq z \leq a \operatorname{tg} \theta/2$ ).

$$\begin{aligned} H_y = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{V Y_0}{a} \sin \omega t \cdot \nu \left\{ \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)/2}}{n s_{m,n}} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-s_{m,n} \pi \operatorname{tg} \theta/2} \right. \\ \times \cosh s_{m,n} \frac{\pi z}{a} + \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\varepsilon_m (-1)^{(m+n+1)/2}}{2 n s_{m,n}} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \left. \times e^{-s_{m,n} \pi \operatorname{tg} \theta/2} \sinh s_{m,n} \frac{\pi z}{a} \right\}. \end{aligned}$$

(b) *Outside the Gap Region* ( $a \operatorname{tg} \theta/2 \leq z < \infty$ ).

$$\begin{aligned} H_y = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{V Y_0}{a} \sin \omega t \cdot \nu \left\{ \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)/2}}{n s_{m,n}} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-s_{m,n} \pi z/a} \right. \\ \times \cosh s_{m,n} \frac{\pi \operatorname{tg} \theta}{2} + \sum_{m=0,2}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\varepsilon_m (-1)^{(m+n+1)/2}}{2 n s_{m,n}} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \left. \times e^{-s_{m,n} \pi z/a} \sinh s_{m,n} \frac{\pi \operatorname{tg} \theta}{2} \right\} \end{aligned}$$

with the following meaning for the various symbols encountered in the formulas:

- (1)  $\nu = \omega/\omega_c$  with  $\omega_c = \pi c/a$ . This means that  $\nu$  is the frequency measured in terms of the cut-off value  $f_c$ .
- (2)  $Y_0 = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$ .
- (3)  $s_{m,n}^2 = m^2 + n^2 (a/b)^2 - \nu^2$ .
- (4)  $\varepsilon_m$  = NEUMANN'S factor, equal to one for  $m = 0$ , to two for  $m \neq 0$ .

Similar expressions can be derived for the other five field components.

The variation of  $H_y$  along the main axis of the guide is depicted in Figure 4 for a few values of the parameters, and shows how much the field penetrates into the guide on both sides of the gap region.

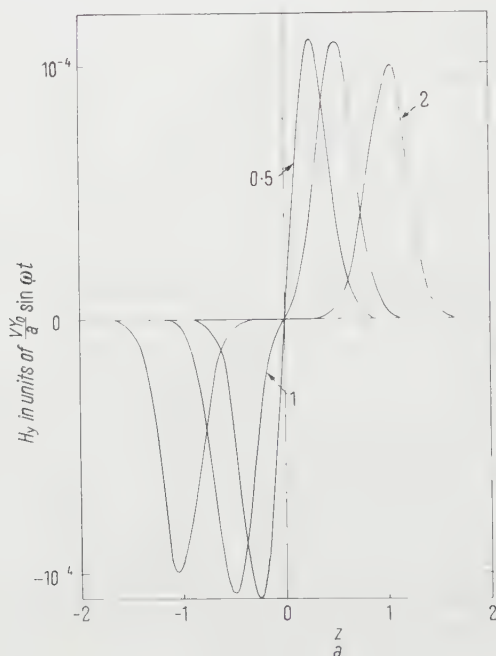


Figure 4

$H_y$  along the main axis  $x = y = 0$ . The curves are labeled according to the value of  $\tan \theta$ . The frequency is equal to half the cut-off value. The aspect ratio  $a/b$  of the cross-section is equal to five.

## Appendix

A relation such as (2.10) finds its origin in the following Maxwell equation.

$$\text{curl } \bar{E} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4.1)$$

The expansion for  $H$ , namely (2.7), can be safely introduced in the second member. The first member, however, cannot be obtained by merely 'curling' equation (2.6) term by term, i. e. summing the curls of the individual terms of the expansion for  $\bar{E}$ . It is necessary, on the contrary, to expand  $\text{curl } E$  separately as:

$$\text{curl } E = \sum_m u_m \bar{H}_{tm} + \sum_n v_n \bar{H}_{tn} + \sum_n w_n \bar{H}_{zn} + \sum_0 v_0 \bar{H}_{t0}. \quad (4.2)$$

The coefficient  $u_m$  is found to be

$$u_m = \frac{\iint_S \bar{\mathbf{H}}_{tm}(x, y) \operatorname{curl} \bar{\mathbf{E}}(x, y, z, t) dS}{\iint_S |\bar{\mathbf{H}}_{tm}(x, y)|^2 dS} \quad (4.3)$$

This result is obtained by multiplying (4.2) on both sides by  $\bar{\mathbf{H}}_{tm}$ , integrating over the cross-section  $S$ , and making use of the orthogonality properties of the various  $\bar{\mathbf{H}}_t$ . The next step is to transform the numerator by using the following formula of vector analysis:

$$\operatorname{curl} \bar{\mathbf{E}} = \operatorname{curl}_{xy} \bar{\mathbf{E}}_t + \operatorname{curl}_{xy} \bar{\mathbf{E}}_z + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}_z \times \bar{\mathbf{E}}_t), \quad (4.4)$$

where  $\operatorname{curl}_{xy}$  indicate that the derivatives with respect to  $x$  and  $y$  only have been kept in the normal formula for the curl. Multiplying both sides of (4.4) by  $\bar{\mathbf{H}}_{tm}$  yields

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_{tm} \operatorname{curl} \bar{\mathbf{E}} = & \bar{u}_z \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_t}{\partial z} \cdot \bar{\mathbf{H}}_{tm} \right) + \bar{\mathbf{H}}_{tm} \operatorname{curl} \bar{\mathbf{E}}_z + \bar{u}_z \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_t}{\partial z} \wedge \bar{\mathbf{H}}_{tm} \right) \\ & + \bar{\mathbf{E}}_z \operatorname{curl}_{xy} \bar{\mathbf{H}}_{tm} - \operatorname{div}_{xy} (\bar{\mathbf{H}}_{tm} \times \bar{\mathbf{E}}_z). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

If one uses the fact that  $\bar{\mathbf{H}}_{tm} = \bar{u}_z \wedge \bar{\mathbf{E}}_{tm}$ ,  $\operatorname{curl}_{xy} \bar{\mathbf{H}}_{tm} = -k_m^2 \bar{\mathbf{E}}_{zm}$ , integrates over the cross-section  $S$ , and applies the divergence theorem in two dimensions,  $u_m$  turns out to be

$$u_m = \frac{1}{N_m^2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \bar{\mathbf{E}}_t \cdot \bar{\mathbf{E}}_{tm} dS - k_m^2 \iint_S \bar{\mathbf{E}}_z \cdot \bar{\mathbf{E}}_{zm} dS - \oint_C \bar{\mathbf{E}}_z \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_{zm}}{\partial n} dc \right]. \quad (4.6)$$

The first two integrals can be expressed in terms of  $a_m$  and  $c_m$  (see 2.5), and, as a consequence:

$$u_m = \frac{\partial a_m}{\partial z} - c_m - \frac{1}{N_m^2} \int_C \bar{\mathbf{E}}_z \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_{zm}}{\partial n} dc \quad (4.7)$$

from which (2.10) follows immediately by equating the coefficients of  $\bar{\mathbf{H}}_{tm}$  in both members of (4.1).

## REFERENCES

- [1] P. M. MORSE and H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics*, vol. 2 (McGraw Hill Book Co., New York 1953).
- [2] J. C. SLATER, *Microwave Electronics* (Van Nostrand Co., New York 1950), p. 66.
- [3] S. RAMO and J. R. WHINNERY, *Fields and Waves in Modern Radio*, Chapter 9 (J. Wiley & Sons, New York 1944).

## Résumé

Le champ électrique dans un guide d'ondes, couplé au milieu extérieur par une ouverture dans sa paroi métallique, peut être calculé en fonction de la composante tangentielle du champ dans l'ouverture. Le but de cette note est de présenter ce calcul par la méthode des modes propres, équivalente à celle du tenseur de GREEN, mais douée de certains avantages de souplesse et de clarté.

(Received: September 30, 1957.)

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

## Einschliessung von Eigenwerten und Mohrsches Spannungsdiagramm

VON ERWIN KREYSZIG<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Es sei  $A = (a_{jk})$  eine  $n$ -reihige Hermitesche Matrix. Dann kann man unter Verwendung eines beliebigen  $n$ -komponentigen Vektors  $x_0 \neq 0$  und des zugehörigen Vektors  $x_1 = Ax_0$  Aussagen über die Eigenwerte  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  dieser Matrix [das heisst über die Lösungen der Gleichung  $\det(\lambda \delta_{jk} - a_{jk}) = 0$ ] gewinnen. Es gilt der folgende

**Einschliessungssatz** (WIELANDT [1, 2]<sup>2)</sup>). *Jedes Punktepaar auf der reellen projektiven  $y$ -Geraden, bestehend aus einem beliebig gewählten Punkt  $y = u$  und der zugehörigen Nullstelle  $y = w(u)$  der linearen Gleichung*

$$\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & 1 \\ m_1 & m_2 & u \\ 1 & u & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad m_s = x_r x_{s-r}, \quad r = 0, 1; \quad s = 0, 1, 2 \quad (1)$$

*berandet zwei (abgeschlossene) Intervalle, deren jedes mindestens einen Eigenwert  $\lambda_r$  der Matrix  $A$  enthält.*

Diese Einschliessungsintervalle lassen sich geometrisch konstruieren [2]: Man bestimmt den Hilfspunkt  $H$  in der  $(y, z)$ -Ebene mit den Koordinaten

$$y = \frac{m_1}{m_0}, \quad z = \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2}. \quad (2)$$

Der Halbkreis durch  $H$  mit dem Mittelpunkt auf der  $y$ -Achse und dem einen Randpunkt  $y = u, z = 0$  hat den Punkt  $y = w(u), z = 0$  als zweiten Randpunkt (Figur 1).

In Abschnitt 2 der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Beweis des obigen Einschliessungssatzes angegeben und in Abschnitt 3 eine Beziehung untersucht, die zwischen dieser Eigenwerteinschliessung und dem Mohrschen Spannungsdiagramm besteht.

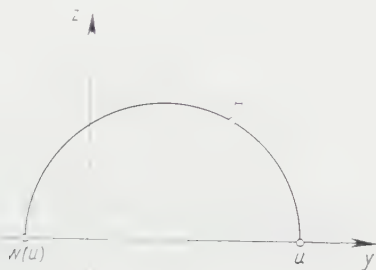
<sup>1)</sup> Ohio State University, Columbus, Ohio, USA.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 206.



## Bemerkung

Bei dem obigen Satz wird die Kenntnis zweier Vektoren  $x_0, x_1$ , also eines Iterationsschrittes für die Eigenwerteinschließung ausgenutzt («Einschrittverfahren»). Schärfere Aussagen über die Eigenwerte der Hermiteschen Matrix  $A$  erhält man, indem man mehr als 2 Vektoren, etwa  $p+1$  Vektoren  $x_0, x_1 = Ax_0, \dots, x_p = Ax_{p-1}$ ,  $1 < p < n$ , also  $p$  Iterationsschritte heranzieht (« $p$ -Schrittverfahren»). Auch hierfür hat WIELANDT<sup>3)</sup> die bestmögliche Einschließungstheorie entwickelt. Hinweise zur praktischen Durchführung der Eigenwerteinschließung beim Ein- und Zweischrittverfahren findet man in [4, 5].



Figur 1

Zur geometrischen Konstruktion der Einschließungsintervalle.

## 2. Neuer Beweis des Einschließungssatzes von Wielandt

Es sei  $N$  die Menge der Punktpaare  $\{a, b\}$ ,  $a \neq b$ , auf der projektiven  $y$ -Geraden, die je zwei (abgeschlossene) Intervalle beranden, deren jedes mindestens einen Eigenwert  $\lambda$ , der Hermiteschen Matrix  $A$  enthält. Ein Punkt  $P$  der oberen  $(yz)$ -Halbebene heiße ein *ausgezeichneter Punkt*, wenn jeder Kreis durch  $P$  mit dem Mittelpunkt auf der  $y$ -Achse diese Achse in zwei Punkten schneidet, die ein zu  $N$  gehöriges Paar bilden, oder wenn  $P$  selbst auf der  $y$ -Achse liegt und einem der  $n$  Koordinatenwerte  $y = \lambda_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , entspricht.

Die Menge aller ausgezeichneten Punkte lässt sich leicht durch die (unbekannten) Eigenwerte der Matrix  $A$  kennzeichnen. Offenbar ist ein Punkt genau dann ausgezeichnet, wenn er dem abgeschlossenen Bereich  $B_n^*$  der oberen  $(yz)$ -Halbebene angehört, der von dem einfachen Halbkreisbogen- $n$ -Eck mit den Spitzen in den Punkten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  berandet wird (Figur 2 zeigt  $B_5^*$ ). Ein Punkt ist demnach genau dann ausgezeichnet, wenn seine Koordinaten  $y, z$  den  $n$  Ungleichungen

$$\left. \begin{aligned} z^2 + y^2 - (\lambda_1 + \lambda_n) y + \lambda_1 \lambda_n &\leq 0, \\ z^2 + y^2 - (\lambda_v + \lambda_{v+1}) y + \lambda_v \lambda_{v+1} &\geq 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

genügen.

Auf Grund des Entwicklungssatzes lässt sich der vorstehend genannte Vektor  $x_0$  als Linearkombination der (orthonormierten) Eigenvektoren  $e_i$  der Matrix  $A$ , also in der Form

$$x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e_i \quad (4)$$

darstellen. Demnach gilt

$$r_1 = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i e_i \quad (5)$$

und

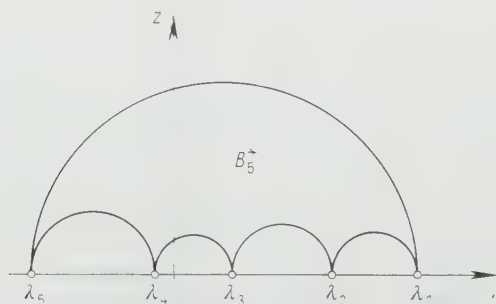
$$m_s = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i^s \quad (s = 0, 1, 2).$$

Hieraus folgt wegen  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  unmittelbar

$$\left. \begin{aligned} m_2 - (\lambda_1 + \lambda_n) m_1 + \lambda_1 \lambda_n m_0 &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i^2 (\lambda_1 - \lambda_i) (\lambda_n - \lambda_i) \leq 0, \\ m_2 - (\lambda_p + \lambda_{p+1}) m_1 + \lambda_p \lambda_{p+1} m_0 &= \sum_{i=1}^n c_i^2 (\lambda_p - \lambda_i) (\lambda_{p+1} - \lambda_i) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$(p = 1, 2, \dots, i = 1 \dots)$

Dies bedeutet, dass die Ungleichungen (3) erfüllt sind, wenn man  $y$  und  $z$  gemäss (2) wählt; ein Punkt mit diesen Koordinaten ist ein ausgezeichneter Punkt. Auf Grund der Definition der ausgezeichneten Punkte ist damit der Einschliessungssatz bewiesen.



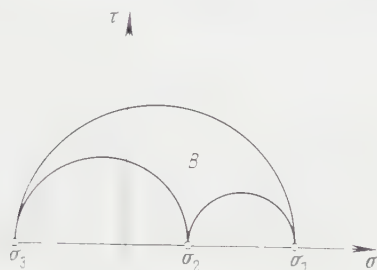
Figur 2

Zum Begriff der ausgezeichneten Punkte.

### 3. Beziehung zwischen dem Mohrschen Spannungsdiagramm und der vorstehenden Eigenwerteinschliessung

Das Mohrsche Spannungsdiagramm (Figur 3) gibt einen Überblick über die Verteilung der Zug- (bzw. Druck-) Spannungen  $\sigma$  und der Schubspannungen  $\tau$ , die in einem Punkte  $Q$  eines elastischen Körpers herrschen, wenn dieser Körper äusseren Kräften unterworfen ist. Es sei  $t_v$  der zu einer Fläche durch  $Q$  mit dem Normalenvektor  $v$  gehörige Spannungsvektor. Dieser Normalenrichtung entspricht genau ein Punkt des Mohrschen Diagramms mit der Normalkomponente  $\sigma_v$  von  $t_v$  als Abszisse und der Tangentialkomponente  $\tau_v$  von  $t_v$  als Ordinate. Berücksichtigt man jede Normalenrichtung im Punkte  $Q$ , so erhält man genau alle Punkte des (abgeschlossenen) Bereichs  $B$  in der  $(\sigma \tau)$ -Ebene, der durch das

Halbkreisbogen-dreieck mit den Spitzen in den Punkten  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  der Abszissenachse berandet wird; die Spitzen entsprechen den Hauptspannungen (Figur 3).



Figur 3  
Mohrsches Spannungsdiagramm.

Die Komponenten des Spannungstensors bilden eine dreireihige symmetrische Matrix  $S$ , und die drei Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  sind die Eigenwerte des Problems

$$Sx = \sigma x.$$

Der Spannungsvektor  $t_v$  lässt sich bekanntlich in der Form

$$t_v = \sum_{i=1}^3 C_i \sigma_i e_i \quad (7)$$

darstellen, wobei der Einheitsvektor  $e_i$  die zu  $\sigma_i$  gehörende Hauptspannungsrichtung besitzt und  $C_i$  der Kosinus des Winkels zwischen dem Vektor  $e_i$  und dem Normalenvektor  $v$  ist. Der Vektor  $t_v$  entspricht dem Vektor  $x_1$  beim Einschließungsverfahren, und die Darstellung (7) entspricht der Darstellung (5). Führt man vermöge  $t_v = Sx_0$  den Hilfsvektor  $x_0$  ein, so ist wegen (7)

$$x_0 = \sum_{i=1}^3 C_i e_i.$$

Daher gilt nun

$$(a) m_0 = x_0 x_0 = \sum_{i=1}^3 C_i^2 = 1, \quad (b) m_1 = x_0 t_v = \sum_{i=1}^3 C_i^2 \sigma_i, \quad (c) m_2 = t_v t_v = \sum_{i=1}^3 C_i^2 \sigma_i^2. \quad (8)$$

Bekanntlich ist (8b) eine Darstellung der Normalkomponente  $\sigma_v$  des Vektors  $t_v$ . Demnach hat dessen Tangentialkomponente  $\tau_v$  die Darstellung

$$\tau_v = \sqrt{t_v t_v - \sigma_v^2} = \sqrt{m_2 - m_1^2}. \quad (9)$$

Wegen (8a) entspricht dies dem in (2) für die Koordinate  $z$  angegebenen Ausdruck. Jeder Punkt des Mohrschen Bereichs  $B$  (Figur 3) ist also ein ausgezeichnete Punkt im Sinne der obigen Definition. In der Tat ist der Bereich der ausgezeichneten Punkte bei einer dreireihigen Matrix ein von einem Halbkreisbogen-dreieck begrenzter abgeschlossener Bereich, dessen Spitzen in denjenigen Punkten der Abszissenachse liegen, die den 3 Eigenwerten der Matrix entsprechen.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. WIELANDT, *Ein Einschliessungssatz für charakteristische Wurzeln normaler Matrizen*, Arch. Math. 1, 348–352 (1948/49).
- [2] H. WIELANDT, *Die Einschliessung von Eigenwerten normaler Matrizen*, Math. Ann. 121, 234–241 (1949).
- [3] H. WIELANDT, *Inclusion Theorems for Eigenvalues*, Nat. Bur. Stand., Appl. Math. Ser. 29, 75–78 (1953).
- [4] E. KREYSZIG, *Die Einschliessung von Eigenwerten hermitescher Matrizen beim Iterationsverfahren*, Z. angew. Math. Mech. 34, 459–469 (1954).
- [5] E. KREYSZIG, *Die Ausnutzung zusätzlicher Vorkenntnisse für die Einschliessung von Eigenwerten beim Iterationsverfahren*, Z. angew. Math. Mech. 35, 89–95 (1955).

## Summary

A new proof of a theorem by WIELANDT for inclusion of eigenvalues of Hermitian matrices is given. Relations between that inclusion method and the Mohr stress diagram are investigated.

(Eingegangen: 8. November 1957.)

## Elementary Solution of Some Plate Problems

By VÁCLAV VODIČKA, Plzeň, Czechoslovakia

There are many possibilities of generalizing the well-known direct methods of solving problems on bending of elliptic plates. The present paper treats from a general viewpoint the case where the right-hand side of the basic differential equation is represented by a polynomial of any degree. Elementary results cited usually in the literature can be obtained as special cases of our more general conception. Probably, several of the following formulas are new.

1. Mathematical statement of the problem. Let

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq i+k \leq n} f_{ik} x^i y^k \quad (1)$$

be a polynomial of any degree  $n \geq 0$  and let  $\partial/\partial n$  denote derivative in the normal direction. Then we seek the solution  $w = w(x, y)$  of the problem:

$$\Delta^2 w = f(x, y) \text{ in the domain } b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \leq 0, \quad (2)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ along the contour } b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0; \quad (3)$$

herein is

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

2. Solution of (1) – (3). Assuming

$$w = (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)^2 \sum_{0 \leq i+k \leq n} c_{ik} x^i y^k \quad (4)$$

and taking into account the elementary fact

$$1^2 \binom{k}{4} x^{k-4} y^4 = 3 \left[ 3 \binom{k}{4} x^{k-4} y^4 - \binom{k}{2} \binom{4}{2} x^{k-2} y^{4-2} + 3 \binom{4}{4} x^{k-4} y^{4-4} \right],$$

we easily get by substitution of (4) into (2)

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq i+k \leq n} c_{ik} \left\{ 3 \binom{k}{4} b^4 x^{i-4} y^{k-4} + b^2 \left[ 6 \binom{k+2}{4} a^2 + \binom{i+4}{2} \binom{k}{2} b^2 \right] x^{i+2} y^{k-2} \right. \\ & \quad - \left[ 3 \binom{k-4}{4} a^4 + 2 \binom{i-2}{2} \binom{k-2}{2} a^2 b^2 + 3 \binom{i+4}{4} b^4 \right] x^i y^k \\ & \quad - a^2 \left[ \binom{i}{2} \binom{k-4}{2} a^2 + 6 \binom{i-2}{4} b^2 \right] x^{i-2} y^{k-2} - 3 \binom{i}{4} a^4 x^{i-4} y^{k-4} \\ & \quad - 6 \binom{k}{4} a^2 b^4 x^{i-2} y^{k-4} - 2 a^2 b^2 \left[ 3 \binom{k-2}{4} a^2 + \binom{i+2}{2} \binom{k}{2} b^2 \right] x^i y^{k-2} \\ & \quad - 2 a^2 b^2 \left[ \binom{i}{2} \binom{k-2}{2} a^2 + 3 \binom{i-2}{4} b^2 \right] x^{i-2} y^k - 6 \binom{i}{4} a^4 b^2 x^{i-4} y^{k-2} \\ & \quad \left. - a^4 b^4 \left[ 3 \binom{k}{4} x^{i-4} y^{k-4} - \binom{i}{2} \binom{k}{2} x^{i-2} y^{k-2} - 3 \binom{i}{4} x^{i-4} y^k \right] \right\} \\ & = \sum_{0 \leq i+k \leq n} f_{ik} x^i y^k. \end{aligned}$$

This relation must be satisfied in the whole region  $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \leq 0$  and the comparison of coefficients leads to the system

$$\left. \begin{aligned} & 3 \binom{k+4}{4} b^4 c_{i-4, k+4} + b^2 \left[ 6 \binom{k+4}{4} a^2 + \binom{i+2}{2} \binom{k+2}{2} b^2 \right] c_{i-2, k+2} \\ & \quad + \left[ 3 \binom{k+4}{4} a^4 + 2 \binom{i+2}{2} \binom{k+2}{2} a^2 b^2 + 3 \binom{i+4}{4} b^4 \right] c_{ik} \\ & \quad - a^2 \left[ \binom{i+2}{2} \binom{k+2}{2} a^2 + 6 \binom{i+4}{4} b^2 \right] c_{i+2, k-2} \\ & \quad + 3 \binom{i+4}{4} a^4 c_{i+4, k-4} - 6 \binom{k+4}{4} a^2 b^4 c_{i-2, k+4} \\ & \quad - 2 a^2 b^2 \left[ 3 \binom{k+4}{4} a^2 + \binom{i+2}{2} \binom{k+2}{2} b^2 \right] c_{i, k+2} \\ & \quad - 2 a^2 b^2 \left[ \binom{i+2}{2} \binom{k+2}{2} a^2 + 3 \binom{i+4}{4} b^2 \right] c_{i+2, k} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} & -6 \binom{i+4}{4} a^4 b^2 c_{i+4, k-2} + a^4 b^4 \left[ 3 \binom{k+4}{4} c_{i, k+4} \right. \\ & \left. - \binom{i+2}{2} \binom{k+2}{2} c_{i-2, k-2} - 3 \binom{i+4}{4} c_{i-4, k} \right] = \frac{1}{8} f_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$(i, k = 0, 1, 2, \dots, n; i+k \leq n)$$

of equations for the unknowns  $c_{ik}$ . Of course, in (5) we have to put  $c_{\lambda\varrho} = 0$  whenever one of the indexes  $\lambda, \varrho$  becomes negative or greater than  $n$  or when  $\lambda + \varrho > n$ .

Calculating  $c_{ik}$  from (5) and introducing into (4) leads to the wanted solution  $w(x, y)$  of our problem (2), (3). General results are very complicated and so we give the complete formulae at least for the case  $n = 2$  which is also of practical significance and can hardly be found in literature.

3. Special case  $n = 2$ . The basic equations (5) become

$$\alpha_{11} c_{00} + \alpha_{22} c_{10} + \alpha_{23} c_{01} + \alpha_{24} c_{20} + \alpha_{25} c_{11} + \alpha_{26} c_{02} = \frac{1}{8} \beta_{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, 6);$$

$$\alpha_{11} = 3a^4 - 2a^2b^2 - 3b^4, \quad \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{14} = -2a^2b^2(a^2 - 3b^2), \quad \alpha_{15} = 0,$$

$$\alpha_{16} = -2a^2b^2(3a^2 + b^2), \quad \beta_1 = f_{00},$$

$$\alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{22} = 3(a^4 + 2a^2b^2 + 5b^4), \quad \alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{25} = \alpha_{26} = 0, \quad \beta_2 = f_{10},$$

$$\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0, \quad \alpha_{33} = 3(5a^4 + 2a^2b^2 + b^4), \quad \alpha_{34} = \alpha_{35} = \alpha_{36} = 0, \quad \beta_3 = f_{01},$$

$$\alpha_{41} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0, \quad \alpha_{44} = 3(a^4 + 4a^2b^2 + 15b^4), \quad \alpha_{45} = 0,$$

$$\alpha_{46} = 6b^2(a^2 + b^2), \quad \beta_4 = f_{20},$$

$$\alpha_{51} = \alpha_{52} = \alpha_{53} = \alpha_{54} = 0, \quad \alpha_{55} = 3(5a^4 + 6a^2b^2 + 5b^4), \quad \alpha_{56} = 0, \quad \beta_5 = f_{11},$$

$$\alpha_{61} = \alpha_{62} = \alpha_{63} = 0, \quad \alpha_{64} = 6a^2(a^2 + b^2), \quad \alpha_{65} = 0,$$

$$\alpha_{66} = 3(15a^4 + 4a^2b^2 + b^4), \quad \beta_6 = f_{02}.$$

The solution is quite easy and gives

$$c_{00} = \frac{1}{8(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4)}$$

$$+ \frac{2a^2b^2(9a^6 + 41a^4b^2 + 11a^2b^4 + 3b^6)f_{20} + (3a^6 + 11a^4b^2 + 41a^2b^4 + 9b^6)f_{02}}{3[(a^4 + 4a^2b^2 + 15b^4)(15a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 4a^2b^2(a^2 + b^2)^2]}$$

$$c_{10} = \frac{f_{10}}{24(a^4 + 2a^2b^2 + 5b^4)}, \quad c_{01} = \frac{f_{01}}{24(5a^4 + 2a^2b^2 + b^4)},$$



$$c_{20} = \frac{(15a^4 + 4a^2b^2 + b^4)f_{20} - 2b^2(a^2 + b^2)f_{02}}{24[(a^4 + 4a^2b^2 + 15b^4)(15a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 4a^2b^2(a^2 + b^2)^2]},$$

$$c_{11} = \frac{f_{11}}{24(5a^4 + 6a^2b^2 + 5b^4)},$$

$$c_{02} = \frac{-2a^2(a^2 + b^2)f_{20} + (a^4 + 4a^2b^2 + 15b^4)f_{02}}{24[(a^4 + 4a^2b^2 + 15b^4)(15a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 4a^2b^2(a^2 + b^2)^2]}.$$

Substituting these values of  $c_{ik}$  into (4) leads to the following solution of our beginning problem (1) – (3) for the case  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \frac{1}{24} (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^2 \left\{ \frac{1}{3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4} \left[ 3f_{00} + 2a^2b^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(9a^6 + 41a^4b^2 + 11a^2b^4 + 3b^6)f_{20} + (3a^6 + 11a^4b^2 + 41a^2b^4 + 9b^6)f_{02}}{(a^4 + 4a^2b^2 + 15b^4)(15a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 4a^2b^2(a^2 + b^2)^2} \right] \right. \\ & + \frac{f_{10}x}{a^4 + 2a^2b^2 + 5b^4} + \frac{f_{01}y}{5a^4 + 2a^2b^2 + b^4} \\ & + \frac{[(15a^4 + 4a^2b^2 + b^4)f_{20} - 2b^2(a^2 + b^2)f_{02}]x^2}{(a^4 + 4a^2b^2 + 15b^4)(15a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 4a^2b^2(a^2 + b^2)^2} \\ & + \frac{f_{11}xy}{5a^4 + 6a^2b^2 + 5b^4} \\ & \left. - \frac{[-2a^2(a^2 + b^2)f_{20} + (a^4 + 4a^2b^2 + 15b^4)f_{02}]y^2}{(a^4 + 4a^2b^2 + 15b^4)(15a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 4a^2b^2(a^2 + b^2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

For  $a \rightarrow \infty$  the result (6) reduces to the formula for cylindrical bending

$$w(x, y) = \frac{1}{24} (y^2 - b^2)^2 \left\{ f_{00} + \frac{2}{15} b^2 (3f_{20} + f_{02}) + f_{10}x + \frac{1}{5} f_{01}y \right. \\ \left. + f_{20}x^2 + \frac{1}{5} f_{11}xy + \frac{1}{15} (-2f_{20} + f_{02})y^2 \right\}, \quad (6.1)$$

whereas for  $b = a$  our solution (6) transforms into the formula for a circular plate of radius  $a$ :

$$w(x, y) = \frac{1}{2304} (x^2 + y^2 - a^2)^2 \left\{ 4[9f_{00} + a^2(f_{20} + f_{02})] + 12f_{10}x \right. \\ \left. + 12f_{01}y + (5f_{20} - f_{02})x^2 + 6f_{11}xy + (-f_{20} + 5f_{02})y^2 \right\}. \quad (6.2)$$

If  $f_{10} = f_{01} = f_{11} = 0$ ,  $f_{02} = f_{20}$ , then (6.2) gives the formula

$$w(r) = \frac{1}{576} (a^2 - r^2)^2 (9f_{00} + 2a^2 f_{20} + f_{20} r^2), \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (6.3)$$

for symmetrical bending of a circular plate with clamped edge.

4. Final remarks. (a) If all the  $f_{ik} = 0$ , except  $f_{00}$ , then our general relations (6)–(6.3) lead to the well-known elementary results as given occasionally in literature.

(b) A detailed study of the basic system (5) allows various interesting conclusions which are of value in the theory of bending of elliptic plates.

(c) The above method can be successfully used in solving other boundary value problems not only of the biharmonic but also of the polyharmonic and harmonic equations<sup>1)</sup>.

### *Zusammenfassung*

Die Arbeit behandelt das Biegeproblem einer am Rande fest eingespannten elliptischen Platte unter einer durch allgemeines Polynom  $n$ -ten Grades bestimmten Belastung. In alle Einzelheiten geht die Rechnung für den in der Literatur kaum zu findenden Spezialfall  $n = 2$ .

(Received: November 25, 1957.)

Varia – Miscellaneous – Divers

### **Herbst-Tagung der SPG 1958**

Die nächste Tagung der SPG (Schweizerische Physikalische Gesellschaft) wird am 13. und 14. September in Glarus stattfinden (Sekretariat: Basel, Klingelbergstrasse 82). Die SPG wird als Sektion und im Rahmen der 138. Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft tagen (13.–15. September, Glarus).

K. P. MEYER

<sup>1)</sup> V. VODIČKA, *Elementare Fälle des Dirichletschen Problems für elliptische Gebiete der Ebene*, Z. angew. Math. Phys. 8, 309–313 (1957).

---

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques
 

---

**Progress in Nuclear Energy.** Serie 1: *Physics and Mathematics*, Bd. 1 (Pergamon Press Ltd., London 1956). 398 S., 195 Fig.; 84 s.

International bekannte Fachleute haben zu diesem ersten Band eines Sammelwerkes beigetragen, dem noch weitere sieben über Reaktoren, Reaktor-Chemie, -Technologie, -Metallurgie sowie biologische, medizinische und ökonomische Aspekte der Kernenergie folgen sollen. Die darin enthaltenen Zusammenfassungen gehen zum grossen Teil auf die Genfer Atomenergiekonferenz vom August 1955 zurück, an der zum ersten Male ein freier Meinungsaustausch zwischen den Wissenschaftlern aus 76 Ländern über alle Probleme und Anwendungen der Kernspaltung stattfand. Nicht nur werden die über 1000 in Genf vorgetragenen Berichte in der vorliegenden Buchreihe gedrängt zusammengefasst; der Inhalt wurde ausserdem von den 24 Mitarbeitern kritisch gesichtet und zu einer in sich geschlossenen Darstellung verarbeitet.

Zunächst werden die experimentell bestimmten Daten der Kernspaltungsprozesse, wie Wirkungsquerschnitte, Spaltungsneutronenausbeute und Resonanzparameter, für die in Betracht fallenden Uran- und Plutonium-Isotope in Tabellen und Kurven dargestellt. Die Theorie dieser Vorgänge wird anschliessend von H. A. BETHE behandelt. Drei weitere Artikel befassen sich mit der Streuung und Absorption von Neutronen in anderen Materialien als den Kernbrennstoffen, wobei auch die Messtechnik und die theoretische Behandlung berücksichtigt werden. Der Erscheinung der verzögerten Emission von Neutronen ist ein weiteres Kapitel gewidmet. Vier Kapitel über die experimentellen Daten und die theoretische Berechnung von homogenen und heterogenen Reaktor-Anordnungen beschliessen das Buch, dessen Studium für jeden, der sich mit Planung und Bau von Kernenergieanlagen befasst, eine unumgängliche Notwendigkeit sein wird. D. MAEDER

**Physik dünner Schichten.** Teil 2: *Struktur, elektrische Leitfähigkeit, magnetische Eigenschaften.* Von H. MAYER (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart 1955). 392 S., 250 Abb., 28 Tab.; DM 78.–

Während im Teil 1 die praktische Herstellung, die Dickenmessung und das optische Verhalten dünner Schichten behandelt werden, befasst sich der vorliegende Teil 2 mit deren strukturellem Aufbau, dem elektrischen Widerstand und den magnetischen Eigenschaften. Bei den hier besprochenen dünnen Schichten handelt es sich im allgemeinen nicht um einfache Grenzschichten, sondern um aus zwei Grenzschichten bestehende Gebilde; beide Begriffe sind durch die in der Grössenordnung der Gitterkonstanten liegende dritte Dimension gekennzeichnet; in manchen Fällen lässt sich deshalb unter gewissen Bedingungen das über die dünne Schicht Gesagte auch auf Grenzschichten (Oberflächen) übertragen.

Im ersten, der Struktur gewidmeten Kapitel werden die einzelnen Elementarprozesse beim Schichtaufbau analysiert und sodann ihr Zusammenspiel untersucht; ferner wird die Strukturanalyse (Röntgenographie, Elektronendiffraktion) eingehend behandelt. Die grossen Unterschiede im elektrischen und magnetischen Verhalten dünner Schichten gegenüber dem normalen Festkörper sind Gegenstand des 2. und 3. Kapitels. Nebst den vielen experimentellen Daten wird die Festkörper-Elektronik (Leitfähigkeit, Thermokraft, Hall-Effekt, Supraleitfähigkeit, Ferromagnetismus) theoretisch dargestellt für den speziellen Fall der dünnen Schicht, deren Dicke ja mit der freien Weglänge der Elektronen vergleichbar ist.

In diesem sowohl als Lehrbuch wie auch zum Nachschlagen geeigneten Werke werden Theorie und Experiment meist parallel behandelt und miteinander verglichen und die Güte der verschiedenen Modellvorstellungen diskutiert. Eine dominierende Stellung, besonders hinsichtlich der experimentellen Daten, nehmen die Metall-Aufdampfschichten ein; weitere Schichttypen sollen in einem zukünftigen Band 3 behandelt werden.

U. KATZ

**American Institute of Physics Handbook.** Herausgeber: The American Institute of Physics. Coordinating Editor: DWIGHT E. GRAY (McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, and London 1957). 1524 S., 328 Fig., 588 Tab.; £ 5,12 s. 6 d. \$ 15.—.

Das Buch ist in acht Kapitel gegliedert, die der Reihe nach mathematische Hilfsmittel, Mechanik, Akustik, Wärme, Elektrizität und Magnetismus, Optik, Atom- und Molekülphysik und schliesslich Kernphysik behandeln. Die einzelnen Kapitel sind weiter unterteilt, so dass insgesamt über hundert Teilgebiete der Physik umfasst werden.

Gegenüber andern Handbüchern ähnlichen Umfangs wirkt das vorliegende Buch erstaunlich neuzeitlich, gibt es doch Auskunft über neue, ungewöhnliche oder in der Literatur schwer zugängliche Fachgebiete, wie Geophysik einschliesslich Geodäsie, Seismologie, Ozeanographie und Meteorologie; Rheologie; Aerodynamik und Hochdruckphysik. Wir finden Abschnitte über Schockwellen und auch über Wirkungsquerschnitte, Zerfallsprodukte und Mesonen. Der Tieftemperatur-Physiker freut sich an einer Übersicht über die Eigenschaften paramagnetischer Salze.

Jedes der von zuständigen Fachleuten behandelten Teilgebiete wird eingeleitet durch erläuternde Erklärungen und Definitionen, die das Lesen der übersichtlich angeordneten Tabellen stark erleichtern.

Man kann dem Buch vielleicht vorwerfen, dass es gelegentlich mehr die Form eines Nachschlagewerks für Ingenieure als die eines Hilfsmittels für Physiker aufweist. Trotzdem dürfte es aber der Experimentalphysiker als wertvolle und handliche Informationsquelle begrüßen.

E. MOOSER

**Elements of Gasdynamics.** Von W. W. LIEPMANN und A. ROSHKO (John Wiley & Sons, New York 1957). 439 S., 152 Fig.; \$11.00.

Dieses Buch gibt eine ausgezeichnete Zusammenfassung des heutigen Standes der Aerodynamik der kompressiblen Medien, einer Wissenschaft, die sich noch in rascher Entwicklung befindet. Zur Einführung dient eine knappe, aber sehr klare Darstellung der grundlegenden Begriffe der Thermodynamik. Es folgt eine klassische Behandlung der eindimensionalen und ebenen Gasdynamik, mit speziellem Hinweis auf die Strömung in Überschall-Windkanälen. Das Kapitel über Messmethoden beschränkt sich auf eine knappe Beschreibung der wichtigsten Hilfsmittel. Die Abschnitte 7 bis 12 sind den Problemen der 2- und 3dimensionalen reibungslosen Strömung gewidmet, wobei die Diskussion sich hauptsächlich auf die Theorie der kleinen Störung im Zusammenhang mit dünnen Profilen und schlanken Drehkörpern beschränkt. Der Einfluss der Reibung und der Wärmeleitfähigkeit sowie die Ähnlichkeitsgesetze der Unter- und Überschallströmung sind Gegenstand des nächsten Kapitels. Das Buch trägt den modernen Entwicklungstendenzen Rechnung, indem auf die Bedeutung der kinetischen Gastheorie und der Grundbegriffe der physikalischen Chemie für die Gasdynamik hingewiesen wird. Eine Sammlung von Übungen und Zahlentabellen bildet den Schluss des ausgezeichnet gedruckten Buches.

P. DE HALLER

**Applied Probability.** Vol. VII. *Proceedings of the Seventh Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society.* Gehalten am Polytechnic Institute of Brooklyn, 14–15. April 1955. Herausgeber L. A. MACCOLL (McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London 1957). 104 S.; 37 s. 6 d.

Beiträge von P. LÉVY, J. L. DOOB, W. FELLER, E. HOPF, G. MÜNCH, G. K. BATCHELOR, M. KAC, S. M. ULAM und B. O. KOOPMAN betreffend Anwendungen der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung auf physikalische Probleme, wie Brownsche Bewegung, Turbulenz, Quantentheorie, Randwertprobleme usw. Der Leser muss die moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung gut kennen, wenn er diese Vorträge führender Forscher auf diesem Gebiete verstehen will. W. SAXER

**Advances in Applied Mechanics.** Band IV. Herausgegeben von H. L. DRYDEN und TH. VON KÁRMÁN; Herstellungsredaktor G. KUERTI (Academic Press Inc., New York 1956). 413 S., 135 Fig.; \$10.00.

Der vierte Band dieser Sammlung enthält Arbeiten aus dem Gebiet der Grenzschichttheorie, der Elastizität und Plastizität und der technischen Dynamik. FRANCIS H. CLAUSER gibt eine sehr gute Zusammenfassung des heutigen Standes der Theorie der turbulenten Grenzschicht. Unter Annahme einer konstanten scheinbaren Viskosität im äusseren Teil der Grenzschicht ist es möglich, ein gutes Bild der turbulenten Geschwindigkeitsprofile zu geben, unabhängig von Druckgradient, Reynoldsscher Zahl oder Wandrauigkeit. FRANKLIN K. MOORE gibt einen Überblick über die technisch so wichtige dreidimensionale Grenzschicht, mit spezieller Berücksichtigung der sekundären Strömungen beim Zusammentreffen zweier Grenzschichten.

Im Kapitel *Nonlinear Elasticity* von T. C. DOYLE und J. L. ERIKSEN werden, einleitend, einige Begriffe und mathematische Grundlagen dargestellt. Die folgenden Abschnitte behandeln die elastischen Grundgleichungen, Grenzwertprobleme, iso- und orthotrope Materialien, allgemeine Lösungen der Gleichgewichtsbedingungen sowie Approximation der Deformationsenergie durch Polynome.

Der Abschnitt *Physical and Statistical Aspects of Fatigue* von A. M. FREUDENTHAL und E. GUMBEL behandelt auf den ersten Seiten die physikalischen Ursachen der Ermüdung, welche anschliessend als Grundlage zum Aufbau einer statistischen Theorie dienen. Zum Abschluss werden noch einige Fragen der Schadenakkumulation diskutiert.

Im Kapitel *Dislocation Theory of Plasticity of Metals* beschreibt G. SCHOECK, nach einer kurzen Einleitung über die plastische Verformung von Kristallen, zuerst die Versetzungen in ihrer Geometrie (Stufen- und Schraubenversetzungen, Burgers-Vektor, Versetzungsquellen, Stapelfehler usw.) und in ihrem Spannungszustand.

Ein weiterer Abschnitt behandelt, allerdings sehr kurz, den Nachweis von Versetzungen durch Beobachtungen an Kristalloberflächen (Wachstumsspiralen, Ätzgrübchen an Korngrenzen oder Subkorngrenzen).

Schliesslich wird ausführlicher auf die mechanischen Eigenschaften von Einkristallen im elastischen und plastischen Bereich eingegangen, wobei die bekannten Begriffe der Relaxation, Dämpfung, Plastizität und Verfestigung vom Gesichtspunkt der Versetzungstheorie aus beleuchtet werden.

Zum Schluss werden kurz auch einige für technische Werkstoffe wichtige Phänomene, wie Ausscheidungshärtung und das Fliessen von Kristallhaufwerken, besprochen.

Der Aufsatz von H. S. TSIEN behandelt eine Erweiterung der Poincaréschen Methode für kleine Störungen und zeigt, wie diese, sinngemäss angewendet, für



viele Probleme der Gasdynamik gute Dienste leisten kann. Schliesslich sind die den Lesern der ZAMP gut bekannten Arbeiten von H. ZIEGLER über den Begriff der elastischen Stabilität in extenso wiedergegeben. Dieses schwierige und technisch wichtige Problem ist hier meisterhaft und erschöpfend behandelt.

P. DE HALLER

**Aeroelasticity.** Von R. L. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY, und R. L. HALFMAN (Addison Wesley Publishing Company, Reading 1955). 860 S., 303 Fig.; \$ 14.50.

Nach einem kurzen historischen Überblick behandelt das Buch in seiner ersten Hälfte die theoretischen Grundlagen der Aeroelastizität. Die verschiedenen Methoden (unter anderem Lagrangesche Gleichungen, Rayleigh-Ritz-Methoden usw.) zur Berechnung der Verformung unter statischer und dynamischer Belastung, der Eigenfrequenzen und der zugehörigen Schwingungsformen sind beschrieben und durch ausführliche Zahlenbeispiele illustriert. Ein grosser Teil des Buches ist der Aerodynamik gewidmet: zwei- und dreidimensionale, stationäre und instationäre Strömungen, Einfluss der Kompressibilität, werden behandelt.

Im Abschnitt über die eigentlichen Flügelschwingungen sind einige Diagramme wiedergegeben, die den Einfluss der verschiedenen Parameter zeigen. Die Wirkung der Dämpfung, der Kompressibilität, der Flügelstreckung usw. werden berücksichtigt.

Es folgt ein ausführliches Kapitel über die Erregung der Schwingungen durch Böen und atmosphärische Turbulenz, und zuletzt werden die Ähnlichkeitsgesetze und die Technik der Modellversuche behandelt. Eine kurze Zusammenfassung der notwendigen mathematischen Begriffe ist im Anhang enthalten.

Dank dem klaren Aufbau des mit vielen Figuren und Zahlenbeispielen ausgestatteten Buches und dem ausführlichen Literaturverzeichnis kann dieses Werk dem Flugingenieur bestens empfohlen werden.

P. DE HALLER

**Linearized Theory of Steady High-Speed Flow.** Von G. N. WARD (Cambridge University Press, London 1955). 243 S., 28 Fig.; 30 s.

Die Schwierigkeit, die nichtlinearen Bewegungsgleichungen der kompressiblen Strömungen zu lösen, hat zu einer weiten Anwendung der linearen Approximationen geführt. Dieser sogenannten linearisierten Theorie und den physikalischen und mathematischen Annahmen, auf denen sie beruht, ist das vorliegende Buch gewidmet.

Der Verfasser wendet sich dabei an eine Leserschaft, welche erstens mit den Grundlagen der Gasdynamik und zweitens mit der vektoriellen Schreibweise vertraut ist. Letztere Darstellung erlaubt eine physikalisch durchsichtigere Schreibweise, erschwert wohl aber dem die orthodoxe Schreibweise gewohnten Leser die Lektüre.

Der erste Teil des Buches enthält die Herleitungen der linearen Differentialgleichungen, für stationäre Strömungen, die Lösungen dieser Gleichungen, die Diskussion der Randbedingungen und die Berechnung der aerodynamischen Kräfte.

Der zweite Teil ist speziellen Randwertproblemen gewidmet, wie der Umströmung dünner Körper im Unterschallbereich, der Überschallströmung um nahezu ebene Flügel, den konischen Überschall-Strömungsfeldern sowie der sogenannten «slender-body»-Theorie.

Besonderer Dank gebührt dem Verfasser für das ausführliche Literaturverzeichnis, welches dem Leser gestattet, die entsprechende Fachliteratur zur Ergänzung des oft recht konzentrierten Textes rasch aufzufinden.



Das Buch wird als erste zusammenfassende Darstellung der linearisierten Theorie der Überschallströmungen dem fortgeschrittenen Studenten oder wertfähigen Ingenieur wertvolle Dienste leisten.

H. R. VOELLMY

**The Calculation of Atomic Structures.** Von DOUGLAS R. HARTREE (John Wiley & Sons, New York 1957). 181 S., 14 Fig.; \$ 5.00.

Das vorliegende Buch gibt von berufenster Seite eine gründliche Darstellung der Methode des « Self-Consistent Field » zur Bestimmung der Atomstruktur. Das Hauptgewicht liegt dabei auf der tatsächlichen Durchführung der Methode bis zur numerischen Behandlung. Die Darstellung ist bewusst elementar gehalten. Es werden zum Beispiel keine gruppentheoretischen Methoden verwendet. Ausgangspunkt bildet das Variationsprinzip zur Schrödinger-Gleichung mit einem Determinantenansatz für die Testfunktion. Die Focksche Integro-Differentialgleichung wird durch sukzessive Approximation gelöst, wobei die Wahl der ersten Näherung mit besonderer Sorgfalt diskutiert wird. Überall kommt die grosse Erfahrung des Autors auf diesem Gebiet zur Geltung. Ein besonderer Abschnitt ist der numerischen Behandlung von Differentialgleichungen gewidmet. Der Schluss des Buches diskutiert relativistische Verfeinerungen und Approximationen, die über die Methoden der « Self-Consistent-Fields » hinausgehen. Zwei Anhänge geben Literaturhinweise auf Resultate und reduzierte radiale Wellenfunktionen.

Die Tatsache, dass das Buch aus Vorlesungen vor einem breiteren Auditorium entstanden ist, ist angenehm spürbar und erleichtert dem Aussenstehenden die Lektüre.

R. JOST

**Principles and Techniques of Applied Mathematics.** Von B. FRIEDMAN (John Wiley and Sons, New York; Chapman & Hall, London 1956). 315 S., 6 Abb.; \$ 8.00.

In einem Werk mit diesem Titel erwartet der Leser eine Behandlung der theoretischen Grundlagen, auf denen die numerischen Methoden der angewandten Mathematik letzten Endes beruhen. Es beginnt denn auch vielversprechend mit der Theorie der linearen Operatoren, welche recht anschaulich und mit zahlreichen Übungsbeispielen behandelt wird. Es ist durchaus zu begrüßen, dass der Verfasser unter Hinweis auf die entsprechenden Literaturstellen oft auf die exakten Beweise verzichtet; dass er aber in Kapitel 1 und 2 auf die für die angewandte Mathematik so wichtigen Extremalprinzipien überhaupt nicht eingeht, während andererseits die nichtlinearen Elementarteiler in unnötiger Ausführlichkeit behandelt werden, wird doch als Mangel empfunden.

Im Kapitel 3 wird die Greensche Funktion unter Zuhilfenahme der Diracschen Impulsfunktion  $\delta(x)$  eingeführt, was dem üblichen Vorgehen entschieden vorzuziehen ist. Freilich ist das ganze Kapitel stark auf Differentialoperatoren  $L = -(d/dx)^2 + g(x)$  zugeschnitten, ebenso das folgende Kapitel über Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. In diesem Kapitel kommt auch die Spektraldarstellung von Operatoren zur Sprache; als spezielle Anwendung davon erhält man Darstellungen von  $\delta(x)$  durch divergente Summen und Integrale wie

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) dk,$$

die hier allerdings nicht exakt begründet werden.

Die Betrachtung über die Greensche Funktion für die genannten Differentialoperatoren liefern unmittelbar auch die Greensche Funktion für Potentialprobleme in Rechteckbereichen sowie für die Wellengleichung und gestatten, die bekannten expliziten Lösungen sofort anzugeben. H. RUTISHAUSER

**Technische Hydro- und Aeromechanik.** Von WALTER KAUFMANN (Springer-Verlag, Berlin 1954). 352 S., 254 Abb.; DM 36.–.

Das vorliegende Buch enthält in grossen Zügen den Stoff der Vorlesung, welche der Verfasser an der Technischen Hochschule München hält. Entsprechend der Absicht des Verfassers, ein Lehrbuch für Studierende zu schreiben, zeichnet sich auch diese Neubearbeitung des 1931 und 1934 erschienenen Buches *Angewandte Hydromechanik* durch einen klaren, methodischen Aufbau und durch meist ausführlichen Text aus. Besonders alle mit der Grenzschichttheorie zusammenhängenden Fragen werden gründlich erläutert. Die einzelnen Abschnitte des Buches tragen folgende Titel: Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase, Gleichgewicht (Hydro- bzw. Aerostatik), Bewegung der Flüssigkeit (Hydro- bzw. Aerodynamik) mit den Unterabschnitten: Eindimensionale Strömung (Reibungsfreie Strömung, Strömung mit Energieverlusten), Allgemeine Theorie der zwei- und dreidimensionalen Strömung, Grundlagen der Dynamik kompressibler Flüssigkeiten (Gasdynamik).

Ein Sachverzeichnis erleichtert das rasche Auffinden des Gesuchten. Die vielen im Text eingestreuten klaren Diagramme und Zeichnungen zusammen mit dem sauberen Druck des Verlages ergeben ein Lehrbuch, das nicht nur dem Studierenden, sondern auch dem praktisch arbeitenden Ingenieur als Nachschlagewerk warm empfohlen werden kann. H. R. VOELLMY

**Water Waves.** Von J. J. STOKER ([Pure and Applied Mathematics, Bd. 4] Interscience Publishers, New York und London 1957). 567 S., 189 Abb.; \$12.00.

Obwohl zwischen den Gravitationswellen an der Oberfläche einer Flüssigkeit und den Wellen der Gasdynamik vielfach eine enge Analogie besteht, sind die Oberflächenwellen weniger spektakulär. Viele hierher gehörende Probleme sind erst in neuerer Zeit von der hydraulischen Ebene auf das Niveau der exakten Hydrodynamik gehoben und einer strengen Lösung zugeführt worden, wobei insbesondere die New-Yorker Schule mit STOKER, FRIEDRICHS und anderen wesentliche Beiträge geleistet hat. Um so erfreulicher ist es, dass es STOKER, ein Autor, der ebenso sehr für seine mathematische Strenge wie für seine Aufgeschlossenheit physikalischen und technischen Problemen gegenüber bekannt ist, unternommen hat, das Gebiet umfassend darzustellen.

Das Werk, das uneingeschränkte Anerkennung verdient, behandelt in vier Hauptteilen:

I. Die Grundlagen der Dynamik reibungsloser, inkompressibler Flüssigkeiten samt einer exakten Begründung der Näherungstheorien für kleine Amplituden bzw. geringe Wassertiefe;

II. Lösungen der Theorie kleiner Amplituden (Wellen auf geneigtem Untergrund und in der Nähe von Hindernissen, Wellen auf einem Strom, Bewegung von Schiffen im Seegang);

III. Lösungen der Seichtwassertheorie (Fortpflanzung von Störungen, Brechen von Wellen, schwimmende Wellenbrecher, Unstetigkeitsfronten in der Atmosphäre, Bewegung in Kanälen mit rauhen Wänden, Flutwellen in Strömen);

IV. Lösungen der exakten Theorie (Dammbruch).

H. ZIEGLER

# Kennzeichen atmosphärischer Eispartikeln

2. THEI

## *Hagelkörner*

Von ROLAND LIST, Weissfluhjoch-Davos<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

In die Augen fallend waren seit jeher die vielfältigen, zum Teil auch phantastischen Formen und Grössen der Hagelkörner. W. TRABERT [1<sup>2)</sup>], der 1899 eine vorzügliche Zusammenstellung der damaligen Kenntnisse über die Bildung des Hagels verfasste, erwähnt zum Beispiel Körner mit aufgebauten, bis 14 mm langen Kristalliten; C. KASSNER [2] beschäftigt sich mit der Frage des grössten Hagelkornes der Welt, und S. ERB [3] beschreibt eine Schlosse mit 810 cm<sup>3</sup> Verdrängung.

Die Erkenntnis, dass ein schalenartiger Aufbau von den in das Eis eingebauten Luftblasen herrührt, ist bis auf WALLER und HARTING [4] zurückzufolgeln. Diese Autoren konnten auch feststellen, dass die Schalen der Hagelkörner «aus einer Anzahl kleinerer, aneinander gereihter Theilchen, kleine Eiskällchen oder Eiszellen, die man deutlich unter dem Mikroskop beim Schmelzen wahrnimmt», bestehen. Diese Beobachtung wurde hundert Jahre später durch R. LIST und M. DE QUERVAIN [5] bestätigt, da sich bei Betrachtung von Dünnschnitten in polarisiertem Licht diese «Eiskällchen oder Eiszellen» mit Eiseinkristallen identifizieren liessen. Die damals erstmals auf Hagelkörner angewendete Dünnschnitttechnik [6] wirkte befruchtend, indem die damit erreichbaren Resultate verschiedene Vermutungen bestätigen, in anderen Fällen aber neue Ergebnisse zeitigen.

Die folgenden Ausführungen basieren auf Sammelproben von über 40 Hagelfällen der Jahre 1953 bis 1957.

<sup>1)</sup> Eidgenössisches Institut für Schnee- und Lawinenforschung.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis Seite 234.

## 2. Charakterisierung

*Aussehen.* Hagelkörner sind teilweise oder ganz opake Eispartikel mit einem Durchmesser von rund 5 bis 150 mm und mehr. Die auftretenden Formen sind äusserst vielfältig; der Aufbau ist öfters schalenartig mit einem Wechsel klarer und opaker, weisser Schichten.

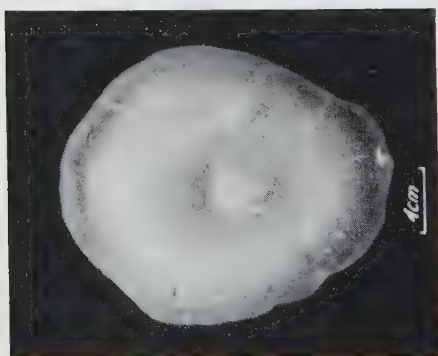
*Entstehung.* Hagelkörner entstehen aus Frostgraupeln oder Klareispartikeln durch Anlagerung und Gefrieren von angeschwebten Wassertropfen [7] (vgl. auch mit MASON [8]).

(Die in der Meteorologie vielfach empfundene Unsicherheit in der Unterscheidung von Frostgraupeln und Hagelkörnern einzig nach einem Grenzdurchmesser von 5 mm [9] kann durch Beachtung einer prinzipiellen Differenz behoben werden: Frostgraupeln sind Partikeln mit einer zonenweisen Verglasung und stellen Verdichtungsformen verschiedener Stadien dar [7]. Sobald der erste auftretende Verdichtungsprozess, ausgehend von der Reifgraupel, beendet ist, das heisst, sobald die angeströmten Wassertropfen ausschliesslich zur Volumenvergrösserung dienen und nicht mehr zur Auffüllung des «Reif»gerüsts, so ist bereits von Hagelkörnern zu sprechen.)

## 3. Äusserer Aufbau von Hagelkörnern

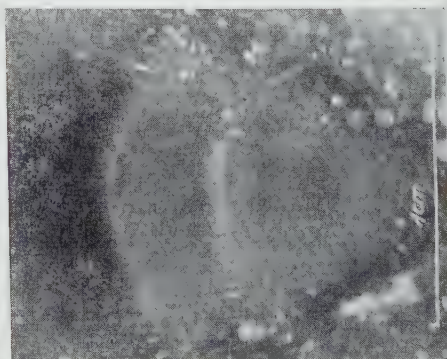
### 3.1 Ursprung

In Bestätigung des im Artikel *Graupeln als Wachstumszentren von Hagelkörnern* [7] erwähnten Schemas über die Entstehung und den Ursprung von Hagelkörnern, sei auf die Figur 1 verwiesen, die im Innern eines rund 5 cm grossen, ellipsoidischen, in Richtung der kleinsten Achse beidseitig eingedrückten Hagelkornes (Nr. 57.7) deutlich eine ursprüngliche, kugelsektorartige Reifgraupel erkennen lässt. Eine Vergrösserung der Graupel zeigt Figur 2.



Figur 1

Hagelkorn 57.7 mit eingebauter konischer Reifgraupel.



Figur 2

Kegeliges Zentrum des Hagelkornes 57.7.

### 3.2 Formen und Grössen von Hagelkörnern

Die ausserordentliche Vielfalt der beobachteten Formen lässt folgende Unterteilungen zu:

#### *Hauptform:*

- a) Kugel;
- b) Ellipsoid:
  - Rotationsellipsoid;
  - Ellipsoid, dreiaxsig;
  - Ellipsoid, einseitig in der kleinsten Achse eingedrückt;
  - Ellipsoid, beidseitig in der kleinsten Achse eingedrückt;
  - runde Platte;
  - runde Platte mit Wülsten;
  - ovale Platte;
  - ovale Platte mit Wülsten;
- c) Kegel, Kegel auf Kegel;
- d) Schnitz;
- e) unregelmässige Form;
- f) teilweise oder ganz ebenflächige Körper;
- g) zusammengeballte Partikeln;
- h) Splitterformen.

#### *Oberfläche:*

- aa) gleichmässig gekrümmt;
- bb) unregelmässig;
- cc) protuberanzenartig;
- dd) stachelig;
- ee) mit aufgebauten Kristalliten.

Zu den zusammengeballt aussehenden Körnern ist zu bemerken, dass der Dünnschnitt unter polarisiertem Licht das einzige sichere Kriterium ergibt, um zu unterscheiden, ob es sich um eine reelle Zusammenpappung verschiedener Eispartikeln handelt oder nicht. Alle scheinbar durch Koagulation entstandenen Körner, die auf Weissfluhjoch untersucht wurden, entpuppten sich als ganz gewöhnliche Körner mit *einem* Kern!

Die in einem einzigen Hagelschlag auftretenden Variationen der Kornformen können äusserst vielfältig sein, wie die Untersuchung der Sammelprobe vom 24. Juni 1953 zeigt [5], oder auch mehr oder weniger homogen gemäss Figuren 3 und 4, die in erster Linie ellipsoidische Formen darstellen.

Grössenverteilungen von Hagelkörnern konnten nur zwei, die den gleichen Hagelschlag vom 5. August 1955 in Balsthal betreffen, gemessen werden; sie sind in Figur 5 aufgezeichnet.





Figur 4

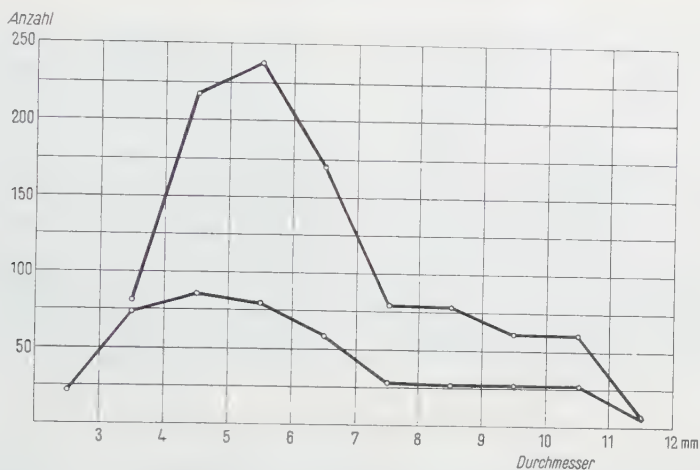
Sammelprobe des Hagelschlages vom 21. Juni 1957 in Rütli ZH.



Figur 3

Sammelprobe des Hagelschlages vom 21. Juni 1957 in Fischbach LU.





Figur 5

Korngrößenverteilung des Hagelschlages vom 5. August 1955 in Balsthal. Totalzahl 990 bzw. 437 Partikeln.

### 3.3 Dichten von Hagelkörnern

Sämtliche über Auftrieb in Petrol oder Tetralin und Wägung bestimmten Dichten liegen zwischen 0,8 und 0,9 g/cm<sup>3</sup>. Die untere Grenze dürfte sich im allgemeinen noch nach kleineren Werten hin verschieben, da die gesammelten Schlossen vielfach vor der Einbringung in Kühlschränke oder -räume oberflächlich mehr oder weniger auftauten.

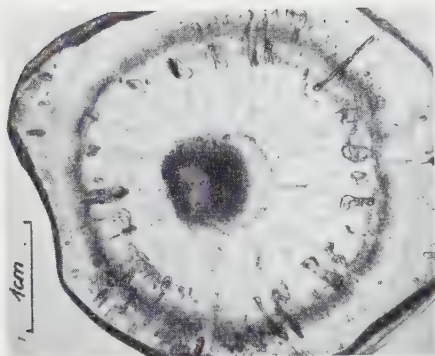
## 4. Anordnung, Form und Grösse eingebauter Luftblasen

### 4.1 Schalenanordnung

Schalenanordnungen von Luftblasen in Hagelkörnern sind Kennzeichen für eine Variation der Wachstumsbedingungen. Die Form der Schalenfläche kann kugeligen (Figur 6), ellipsoidischen (Figur 7), kegeligen (Figur 8) oder unregelmässigen Charakter (Figur 9) aufweisen. Die Grössen der schalenbildenden Blasen liegen im Mittel zwischen 2 und 100  $\mu$ , ihre Form ist kugelig oder unregelmässig, sofern sie teilweise vom ursprünglichen Korngerüst begrenzt werden.

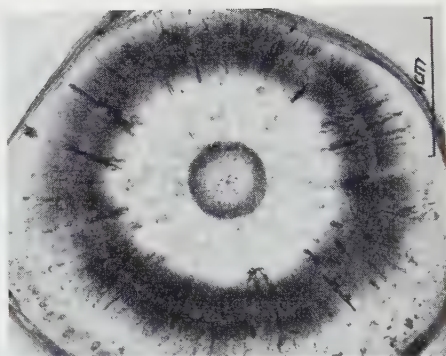
### 4.2 Reihenanordnung

Vielfach sind in Hagelkörnern neben Schalenanordnungen oder auch allein Reihenanordnungen von Luftblasen festzustellen (Figur 10), deren Auftreten jedoch nicht abhängig ist von einer Änderung der Wachstumsbedingungen.



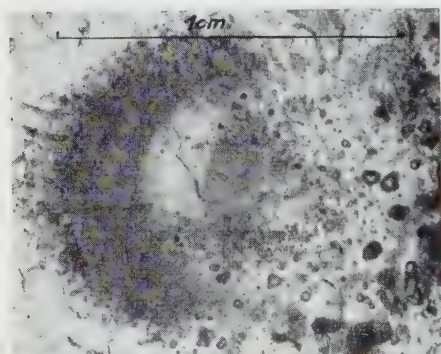
Figur 6

Blasenschale kugelförmiger Form, Korn 57.23.



Figur 7

Blasenschale ellipsoidischer Form, Korn 57.22.



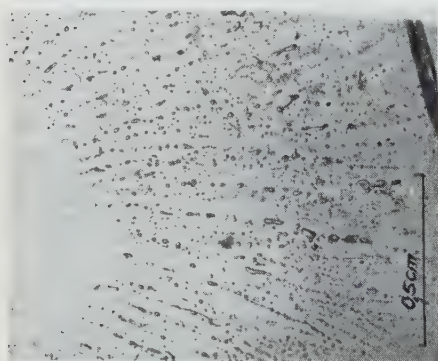
Figur 8

Blasenschale kegelförmiger Form, Korn 57.15, D 1.

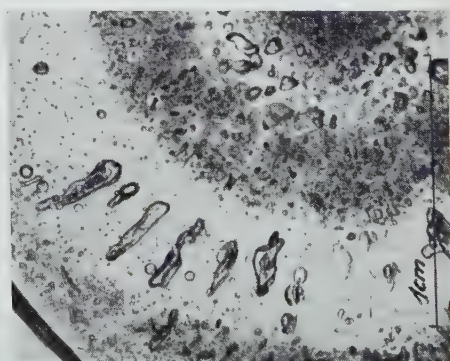


Figur 9

Blasenschale unregelmässiger Form, Korn 57.12, D 1.



Figur 10

Reihenanzordnung von Luftblasen,  
Korn 57.10, D 1.

Figur 11

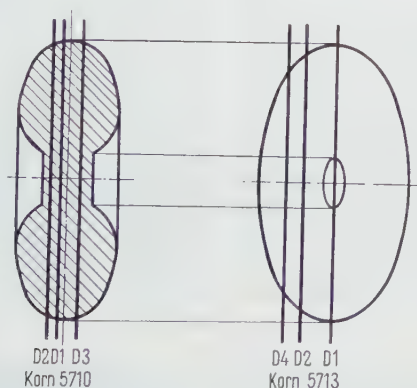
Luftkanäle, Korn 57.16, D 1.

Ihre Richtung ergibt direkt diejenige des Wachstums. Die Durchmesser der reihenbildenden Blasen liegen meist innerhalb 2 und 200  $\mu$ . Diese Grössen werden aber überschritten, wenn es sich um radiale Kanäle handelt, die nachträglich am Ende zugefroren sind (als Beispiel siehe Figur 11).

## 5. Kristallographischer Aufbau

### 5.1 Bedeutung der Dünnschnittlage im Korn

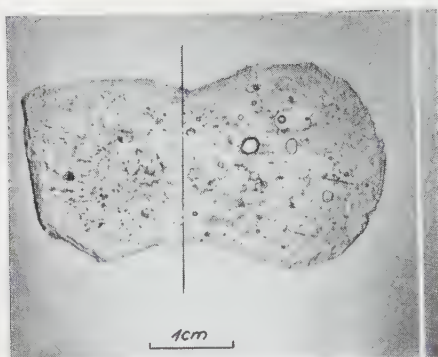
Bei der Auswertung von Einkristallanordnungen ist es von Bedeutung, aus welcher Lage der Dünnschnitt aus dem Hagelkorn herausgesägt wurde. Vergleichbare Verhältnisse sind nur erhältlich, wenn auf Grund der meist zuverlässigen äusseren Symmetrie Hauptschnitte, das heisst Schnitte durch das Zentrum, gelegt werden. Kontrollschnitte helfen dabei diese Hauptschnitte zu bestätigen. Zur Demonstration der dabei auftretenden Eigenheiten seien verschiedene Dünnschnitte durch zwei Körner gleichen Typs dargestellt. Ihre Lagen innerhalb der beidseitig eingedrückten Ellipsoide seien anhand von Figur 12 aufgezeigt.



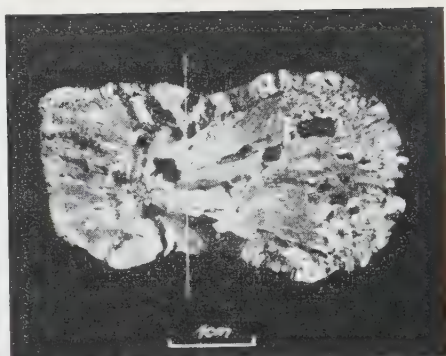
Figur 12

Darstellungen der Schnittlagen durch die Körner 57.13 bzw. 57.10.

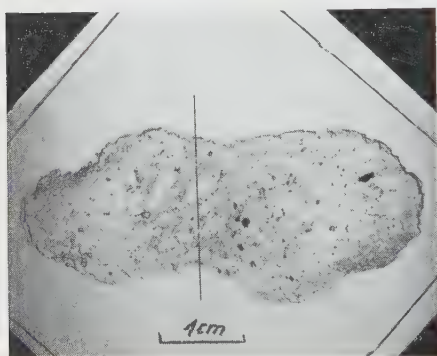
Dünnschnitte von Korn 57.13 (Figuren 13 bis 18), die parallel zur kleinsten und grössten Hauptachse ausgeführt wurden, geben indirekt für den schaligen Kornaufbau Hinweise; währenddem Schnitte durch Korn 57.10 parallel der mittleren und grössten Hauptachse (Figuren 19–24) direkt den gleichen Schluss erlauben. Bei Korn 57.13 ist das Zentrum sicher kegelig, währenddem bei der andern Partikel eine kugelige Graupel als Ursprung angenommen werden kann. Zu Figuren 13 und 14 muss noch die Bemerkung gemacht werden, dass aus technischen Gründen der Dünnschnitt nur durch einen Teil des Kornes gemacht werden konnte; zur besseren Orientierung ist jedoch die Symmetrieachse ein-



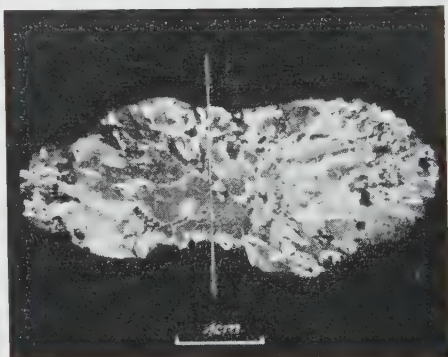
Figur 13  
Korn 57.13, D 1.



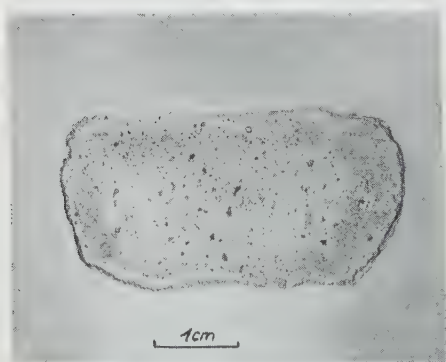
Figur 14  
Korn 57.13, D 1, mit polarisiertem Licht.



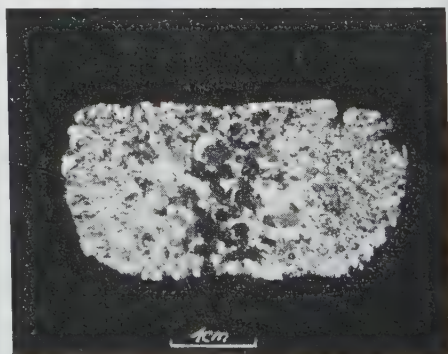
Figur 15  
Korn 57.13, D 2.



Figur 16  
Korn 57.13, D 2, mit polarisiertem Licht.



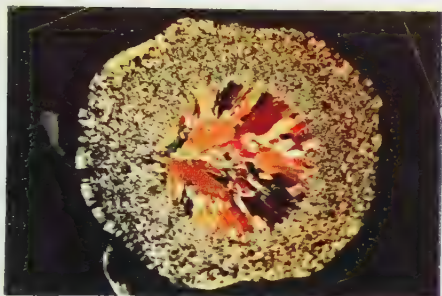
Figur 17  
Korn 57.13, D 4.



Figur 18  
Korn 57.13, D 4, mit polarisiertem Licht.



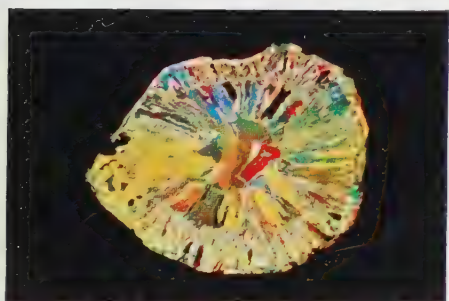
# Dünnschnitte von Hagelkörnern in polarisiertem Licht



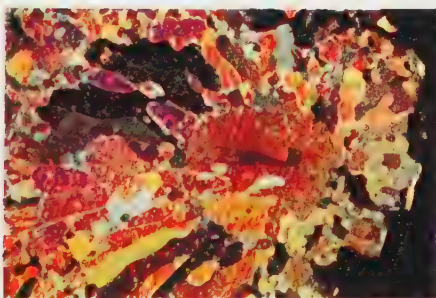
Dia Nr. 1, Korn 57.A. D 1 (1:1,15).



Dia Nr. 2, Korn 57.B. D 1 (1:1,15).



Dia Nr. 3, Korn 57.10. D 1 (1:1,15).



Dia Nr. 4, Zentrum D 4, Korn 57.15 (1,59:1).



Dia Nr. 5, Zentrum D 2, Korn 57.7 (2,1:1).

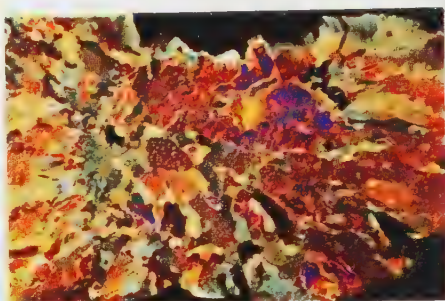


Dia Nr. 6, Zentrum D 4, Korn 57.7 (2,1:1).

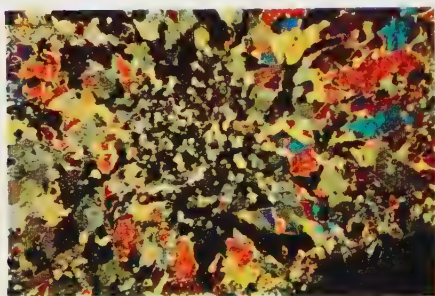
## Dünnschnitte von Hagelkörnern in polarisiertem Licht



Dia Nr. 7, Zentrum D 1, Korn 57.13 (2,1:1).



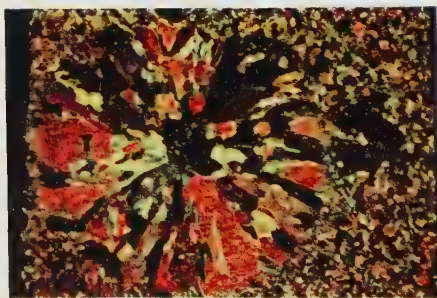
Dia Nr. 8, Zentrum D 2, Korn 57.13 (2,1:1).



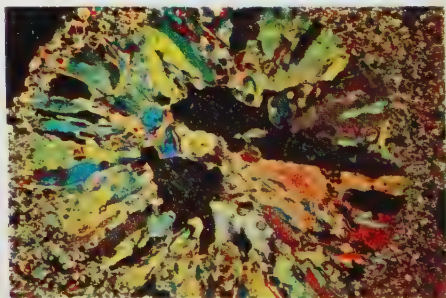
Dia Nr. 9, Zentrum D 3, Korn 57.13 (2,1:1).



Dia Nr. 10, Zentrum D 4, Korn 57.13 (2,1:1).

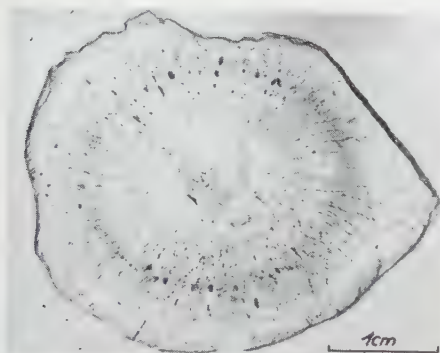


Dia Nr. 11, Zentrum D 1, Korn 57.11 (2,1:1).

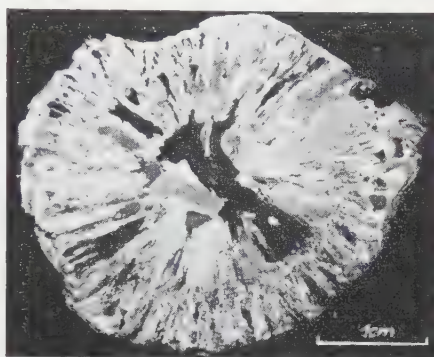


Dia Nr. 12, Zentrum D 2, Korn 57.14 (2,1:1).





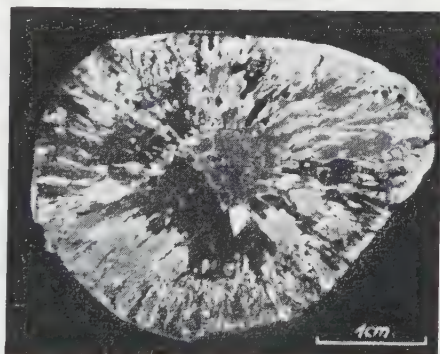
Figur 19  
Korn 57.10, D 1.



Figur 20  
Korn 57.10, D 1, mit polarisiertem Licht.



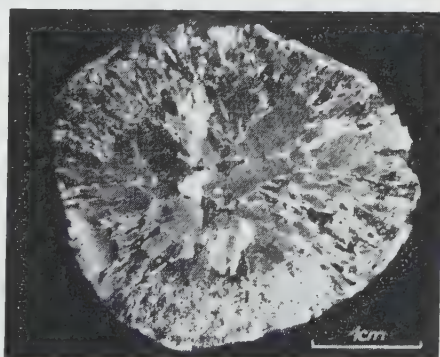
Figur 21  
Korn 57.10, D 2.



Figur 22  
Korn 57.10, D 2, mit polarisiertem Licht.



Figur 23  
Korn 57.10, D 3.



Figur 24  
Korn 57.10, D 3, mit polarisiertem Licht.

getragen. Vergleichshalber sind jeweils auch die zugehörigen Aufnahmen in durchscheinendem Licht gezeigt.

Die Erfahrung lehrt nun, dass längliche Einkristalle gleich wie Blasenreihen vom Zentrum weg in Richtung des Wachstums zeigen (Figuren 14, 26 und 28). Fällt nun eine Dünnschnittebene nicht in die Hauptebene des untersuchten Kornes, so ergeben sich schleifende Schnitte mit den Einkristallen, was ein Bild gemäss Figur 20 ergibt oder, bei noch grösserer Exzentrizität, zum Teil deutlich zu erkennende Lagen senkrecht zur Wachstumsrichtung (Bildmitte der Figur 24).

### 5.2 Einkristallanordnung im Wachstumszentrum

Eine Untersuchung des Aufbaues eines Hagelkornes hat stets von seinem Ausgangspunkt, dem sogenannten Wachstumszentrum auszugehen. Vielfach ist zwar dessen Lage bereits aus der Anordnung der Luftblasen ersichtlich, die Betrachtung des kristallinen Aufbaues erst gibt uns eine zwingende Aussage darüber.

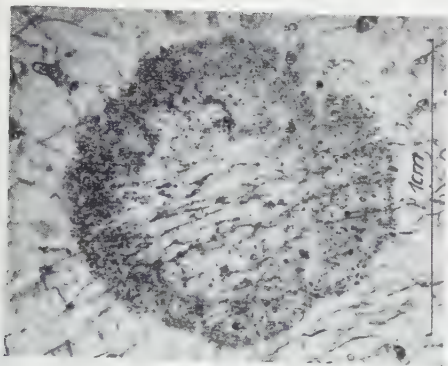
Figuren 27 und 28 gewähren einen Eindruck über das Korn 57.7 (siehe auch Figur 1!), dessen Ausgangspartikel eine Frostgraupel kegeligen Aussehens bzw. eine konische Reifgraupel war. Das Gefühl eines Zentrums mit einer kugeligen Frostgraupel geben dagegen Figuren 29 und 30, währenddem Figuren 31 und 32 wohl einen ursprünglichen Wassertropfen mit einer nicht ganz geschmolzenen kegeligen Reifgraupel im Innern zeigen. Ein einkristallartiges Wachstumszentrum, basierend auf einer Klareispartikel, ist in den Figuren 33 und 34 dargestellt.

### 5.3 Anordnungen von Einkristallen zweiter und weiterer Generationen

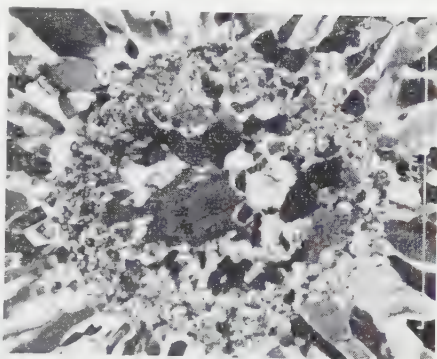
Die Anordnung der Generationen kann derart sein, dass das Wachstumszentrum in der geometrischen Mitte (Figuren 35 und 36), exzentrisch (Figuren 37 und 38) oder auch an der Kornoberfläche liegen kann (Figuren 39 und 40). Die Hauptursache dieser Variation liegt in den speziellen aerodynamischen Verhältnissen beim Wachstum.

### 5.4 Einkristallgrössen

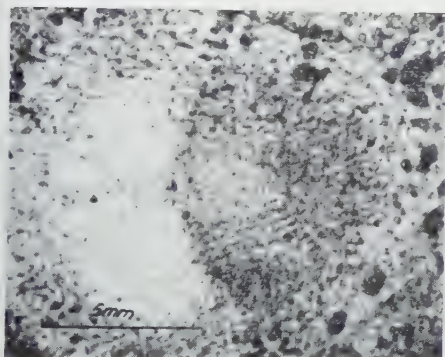
Die Abhängigkeit von der Schnittlage, die Vielfalt der Kornformen und Schalen verunmöglichen es, die in der Dünnschnittechnik normalerweise zu verwendenden Formeln zur Ermittlung der Einkristallgrössen [10] zu gebrauchen. Vergleichbar dürften höchstens mittlere Kornflächen in Hauptschnitten sein! Eine Ausnahme hierzu bilden feinkristalline Zonen (zum Beispiel bei Korn 57.11, D 2, Figur 38), deren Bild mehr oder weniger unabhängig ist von der Exzentrizität. Die für sie ermittelten Korngrössen dürfen auf Werte



Figur 25  
Korn 57.19, D 2.

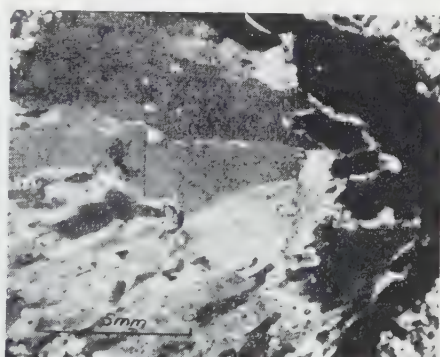


Figur 26  
Radial angeordnete Einkristalle, Korn 57.19,  
D 2, mit polarisiertem Licht.



Figur 27

Wachstumszentrum, basierend auf konischer  
Reifgraupel, Korn 57.7, D 2.



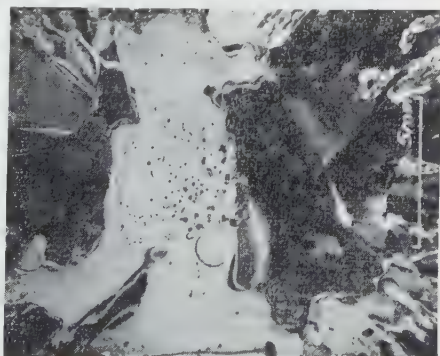
Figur 28

Wachstumszentrum, basierend auf konischer Reif-  
graupel, Korn 57.7, D 2, mit polarisiertem Licht.



Figur 29

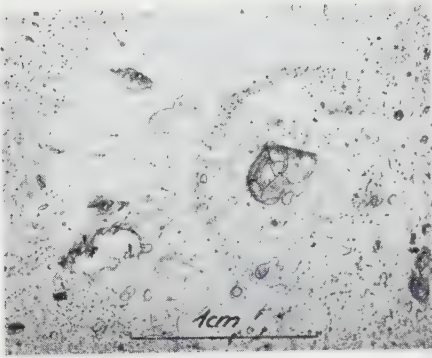
Wachstumszentrum, basierend auf kugelliger  
Frostgraupel, Korn 57.10, D 1.



Figur 30

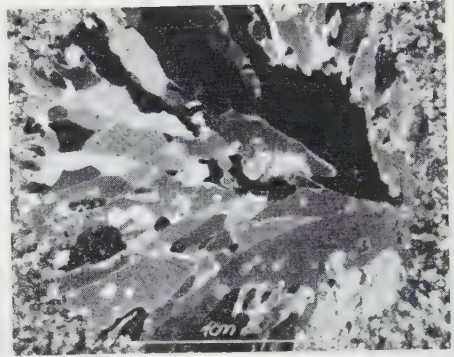
Wachstumszentrum, basierend auf kugelliger Frost-  
graupel, Korn 57.10, D 1, mit polarisiertem Licht.





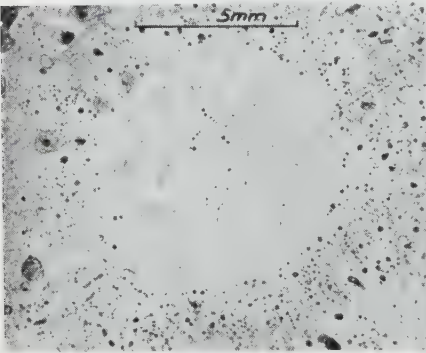
Figur 31

Wachstumszentrum, basierend auf nicht ganz geschmolzener Reifgraupel, Korn 57.A, D 1.



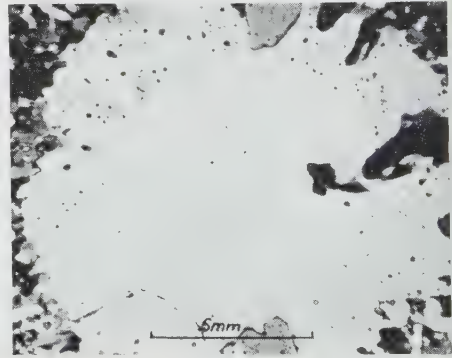
Figur 32

Wachstumszentrum, basierend auf nicht ganz geschmolzener Reifgraupel, Korn 57.A, D 1, mit polarisiertem Licht.



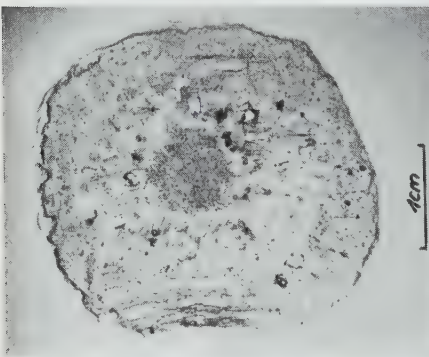
Figur 33

Wachstumszentrum, basierend auf Klareispartikel Typ II, Korn 57.5, D 2.



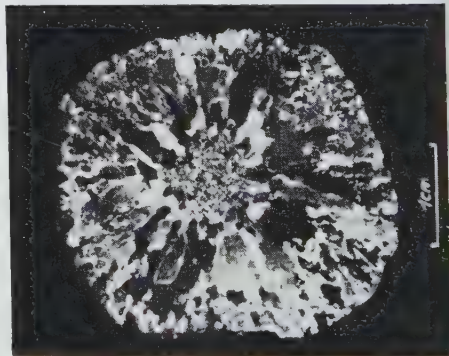
Figur 34

Wachstumszentrum, basierend auf Klareispartikel Typ II, Korn 57.5, D 2, mit polarisiertem Licht.



Figur 35

Wachstumszentrum geometrisch zentrisch, Korn 57.20, D 1.



Figur 36

Wachstumszentrum geometrisch zentrisch, Korn 57.20, D 1, mit polarisiertem Licht.

zwischen  $10^{-3}$  und  $10^{-1} \text{ mm}^3$  abgeschätzt werden, was für die kleineren den Schluss nahe liegen lässt, dass sie durch ebensogrosse Wolkentropfen ( $\sim 100 \mu$ ) entstanden sein könnten. Mitbestimmend hierzu ist auch die Tatsache der vielen eingebauten Luftblasen der betreffenden Zonen, die auf eine grosse Gefriereschwindigkeit ähnlich wie beim Reifgrauelpwachstum schliessen lassen.

### 5.5 Wirksame Gefrierkerne

Die oben angeführten Hinweise lassen auch die allgemeine Bestimmung der Zahl der wirksamen Gefrierkerne nur für die feinkristallinen Zonen zu; die ermittelte Kerndichte liegt bei  $10^5$  Partikeln pro Kubikzentimeter Eis, was Luftgehalt von rund 600 wirksamen Gefrierkernen pro Liter Wolkenluft (Wassergehalt  $5 \text{ g/m}^3$ ) entspricht, und zwar im fortgeschrittensten Stadium der Hagelbildung!

## 6. Zusammenhänge zwischen Anordnungen von Luftblasen und Eiseinkristallen

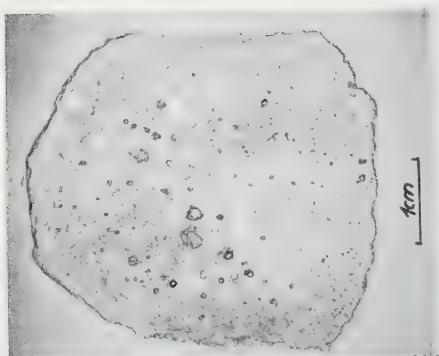
### 6.1 Relationen zwischen Blasen- und Kristallanordnungen

Vielfach ergibt erst die Synthese der Beobachtungen an Dünnschnitten in polarisiertem und durchscheinendem Licht ein ganz zuverlässiges Bild des Aufbaues eines Hagelkornes.

Am deutlichsten kann die Relation anhand der Figuren 41 und 42 demonstriert werden, wobei ein Vergleich zeigt, dass dem dichten Klareis pallisadenartige Einkristalle, dem mit vielen Blasen durchsetzten Eis feinkristalline Zonen entsprechen. Diese Gegenüberstellungen können auch anhand früher gezeigter Figuren gemacht werden. - Solche Aussagen sind aber nur allgemein gültig unter der Voraussetzung, dass genügend Gefrierkerne und/oder ähnliche Gefriereschwindigkeiten auftreten. Fehlt zum Beispiel die erstgenannte Voraussetzung, so kann das in Figur 20 gezeigte Bild der zonenweise durch Blasen-schalen hindurchdringenden Einkristalle ersichtlich werden.

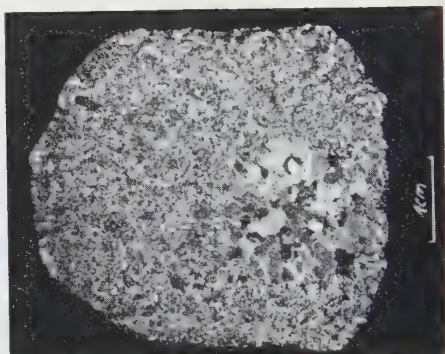
Beobachtungen am Korn 57.11 (Figur 44) in polarisiertem Licht würden auf den ersten Blick keinen Schalenaufbau vermuten lassen, wie er in Figur 43, die in durchscheinender Beleuchtung aufgenommen wurde, erkennbar ist. Blasenflächen brauchen also nicht unbedingt mit einer feinkristallinen Zone gekoppelt zu sein; bei geringer Dicke können sie auch lediglich die Ausgangsfläche neuer Pallisadenkristalle bilden.

Eine Betrachtung der feinkristallinen Zonen in einer etwa 2,5 mm dicken Schicht weist auf Ballungen von Lufteinschlüssen hin (Figur 45), denen auch Gruppierungen von Einkristallen entsprechen (zum Beispiel Figur 46). Dazwischen auftretende Klareiskanäle (Figur 47) sind meist nicht als Einkristallite gefroren (Figur 48); trotzdem dürfte aber eine örtliche Überlagerung zweier



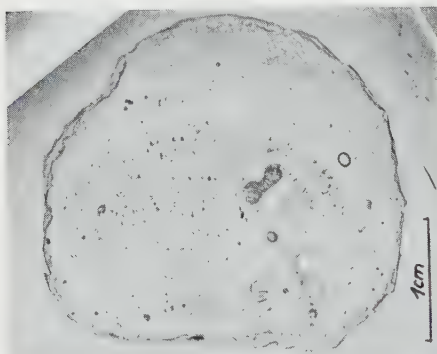
Figur 37

Wachstumszentrum geometrisch exzentrisch,  
Korn 57.11, D 2.



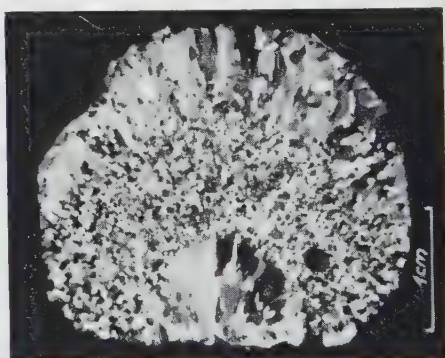
Figur 38

Wachstumszentrum geometrisch exzentrisch,  
Korn 57.11, D 2, mit polarisiertem Licht.



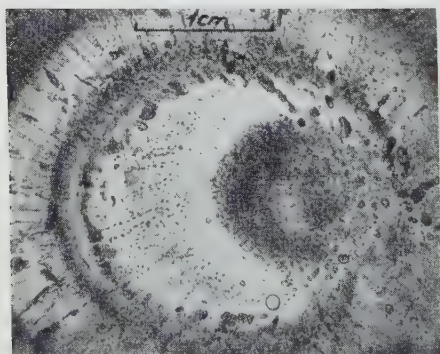
Figur 39

Wachstumszentrum an der Kornoberfläche,  
Korn 57.2.



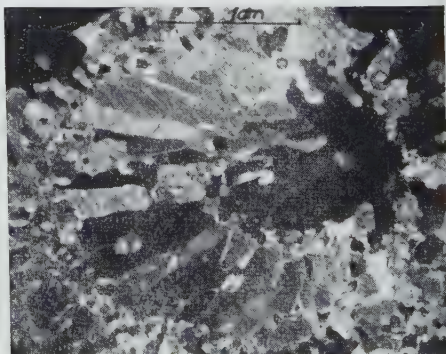
Figur 40

Wachstumszentrum an der Kornoberfläche,  
Korn 57.2, mit polarisiertem Licht.



Figur 41

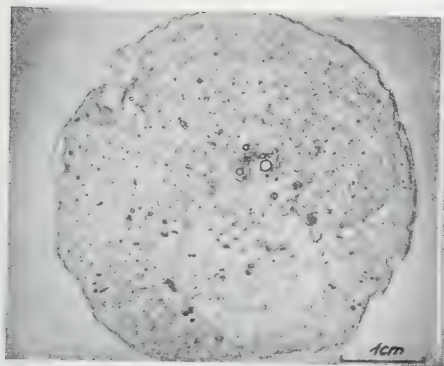
Korn 57.15, D 1.



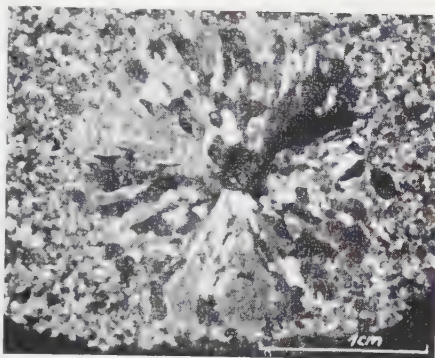
Figur 42

Korn 57.15, D 1, mit polarisiertem Licht.

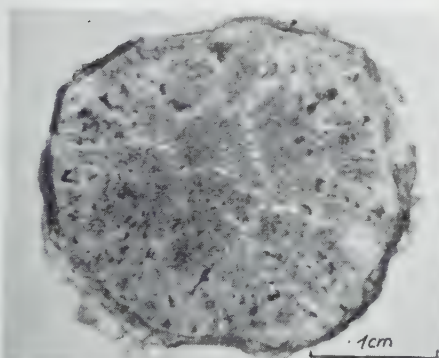




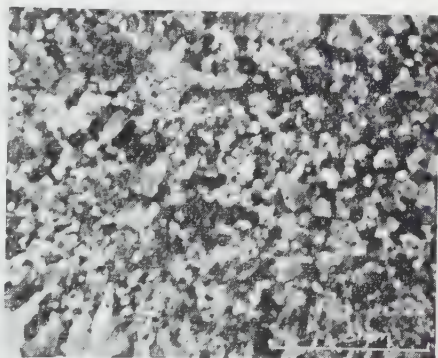
Figur 43  
Konzentrische Kugelschalen  
des Kornes 57.11, D 1.



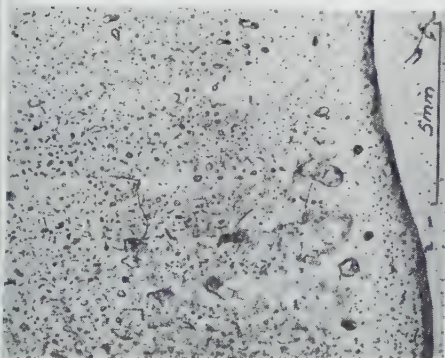
Figur 44  
Einkristallanordnung im Zentrum des Kornes  
57.11, D 1, mit polarisiertem Licht.



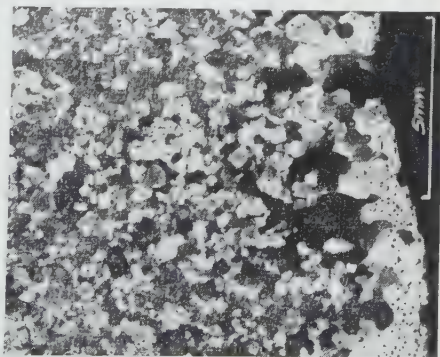
Figur 45  
Zusammenballungen von Lufteinschlüssen,  
Korn 57.1, D 3.



Figur 46  
Einkristallgruppen, Korn 57.B,  
mit polarisiertem Licht.



Figur 47  
Klareiskanäle, Korn 57.A, D 1.



Figur 48  
Entsprechende Einkristallanordnung,  
Korn 57.A, D 1, mit polarisiertem Licht.

Wachstumsphasen stattgefunden haben. Es wiederholt sich hier also im Grossen, was in früheren Stadien zu Reifgraupeln und nachher zu Frostgraupeln führte: Es werden zunächst luftige Schichten aufgebaut, zum Teil in Form von Protuberanzen, die später verdichtet und ausnivelliert werden durch Anlagerung von Wassertropfen bei kleinerer Gefriereschwindigkeit.

### 6.2 *Einbauorte der Luftblasen bezüglich der Korngrenzen*

Die Untersuchung, ob der Einbauort der Luftblasen in das Eis abhängig sei von den Einkristallen, ergab keine merkbare Bevorzugung oder Benachteiligung der Kornbegrenzungsflächen.

Für die Unterstützung und Förderung dieser Arbeiten möchte ich vor allem Herrn Dr. M. DE QUERVAIN danken, sowie den verschiedenen Hagelkornsammlern aus der ganzen Schweiz, die durch ihren Einsatz das nötige «Rohmaterial» zur Verfügung stellten und damit diese Arbeit erst ermöglichten.

Die hier beschriebenen Untersuchungen wurden im Rahmen des Forschungsprogrammes der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr an der Forschungsstelle Weissfluhjoch durchgeführt; zur Finanzierung standen teilweise Gelder des Schweizerischen Nationalfonds zur Verfügung.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. TRABERT, *Met. Z.* 10, 433–471 (1899).
- [2] C. KASSNER, *Z. angew. Met.* 47, 255–256 (1936).
- [3] S. ERB, *Alpenhorn* 1932 (Langnau BE).
- [4] WALLER und HARTING, *Der Hagel*, aus: *Album der Natur*, 2. Aufl. (1853), Blatt 33.
- [5] R. LIST und M. DE QUERVAIN, *Z. angew. Math. Phys.* 4, 3–7 (1953).
- [6] R. LIST und M. DE QUERVAIN, demnächst.
- [7] R. LIST, *Z. angew. Math. Phys.* 9a, 180 (1958).
- [8] B. J. MASON, *The Physics of Clouds* (Clarendon Press, Oxford 1957).
- [9] H. WEICKMANN, *The Artificial Stimulation of Rain* (Pergamon Press, London 1957), S. 415.
- [10] H. H. G. JELLINEK, *U. S. Army Snow, Ice and Permafrost Research Establishment*, Report 35.

### *Summary*

Photographs and pictures of thin sections in transparent or polarized light show a number of different possibilities of external and internal structure of hailstones. The relationship between air bubbles in the ice and the single crystals are explained, also in connection with the concentration of the active atmospheric ice nuclei.

(Eingegangen: 21. Januar 1958.)

# Über die Darstellung einer Flugbahnschar und ihrer Störungen für Feuerleitgeräte

VON ERNST ROTH-DESMEULES, Luzern

## 1. Einleitung

Die vorliegende Untersuchung befasst sich mit einer Darstellung der Flugbahnen, wie sie in Feuerleitgeräten der terrestrischen Fliegerabwehr Verwendung finden kann. Aufgabe eines Feuerleitgerätes ist es, aus den gemessenen Positionen eines Flugzeuges dessen zukünftige Bahn zu extrapolieren und entsprechend die Schiesserelemente zu liefern, nach denen die Flakkanone zu richten ist. Dies hat zur Voraussetzung, dass ein Rechengert vorhanden ist, das die ganze Flugbahnschar erzeugen kann und ausserdem auch alle Störungen einer Flugbahn zu berücksichtigen vermag. Da eine laufende Neuberechnung der Flugbahn auf Grund der Differentialgleichungen unter Beachtung der momentanen Störungen mit den heute zur Verfügung stehenden Rechenautomaten immer noch viel zu zeitraubend ist (abgesehen von deren Umfang und dem taktischen Einsatz) und es sich, genau besehen, ausserdem um ein Randwertproblem mit komplizierten, nichtlinearen Randbedingungen handelt, das einer direkten mathematischen Behandlung noch kaum zugänglich ist, bedeutet dies, dass mindestens vorläufig von schon zum voraus berechneten Flugbahnen ausgegangen werden muss. Es muss daher die ganze Flugbahnschar im Feuerleitgerät gespeichert vorliegen, damit alle Daten in kürzester Zeit zur Verfügung stehen, soll der Zweck erfüllt werden können, was bei den heutigen grossen Flugzeuggeschwindigkeiten bereits ein erhebliches Problem darstellt.

Im folgenden bleiben alle Fragen, die den Aufbau eines Feuerleitgerätes betreffen, insbesondere auch das Problem der Extrapolation des Flugzeugkurses unberührt. Es wird vorausgesetzt, dass der Treffpunkt genau bekannt sei. Es interessiert hier nur die mathematische Form, in der die Flugbahnschar gespeichert werden kann.

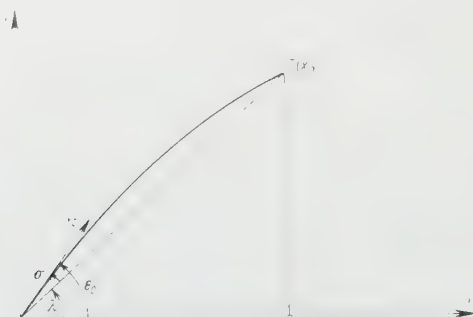
## 2. Die Flugbahnschar und ihre Parameter

### 2.1 Die Flugbahnschar

Die Flugbahnen seien auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, das in einer vertikalen Ebene (Schussebene) durch das Geschütz  $O(0, 0)$  und den Treffpunkt  $T(x, y)$  liege (vgl. Figur 1). Nun hängt die Flugbahn von einer

grossen Zahl von Parametern ab, zunächst natürlich von der Zeit  $t$ , den Anfangsbedingungen  $v_0$ ,  $\varepsilon_0$  und weiteren Funktionen, wie der Luftdichte  $\delta$ , der Lufttemperatur  $\theta$ , dem Wind  $w$ <sup>1)</sup>. Die Koordinaten eines Flugbahnpunktes hängen damit von den folgenden Grössen ab:

$$x = x(y, t; v_0, \varepsilon_0; \delta, \theta, w), \quad y = y(y, t; v_0, \varepsilon_0; \delta, \theta, w).$$



Figur I

Die Flugbahn im Koordinatensystem.

Da die Flugbahnen für eine Standardatmosphäre berechnet werden, ist es zweckmässiger, sie durch die Anfangsbedingungen, die Störungen der Anfangsbedingungen sowie die Abweichungen der wirklichen Atmosphäre zu charakterisieren<sup>2)</sup>:

$$x = x(y, t; v_0, \varepsilon_0; \Delta v_0, \Delta \varepsilon_0, \Delta \delta), \quad y = y(y, t; v_0, \varepsilon_0; \Delta v_0, \Delta \varepsilon_0, \Delta \delta).$$

In einem Feuerleitgerät sind häufig nicht die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  des Treffpunktes vorhanden, sondern seine Polarkoordinaten, nämlich die Entfernung  $r$  und der Lagewinkel  $\lambda$ . In diesem Falle gilt entsprechend wie oben

$$r = r(t, v_0, \lambda + \sigma, \Delta v_0, \Delta \sigma, \Delta \delta), \quad \lambda = \lambda(t, v_0, \lambda + \sigma, \Delta v_0, \Delta \sigma, \Delta \delta), \quad (2.1.1)$$

wo der Schusswinkel  $\sigma = \varepsilon_0 - \lambda$  ist.

Die Flugbahnschar hängt unter diesen Voraussetzungen von 5 Parametern  $t, \sigma, \Delta v_0, \Delta \sigma, \Delta \delta$  ab, da die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  als eine Konstante betrachtet werden darf.

<sup>1)</sup> Im folgenden soll von den Effekten, die normal zur Flugbahn wirken, wie Derivation und Seitenwind, abgesehen werden. Ihre Berücksichtigung im Feuerleitgerät geschieht ohne Schwierigkeiten auf eine entsprechende Weise.

<sup>2)</sup> Die Temperaturstörung  $\Delta \theta$  bleibt im weitem unberücksichtigt, obwohl ihr Einfluss nicht immer vernachlässigbar ist. Ebenso wird auf den Windeinfluss nicht eingegangen; er kann im Prinzip auf eine Störung der Anfangselemente zurückgeführt werden.



## 2.2 Realisation der Flugbahnschar

Damit stellt sich die Aufgabe, die Flugbahnschar (2.1.1) in Abhängigkeit von ihren Parametern in einer geeigneten Form zu realisieren. Nun ist die mechanische oder elektrische Realisation einer Funktion von fünf Variablen nicht ohne weiteres möglich. Handelt es sich um eine Funktion von nur zwei Variablen, etwa  $t$  und  $\varepsilon_0$ , dann kann sie durch Kurvenkörper erzeugt werden [2, 4]<sup>3)</sup>. Da deren Herstellung nicht nur kostspielig ist, sondern auch ihre Genauigkeit beschränkt, so sucht man sie zu vermeiden.

Bedeutend einfacher ist es, wenn nur Funktionen mit einer einzigen Variablen auftreten, da diese sowohl mechanisch (Kurvenscheiben, Gelenkwerke [6] usw.) als auch elektrisch (Potentiometer [5], Funktionsdrehkondensatoren) verhältnismässig leicht, genau und zugleich robust hergestellt werden können. – Dies führt zum Problem, die Funktionen (2.1.1) näherungsweise aus Funktionen mit einer Variablen zusammenzusetzen, wobei diese Funktionen noch durch Addition, Subtraktion und Multiplikation verknüpft werden dürfen. Dabei wird man aus Gründen der Betriebssicherheit und der Genauigkeit danach trachten, mit einem Minimum an Rechenelementen auszukommen. Die Aufgabe der Zerlegung in einfache Elemente könnte etwa durch Versuche gelöst werden, doch stösst dies auf manche Schwierigkeiten, weil die Zusammenhänge ziemlich kompliziert sind. Es wurde vorgeschlagen [3], die einzelnen Funktionen auf statistischem Weg zu bestimmen. Im folgenden Abschnitt soll kurz darauf eingegangen werden.

## 2.3 Statistische Approximation. Eine Alternative

Es soll hier die Grundidee für den Fall einer beliebigen<sup>4)</sup> Funktion  $F(x, y)$  mit zwei Variablen angegeben werden. Man macht den Ansatz

$$F(x, y) = X_1^F(x) + Y_1^F(y) + X_2^F(x) \cdot Y_2^F(y) + X_3^F(x) \cdot Y_3^F(y). \quad (2.3.1)$$

Die Funktion  $F(x, y)$  sei für die  $m \cdot n$  diskreten Werte  $(x_i, y_j)$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) gegeben. Man darf dabei voraussetzen, dass der Mittelwert aller gegebenen Funktionswerte null sei (was durch Subtraktion einer Konstanten, des Mittelwertes, von den einzelnen Funktionswerten stets erreichbar ist). Die Methode der kleinsten Quadrate liefert dann für die ersten Glieder

$$X_1^F(x_i) = \frac{1}{n} \sum_j F(x_i, y_j), \quad Y_1^F(y_j) = \frac{1}{m} \sum_i F(x_i, y_j).$$

Sind nun die Reste

$$R(x_i, y_j) = F(x_i, y_j) - [X_1^F(x_i) + Y_1^F(y_j)],$$

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 250.

<sup>4)</sup> Es darf sich dabei auch um rein empirisch gegebene Funktionen handeln.

dann folgen die nächsten Glieder aus

$$X_2^F(x_i) = \frac{\sum_j R(x_i, y_j) \cdot Y_1^F(y_j)}{\sum_j [Y_1^F(y_j)]^2}$$

und entsprechend  $Y_2^F(y_j)$ . Ähnlich können auch die folgenden Glieder  $X_3^F, Y_3^F$  erhalten werden.

Die Methode lässt sich auf Funktionen mit mehr als 2 Variablen erweitern, doch wird der Rechenaufwand bald sehr gross, da Summanden mit einer Funktion, mit Kombinationen von zwei, drei und mehr Funktionen auftreten. Kennt man den Einfluss der verschiedenen Glieder einigermaßen, dann lässt sich der allgemeine Ansatz entsprechend verkürzen.

Um zu einem Überblick über den Ansatz zu gelangen, besteht im Falle der Flugbahnen die Möglichkeit<sup>5)</sup>, die Tatsache auszunützen, dass die Funktionen als Lösungen von Differentialgleichungen gegeben sind. Allerdings sind diese nichtlinearen Differentialgleichungen 4. Ordnung bei Berücksichtigung aller Einflüsse so kompliziert, dass keine explizite Lösung möglich ist und nur numerische Verfahren zum Ziel führen. Der im folgenden eingeschlagene Weg beruht darauf, die Differentialgleichungen durch approximative zu ersetzen, die eine Lösung durch bekannte Funktionen gestatten, so dass deren Bau leicht zu überblicken ist und Schlüsse über die Form des Ansatzes (2.3.1) gezogen werden können<sup>6)</sup>. Dabei ergibt sich sofort noch eine Zerlegung des Problems, da die Normalflugbahnen und die Störungen getrennt behandelt werden dürfen, letztere mit Hilfe der Störungstheorie. – Die Erfahrung zeigt, dass man auf diesem Wege zu Hinweisen gelangt, die den noch erforderlichen Rechenaufwand erheblich verringern.

## 2.4 Die Differentialgleichungen der Bewegung

Werden nur der Luftwiderstand und das Geschossgewicht berücksichtigt, dann lauten die Differentialgleichungen der ebenen Geschossbewegung [1]

$$\ddot{x} = -W \frac{\dot{x}}{v}, \quad \ddot{y} = -W \frac{\dot{y}}{v} - g, \quad (2.4.1)$$

wo  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$  und  $W$  die Widerstandsfunktion ist. Vernachlässigt man die Abhängigkeit von der Machschen Zahl und wählt für die Luftdichte einen ex-

<sup>5)</sup> Die andere Möglichkeit, etwa Potenzreihen oder Fourier-Reihen zu Hilfe zu nehmen, scheitert gewöhnlich an der schlechten Konvergenz für grosse Zeiten  $t$ .

<sup>6)</sup> Dieser Weg ist offenbar immer dann gangbar, wenn die zu realisierenden Funktionen durch Differentialgleichungen bestimmt sind.



ponentiellen Verlauf, dann gilt für  $W$  der Ansatz

$$W = c e^{-a y} v^n, \quad (2.4.2)$$

wo  $c$ ,  $a$  und  $n$  Konstanten bedeuten.

Für die Anwendungen bei Feuerleitgeräten wäre es gegeben, die Differentialgleichungen in Polarkoordinaten zu formulieren, um direkt die gewünschten Grössen zu erhalten. Die entsprechenden Gleichungen sind aber wenig übersichtlich.

### 3. Darstellung der Normalflugbahn

#### 3.1 Lösung der Differentialgleichungen

Die Schwierigkeiten bei der expliziten Lösung des Systems (2.4.1) liegen in der Gestalt der Luftwiderstandsfunktion (2.4.2). Für  $a \neq 0$  führt allein der Fall  $n = 1$  auf eine lineare Differentialgleichung, deren Lösungen aber insofern nicht explizit angebar sind, als Quadraturen stehenbleiben. Für  $a = 0$  ist nur die Geschwindigkeit explizit ausdrückbar, während die Koordinaten wieder durch Quadraturen zu bestimmen sind. Einzig der Fall  $n = 1$  führt ans Ziel und soll daher im folgenden allein betrachtet werden<sup>7)</sup>.

Durch elementare Rechnungen findet man für  $a = 0$  und  $n = 1$  unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ( $t = 0$ )

$$x = y = 0, \quad \dot{x} = v_0 \cos \varepsilon_0, \quad \dot{y} = v_0 \sin \varepsilon_0$$

die Lösung

$$t = \frac{1}{c} \ln \frac{C - \operatorname{tg} \varepsilon}{C - \operatorname{tg} \varepsilon_0}$$

mit

$$C = \frac{g}{c v_0 \cos \varepsilon_0} + \operatorname{tg} \varepsilon_0$$

und daraus für die Koordinaten

$$x = \frac{v_0 \cos \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}), \quad y = \left[ \frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{c} + \frac{g}{c^2} \right] (1 - e^{-ct}) - \frac{g}{c} t. \quad (3.1.1)$$

#### 3.2 Ansatz für den Schusswinkel $\sigma(t, \lambda)$

Entsprechend den Überlegungen in Abschnitt 2.3 soll der Schusswinkel  $\sigma(t, \lambda)$  durch Funktionen  $T_i^\sigma(t)$ ,  $A_j^\sigma(\lambda)$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ) einer einzigen Variablen  $t$

<sup>7)</sup> Diese Vereinfachung ist insofern gerechtfertigt, als im Falle von Überschallgeschwindigkeiten der Ansatz  $W = c v^1$  für die gestreckten Flabbahnen eine sehr gute Näherung darstellt. Somit ist zu erwarten, dass sich auch über den Aufbau des Ansatzes (2.3.1) weitgehende Aussagen machen lassen, was durch die Erfahrung bestätigt wird.

bzw.  $\lambda$  in der Form

$$\sigma(t, \lambda) = T_1^\sigma(t) + A_1^\sigma(\lambda) + T_2^\sigma(t) + A_2^\sigma(\lambda) + \dots$$

dargestellt werden, wobei natürlich so wenig Glieder als möglich zu verwenden sind.

Aus den Beziehungen (3.1.1) folgt für den Lagewinkel  $\lambda$

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} \varepsilon_0 - \left( \frac{t}{1 - e^{-ct}} - \frac{1}{c} \right) \frac{g}{v_0 \cos \varepsilon_0}.$$

Berücksichtigt man  $\varepsilon_0 = \lambda - \sigma$  und beachtet, dass  $\sigma$  im allgemeinen klein ist, dann ergibt sich die für nicht zu grosse Zeiten gültige Näherung

$$\sigma = T_2^\sigma(t) \cos \varepsilon_0 \quad \text{mit} \quad T_2^\sigma(t) = \frac{g}{c v_0} \left( 1 - \frac{ct}{1 - e^{-ct}} \right). \quad (3.2.1)$$

In manchen Fällen wird man  $\cos \varepsilon_0 \approx \cos \lambda$  setzen dürfen<sup>8)</sup>:

$$\sigma = T_2^\sigma(t) \cos \lambda. \quad (3.2.2)$$

Geht man in der Näherung einen Schritt weiter, dann ist

$$\sigma [1 + T_2^\sigma(t) \sin \lambda] = T_2^\sigma(t) \cos \lambda$$

oder auch

$$\sigma = T_2^\sigma(t) \cos \lambda - T_3^\sigma(t) \sin 2\lambda \quad (3.2.3)$$

mit  $T_3^\sigma(t) = [T_2^\sigma(t)]^2/2$ .

Die Darstellung (3.2.3) zeigt, dass die ersten Glieder  $T_1^\sigma, A_1^\sigma$  gar nicht erforderlich sind<sup>9)</sup>.

### 3.3 Ansatz für die Entfernung $r(t, \lambda)$

Für die Entfernung  $r$  des Treffpunktes soll in analoger Weise gelten

$$r(t, \lambda) = T_1^r(t) + A_1^r(\lambda) + T_2^r(t) + A_2^r(\lambda) + \dots$$

<sup>8)</sup> Diese Näherung schliesst man bereits aus der Vakuumbahn, für die

$$r = \frac{2 v_0^2}{g} \cdot \frac{1}{\cos^2 \lambda} \cos(\lambda + \sigma) \sin \sigma$$

gilt, woraus

$$\sigma = \frac{g r}{2 v_0^2} \cos \lambda = T_2^r(t) \cos \lambda$$

folgt.

<sup>9)</sup> In der Folge werden die trigonometrischen Funktionen stehengelassen, obwohl es häufig zweckmässig sein wird, sie durch leicht davon abweichende Funktionen  $A_j(\lambda)$  zu ersetzen.

$r$  kann aus  $x$  oder  $y$  berechnet werden. Man unterscheidet zweckmässig zwei Fälle

1.  $x > y$  (untere Winkelgruppe);    2.  $x < y$  (obere Winkelgruppe).

Im ersten Falle eignet sich für  $r$  die Darstellung

$$r = \frac{x}{\cos \lambda} = \frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}) \cos \sigma - \frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}) \sin \sigma \operatorname{tg} \lambda. \quad (3.3.1)$$

Bedenkt man die Grössenordnung von  $\sigma$  sowie die Approximation (3.2.2), so erhält man

$$r = \frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}) - \frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}) T_2^\sigma(t) \sin \lambda,$$

woraus man die Form

$$r = T_1^r(t) - T_2^r(t) \sin \lambda \quad (3.3.2)$$

abliest, mit den Abkürzungen

$$T_1^r(t) = \frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}), \quad T_2^r(t) = T_1^r(t) \cdot T_2^\sigma(t).$$

Um die Näherung einen Schritt weiterzutreiben, können in (3.3.1) die ersten Glieder der Reihenentwicklungen von  $\cos \sigma$  und  $\sin \sigma$  eingeführt werden. Dies liefert

$$r(t, \lambda) = T_1^{*r}(t) - T_2^r(t) \sin \lambda - T_3^r(t) \cos 2\lambda, \quad (3.3.3)$$

wo sich  $T_1^{*r}$  und  $T_3^r$  durch  $T_1^r$  und  $T_2^\sigma$  ausdrücken lassen, womit gegebenenfalls noch Funktionselemente eingespart werden können<sup>10)</sup>. Jedenfalls lehrt die Darstellung (3.3.3) sofort, dass eine Funktion  $A_1^r(\lambda)$  nicht auftritt.

Für den Fall des oberen Winkelbereiches ergibt sich  $r$  aus  $r = y/\sin \lambda$ . In einer ersten Näherung folgt wieder die Beziehung (3.3.2) mit denselben Funktionen. Entsprechend kann man die Darstellung um ein weiteres Glied  $T_3^r \cdot A_3^r$  ergänzen.

## 4. Ansatz für die Störungen der Flugbahn

### 4.1 Die allgemeinen Störungsdifferentialgleichungen

Die Flugbahnen sind für Normalbedingungen berechnet, von denen die wirklichen Verhältnisse mehr oder weniger stark abweichen können. Solche Störungen sind Änderungen des Elevationswinkels  $\varepsilon_0$ , der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , Abweichungen der Luftdichte vom Standardverlauf, Wind usw.

<sup>10)</sup> Sollte noch ein Ausdruck mit  $\cos \lambda$  erforderlich sein, dann kann dieser mit  $T_2^r \sin \lambda$  zu einem Glied  $T_2^{*r} \sin(\lambda - \lambda_0)$  vereinigt werden.

Sind die Störungen klein, dann können die Abweichungen des Ortes vom Normalort in erster Näherung mit Hilfe der Störungstheorie berechnet werden.

Es seien zunächst nur die Störungen von  $c$  und  $v_0$  betrachtet, und zwar seien die neuen Werte  $c + \gamma$  und  $v_0 + \Delta v_0$ . Für die gestörten Koordinaten der Flugbahnpunkte gelte

$$X = x + \xi, \quad Y = y + \eta, \quad (4.1.1)$$

wo  $\xi$  und  $\eta$  die Verschiebungen des Flugbahnpunktes bedeuten. Nun erfüllen  $X$  und  $Y$  auch die Differentialgleichungen (2.4.1). Mit Hilfe des Luftwiderstandsgesetzes (2.4.2) können beispielsweise durch Reihenentwicklung die zugehörigen Variationsgleichungen abgeleitet werden. Nach einer längeren Rechnung folgen für  $\xi$  und  $\eta$  die linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} = -c e^{-ay} v^{n-1} \left\{ \left[ (n-1) \frac{\dot{x}^2}{v^2} + 1 \right] \dot{\xi} + (n-1) \frac{\dot{x}\dot{y}}{v^2} \dot{\eta} - a \dot{x} \eta + \frac{\gamma}{c} \dot{x} \right\}, \\ \ddot{\eta} = -c e^{-ay} v^{n-1} \left\{ (n-1) \frac{\dot{x}\dot{y}}{v^2} \dot{\xi} + \left[ (n-1) \frac{\dot{y}^2}{v^2} + 1 \right] \dot{\eta} - a \dot{y} \eta + \frac{\gamma}{c} \dot{y} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Diese Differentialgleichungen, in die  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  als Lösungen von (2.4.1) eingehen, lassen keine explizite Integration durch bekannte Funktionen zu, so dass man auf numerische Methoden angewiesen ist.

Selbst im Falle  $n = 1$ , für den sich die Gleichungen erheblich vereinfachen, ist diese Vereinfachung nicht wesentlich. Aus diesem Grunde soll weiterhin nur der Spezialfall  $n = 1$ ,  $a = 0$  betrachtet werden, um explizite Lösungen zu erhalten. Auf diese Weise kann die Form der zu approximierenden Funktionen genauer untersucht werden.

#### 4.2 Explizite Lösung für den Fall $n = 1$ , $a = 0$

Obwohl in diesem Falle für die Normalflugbahn eine konstante Luftdichte  $\delta$  vorausgesetzt wird, lassen sich Dichtestörungen  $\Delta\delta$  berücksichtigen, da zufolge der Beziehung

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{\Delta c}{c}$$

die Dichtestörungen als Störungen des ballistischen Koeffizienten  $c$  aufgefasst werden können. Es sollen die folgenden Störungen berechnet werden:

1. Störung der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 \rightarrow v_0 + \Delta v_0$ ;
2. Störung des Elevationswinkels  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_0$ ;
3. Störung des ballistischen Koeffizienten  $c \rightarrow c + \gamma$ .

Die Variationsgleichungen (4.1.2) nehmen nun die einfache Gestalt an:

$$\ddot{\xi} + c \dot{\xi} = -\gamma \dot{x}, \quad \dot{\eta} + c \eta = -\gamma \dot{y}. \quad (4.2.1)$$

Die inhomogenen Glieder mit  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  sind nach (3.1.1) bekannte Funktionen der Zeit. Die drei erwähnten Fälle unterscheiden sich durch die Anfangsbedingungen und die inhomogenen Glieder.

4.2.1  $v_0$ -Störung. Das System (4.2.1) ist mit  $\gamma = 0$  unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen für  $t = 0$

$$\xi(0) = \eta(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = \Delta v_0 \cos \varepsilon_0, \quad \dot{\eta}(0) = \Delta v_0 \sin \varepsilon_0$$

zu lösen. Es ergibt sich

$$\xi_{v_0} = \frac{\cos \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta v_0, \quad \eta_{v_0} = \frac{\sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta v_0. \quad (4.2.2)$$

4.2.2  $\varepsilon_0$ -Störung. In diesem Falle ist  $\gamma = 0$ , und die Anfangsbedingungen lauten ( $t = 0$ )

$$\xi(0) = \eta(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = -v_0 \sin \varepsilon_0 \Delta \varepsilon_0, \quad \dot{\eta}(0) = +v_0 \cos \varepsilon_0 \Delta \varepsilon_0.$$

Die Lösung ist

$$\xi_{\varepsilon_0} = -\frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta \varepsilon_0, \quad \eta_{\varepsilon_0} = +\frac{v_0 \cos \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta \varepsilon_0. \quad (4.2.3)$$

4.2.3  $c$ -Störung. Die Differentialgleichungen (4.2.1) lauten, ausführlich geschrieben,

$$\ddot{\xi} + c \dot{\xi} = -\gamma v_0 \cos \varepsilon_0 e^{-ct}, \quad \ddot{\eta} + c \dot{\eta} = -\gamma \left( \frac{g}{c} + v_0 \sin \varepsilon_0 \right) e^{-ct} + \gamma \frac{g}{c}.$$

Anfangsbedingungen für  $t = 0$

$$\xi(0) = \eta(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = 0.$$

Als Lösung findet man

$$\left. \begin{aligned} \xi_\gamma &= -\frac{v_0 \cos \varepsilon_0}{c^2} [(1 - e^{-ct}) - ct e^{-ct}] \gamma, \\ \eta_\gamma &= \left\{ -\frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{c^2} [(1 - e^{-ct}) - ct e^{-ct}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{c^3} [ct (e^{-ct} + 1) - 2(1 - e^{-ct})] \right\} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4)$$



4.2.4 *Folgerungen.* Aus den Lösungen (4.2.2) und (4.2.3) ergeben sich ohne weiteres zwei bemerkenswerte Beziehungen für die durch die Störungen  $\Delta v_0$  und  $\Delta \varepsilon_0$  bewirkten Verschiebungen des Treffpunktes  $T$ .

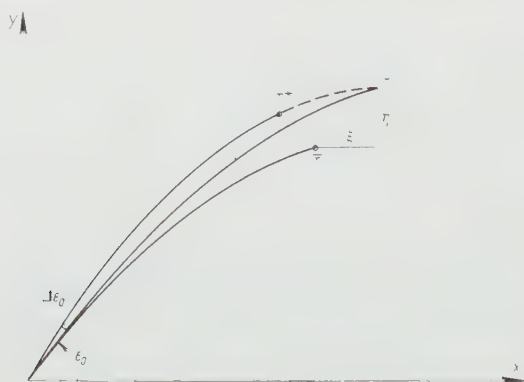
**Satz 1.** *Ist der Luftwiderstand proportional zur Geschwindigkeit und die Luftdichte konstant, dann ist die durch eine Störung  $\Delta v_0$  der Anfangsgeschwindigkeit bewirkte Verschiebung des Treffpunktes parallel zur Abschussrichtung.*

**Satz 2.** *Unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 1 ist die durch eine Störung  $\Delta \varepsilon_0$  des Elevationswinkels bedingte Verschiebung des Treffpunktes normal zur Abschussvorrichtung.*

Näherungsweise gelten diese Eigenschaften der Treffpunktverschiebung auch für die allgemeinen (empirischen) Luftwiderstandsgesetze<sup>11)</sup>.

### 4.3 Die Korrekturen im Falle einer $v_0$ -Störung

4.3.1 *Die Korrekturen  $\Delta t_{v_0}$  und  $\Delta \varepsilon_{v_0}$ .* Unter dem Einfluss einer Störung gelangt das Geschoss in der Zeit  $t$  nicht nach dem Punkt  $T(x, y)$ , sondern nach  $\bar{T}(X, Y)$ . Soll es wiederum durch den Punkt  $T$  gehen, dann muss es unter dem Winkel  $\varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_0$  abgefeuert werden und wird dabei die Zeit  $t + \Delta t$  benötigen



Figur 2

Die gestörte und die korrigierte Flugbahn.

(vgl. Figur 2). Zu einer gegebenen Störung  $\Delta v_0$  sind nun die Korrekturen  $\Delta \varepsilon_{v_0}$  und  $\Delta t_{v_0}$  zu berechnen. Es gilt in erster Näherung

$$-\xi = \dot{X} \Delta t, \quad -\eta = \dot{Y} \Delta t, \quad (4.3.1)$$

<sup>11)</sup> Man überzeugt sich leicht, dass die Sätze 1 und 2 auch für die Flugbahn im Vakuum gelten.

wobei die Störungen  $\xi$  und  $\eta$  durch die folgenden Ausdrücke gegeben sind:

$$\xi = \xi_{v_0} + \xi_{\varepsilon_0}, \quad \eta = \eta_{v_0} + \eta_{\varepsilon_0}, \quad (4.3.2)$$

und weiter ist

$$\dot{X} = \dot{x} + \dot{\xi}_{v_0} + \dot{\xi}_{\varepsilon_0}, \quad \dot{Y} = \dot{y} + \dot{\eta}_{v_0} + \dot{\eta}_{\varepsilon_0}. \quad (4.3.3)$$

Werden die Beziehungen (4.2.2) und (4.2.3) unter Beachtung von (4.3.2) und (4.3.3) in die Gleichungen (4.3.1) eingesetzt, dann bestimmen sich die unbekannten Grössen  $\Delta t$  und  $\Delta \varepsilon_0$  aus dem folgenden Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta \varepsilon_0 + (v_0 + \Delta v_0) \cos \varepsilon_0 e^{-ct} \Delta t \\ & \quad - v_0 \sin \varepsilon_0 e^{-ct} \Delta \varepsilon_0 \Delta t = \frac{\cos \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta v_0, \\ & - \frac{v_0 \cos \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta \varepsilon_0 + \left[ (v_0 + \Delta v_0) \sin \varepsilon_0 e^{-ct} - \frac{g}{c} (1 - e^{-ct}) \right] \Delta t \\ & \quad + v_0 \cos \varepsilon_0 e^{-ct} \Delta \varepsilon_0 \Delta t = \frac{\sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct}) \Delta v_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.4)$$

Da  $\Delta \varepsilon_0$  und  $\Delta t$  kleine Grössen sind, dürfen wie eine Abschätzung zeigt in (4.3.4) die quadratischen Glieder ohne nennenswerten Fehler weggelassen werden<sup>12)</sup>.

Als Lösung findet man die folgenden Korrekturen

$$\Delta t_{v_0} = - \frac{\frac{1}{c} (1 - e^{-ct})}{v_0 e^{-ct} - \frac{g \sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct})} \Delta v_0 \quad (4.3.5)$$

und

$$\Delta \varepsilon_{v_0} = - \frac{\frac{g}{v_0} \cos \varepsilon_0 \frac{1}{c} (1 - e^{-ct})}{v_0 e^{-ct} - \frac{g \sin \varepsilon_0}{c} (1 - e^{-ct})} \Delta v_0. \quad (4.3.6)$$

Man erkennt sofort, dass zwischen den beiden Werten die einfache Relation

$$\Delta \varepsilon_{v_0} = \frac{g}{v_0} \cos \varepsilon_0 \Delta t_{v_0} \quad (4.3.7)$$

besteht. Sie kann dazu benützt werden, um aus der Kenntnis der einen Korrektur sofort auf einfache Weise die andere Korrektur zu berechnen.

<sup>12)</sup> Dies läuft darauf hinaus, im System (4.3.1)  $\dot{X}$  durch  $\dot{x}$  und ebenso  $\dot{Y}$  durch  $\dot{y}$  zu ersetzen, was im allgemeinen eine zulässige Approximation ist.

4.3.2 *Approximation durch Funktionen mit einer Variablen.* Um nun die Korrekturen analog wie die Flugbahnelemente durch Entwicklungen von der Form (2.3.1) darzustellen, werde (4.3.5) in eine Reihe entwickelt. Es wird

$$\Delta t_{v_0} = -\frac{v_0}{c} (1 - e^{-ct}) \frac{e^{ct}}{v_0} \left[ 1 + \frac{g \sin \varepsilon_0}{c v_0} (e^{ct} - 1) + \dots \right] \frac{\Delta v_0}{v_0}.$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$T_1^{v_0}(t) = \frac{e^{ct}}{v_0}, \quad T_2^{v_0}(t) = \frac{g}{v_0^2 c} (e^{2ct} - e^{ct})$$

kann man dafür

$$\Delta t_{v_0} = -T_1^r(t) [T_1^{v_0}(t) + T_2^{v_0}(t) \sin \varepsilon_0 + \dots] \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad (4.3.8)$$

setzen. Führt man anstelle des Elevationswinkels  $\varepsilon_0$  den Lagewinkel  $\lambda$  ein, so ergibt sich die weitere Darstellung

$$\Delta t_{v_0} = -T_1^r(t) [T_1^{*v_0}(t) + T_2^{v_0}(t) \sin \lambda + T_3^{*v_0}(t) \cos 2\lambda] \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad (4.3.9)$$

mit den Funktionen

$$T_1^{*v_0}(t) = T_1^{v_0}(t) + \frac{1}{2} T_2^{v_0}(t) \cdot T_2^\sigma(t), \quad T_3^{*v_0}(t) = \frac{1}{2} T_2^{v_0}(t) \cdot T_2^\sigma(t).$$

In manchen Fällen wird die einfachere Form

$$\Delta t_{v_0} = -T_1^r(t) [T_1^{v_0}(t) + T_2^{v_0}(t) \sin \lambda] \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad (4.3.8^*)$$

ausreichen.

Wie die Darstellungen (4.3.8) und (4.3.9) zeigen, lässt sich die früher in (3.3.2) schon aufgetretene Funktion  $T_1^r(t)$  als Faktor abspalten, was natürlich eine Vereinfachung bedeutet.

Die Korrektur des Schusswinkels  $\sigma$  folgt aus (4.3.8) sofort mit Hilfe der Beziehung (4.3.7)

$$\Delta \sigma_{v_0} = -T_1^r(t) \frac{g}{v_0} \cos \varepsilon_0 [T_1^{v_0}(t) + T_2^{v_0}(t) \sin \varepsilon_0 + \dots] \frac{\Delta v_0}{v_0}. \quad (4.3.10)$$

4.3.3 *Der Fall grosser Störungen  $\Delta v_0$ .* Da in der Praxis oft Störungen auftreten, für die die lineare Störungstheorie nicht mehr ausreichend ist, so können in einfacher Art und im allgemeinen genügend genau noch in  $\Delta v_0$  quadratische Glieder hinzugefügt werden, indem man setzt

$$\Delta t_{v_0} = -T_1^r(t) [T_1^{v_0}(t) + \dots] \Phi \left( \frac{\Delta v_0}{v_0} \right)$$

mit

$$\Phi \left( \frac{\Delta v_0}{v_0} \right) = \frac{\Delta v_0}{v_0} + \alpha \left( \frac{\Delta v_0}{v_0} \right)^2, \quad (4.3.11)$$

wo  $\alpha$  eine Konstante bedeutet.

4.3.4 *Die Distanzkorrektur  $\Delta r_{v_0}$ .* Unter Umständen ist es vorteilhaft, auch die Korrektur der Zielentfernung einzuführen

$$r^*(t + \Delta t, \lambda) = r(t, \lambda) + \Delta r_{v_0}(t, \lambda).$$

Hier bedeutet  $r^*$  die gemessene Distanz. Daraus lässt sich direkt die korrigierte Flugzeit entnehmen.

Um  $\Delta r_{v_0}$  zu erhalten, geht man am besten von der Beziehung

$$|r_{v_0}| \approx \frac{\xi}{\cos \lambda} \approx \frac{\xi}{\cos \varepsilon_0}$$

aus, wo wegen (4.2.2) und (4.2.3)

$$\xi = \xi_{v_0} + \xi_{\varepsilon_0} = \cos \varepsilon_0 T_1^r(t) \frac{\Delta v_0}{v_0} - \sin \varepsilon_0 T_1^r(t) \Delta \varepsilon_0$$

zu setzen ist. Mit (4.3.10) folgt schliesslich

$$\Delta r_{v_0} = T_1^r(t) [1 + T_1^{\Delta r}(t) + T_2^{\Delta r}(t) \sin \lambda] \frac{\Delta v_0}{v_0}. \quad (4.3.12)$$

Es bedeutet

$$T_1^{\Delta r}(t) = \frac{g}{v_0} T_1^r(t) T_1^{v_0}(t) \quad \text{und} \quad T_2^{\Delta r}(t) = \frac{g}{v_0} T_1^r(t) T_2^{v_0}(t).$$

Entwickelt man in den Ausdrücken auf der rechten Seite noch die Exponentialfunktionen nach der Zeit, so erkennt man, dass die Reihen erst mit  $t^1$  beginnen, so dass meist mit genügender Genauigkeit

$$\Delta r_{v_0} = T_1^r(t) \left[ 1 + \frac{g}{v_0} t + \frac{g}{v_0^2} t \sin \varepsilon_0 \right] \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad (4.3.13)$$

gesetzt werden darf.

Auch hier lässt sich natürlich für den Fall grosser Geschwindigkeitsänderungen  $\Delta v_0$  als Faktor auf der rechten Seite ein quadratischer Ausdruck

$$\Phi = \frac{\Delta v_0}{v_0} + \alpha \left( \frac{\Delta v_0}{v_0} \right)^2$$

setzen. Erwähnenswert ist, dass in den obigen Darstellungen wiederum der Faktor  $T_1^r(t)$  auftritt.

#### 4.4 Die Korrekturen im Falle einer $c$ -Störung

4.4.1 *Die Korrekturen  $\Delta t_\gamma$  und  $\Delta \varepsilon_\gamma$ .* Für die zu einer gegebenen Änderung  $\gamma$  des ballistischen Koeffizienten  $c$  erforderlichen Korrekturen  $\Delta t_\gamma$  und  $\Delta \varepsilon_\gamma$  gelten die zu (4.3.1) analogen Beziehungen

$$-\dot{\xi} = \dot{X} \Delta t, \quad -\dot{\eta} = \dot{Y} \Delta t, \quad (4.4.1)$$

wobei in diesem Falle

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_{\varepsilon_0} + \xi_\gamma, & \eta &= \eta_{\varepsilon_0} + \eta_\gamma, \\ \dot{X} &= \dot{x} + \dot{\xi}_{\varepsilon_0} + \dot{\xi}_\gamma, & \dot{Y} &= \dot{y} + \dot{\eta}_{\varepsilon_0} + \dot{\eta}_\gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.4.2)$$

zu setzen ist.

Führt man die Ausdrücke (4.2.3) und (4.2.4) ein, dann ergibt sich ein Gleichungssystem, das nach der Unterdrückung der kleinen quadratischen Glieder die Form

$$\left. \begin{aligned} A \sin \varepsilon_0 \Delta \varepsilon_\gamma - a \cos \varepsilon_0 \Delta t_\gamma &= B \cos \varepsilon_0 \gamma \\ A \cos \varepsilon_0 \Delta \varepsilon_\gamma + \left( a \sin \varepsilon_0 - \frac{g}{v_0} A \right) \Delta t_\gamma &= -(B \sin \varepsilon_0 + G) \gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

annimmt, mit Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $G$  und  $a$ , die Funktionen der Zeit sind. Nach einer längeren Rechnung findet man für die Zeitkorrektur

$$\Delta t_\gamma = \frac{\frac{1}{c^2} [1 - e^{-ct} - ct e^{-ct}] - \frac{g \sin \varepsilon_0}{v_0 c^3} [ct(e^{-ct} + 1) - 2(1 - e^{-ct})]}{e^{-ct} - \frac{g \sin \varepsilon_0}{v_0 c} (1 - e^{-ct})} \gamma \quad (4.4.4)$$

und für die Korrektur des Schusswinkels

$$\Delta \varepsilon_\gamma = \frac{g \cos \varepsilon_0}{c^2 v_0} \cdot \frac{e^{ct} - e^{-ct} - 2ct}{(1 - e^{-ct}) \left[ 1 - \frac{g \sin \varepsilon_0}{v_0 c} (e^{ct} - 1) \right]} \gamma. \quad (4.4.5)$$

Für den letzten Ausdruck lässt sich auch

$$\Delta \varepsilon_\gamma = \frac{2g \cos \varepsilon_0}{c^2 v_0} \cdot \frac{\sinh ct - ct}{\sinh ct - (1 + 2k)(\cosh ct - 1)} \gamma$$

schreiben, wo  $k = g \sin \varepsilon_0 / v_0 c$  bedeutet.

4.4.2 *Approximation durch Funktionen einer Variablen.* Die Entwicklung des Ausdrucks (4.4.5) nach Potenzen von  $t$  liefert

$$\Delta \varepsilon_\gamma = \cos \varepsilon_0 \frac{g}{v_0} \left[ \frac{1}{3} t^2 + \frac{cH}{6} t^3 + \frac{c^2}{180} (15H^2 - 7) t^4 + \dots \right] \gamma \quad (4.4.6)$$

mit  $H = 1 + 2k$ .



Bemerkenswert ist, dass die Reihe erst mit  $t^2$  beginnt. Konkrete Beispiele lehren, dass bereits das erste Glied eine sehr gute Näherung darstellt, so dass man in den meisten Fällen für die Schusswinkelkorrektur

$$\Delta \varepsilon_\gamma = k_2 t^2 \cos \varepsilon_0 \frac{\gamma}{c} \quad (4.4.7)$$

setzen darf.

4.4.3 Die Distanzkorrektur  $\Delta r_\gamma$ . Die Distanzkorrektur ergibt sich aus

$$\Delta r_\gamma \approx \frac{\ddot{z}}{\cos \lambda} \approx \frac{\ddot{z}}{\cos \varepsilon_0}.$$

Setzt man (4.4.7) in (4.2.3) ein, dann folgt zusammen mit der Beziehung (4.2.4) die Formel

$$\Delta r_\gamma = -T_1^r(t) [T_1^\gamma(t) + k_2 t^2 \sin \varepsilon_0] \frac{\gamma}{c}. \quad (4.4.8)$$

Es ist  $T_1^\gamma = c t / (e^{c t} - 1)^{13}$  und  $T_2^\gamma = k_2 t^2$ .

Die Formel (4.4.8) zeigt auch diesmal wieder das Auftreten des Faktors  $T_1^r(t)$ .

Sind die Störungen  $\gamma/c$  gross, wie dies gelegentlich auftreten kann, dann lässt sich dies durch die Einführung eines quadratischen Ausdruckes

$$\Psi\left(\frac{\gamma}{c}\right) = \frac{\gamma}{c} + \beta \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2$$

berücksichtigen; damit wird eine Näherung erzielt, die praktisch ausreichend ist.

## 5. Ergebnis

Benützt man die Differentialgleichungen der Geschossbewegung mit einem näherungsweise gültigen Luftwiderstandsgesetz, das eine explizite Lösung gestattet, dann lassen sich daraus wichtige Hinweise gewinnen für die zum Aufbau von Flugbahnrechnern in Feuerleitgeräten benötigten Darstellungen der verschiedenen Grössen durch Funktionen einer einzigen Variablen. Für die wichtigsten Bahnelemente ergeben sich dabei die folgenden Formeln, die auch die Fälle grossen, nicht mehr linearer Störungen erfassen<sup>9)</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t, \lambda) = T_1^r(t) - T_2^r(t) \sin \lambda - T_2^r(t) \cos 2 \lambda, \\ \Delta r_{v_0} = T_1^r(t) [1 + T_1^{\Delta r}(t) + T_2^{\Delta r}(t) \sin \lambda] \Phi\left(\frac{\Delta v_0}{v_0}\right), \\ \Delta r_\gamma = -T_1^r(t) [T_1^\gamma(t) + k_2 t^2 \sin \varepsilon_0] \Psi\left(\frac{\gamma}{c}\right), \end{array} \right.$$

<sup>13)</sup> Dieser Ausdruck bleibt auch für  $t \rightarrow 0$  endlich, da  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{c t}{e^{c t} - 1} = 1$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t, \lambda) = T_2^\sigma(t) \cos \lambda - T_3^\sigma(t) \sin 2 \lambda, \\ \Delta \sigma_{v_0} = -T_1'(t) \frac{g}{v_0} \cos \varepsilon_0 [T_1^{v_0}(t) + T_2^{v_0}(t) \sin \varepsilon_0] \Phi \left( \frac{\Delta v_0}{v_0} \right), \\ \Delta \sigma_\gamma = k_2 t^2 \cos \varepsilon_0 \Psi \left( \frac{\gamma}{c} \right). \end{array} \right.$$

Die einzelnen Funktionen  $T_1', \dots, T_3'$ , die durch spezielle Funktionselemente zu realisieren sind, können nun auf Grund von exakten Flugbahnberechnungen noch näher bestimmt und den konkreten Verhältnissen angepasst werden. Auf diese Weise wird eine Genauigkeit der Darstellung erzielt, die den Anforderungen der Praxis gerecht zu werden vermag.

Die vorliegende Arbeit stellt die Erweiterung einer Untersuchung dar, die seinerzeit für die Firma Contraves AG, Zürich, ausgeführt wurde. Es sei auch an dieser Stelle Herrn Dr. A. GERBER, Direktor der Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon, Bührle & Co., und der Contraves AG, Zürich, für sein Interesse an dieser Untersuchung bestens gedankt.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. ATHEN, *Ballistik* (Leipzig 1941).
- [2] P. CURTI, *Äussere Ballistik* (Frauenfeld 1945).
- [3] W. PIKE und T. R. SILVERBERG, *Designing Mechanical Computers*, Machine Design 1952, 131–137, 159–163.
- [4] A. P. SPEISER, *Koordinatensysteme in Feuerleitgeräten*, Z. angew. Math. Phys. 7, 1–16 (1956).
- [5] A. P. SPEISER, *Rechengeräte mit linearen Potentiometern*, Z. angew. Math. Phys. 3, 449–460 (1952).
- [6] A. SVOBODA, *Computing Mechanisms and Linkages* (New York 1948).

#### Summary

It is shown how the trajectories of antiaircraft shells and their perturbations can be approximated with sufficient accuracy in terms containing functions of only one single variable. In directors, these functions can be realized by suitable function producing calculation elements.

(Eingegangen: 26. November 1957.)

# Möglichkeiten und Grenzen des Infrarotsehens

VON TONI SCHNEIDER UND PETER SCHRANZ, Zürich <sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Bildwandlergeräte vollziehen die Transformation von einem Gegenstand in ein Bild mit anderem Spektrum und anderer Intensität durch einen Umwandlungs- sowie Verstärkungs Vorgang in einer unmerklichen Zeitspanne. (Unter Gegenstand und Bild wird dabei eine ebene Konfiguration von Strahlungsdichten verstanden.)

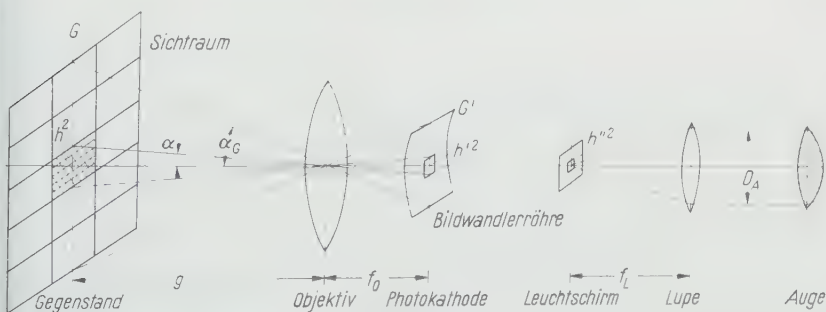
Die Bedeutung solcher Geräte liegt in folgendem:

- a) Man kann Bildwandlerphotokathoden herstellen, die auch auf unsichtbare Bereiche des Spektrums ansprechen;
- b) man kann schwache «Gegenstände» auf ein Helligkeitsniveau heben, das den von der Leuchtdichte abhängigen Sehfunktionen besser angepasst ist.

Ausgehend von den Strahlungsgesetzen bei optischer Abbildung, dem Umwandlungs- und Verstärkungs Vorgang in der Bildwandlerröhre sowie den Strahlungsdichteschwankungen, behandelt dieser Bericht Grenzen und Möglichkeiten des Infrarotsehens unter der Voraussetzung einer bestimmten Sehanordnung.

## 2. Begriffe und schematische Anordnung

Aus der Fülle der Möglichkeiten wird den folgenden Betrachtungen eine Gerätevariante zugrunde gelegt, deren schematische Anordnung aus der Figur hervorgeht.



<sup>1)</sup> Physikalisches Laboratorium der Albiswerk Zürich AG.

$G$	Gesichtsfeld des Infrarotsichtgerätes (gesamte auf die wirksame Photokathode abbildbare Fläche);
$G'$	gesamte wirksame Fläche der Photokathode;
$h^2$	Quadrätchen im Gesichtsfeld;
$h'^2$	optisches Kathodenbild von $h^2$ ;
$h''^2$	Leuchtschirmbild von $h'^2$ ;
$S$	Strahlungsdichte von $h^2$ [ $\text{W}/\text{cm}^2$ ];
$E'$	Bestrahlungsstärke des optischen Bildes $h'^2$ [ $\text{W}/\text{cm}^2$ ];
$S''$	Strahlungsdichte des Leuchtschirmbildes $h''^2$ [ $\text{W}/\text{cm}^2$ ];
$D_0$	Eintrittspupille des Objektivs [cm];
$f_0$	Objektivbrennweite [cm];
$\tau_0$	Transmission des Objektivs [%];
$1/K_T$	effektive Öffnung des Objektivs; $1/K_T = \sqrt{\tau_0 D_0/f_0}$ ;
$g$	Abstand Gegenstand-Objektiv;
$m_R$	Abbildungsmaßstab der Röhre;
$D_K$	wirksamer Kathodendurchmesser [cm];
$U_K$	Unschärfe des Gerätes, bezogen auf die Kathode [cm];
$k(\lambda)$	relative spektrale Empfindlichkeit der Photokathode [%];
$l(\lambda)$	relatives spektrales Emissionsvermögen des Leuchtschirms [%];
$v(\lambda)$	relative, spektrale Hellempfindlichkeit des Auges [%];
$e_K$	integrale Kathodenempfindlichkeit [ $\text{A}/\text{W}$ ];
$a_S$	Schirmausbeute [%];
$p$	Konstante; hängt von der Schirmstruktur ab;
$\Delta U$	$\Delta U = U - U_0$ ;
$U$	Beschleunigungsspannung [V];
$U_0$	«dead voltage» [V];
$D_A$	Eintrittspupille des Auges [cm]; Funktion der Schirmleuchtdichte [ $1^2$ ];
$f_L$	Lupenbrennweite [cm];
$\tau_L$	Transmission der Lupe [%];
$\Gamma_L$	Lupenvergrößerung

$$\Gamma_L = \frac{25}{f_L} ; \quad (2.1)$$

$\Gamma$  Gesamtvergrößerung des Gerätes

$$\Gamma = \frac{f_0}{f_L} m_R ; \quad (2.2)$$

$\alpha$  Winkel, unter dem  $h^2$  erscheint,

$$(\alpha) = [\text{min}] ; \quad (2.3)$$

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 259.

$\alpha_G$  Gesichtsfeldwinkel des Gerätes

$$\tan \frac{\alpha_G}{2} f_0 = \frac{D_K}{2}; \quad (2.4)$$

$\alpha^2 I^2$  aus geometrisch-optischen Beziehungen folgt:

$$h^2 m_0^2 m_R^2 \frac{1}{f_L^2} \approx \frac{h^2}{g^2} I^2 = I^2 \alpha^2 \left( \frac{2\pi}{360 \cdot 60} \right)^2. \quad (2.5)$$

### 3. «Sehvorgang»

Bekanntlich besteht bei optischer Abbildung zwischen der Strahlungsdichte des «Gegenstandes» und der Bestrahlungsstärke des «Bildes» die Beziehung

$$E = \frac{\pi S}{4 K_T^2}, \quad (3.1)$$

wenn nur der Abbildungsmaßstab  $m \ll 1$  ist. Die Bestrahlungsstärke auf der Photokathode, hervorgerufen von einem «Gegenstand», beträgt demnach

$$E' = \frac{\pi S}{4 K_T^2}; \quad (3.2)$$

unter  $S$  wird dabei der von der Photokathode verwertbare Anteil verstanden, das heisst

$$S = \int S(\lambda) K(\lambda) d\lambda. \quad (3.3)$$

$S(\lambda)$  spektrale Emission des Gegenstandes [W/cm<sup>2</sup>].

Die Strahlungsdichte des Leuchtschirmes, hervorgerufen durch  $E'$ , ist:

$$\pi S'' = E' m_R^{-2} \eta = E' m_R^{-2} e_K \Delta U^P a_s. \quad (3.4)$$

$\eta$  Umwandlungsfaktor [W/W].

Offensichtlich beträgt die Strahlungsdichteverstärkung der mit einem Objektiv bewaffneten Bildwandlerröhre

$$\frac{S''}{S} = \frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} = \frac{e_K \Delta U^P a_s}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2}. \quad (3.5)$$

Im menschlichen Auge gelangt von der Strahlungsdichte  $S''$  des Leuchtschirmes nur der Bruchteil

$$B = \beta S'' [\text{sb}] \quad (3.6)$$

zur Verwertung, wobei

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\int l(\lambda) d\lambda}{\int l(\lambda) V(\lambda) d\lambda} \cdot \frac{1}{M}. \quad (3.7)$$

$M$  Mechanisches Lichtäquivalent  $[lm/W]$ .

Auf Grund der Dualnatur des Lichtes kann die Abstrahlung eines Leuchtschirmflächenelementes als Photonenemission aufgefasst werden. Die ausgesandten Photonen sind über die Zeit in solcher Weise verteilt, dass ihre durchschnittliche Zahl pro Flächen- und Zeiteinheit in einem gegebenen Raumwinkel proportional der Leuchtdichte ist:

$$N = \varkappa B h''^2. \quad (3.8)$$

$N$  Anzahl Photonen pro Sekunde;  $\varkappa$  in den Halbraum ausgesandte Photonen-zahl pro Lumen.

Von diesen  $N$  in den Halbraum emittierten Photonen kann das mit einer Lupe bewaffnete Auge nur den Bruchteil

$$N' = N \tau_L \frac{D_A^2}{4 f_L^2} \quad (3.9)$$

auffangen.

Das fragliche Leuchtschirmelement ( $h''^2$ ) zu sehen, besteht in der Fähigkeit des Auges, aus der Menge und Verteilung der auf die Netzhaut auftreffenden Photonen Informationen zu schöpfen.

Sei  $h''^2$  ein  $h''^2$  benachbartes Leuchtschirmelement, hervorgerufen durch zwei benachbarte Flächenelemente in der Gegenstandsebene, dann beträgt die ihnen zugeordnete Photonenemission

$$N'_0 t = \varkappa B_0 h''^2_0 t \quad \text{bzw.} \quad N' t = \varkappa B h''^2 t. \quad (3.10)$$

Da sich das Auftreffen der Photonen aus zufälligen Ereignissen zusammensetzt, ist dem Mittelwert der während einer gewissen Zeit die Netzhaut treffenden Photonen eine Schwankung überlagert, deren quadratischer Mittelwert proportional zur Quadratwurzel der auftreffenden Photonen ist. Wenn nun die Differenz der von der Netzhaut verwertbaren Photonen nicht grösser ist als die Schwankung um  $N$ , so ist es prinzipiell unmöglich, die fraglichen Flächenelemente ( $h''^2_0, h''^2$ ) als getrennt zu empfinden; eine Trennempfindung ist dann gewährleistet, wenn

$$N' \Theta t - N'_0 \Theta t \geq K \sqrt{N' \Theta t} \quad (3.11)$$

ist, wobei

$\Theta$  Quantenausbeute des Auges; Funktion der Schirmleuchtdichte [2].



- $t$  Speicherzeit; sie ist die Zeit, in der die Photonen in einen Helligkeitseindruck umgesetzt werden. Die Trägheit von Bildwandlergeräten ist aber im allgemeinen nicht durch das Auge, sondern den Leuchtschirm gegeben; das heisst,  $t$  muss als Speicherzeit des Leuchtschirmes interpretiert werden.
- $K$  gibt an, wievielfach sich die absorbierte Quantendifferenz aus dem statistischen Rauschen herausheben muss, damit eine Trennempfindung der beiden Quadrätchen zustande kommt. Analog oben (siehe unter Speicherzeit) muss das für die ganze Sehvorrichtung spezifische  $K$  gesetzt werden.

In der Beziehung (3.11) wurde die Untergrundaufhellung des Schirmes noch nicht berücksichtigt; sie kommt im wesentlichen durch Superposition folgender Effekte zustande:

- Durch Streustrahlung aus dem Sichttraum;
- durch Reflexion in den optischen Teilen;
- durch thermische Elektronenemission der Photokathode sowie der mit einem Alkalimetallfilm belegten Oberflächen des Röhreninnern;
- durch Strahlung, die infolge der Transparenz der Photokathode ins Röhreninnere gelangt, dort reflektiert wird und an der Kathode Elektronen ablöst.

Offenbar setzt sich die Untergrundaufhellung aus je einem durch das Sichtgerät sowie den Sichtraum verursachten Anteil zusammen:

$$B_V + B_G = \beta \left( \frac{\eta}{4 m_R^2 K_T^2} \cdot S_v + S_G \right). \quad (3.12)$$

$S_v$  Strahlungsdichte der Streustrahlung aus dem Sichtraum;  $S_G$  geräteseitig bedingte Aufhellung.

Somit ergänzt sich (3.11) zu

$$N' \Theta t - N'_0 \Theta t \geq K \sqrt{N' \Theta t + N'_v \Theta t + N'_G \Theta t}. \quad (3.13)$$

Dadurch, dass jeder Photonendifferenz eine Leuchtdichtedifferenz und damit ein Kontrast entspricht, kann (3.13) in eine Grenzbeziehung umgeformt werden, die besagt, dass bei gegebenen Gerätedaten zu jeder Strahlungsdichte des Gegenstandes eine Wertegruppe von Schwellenkontrast, Unschärfe und Speicherzeit gehört, die nicht unterschritten werden kann.

$$\left( \frac{\Theta t N' - \Theta t N'_0}{\Theta t N'} \right)^2 = C^2 \geq K^2 \frac{N' + N'_v + N'_G}{(N \Theta t)^2}. \quad (3.14)$$

Mit

$$N' + N'_v + N'_G = \frac{\kappa \beta}{16} \left( \frac{2 \pi}{360 \cdot 60} \right)^2 \tau_L D_A^2 \frac{\eta}{m_R^2 K_T^2} \Gamma^2 \alpha^2 \left( S + S_v + S_G 4 \frac{m_R^2 K_T^2}{\eta} \right)$$

und

$$N' = \frac{\kappa \beta}{16} \left( \frac{2 \pi}{360 \cdot 60} \right)^2 \tau_L D_A^2 \frac{\eta}{m_R^2 K_T^2} \Gamma^2 \alpha^2 S$$

aus (2.2), (2.3), (2.5), (3.4), (3.9), (3.12) kann (3.14) auch in der Form

$$C^2 S \frac{\tau_L}{4 K_T^2} \cdot \frac{\eta}{m_R^2} \left( \frac{1}{S_v + S_G \cdot 4 \frac{m_R^2 K_T^2}{\eta}} \right) I'^2 \alpha^2 t \left. \vphantom{\frac{1}{S_v + S_G \cdot 4 \frac{m_R^2 K_T^2}{\eta}}} \right\} \geq K^2 \frac{4}{\kappa} \left( \frac{360 \cdot 60}{2 \pi} \right)^2 \frac{1}{D_A^2 \Theta} \quad (3.15)$$

oder

$$I' = \frac{1}{C^2 \alpha^2} \leq \left( \frac{2 \pi}{360 \cdot 60} \right)^2 \kappa \frac{\tau_L I'^2}{4 K_T^2} \cdot \frac{D_A^2 \Theta}{4} \times \frac{\eta t \beta}{m_R^2 K^2} \left( \frac{1}{S_v + S_G \cdot 4 \frac{m_R^2 K_T^2}{\eta}} \right) \left. \vphantom{\frac{1}{S_v + S_G \cdot 4 \frac{m_R^2 K_T^2}{\eta}}} \right\} \quad (3.16)$$

geschrieben werden.  $I'$ , ein Mass für die Grösse ( $\alpha$ ) und den Schwellenkontrast ( $C$ ) eines noch erkennbaren Details, ist als Detailinformationsgüte zu interpretieren.

Bildwandlergeräte haben aber im allgemeinen nicht ein einzelnes, sondern möglichst viele im Gesichtsfeld ( $H$ ) befindliche Einzelheiten ( $h^2$ ) zu vermitteln. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes nimmt (3.15) mit

$$\alpha^2 = \left( \frac{360 \cdot 60}{2 \pi} \right)^2 \frac{h^2}{G} \cdot \frac{G'}{f_0^2} = \left( \frac{360 \cdot 60}{2 \pi} \right)^2 \frac{h^2}{G} \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha_G}{2} \right)^2$$

folgende Form an:

$$I = \frac{G}{C^2 h^2} \leq \kappa \frac{\tau_L I'^2}{4 K_T^2} \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha_G}{2} \right)^2 \frac{D_A^2 \Theta}{4} \times \frac{\eta t \beta}{m_R^2 K^2} \left( \frac{1}{S_v + S_G \cdot 4 \frac{m_R^2 K_T^2}{\eta}} \right) S. \quad (3.17)$$

$I$ , ein Mass dafür, wieviele mit einem Schwellenkontrast ( $C$ ) belegte Einzelheiten ( $h^2$ ) aus dem Gesichtsfeld ( $G$ ) erkennbar sind, ist als Gesichtsfeldinformationsgüte aufzufassen.

Bei der Verwendung von Infrarotsichtgeräten im Anstrahlverfahren wird die Strahlungsdichte, unter der ein Gegenstand erscheint, durch einen Infrarotscheinwerfer hervorgerufen. Unter Vernachlässigung der atmosphärischen Verluste ist die Strahlungsdichte eines Gegenstandes gegeben durch

$$S = \frac{D^2 \varrho}{4 R^2} S_{ST}. \quad (3.18)$$

$R$  Abstand Scheinwerfer-Gegenstand;  $D$  Durchmesser der scheinbaren Strahlungsquelle (zum Beispiel Reflektordurchmesser);  $\varrho$  Reflexionsvermögen des Gegenstandes (Lambert-Strahler);  $S_{ST}$  Strahlungsdichte der Strahlungsquelle

$$S_{ST} = \int S_{ST}(\lambda) f(\lambda) d\lambda; \quad (3.19)$$

$S_{ST}(\lambda)$  spektrales Emissionsvermögen der Strahlungsquelle;  $f(\lambda)$  spektrale Durchlässigkeit des Infrarotfilters.

Unter der Voraussetzung ausreichender Strahlungsdichte der Scheinwerferquelle existiert bei variablem  $R$  und konstantem  $\varrho$  ein Sichtraumgebiet, dessen Schirmbildleuchtdichte die Untergrundaufhellung zu vernachlässigen gestattet; mit (3.16) bzw. (3.17) gilt demnach:

$$B = \beta \frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} S \gg \beta \left( S_v \frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} + S_G \right). \quad (3.20)$$

Aus dem Umstand, dass die Quantenausbeute der Netzhaut allein auf Kosten der Sehschärfe zunimmt und das Produkt  $\Theta B$  im Leuchtdichtebereich  $10^{-3} [\text{asb}] \leq B \leq 10^6 [\text{asb}]$  konstant ist, geht an  $B$  mit (3.20) zudem die Forderung:

$$B \geq 10^{-3} [\text{asb}]. \quad (3.21)$$

In diesem Sichtraumbereich fällt die statistische Schwankung gegenüber der Photonenzahl ausser Betracht. Bei Vernachlässigung der Variation des Augenpupillendurchmessers mit der Leuchtdichte bestimmt sich die Informationsgüte allein aus optischen Gerätedaten:

$$\alpha^2 C^2 \Gamma^2 = \text{const}, \quad (3.22)$$

$$I' = \frac{1}{C^2 \alpha^2} = \Gamma^2 \cdot \text{const}, \quad (3.23)$$

$$I = \frac{G}{C^2 \hbar^2} = \Gamma^2 \left( \text{tg} \frac{\alpha_G}{2} \right)^2 \cdot \text{const}. \quad (3.24)$$

Im folgenden Sichtraumgebiet

$$\beta \frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} S \geq \beta \left( S_v \frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{4 K_T^2} + S_G \right) \quad (3.25)$$

erfahren die Informationsgüten infolge der mit wachsendem  $R$  abnehmenden Schirmleuchtdichte und der damit vermehrt ins Gewicht fallenden Untergrundaufhellung Einbussen, zu deren Veranschaulichung der folgende Reichweitebegriff dienen möge.

Verstehen wir unter  $R$  diejenige Gegenstandsweite, in der eine zu definierende Einzelheit ( $C^2 \alpha^2$ ) noch gerade erkennbar ist, so kann sie mit (3.15), (3.18) und unter Vernachlässigung der atmosphärischen Verluste durch folgende Beziehung festgelegt werden:

$$R = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{2 S_{\infty}}{\left(\frac{360 \cdot 60}{2 \pi}\right)^2 \frac{1}{C^2 \alpha^2} \cdot \frac{4 K_T^2}{I^2} \cdot \frac{4}{D_A^2 \Theta} \cdot \frac{m_R^2 K^2}{\eta t \beta} \left(1 + \frac{S_v + S_G \cdot 4 \frac{m_R^2}{\eta} K_T^2}{S}\right)}} \quad (3.26)$$

#### 4. Grenzen und Möglichkeiten

Ausreichende Strahlerleistung, Reduktion der Untergrundaufhellung sowie geeignete Dimensionierung der im technologischen Spielraum wählbaren Gerätedaten sind Möglichkeiten dafür, die in der Statistik des «Schvorgangs» begründete Begrenzung der Erkennbarkeit auf eine fundamentale Schwelle zu senken. Sowohl der Strahlungsdichte der Scheinwerferquelle als auch dem Durchmesser der scheinbaren Strahlungsquelle sind aus technologischen oder dem übergeordneten Gründen Grenzen gesetzt. Den andern Möglichkeiten kommt daher grosse Bedeutung zu.

##### 4.1 Untergrundaufhellung

Die im wesentlichen durch Streustrahlung aus dem Sichtraum sowie durch thermische Elektronenemission der Photokathode verursachte Untergrundaufhellung kann durch geeignete Aufstellung von Sichtgerät und Scheinwerfer (Parallaxe) bzw. durch Kühlung der Kathode weitgehend unterbunden werden.

Auf diese Weise gelingt es insbesondere, den thermischen Anteil auf eine Schwelle zu senken, wo von dieser Seite keine Begrenzung mehr vorliegt. Die dazu notwendige Kathodentemperatur hängt unter anderem von der Grenzwellenlänge, der Schirmansichte und der Beschleunigungsspannung ab. Bei Vernachlässigung der Streustrahlung aus dem Sichtraum bestimmt sich der durch Beseitigung der thermischen Aufhellung erzielbare Reichweitengewinn mit (3.26) zu:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{K_T^2} \cdot \frac{S + S_G}{S}}{\frac{\eta}{m_R^2} \cdot \frac{1}{K_T^2} \cdot \frac{1}{S}}} \quad (4.1)$$

$R_1$  Reichweite des Geräts mit gekühlter Kathode;  $R_2$  Reichweite des Geräts mit ungekühlter Kathode.

#### 4.2. Dimensionierung der frei wählbaren Gerätedaten

Aus (3.20), (3.21) und den sich anschliessenden Folgerungen erwächst nebst der Reduktion der Untergrundaufhellung die Forderung nach Strahlungs-dichteverstärkung; gemäss (3.5) liegt sie dann vor, wenn

$$\frac{S^*}{S} = \frac{\epsilon_K}{m_K^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{K_I^2} \cdot \frac{d_s}{I} > 1. \quad (4.21)$$

Dadurch, dass der Kathodenempfindlichkeit ( $\epsilon_K$ ), der Schirmausbeute ( $d_s$ ) und der Beschleunigungsspannung ( $U$ ) obere Grenzen gesetzt sind, kann die Verstärkung allein mit grosser effektiver Öffnung des Objektivs ( $1/K_I$ ) und kleinem Abbildungsmaßstab ( $m_K$ ) der Bildwandlerröhre erzielt werden. Da kleine Abbildungsmaßstäbe eine grosse Elektronendichte und damit eine hohe thermische Untergrundaufhellung bedingen, sind auch diesem Datum, wenigstens bei ungekühlter Kathode, Grenzen gesetzt (3.20).

Im Gegensatz zu den Tagesfernrohren ist es bei Infrarotsichtgeräten nicht möglich, den zu beobachtenden Gegenstand mit unbewaffnetem Auge aufzusuchen und ihn nach vollzogener Fixierung mit dem Sichtgerät näher zu betrachten. Um dennoch eine Orientierung zu ermöglichen, geht es mit (3.17) darum, aus einem möglichst grossen Gesichtsfeld ( $G$ ) eine Höchstzahl von Detailinformationen zu erhalten. Die dadurch erwachsenden Forderungen nach grossem Gesichtsfeldwinkel, grosser Gesamtvergrösserung, grosser effektiver Öffnung des Objektivs und hoher Strahlungs-dichteverstärkung lassen sich gemäss

$$\Gamma \operatorname{tg} \frac{\alpha_G}{2} = \frac{D_K}{2} \cdot \frac{1}{U_K} \cdot \frac{I_A}{25} \quad (4.22)$$

( $U_A$  Unschärfe des Auges in deutlicher Schweite) allein durch hohe Bildwandlerauflösung ( $1/U_K$ ), grosse wirksame Photokathodenfläche und eine im Rahmen (4.21) zulässige Objektivbrennweite realisieren. Da die Fehler der Elektronenoptik Durchmesser und Kathodenkrümmung weitgehend bestimmen und die Auflösung in der Körnigkeit des Leuchtschirms eine weitere Beschränkung erfährt, sind auch diesen Daten Grenzen gesetzt.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. GLOCKER, *Röntgen- und Radiumphysik für Mediziner* (Stuttgart 1949).
- [2] A. ROSE, *Television Pickup Tubes and the Problem of Vision*, *Advanc. Electron.* 7 (1948).
- [3] A. ROSE, *The Sensitivity Performance of the Human Eye on an Absolute Scale*, *J. opt. Soc. Amer.* 38, Nr. 2 (1948).
- [4] G. L. KRIEGER, G. A. MORTON und I. E. RUEDY, *The Brightness Intensifier*, *R.C.A. Rev.* 9 (1948).

- [5] E. FENNER und O. SCHOTT, *Möglichkeiten und Grenzen der Bildverstärkung*, Z. angew. Phys. 6, H. 2 (1954).  
[6] F. ECKART, *Elektronenoptische Bildwandler und Röntgenbildverstärker* (Leipzig 1956).

### Résumé

Le présent article a pour objet la détermination des limites et des possibilités de l'observation infra-rouge au moyen d'un dispositif optique déterminé. On décrit des possibilités susceptibles de réduire au maximum la limitation de l'information basée sur la statistique du phénomène visuel.

(Eingegangen: 13. Dezember 1957.)

## On Prager's Hardening Rule

By RICH. THORPE SHIELD, Providence, R. I., USA<sup>1)</sup>, and HANS ZIEGLER, Zürich<sup>2)</sup>

### 1. Introduction

In order to describe the behaviour of a rigid-work-hardening material, one needs

- (a) an initial yield condition, specifying the states of stress for which plastic flow first sets in;
- (b) a flow rule, connecting the plastic strain increment with the stress and the stress increment;
- (c) a hardening rule, specifying the modification of the yield condition in the course of plastic flow.

It is customary to represent the yield condition as a surface in stress space, convex [1]<sup>3)</sup> and initially containing the origin. The current yield conditions for a metal are those of v. MISES [2] and of TRESCA [3]. The flow rule generally accepted is also due to v. MISES [4]. It is justified to a certain extent by physical reasons [5, 1], and it states that the strain increment vector lies in the exterior normal of the yield surface at the stress point. As to the hardening rule, there are various versions in use. The rule of isotropic work-hardening [6, 7] assumes that the yield surface expands during plastic flow, retaining its shape and situation with respect to the origin. Another rule, developed by PRAGER [8], assumes that the yield surface is rigid but undergoes a translation in the direction of the strain increment. This rule accounts for the Bauschinger effect

<sup>1)</sup> Brown University, Division of Applied Mathematics.

<sup>2)</sup> ETH; 1956/57 Brown University, Providence, R. I., USA, Division of Applied Mathematics. The results presented in this paper were obtained in the course of research conducted under Contract Nonr 562(10) sponsored by the Office of Naval Research.

<sup>3)</sup> Numbers in square brackets refer to References, page 275.



observed in the materials in question. The main advantage of the rule is that for piecewise linear yield conditions, such as that of TRESCA, the law exhibits a limited path independence of the final plastic strain with a resulting simplification in the mathematical analysis.

The following sections contain a discussion of PRAGER's hardening rule and its implications for special states of stress prevalent in practical applications.

Mention should be made of the work of HODGE (see [10], for example), which uses a strain-hardening rule which is a combination of the PRAGER rule and isotropic hardening.

## 2. Treatment in 9-Space

Let us consider an element of a rigid-work-hardening solid, referred to an orthogonal coordinate system  $x_i$ . The state of stress of this element can be represented by a stress point  $P$  in a 9-space  $\sigma_{ik}$ . In this space, the initial yield surface is represented by an equation

$$F(\sigma_{ik}) = k^2 = \text{const.} \quad (2.1)$$

In the following, for simplicity attention will be confined to initially isotropic materials for which the form of the function  $F$  is invariant with respect to a rotation of the stress state. An initially anisotropic material can be treated in an analogous manner.

The hardening rule suggested by PRAGER assumes that during plastic deformation the yield surface moves in translation. After a certain amount of plastic flow, it is given by

$$F(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}) = k^2, \quad (2.2)$$

where the tensor  $\alpha_{ik}$  represents the total translation. Because  $\alpha_{ik}$  is not necessarily the isotropic tensor  $\delta_{ik}$ , where  $\delta_{ik}$  is the Kronecker delta, *the material becomes anisotropic as a result of the hardening process*. Accordingly, direction is important and we shall fix the coordinate system  $x_i$  with respect to the element, small deformations being assumed.

Due to the flow rule of v. MISES, the plastic strain increment  $d\epsilon_{ik}$ , considered as a vector in the space  $\sigma_{ik}$ , lies in the exterior normal of the surface (2.2) at  $P$ . Thus, it is represented by

$$d\epsilon_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} d\lambda, \quad d\lambda > 0. \quad (2.3)$$

The definition of a Prager-hardening material is completed by assuming that the surface (2.2) moves in the direction of  $d\epsilon_{ik}$ ; more explicitly

$$d\alpha_{ik} = c d\epsilon_{ik}, \quad (2.4)$$

where  $c$  is a constant characterizing the material. This work-hardening law is a generalization to complex states of stress of a linear work-hardening law in simple tension (Figure 1), which exhibits a Bauschinger effect. [The work-hardening modulus  $c_1$  in simple tension (Figure 1) is related to the work-hardening modulus  $c$  by  $c_1 = (3/2) c$ .]

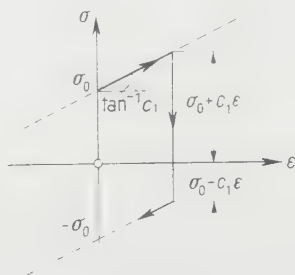


Figure 1

Response of the material considered in simple tension or compression.

The hardening rule described is physically acceptable because the components

$$\alpha_{ik} = c \varepsilon_{ik} \quad (2.5)$$

form a tensor of the second order, and the law is therefore independent of the particular coordinate system  $x_i$  chosen.

The scalar  $d\lambda$  in (2.3) is determined by the condition that  $P$  remains on the yield surface in plastic flow. From this condition,

$$(d\sigma_{ik} - d\alpha_{ik}) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 0, \quad (2.6)$$

and from (2.4) and (2.3) follows at once

$$d\lambda = \frac{1}{c} \cdot \frac{(\partial F / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij}}{(\partial F / \partial \sigma_{kl}) (dF / \partial \sigma_{kl})}, \quad (2.7)$$

if the summation convention is adopted in 9-space.

In an initially isotropic solid the yield function takes the form

$$F(\sigma_{ik}) = G [I_1(\sigma_{ik}), I_2(\sigma_{ik}), I_3(\sigma_{ik})], \quad (2.8)$$

where

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji}, \quad I_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \quad (2.9)$$

are the invariants of the stress tensor. Moreover, if the initial yield is independent of the mean normal stress,

$$F(\sigma_{ik} + \beta \delta_{ik}) = F(\sigma_{ik}), \quad (2.10)$$

where  $\beta$  is an arbitrary scalar. When plastic flow has set in, the yield function becomes, on account of (2.2) and (2.8),

$$F(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}) = G[I_1(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}), I_2(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}), I_3(\sigma_{ik} - \alpha_{ik})]. \quad (2.11)$$

From (2.10) it follows that the values of (2.11) remain unchanged when  $\sigma_{ik}$  is replaced by  $\sigma_{ik} + \beta \delta_{ik}$ : PRAGER's hardening rule implies that *during the whole hardening process yield is independent of the mean normal stress.*

With (2.11), the flow rule (2.3) reads

$$d\epsilon_{ik} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ik}} d\lambda = \left( \frac{\partial G}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ik}} + \dots \right) d\lambda. \quad (2.12)$$

Since

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ik}} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ik}} = \sigma_{ik} - \alpha_{ik}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ik}} = (\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma_{jk} - \alpha_{jk}), \quad (2.13)$$

we obtain from (2.12)

$$d\epsilon_{ik} = \left[ \frac{\partial G}{\partial I_1} \delta_{ik} + \frac{\partial G}{\partial I_2} (\sigma_{ik} - \alpha_{ik}) + \frac{\partial G}{\partial I_3} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma_{jk} - \alpha_{jk}) \right] d\lambda. \quad (2.14)$$

Let us assume now that the physical coordinate axes originally coincide with the principal axes of stress. Then we have first

$$\sigma_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad \text{and} \quad \alpha_{ik} = 0. \quad (2.15)$$

From (2.14) follows

$$d\epsilon_{ik} = 0 \quad (i \neq k). \quad (2.16)$$

I.e., since the material is isotropic at the beginning, the strain increment tensor is coaxial with the stress tensor. By (2.4) and (2.16), also

$$d\alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k). \quad (2.17)$$

The last result remains valid if the second assumption (2.15) is replaced by the weaker assumption

$$\alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k). \quad (2.18)$$

It follows that, *if the principal axes of stress remain fixed in the element from the start, the strain increment tensor and thus the strain tensor remain coaxial with the stress tensor.*

If the principal axes of stress rotate, (2.16) holds only in a first step, provided the principal system of stress is used as the physical coordinate system. If (2.16) shall hold in a second step, the coordinate system must be rotated between the first step and the second one. This rotation, however, violates (2.18):

*Due to the anisotropy caused by strain hardening, the strain increment tensor is in general not coaxial with the stress tensor.*

Many problems of practical importance can be treated in a space of less than 9 dimensions. In certain cases, e.g., a 3-space defined by the principal stresses is useful. From our last result follows, however, that this 3-space is inadequate where the principal axes of stress are not fixed in the element. In addition, we shall see in the next sections that the reduction in dimensions is not without influence on the *form* of the hardening rule.

### 3. Treatment in 6-Space

On account of the symmetry of the stress and strain tensors, the problem may as well be treated in 6-space. It is convenient here and particularly for the subsequent specializations to denote the physical coordinates by  $x, y, z$ , the stresses by  $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots$ , and the strains by  $\varepsilon_x, \dots, \varepsilon_{yz}, \dots$ , where the dots indicate cyclic permutations.

In the new notations the yield condition (2.2) reads

$$F(\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots, \tau_{zy} - \alpha_{zy}, \dots) = k^2, \quad (3.1)$$

where  $\tau_{yz}, \tau_{zy}, \dots$  have to be considered as independent variables. The flow rule (2.3) becomes

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} d\lambda, \dots, \quad d\varepsilon_{yz} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} d\lambda, \dots, \quad d\varepsilon_{zy} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{zy}} d\lambda, \dots, \quad (3.2)$$

and the hardening rule (2.4) takes the form

$$d\alpha_x = c d\varepsilon_x, \dots, \quad d\alpha_{yz} = c d\varepsilon_{yz}, \dots, \quad d\alpha_{zy} = c d\varepsilon_{zy}, \dots. \quad (3.3)$$

Treatment in 6-space, however, requires the elimination of the stress components  $\tau_{zy}, \dots$ , of the strain components  $\varepsilon_{zy}, \dots$ , and of the displacements  $\alpha_{zy}, \dots$ .

Because of the symmetry of the stress tensor

$$F(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots, \tau_{zy}, \dots) = f(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots). \quad (3.4)$$

Thus, the yield surface in 6-space is given by

$$f(\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots) = F[\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots, \tau_{zy} - \alpha_{zy}, \dots] = k^2. \quad (3.5)$$

From (3.2) and (3.5) we obtain

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\lambda, \dots, \quad d\gamma_{yz} = 2 d\varepsilon_{yz} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\lambda, \dots. \quad (3.6)$$

This is the well-known result that *the flow rule of v. Mises remains valid in 6-space, if the state of strain is represented by the engineering components  $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$*

If PRAGER's hardening rule holds in 9-space, the yield surface (3.5) in 6-space also moves in a translation. On account of (3.3), this translation is given by

$$d\alpha_x = c d\epsilon_x, \dots, d\alpha_{yz} = \frac{1}{2} c d\gamma_{yz}, \dots; \quad (3.7)$$

*in general it is not in the direction of the exterior normal at the point P.* (3.7) is the form that PRAGER's hardening rule takes in the new strain components in 6-space.

It might seem that, dropping the factors  $1/2$  in (3.7), one might postulate the validity of PRAGER's rule in its original form in 6-space, thereby renouncing its validity in this form in 9-space. Since both sides of (3.7) represent tensors, such a procedure would involve the sacrifice of the invariance of the rule with respect to rotations of the physical coordinate system. It is clear that this is unacceptable, and that we have to accept, conversely, the fact that the form of PRAGER's rule is apt to deteriorate in a subspace. The next sections will show different stages of this process.

#### 4. Special Cases

In many practically important cases some of the stress components are absent. Starting once more in 9-space, we may denote the stress components present by  $\sigma'_{ik}$ , the zero ones by  $\sigma''_{ik}$ . The initial yield condition is then

$$F(\sigma'_{ik}, \sigma''_{ik} = 0) = H(\sigma'_{ik}) = k^2. \quad (4.1)$$

If we are not interested in the strains  $\epsilon''_{ik}$  corresponding to the zero stresses  $\sigma''_{ik}$ , we may treat the problem in a subspace  $\sigma'_{ik}$ . Here,  $H(\sigma'_{ik})$  defines a new yield surface.

After plastic flow has set in, the yield surface is given by

$$F(\sigma'_{ik} - \alpha'_{ik}, -\alpha''_{ik}) = k^2. \quad (4.2)$$

We will not be able, in general, to express (4.2) by means of the function  $H$ : *in general, hardening implies a deformation of the yield surface in a subspace.*

From (4.1) follows

$$d\epsilon'_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma'_{ik}} d\lambda \left( = \frac{\partial H}{\partial \sigma'_{ik}} d\lambda \right). \quad (4.3)$$

Thus, *the flow rule remains valid in any subspace.* However, it supplies only the strain components  $\epsilon'_{ik}$  defined in this subspace although the  $\epsilon''_{ik}$ , too, may be

different from zero. It is clear, therefore, that *even in cases where the yield surface undergoes a translation, it may move in a direction different from the outward normal at the stress point P.*

The cases where the new yield surface does not deform are those in which it is possible to convert the left hand side of (4.2) such that the terms  $-\alpha_{ik}''$  vanish.

When the initial yield is independent of the mean normal stress, the initial yield function can be written

$$f(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots) = g(J_2, J_3), \quad (4.4)$$

where

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{3} \sigma_x^2 + \dots - \frac{1}{3} \sigma_y \sigma_z - \dots + \tau_{yz}^2 + \dots, \\ J_3 &= \frac{2}{27} \sigma_x^3 + \dots - \frac{1}{9} \sigma_y \sigma_z (\sigma_y + \sigma_z) - \dots + \frac{4}{9} \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ &\quad - \frac{1}{3} (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \tau_{yz}^2 - \dots + 2 \tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

are the invariants of the stress deviator. When plastic flow has set in,  $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}, \dots$  have to be replaced by  $\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots$ . It follows that *yield remains independent of the mean normal stress.*

By (3.6)

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x &= \left( \frac{\partial g}{\partial J_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial g}{\partial J_3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_x} \right) d\lambda, \dots, \\ d\gamma_{yz} &= \left( \frac{\partial g}{\partial J_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \tau_{yz}} + \frac{\partial g}{\partial J_3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \tau_{yz}} \right) d\lambda, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

where, on account of (4.5) and under the assumption that plastic flow has taken place,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{3} [2 (\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y) - (\sigma_z - \alpha_z)], \dots, \\ \frac{\partial J_2}{\partial \tau_{yz}} &= 2 (\tau_{yz} - \alpha_{yz}), \dots, \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{9} [2 (\sigma_x - \alpha_x)^2 - (\sigma_y - \alpha_y)^2 - (\sigma_z - \alpha_z)^2 + 4 (\sigma_y - \alpha_y) (\sigma_z - \alpha_z) \\ &\quad - 2 (\sigma_z - \alpha_z) (\sigma_x - \alpha_x) - 2 (\sigma_x - \alpha_x) (\sigma_y - \alpha_y)] \\ &\quad - \frac{1}{3} [2 (\tau_{yz} - \alpha_{yz})^2 - (\tau_{zx} - \alpha_{zx})^2 - (\tau_{xy} - \alpha_{xy})^2], \dots, \\ \frac{\partial J_3}{\partial \tau_{yz}} &= -\frac{2}{3} [2 (\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y) - (\sigma_z - \alpha_z)] (\tau_{yz} - \alpha_{yz}) \\ &\quad + 2 (\tau_{zx} - \alpha_{zx}) (\tau_{xy} - \alpha_{xy}), \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$



From (2.10) follows

$$f(\sigma_x - \alpha_x + \beta, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots) = f(\sigma_x - \alpha_x, \dots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \dots). \quad (4.8)$$

Hence, in cases where one of the normal stresses, e.g.  $\sigma_z$ , is absent, the term  $-\alpha_z$  can be eliminated by addition of  $\alpha_z$  to the normal stresses.

If  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , (4.6) and (4.7) yield, in connection with (3.7),

$$d\gamma_{yz} = d\gamma_{zx} = 0 \quad (\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0). \quad (4.9)$$

This is the proof, by complete induction, that

$$\alpha_{yz} = \frac{1}{2} c \gamma_{yz} = 0, \quad \alpha_{zx} = \frac{1}{2} c \gamma_{zx} = 0 \quad (\tau_{yz} \equiv \tau_{zx} \equiv 0), \quad (4.10)$$

i.e. that, in the absence of at least two shear stresses, the corresponding shear strains and thus the corresponding displacements of the yield surface, are absent. This result might have been inferred from the symmetry (Figure 2) of

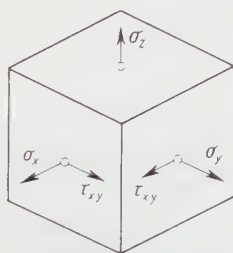


Figure 2

State of stress with  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ .

the state of stress with respect to the middle plane  $x, y$  of an element. It is clear that a similar result does not hold in general if only one shear stress is absent; on the other hand, (4.10) is the reason why PRAGER's hardening rule applies without change of form in the space of principal stresses.

While the foregoing results hold for any form of the yield function (4.4), we can obtain some more results by restricting ourselves to the more common types of  $g$ . In v. MISES' case, the function  $g$  reduces to  $J_2$ , and the initial yield condition is

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_0^2, \quad (4.11)$$

where  $\sigma_0$  is the initial yield limit in simple tension or compression. In TRESCA's case,  $g$  also depends on  $J_3$ . Here, the yield condition is better discussed in terms of maximum shear stress.

In (4.10), it is essential that two shear stresses vanish: in cases where one shear stress only, i.e.  $\tau_{xy}$ , is absent, it may be impossible to eliminate the corresponding displacement,  $\alpha_{xy}$ , from the right hand side of (4.8), and this means that the yield surface deforms in the process of hardening. In TRESCA's case, this actually happens. However, if v. MISES' yield condition applies, it follows from (4.6), (4.7) and (3.7) that

$$\alpha_{xy} = \frac{1}{2} c \gamma_{xy} = 0 \quad (\tau_{xy} \equiv 0) \quad (4.12)$$

If  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , we obtain from the same relations

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z, \quad \alpha_y = \alpha_z, \quad (\sigma_y \equiv \sigma_z \equiv 0), \quad (4.13)$$

provided the material obeys the yield condition of v. MISES. It is easy to see, however, that under TRESCA's yield condition (4.13) does not apply. In the last case it is not possible to eliminate both  $\alpha_y$  and  $\alpha_z$  from the right hand side of (4.8): the yield surface deforms in the course of hardening.

In the next sections we shall make use of the fact that the plastic volume change of the material is zero. That is,

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad (4.14)$$

a consequence of the flow rule and the independence of the yield function on the mean normal stress.

## 5. Plane Strain

Here, per definitionem,

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \varepsilon_z = 0. \quad (5.1)$$

From (4.10) we obtain

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \quad (5.2)$$

It follows from (3.7) that the yield function has the form

$$g(\sigma_x - c \varepsilon_x, \sigma_y - c \varepsilon_y, \sigma_z, \tau_{xy} - \frac{1}{2} c \gamma_{xy}). \quad (5.3)$$

On account of (3.6),

$$d\varepsilon_z = \frac{\partial g}{\partial \sigma_z} d\lambda = 0, \quad (5.4)$$

and by (4.14)

$$\varepsilon_y = -\varepsilon_x. \quad (5.5)$$

Thus, we finally get the yield condition

$$h\left(\sigma_x - c \varepsilon_x, \sigma_y + c \varepsilon_x, \tau_{xy} - \frac{1}{2} c \gamma_{xy}\right) = k^2. \quad (5.6)$$

It follows that the yield surface moves in a translation, but, on account of the factor  $1/2$  in the last argument, not in the direction of the exterior normal.

In many cases where the original form of PRAGER's hardening rule does not hold in the subspace appropriate to the problem, this defect can be remedied by a transformation. Here, for instance, the new quantities

$$t_{xy} = \sqrt{2} \tau_{xy}, \quad g_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{xy} \quad (5.7)$$

can be introduced. The yield condition (5.6) becomes

$$\dot{p}(\sigma_x - c \varepsilon_x, \sigma_y + c \varepsilon_x, t_{xy} - c g_{xy}) = k^2, \quad (5.8)$$

and the form of PRAGER's rule in 9-space is regained.

In order to specialize (5.8) for v. MISES' yield condition, we start from (4.5) and obtain first

$$\left. \begin{aligned} f = J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_x - c \varepsilon_x)^2 + \dots - \frac{1}{3} (\sigma_y - c \varepsilon_y) (\sigma_z - c \varepsilon_z) - \dots \\ + \left( \tau_{xy} - \frac{1}{2} c \gamma_{xy} \right)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Carrying out the steps (5.3) through (5.8) with (5.9), we get

$$\dot{p} = [(\sigma_x - c \varepsilon_x) - (\sigma_y + c \varepsilon_x)]^2 + 2 (t_{xy} - c g_{xy})^2 = \frac{4}{3} \sigma_0^2. \quad (5.10)$$

Figure 3 shows the yield surface, a circular cylinder of radius  $(2/3)^{1/2} \sigma_0$  the axis of which is parallel to the plane  $\sigma_z, \sigma_y$  and bisects the angle between the axes  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$ .

In order to specialize (5.8) for TRESCA's case, we start from the principal stresses

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad (5.11)$$

where  $\sigma_3$  lies between  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$ . The material yields initially when the maximum shear stress reaches a critical value,

$$\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{1}{4} \sigma_0^2. \quad (5.12)$$

After plastic flow has set in, (5.12) takes the form (5.10) with  $\sigma_0^2$  replacing

$4\sigma_0^2/3$  on the right hand side. The yield surface is a circular cylinder (Figure 3) of radius  $\sigma_0/\sqrt{2}$ , moving in the direction of the outward normal.

*Subcase a:* If  $\tau_{xy} = 0$ , (4.10) yields  $\gamma_{xy} = 0$ . The problem can be treated in a  $(\sigma_x, \sigma_y)$ -plane and is a degenerate case of principal stress space with the principal strain  $\varepsilon_z$  zero. The yield locus is the strip obtained by bisecting the cylinder of Figure 3 parallel to the plane  $\sigma_x, \sigma_y$ .

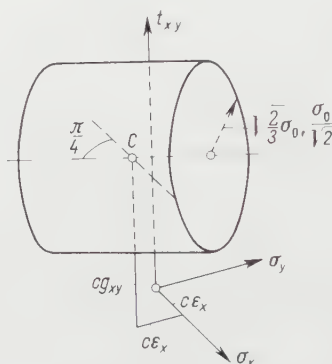


Figure 3

Yield surface in plane strain.

*Subcase b:* If  $\sigma_y = 0$ , the problem can be treated in a  $(\sigma_x, \tau_{xy})$ -plane. The yield locus, obtained by intersecting the cylinder of Figure 3 with a plane parallel to the plane  $\sigma_x, t_{xy}$ , does not move in the direction of the exterior normal. However, if besides (5.7) the transformation

$$s_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x, \quad e_x = \sqrt{2} \varepsilon_x \quad (5.13)$$

is used, the yield condition (5.10) with  $\sigma_y = 0$  becomes

$$(s_x - c e_x)^2 + (t_{xy} - c g_{xy})^2 = \frac{2}{3} \sigma_0^2. \quad (5.14)$$

The yield locus is a circle of radius  $(2/3)^{1/2} \sigma_0$  in v. MISES' case and  $(1/2)^{1/2} \sigma_0$  in TRESCA's case, moving in the direction of the exterior normal.

## 6. Plane Stress

Here, per definitionem,

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (6.1)$$

On account of (4.10),

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \quad (6.2)$$

and from (4.14) follows

$$\varepsilon_z = -(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (6.3)$$

Hence, the yield function is

$$g\left[\sigma_x - c \varepsilon_x, \sigma_y - c \varepsilon_y, c(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \tau_{xy} - \frac{1}{2} c \gamma_{xy}\right]. \quad (6.4)$$

After subtraction of  $c(\varepsilon_x - \varepsilon_y)$  from the normal stresses in accordance with (4.8) we obtain the yield condition

$$h\left[\sigma_x - c(2\varepsilon_x + \varepsilon_y), \sigma_y - c(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y), \tau_{xy} - \frac{1}{2} c \gamma_{xy}\right] = k^2. \quad (6.5)$$

Again, the yield surface moves in a translation, but not in the direction of the exterior normal.

If we make use of the transformations

$$\left. \begin{aligned} s_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), & s_\eta &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_y - \sigma_x), & t_{\xi\eta} &= \sqrt{3}\tau_{xy}, \\ e_\xi &= \varepsilon_x + \varepsilon_y, & e_\eta &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_y - \varepsilon_x), & g_{\xi\eta} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

the yield surface becomes

$$p\left(s_\xi - \frac{3}{2} c e_\xi, s_\eta - \frac{3}{2} c e_\eta, t_{\xi\eta} - \frac{3}{2} c g_{\xi\eta}\right) = k^2 \quad (6.7)$$

and moves in the direction of the outward normal.

In the case of v. MISES' yield condition, (6.7) takes the form

$$p = \left(s_\xi - \frac{3}{2} c e_\xi\right)^2 + \left(s_\eta - \frac{3}{2} c e_\eta\right)^2 + \left(t_{\xi\eta} - \frac{3}{2} c g_{\xi\eta}\right)^2 = \sigma_0^2. \quad (6.8)$$

The yield surface (an ellipsoid in the original stresses) is a sphere of radius  $\sigma_0$ .

In TRESCA's case, we obtain three sheets

$$2\left(\frac{s_\eta^2 + t_{\xi\eta}^2}{3}\right)^{1/2} = \sigma_0, \quad \left|s_\xi \pm \left(\frac{s_\eta^2 + t_{\xi\eta}^2}{3}\right)^{1/2}\right| = \sigma_0. \quad (6.9)$$

Thus, the yield surface (Figure 4) is a circular cylinder, closed by two circular cones such that the intersections of the whole surface with the middle planes parallel to  $s_\xi$ ,  $s_\eta$  and  $s_\xi, t_{\xi\eta}$  are regular hexagons with sides  $\sigma_0$ .

It often happens that the yield surface contains singularities. In 3-space such singularities are edges where two smooth surfaces intersect (in Figure 4 the circles of intersection between cylinder and cones) or corners where more than two smooth surfaces meet. An isolated singularity or vertex (in Figure 4 the vertex of either cone) may be considered as a limiting case of a corner.

If  $P$  is to remain in a corner or vertex, the yield surface must move with  $P$ ; hence, the displacement  $d\vec{\alpha}$  coincides with the stress increment  $d\vec{\sigma}$ . The strain increment  $d\vec{\epsilon}$  follows from  $d\vec{\alpha}$ , since the components of  $\vec{\alpha}$  are the factors of  $c$  in the general equation [here (6.5) or (6.7)] of the yield surface. If  $d\vec{\alpha} = c d\vec{\epsilon}$ , then  $P$  remains in the corner or vertex as long as  $d\vec{\sigma}$  lies in the pyramid or cone enclosed by the exterior normals of the yield surface in the vicinity of the singu-

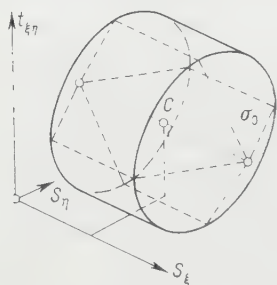


Figure 4

Tresca yield surface in plane stress.

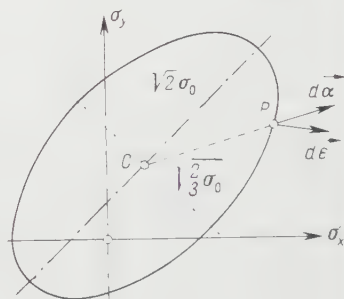


Figure 5

v. Mises yield locus in plane stress with  $\tau_{xy} = 0$ .

larity. If  $d\vec{\alpha} \neq c d\vec{\epsilon}$ , the pyramid or cone is obtained from the vectors  $d\vec{\alpha}$  instead of the normals.

If  $P$  is to remain in an edge, the components of  $d\vec{\sigma}$  and  $d\vec{\alpha}$  normal to the edge must coincide. Further, according to the flow rule,  $d\vec{\epsilon}$  has no component along the tangent of the edge. Thus, two components of  $d\vec{\alpha}$  and the third one of  $d\vec{\epsilon}$  are known as soon as  $d\vec{\sigma}$  is given. The remaining components follow again from the equation of the yield surface. If  $d\vec{\alpha} = c d\vec{\epsilon}$ ,  $P$  remains in the edge as long as  $d\vec{\sigma}$  lies in the wedge enclosed by the normals of the yield surface in the vicinity of the edge. If  $d\vec{\alpha} \neq c d\vec{\epsilon}$ , the vectors  $d\vec{\alpha}$  take the function of the normals.

*Subcase a:* If  $\tau_{xy} = 0$ , (4.10) yields  $\gamma_{xy} = 0$ . The problem can be treated in a  $(\sigma_x, \sigma_y)$ -plane, the section of principal stress space by the plane  $\sigma_z = 0$ .

In v. MISES' case, the yield locus is the well-known ellipse illustrated in Figure 5 with the equation

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_x - c(2\epsilon_x + \epsilon_y)]^2 + [\sigma_y - c(\epsilon_x + 2\epsilon_y)]^2 \\ - [\sigma_x - c(2\epsilon_x + \epsilon_y)][\sigma_y - c(\epsilon_x + 2\epsilon_y)] = \sigma_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Comparing the vectors  $d\alpha_x$ ,  $d\alpha_y$  and  $d\epsilon_x$ ,  $d\epsilon_y$  following from (6.10), we easily obtain

$$d\alpha_x = 3c(\sigma_x - \alpha_x)d\lambda, \quad d\alpha_y = 3c(\sigma_y - \alpha_y)d\lambda. \quad (6.11)$$

Hence, the ellipse moves in the direction of the radius  $CP$ .



Using the transformations (6.6), we obtain a representation in a plane  $s_{\xi}, s_{\eta}$ . Here, the yield locus is a circle of radius  $\sigma_0$ , moving in the direction of the outward normal.

In TRESCA's case, the yield locus in the  $(\sigma_x, \sigma_y)$ -plane is the hexagon of Figure 6. The arrows indicate the vectors  $d\vec{x}$ , of constant direction on each side, given by the line connecting the center of the side in question with the center

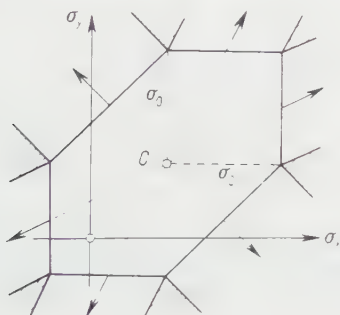


Figure 6

Tresca yield locus in plane stress with  $\tau_{xy} = 0$ .

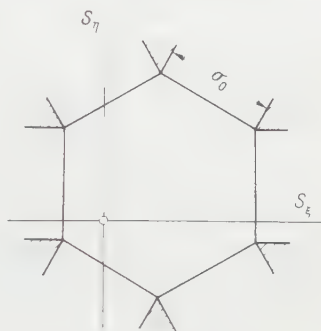


Figure 7

Yield locus of Figure 6 in  $s_{\xi}, s_{\eta}$ .

of the opposite side. If  $d\vec{\sigma}$  lies in one of the shaded regions, the hexagon moves with  $P$ . Taking  $d\epsilon_x, d\epsilon_y$  from (6.5), solving for  $d\epsilon_x, d\epsilon_y$  and setting  $d\vec{x} = d\vec{\sigma}$ , we obtain

$$d\epsilon_x = \frac{1}{3c} (2 d\sigma_x - d\sigma_y), \quad d\epsilon_y = \frac{1}{3c} (2 d\sigma_y - d\sigma_x) \quad (6.12)$$

for the strain increment in a corner of the hexagon.

In the  $(s_{\xi}, s_{\eta})$ -plane the yield locus becomes a regular hexagon (Figure 7) with side  $\sigma_0$  moving in the direction of the exterior normal. It is clear that this hexagon is the section of the yield surface of Figure 4 with the plane of symmetry parallel to  $s_{\xi}, s_{\eta}$ .

If  $P$  remains in a corner,

$$de_{\xi} = \frac{2}{3c} ds_{\xi}, \quad de_{\eta} = \frac{2}{3c} ds_{\eta}; \quad (6.13)$$

thus,  $d\vec{e}$  has the same direction as  $d\vec{s} = d\vec{x}$ .

*Subcase a:* If  $\sigma_y = 0$ , the problem can be treated in a  $(\sigma_x, \tau_{xy})$ -plane. However, since (4.13) only applies in v. MISES' case, the yield locus deforms in any other case in the process of hardening.

In TRESCA's case, for instance, the initial yield locus is the intersection of the yield surface of Figure 4 with one of the vertical planes passing through  $C$  and touching the two circular edges. The displacement of  $C$ , however, generally

does not lie in this plane, and it becomes clear, therefore, that the yield locus deforms.

In v. MISES' case, (4.13) applies. Hence, the yield locus does not deform. This follows also from the fact that the yield surface corresponding to Figure 4 is a sphere. The yield locus is the circle

$$\left(\sigma_x - \frac{3}{2} c \varepsilon_x\right)^2 + \left(t_{\xi\eta} - \frac{3}{2} c g_{\xi\eta}\right)^2 = \sigma_0^2 \quad (6.14)$$

in the plane  $\sigma_x, t_{\xi\eta}$ , where  $t_{\xi\eta}$  and  $g_{\xi\eta}$  follow from  $\tau_{xy}$  and  $\gamma_{xy}$  by means of (6.6). The circle (6.14) is of radius  $\sigma_0$  and has been discussed by PRAGER [9]. It moves in the direction of the outward normal.

## 7. Another Special Case

In certain cases, e.g., if a cylinder is subjected to torsion and simple tension, we have  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ . From (4.12) through (4.14) follows

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{1}{2} \varepsilon_z, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad (7.1)$$

provided the material obeys v. MISES' yield condition. For any other yield condition (4.12) and (4.13) do not generally hold; hence, the yield surface in 3-space deforms in the process of hardening.

Restricting ourselves to materials obeying v. MISES' condition, we start from (4.5), i.e., from the yield condition

$$\left. \begin{aligned} f = J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_x - c \varepsilon_x)^2 + \dots - \frac{1}{3} (\sigma_y - c \varepsilon_y) (\sigma_z - c \varepsilon_z) - \dots \\ + \left( \tau_{yz} - \frac{1}{2} c \gamma_{yz} \right)^2 + \dots = \frac{1}{3} \sigma_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Inserting (7.1) and subtracting  $c \varepsilon_z/2$  from the normal stresses, we obtain in this particular case

$$g = \left( \sigma_z - \frac{3}{2} c \varepsilon_z \right)^2 + 3 \left( \tau_{yz} - \frac{1}{2} c \gamma_{yz} \right)^2 + 3 \left( \tau_{zx} - \frac{1}{2} c \gamma_{zx} \right)^2 = \sigma_0^2. \quad (7.3)$$

This yield surface (an ellipsoid of rotation) moves in a translation, but not in the direction of the outward normal.

If we use the transformations

$$t_{yz} = \sqrt{3} \tau_{yz}, \quad t_{zx} = \sqrt{3} \tau_{zx}, \quad g_{yz} = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_{yz}, \quad g_{zx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_{zx}, \quad (7.4)$$

the yield surface becomes a sphere

$$p = \left( \sigma_z - \frac{3}{2} c \varepsilon_z \right)^2 + \left( t_{yz} - \frac{3}{2} c g_{yz} \right)^2 + \left( t_{zx} - \frac{3}{2} c g_{zx} \right)^2 = \sigma_0^2 \quad (7.5)$$

of radius  $\sigma_0$ , moving in the direction of the exterior normal.

*Subcase a:* If  $\sigma_z = 0$ , (4.13) and (4.14) yield  $\varepsilon_z = 0$ . For v. MISES' yield condition, the problem can be treated in a  $(\tau_{yz}, \tau_{zx})$ -plane. The yield locus is the circle

$$\left( \tau_{yz} - \frac{1}{2} c \gamma_{yz} \right)^2 + \left( \tau_{zx} - \frac{1}{2} c \gamma_{zx} \right)^2 = \frac{1}{3} \sigma_0^2 \quad (7.6)$$

of radius  $3^{-1/2} \sigma_0$ , moving in the direction of its outward normal.

It is interesting to note that under TRESCA's yield condition the yield surface deforms even in this comparatively simple case and that  $\gamma_{xy}$  does not remain zero.

*Subcase b:* If  $\tau_{yz} = 0$ , (4.10) yields  $\gamma_{yz} = 0$ . If v. MISES' yield condition holds, the problem can be treated in a  $(\sigma_z, t_{zx})$ -plane. The yield locus is the circle

$$\left( \sigma_z - \frac{3}{2} c \varepsilon_z \right)^2 + \left( t_{zx} - \frac{3}{2} c g_{zx} \right)^2 = \sigma_0^2 \quad (7.7)$$

of radius  $\sigma_0$ , moving in the direction of the exterior normal.

It is clear that the last result, apart from the difference in notation, is the one already obtained in the last subcase of section 6.

## 8. Conclusion

In sections 5 through 7 we have encountered the various possibilities discussed already in section 4. In most of the cases considered the yield surface moves in a translation, and a simple transformation at most suffices to make the original form of PRAGER's rule apply in the subspace appropriate to the problem. In certain cases, however, the yield surface deforms in the course of hardening. Incidentally, these exceptions occur, as far as our examples are concerned, in those cases where at the same time (a) more than one normal stress is different from zero and (b) the material obeys TRESCA's yield condition.

In section 1 the advantages of TRESCA's yield condition have been emphasized. The deformation of the yield surface which has been found in many cases represents a serious drawback in this respect.

## REFERENCES

- [1] H. ZIEGLER, *An Attempt to Generalize Onsager's Principle, and Its Significance for Rheological Problems*, Z. angew. Math. Phys. 9b, 748 (1958).
- [2] R. v. MISES, *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*, Göttinger Nachrichten, Math. phys. Kl. 1913, 582 (1913).

- [3] H. TRESCA, *Mémoire sur l'écoulement des corps solides*, Mém. prés. Acad. Sci., Paris 18, 733 (1868).
- [4] R. v. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Z. angew. Math. Mech. 8, 161 (1928).
- [5] D. C. DRUCKER, *Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity*, Quart. appl. Math. 7, 411 (1950).
- [6] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity* (Oxford 1950).
- [7] P. G. HODGE, Jr., *The Theory of Piecewise Linear Isotropic Plasticity*, IUTAM Colloquium Madrid 1955, *Deformation and Flow of Solids* (Berlin 1956).
- [8] W. PRAGER, *The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements* (James Clayton Lecture), Proc. Inst. Mech. Eng. 169, 41 (1955).
- [9] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie* (Basel 1955), p. 16.
- [10] P. G. HODGE, Jr., *Piecewise Linear Plasticity*, Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech., Brussels, 1956.

### Zusammenfassung

Um das Verhalten eines Metalls mit dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Figur 1 unter einem beliebigen räumlichen Spannungszustand zu beschreiben, wird neben der Annahme isotroper Verfestigung, welche aber den Bauschinger-Effekt nicht erklärt, die Pragersche Verfestigungsregel [8] verwendet. Es wird hier untersucht, welche Formen diese Regel in den wichtigsten Spannungsräumen von weniger als neun Dimensionen annimmt.

(Received: November 26, 1957.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

## On the Free Convection from a Horizontal Plate

By KEITH STEWARTSON, Durham, England<sup>1)</sup>

The free convection of heat from a heated vertical plate in a fluid has been extensively studied in recent years. A review of the work done has been given by SQUIRE [4]<sup>2)</sup> and subsequently numerical solutions of the governing equations has been given by OSTRACH [2] for a wide range of values of the Prandtl number  $\sigma$ . The convection takes place in boundary layers originating at the lower edge of the plate. Fluid is drawn into them, is heated and gaining buoyancy moves upwards. On the other hand if the plate is cooled relative to the surrounding fluid the situation is reversed for the boundary layers originate at the top of the plate, and the fluid drawn into them is forced downwards. When the plate is inclined to the vertical there is no change in the flow pattern, since the vertical buoyancy force has a component along the plate which drives the fluid thus generating the boundary layer. However, if the plate is horizontal the buoyancy has no component along its length and the boundary layer, if it exists, must be of a different character.

<sup>1)</sup> Department of Mathematics, The University.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 281.

In this paper we shall examine the boundary layer on a horizontal plate showing that if the plate is heated and faces downwards or is cooled and faces upwards a solution can be found which is in moderately good agreement with experiment. On the other hand if the plate is heated and faces upwards or is cooled and faces downwards the boundary layer problem is not properly posed.

The appropriate equations for a heated plate inclined at an angle  $\alpha$  to the horizontal are [4]

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \varrho g \sin \alpha + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y} - \varrho g \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (4)$$

in which  $x$  measures distance along the plate and upwards,  $y$  distance perpendicular to the plate and upwards,  $u, v$  are the components of velocity in these directions,  $p$  the pressure,  $\varrho$  the density,  $T$  the absolute temperature and  $\mu$  the coefficient of viscosity. In deriving these equations it is assumed that both the viscosity and the difference between the ambient temperature  $T_0$  and the plate temperature  $T_1$  are sufficiently small. Let

$$p = p_0 - \varrho_0 g y \cos \alpha - \varrho_0 g x \sin \alpha + \varrho_0 P, \quad (5)$$

where  $\varrho_0$  is the constant density of the fluid outside the boundary layer and  $p_0$  is a constant. Since the boundary layer is thin, it follows from (2) that  $\varrho_0 P$ , which is the pressure increment inside it, is small. From the equation of state [4] we also have

$$\varrho - \varrho_0 = -\beta \varrho_0 (T - T_0), \quad (6)$$

where  $\beta$  is a constant. In particular for a gas  $\beta T_0 = 1$ . The first two equations of motion now reduce to

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \beta g \sin \alpha (T - T_0) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7)$$

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial y} + \beta g \cos \alpha (T - T_0), \quad (8)$$

where  $\nu$  is the kinematic viscosity.

The boundary conditions are that  $u = v = 0$ ,  $T = T_1$  at  $y = 0$  and  $u = 0$ ,  $T = T_0$ ,  $P = 0$  outside the boundary layer or, effectively, as  $y \rightarrow \infty$ . By themselves these are not sufficient to solve the problem completely since the equations are parabolic and initial profiles of  $T$  and  $u$  must be prescribed as well. If  $\alpha \neq 0$  the difficulty may be overcome as follows. From (7)  $u$  must be positive if the plate is heated and therefore the boundary layer must originate at the lower edge of the plate where it must contain a zero mass of fluid. Similarly if the plate is cooled it must originate with zero mass at the upper edge of the plate.

If  $\alpha = 0$  however it will appear below that the boundary layer does not always exist and even when it does it may originate at any value of  $x$  growing either in the direction of increasing  $x$  or in the direction of decreasing  $x$ . We shall assume the most obvious possibility, that the boundary layers originate at each of the two edges of the plate and grow towards the centre. SCHMIDT [3] has published a photograph of a heated horizontal plate in which the boundary layer is thicker at the centre than at the edges. It may be regarded as supporting but not conclusive evidence for the present assumption.

The solution of the governing equations for a horizontal plate may now be attempted. Take the origin of  $x$  to be one of the edges and write

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{|y|}{x} \left\{ \frac{|T_1 - T_0| \beta g \cos \alpha}{\nu^2} \right\}^{1/5}, & \psi &= \{x^3 \nu^3 \beta g \cos \alpha |T_1 - T_0|\}^{1/5} F(\eta), \\ T &= T_0 - |T_1 - T_0| \theta(\eta) \operatorname{sgn} y, & P &= -[\nu \beta^2 g^2 x \cos^2 \alpha (T_1 - T_0)^2]^{2/5} G(\eta) \operatorname{sgn} y, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

where  $\psi$  is the stream function defined by

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

so that

$$\left. \begin{aligned} u &= [x \nu \beta^2 g^2 \cos^2 \alpha (T_1 - T_0)^2]^{1/5} F'(\eta), \\ v &= -\frac{1}{5x} [x^3 \nu^3 \beta g \cos \alpha |T_1 - T_0|]^{1/5} (F - \eta F'). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

The factor  $\cos \alpha$ , equal to unity when the plate is horizontal, has been retained for convenience when inclined plates are discussed below. The equations for  $F$ ,  $G$ ,  $\theta$  are, since  $\alpha = 0$ ,

$$F''' + \frac{3}{5} F F'' - \frac{1}{5} F'^2 = \frac{2}{5} (G - \eta G'), \quad G' = \theta, \quad \theta'' + \frac{3}{5} \sigma F \theta' = 0 \quad (11)$$

with boundary conditions

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \pm \operatorname{sgn} y, & F &= F' = 0 \text{ at } \eta = 0, \\ \theta &\rightarrow 0, & P &\rightarrow 0, & F' &\rightarrow 0 \text{ as } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

The special form of these equations shows that there are only two distinct cases according as  $\theta = +1$ , or  $\theta = -1$  at  $\eta = 0$ .

First suppose that  $\theta = -1$  at  $\eta = 0$ , corresponding to a heated plate facing upwards or a cooled plate facing downwards. In this case (11) has no solution for on integrating the equation for  $F$  twice

$$F'(\eta) + \frac{3}{10} F^2(\eta) = -\frac{2}{5} \int_0^\eta d\eta \int_\eta^\infty (2F'^2 + G - \eta G') d\eta.$$

Hence

$$\frac{3}{10} F^2(\infty) = -\frac{2}{5} \int_0^\infty dy \int_\eta^\infty (2F'^2 + G - \eta G') d\eta = -\frac{2}{5} \int_0^\infty d\eta (2\eta F'^2 + \eta^2 \theta') d\eta, \quad (13)$$



which is a contradiction, since from the equation for  $\theta$ ,  $\theta' \geq 0$ . Thus the problem of a heated horizontal plate facing upwards has not been properly posed and most probably the plate does not have a boundary layer.

Second suppose that  $\theta = +1$  at  $\eta = 0$ , corresponding to a heated plate facing downwards or a cooled plate facing upwards. Then (12) presents no difficulty and has been integrated numerically taking  $\sigma = 0.72$ , its value in air, it being found that

$$\theta'(0) = -0.358, \quad F''(0) = 0.971, \quad G(0) = -1.73, \quad F(\infty) = 2.30. \quad (14)$$

The form of the boundary layer is slightly different from that of a heated vertical plate because the buoyancy acts indirectly. It induces a *transverse* pressure gradient whose variation along the plate drives the fluid. When  $\theta(0) = -1$  the pressure gradient along the plate which is induced is adverse thus explaining why no solution can be found. It is to be expected, and confirmed by (9), that since the buoyancy acts indirectly the boundary layer is weaker and thicker than it is on a vertical plate.

The flow pattern is similar to that arising from a finite circular cylinder rotating about its axis in a fluid which is rotating about the same axis but with a different angular velocity. Some problems of this kind have already been examined [5] and it may be shown that the basic equations are the same if  $\sigma = 1$  and the two angular velocities are nearly equal. Indeed the present paper was stimulated by a discussion on rotating fluids with Professor SQUIRE. During it he showed me SCHMIDT's photograph of a heated horizontal plate pointing out that just as there is a fundamental difference between the flow inside and outside a rotating cylinder, so is there a difference between the flow above and below the plate.

The solution given by (9) and (14) refers to a boundary layer originating at one edge of the plate and there will also be another equal boundary layer originating at the other edge. The fluid in each of these layers is moving towards the centre where a collision between them must occur. Since the fluid in each layer has momentum, fluid must then be expelled moving away from the plate in a two-dimensional jet. The interaction between the boundary layers is similar to that in the theory of a rotating sphere already discussed [5]. Beyond a distance  $O(\nu^{2/5})$  from the centre, the two boundary layers are independent. Within this distance each boundary layer divides into two layers, of which the outer layer is a jet, being controlled solely by the inertia terms and the inner of thickness  $O(\nu^{3/5})$  is a conventional boundary layer with a mainstream and must separate. If, as is believed, the effect of the separation is small the inner layer may be neglected, when the initial profile of the jet is the same as the profiles of the two boundary layers just outside the interaction region when taken together.

The total heat transfer from unit length of a plate of breadth  $l$  is

$$H = 2 \int_0^{l/2} \frac{\mu}{\sigma} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx.$$

Substituting from (9) and (14) we have

$$Nu = \frac{H \sigma}{(T_1 - T_0)} = 0.841 \left\{ \frac{\beta g^3 (T_1 - T_0) \sigma}{\nu^2} \right\}^{1/5} = 0.841 (Ra)^{1/5}, \quad (15)$$

where  $Nu$ ,  $Ra$  are the Nusselt and Rayleigh numbers respectively.

FISHENDEN and SAUNDERS [1] have reported experiments on horizontal plates. These showed considerable qualitative differences according as the plates were heated or cooled, faced upwards or downwards, in agreement with the predictions of this paper. For heated plates facing downwards, when a quantitative comparison can be made with the results of this paper, they concluded that the flow is laminar throughout the range of their experiments and that

$$Nu = 0.25 (Ra)^{1/4}. \quad (16)$$

According to the graph of  $Nu$  against  $Ra$  which they display however the slope of the curve is almost exactly  $1/5$  in  $10^5 < Ra < 10^8$  thereafter increasing to  $1/4$  as  $Ra$  increases to  $10^{10}$ . It may be that at the upper end of the range of  $Ra$  the flow although not turbulent was slightly unstable. Another possible explanation of the increase in the index is that the temperature difference  $T_1 - T_0$  was ultimately over 500 C when the effects of the variation of viscosity with temperature and of dissipation may be important. Assuming that  $Nu \propto (Ra)^{1/5}$  throughout the closest fit with the curve is obtained when

$$Nu = 0.81 (Ra)^{1/5}. \quad (17)$$

The agreement is much better than when (16) is used. Although (15) and (17) agree quite well it must be remembered that the experiments were done with plates which were nearly square, while (15) is appropriate only to an infinitely long strip. The theoretical result for a square must have the same index as (15), from dimensional considerations, but since the square has four edges it would have a slightly higher coefficient.

Let us suppose now that the plate is inclined to vertical. The argument of this paper may still be used if

$$\frac{\partial P}{\partial x} \gg \beta g (T - T_0) \sin \alpha,$$

i. e.,

$$[\nu \beta^2 g^2 \cos^2 \alpha (T_1 - T_0)^2]^{2/5} x^{-3/5} G \gg \beta g |T_1 - T_0| \theta \sin \alpha. \quad (18)$$

Thus no matter how small  $\alpha$  is then ultimately the component of the buoyancy along the plate must dominate the induced pressure gradient. To find when (18) holds let us assume that  $G = O(\theta)$  and that  $\gg$  means more than 10 times as large. The condition is then that

$$\frac{x}{l} < \left\{ \frac{\cos^4 \alpha}{10^5 \sin^5 \alpha Ra} \right\}^{1/3}.$$

Thus the present theory is valid everywhere on the plate when  $Ra = 10^5$  provided that the inclination of the plate to the horizontal is less than one degree.

On the other hand the condition that the component of buoyancy perpendicular to the plate be negligible can also be estimated. It is that

$$[\nu \beta^2 g^2 \cos^2 \alpha (T_1 - T_0)^2]^{2/5} x^{-2/5} G \ll \beta g |T_1 - T_0| \theta \sin \alpha. \quad (19)$$

It is clear from (19) that for any  $\alpha < \pi/2$  the component of the buoyancy perpendicular to the plate must dominate the component parallel to the plate sufficiently near to the origin of the boundary layer. If we require (19) to hold over 90% of the plate then

$$10^8 \cos^4 \alpha < \sin^5 \alpha Ra,$$

whence if  $Ra = 10^5$ ,  $\alpha > 70^\circ$  approximately. Thus for plates inclined to the vertical the transverse pressure gradient induced by the buoyancy is important near the origin of the boundary layer over a large range of values of the Rayleigh number. Accordingly the boundary layers on either side of such a plate should be slightly different near their common origin.

The solution given here is valid if three assumptions are justified. First the boundary layers must be centred on the edges of the plate. Second the assumption implicit in (1)–(4), namely that  $v \ll u$  must hold which means, from (10) and (15), that

$$\frac{v}{l} \left( \frac{x}{l} \right)^{1/5} (Ra)^{2/5} \gg \frac{v}{l} \left( \frac{x}{l} \right)^{-2/5} (Ra)^{1/5}, \quad \text{i. e.} \quad \left( \frac{x}{l} \right) \gg (Ra)^{-1/3}. \quad (20)$$

Third the convection currents generated by other heated bodies in the neighbourhood must be negligible when compared with the velocities in the boundary layers. If the heated plate forms the ceiling of a closed room, of which the walls and floor are maintained at the same temperature, the only convection currents arise from the ceiling and do not modify the solution given here provided that (20) is satisfied. If however it is a face of a heated rectangular bar convection currents are set up from the vertical sides which are larger than the current set up from the horizontal face. There is a possibility therefore that in certain circumstances they may not be negligible in comparison with the velocities in the boundary layer. It is known [4] that the convection currents induced by a heated vertical plate are of order  $v l^{-1} (Ra)^{1/4}$  assuming that a typical length in the vertical direction is also  $l$ . Further at a lower corner of the bar the convection currents outside the boundary layer may be singular the velocities being at worst of order  $v^{-1/3}$ , where  $v$  is the distance from the corner. Hence the velocity of the convection currents just outside the boundary layer are

$$O \left[ \frac{v}{l} \left( \frac{l}{x} \right)^{1/3} (Ra)^{1/4} \right]$$

and are small compared with  $u$  if

$$\frac{v}{l} \left( \frac{x}{l} \right)^{1/5} (Ra)^{2/5} \gg \frac{v}{l} \left( \frac{l}{x} \right)^{1/3} (Ra)^{1/4}, \quad \text{i. e.} \quad \frac{x}{l} \gg (Ra)^{-9/32}, \quad (21)$$

The difference between the indices in (20) and (21) is sufficiently small that the effect of these external convection currents may be neglected as soon as the boundary layer approximation is valid.

#### REFERENCES

- [1] FISHENDEN, M., and SAUNDERS, O. A., *An Introduction to Heat Transfer* (Oxford 1950), p. 95.
- [2] OSTRACH, S., N.A.C.A. Rep. No. 1111 (1953).
- [3] SCHMIDT, E., Proc. 4th Int. Cong. Appl. Mech. (Cambridge 1934), p. 92.
- [4] SQUIRE, H. B., *Modern Developments in Fluid Dynamics: High Speed Flow* (ed. L. HOWARTH; Oxford 1953), Chap. 10.
- [5] STEWARTSON, K., *Symposium über Grenzschichtforschung*, Freiburg i. Br. 1954 (unpublished).

*Zusammenfassung*

Die freie Konvektion an einer beheizten horizontalen Platte wird nach den üblichen Methoden der Grenzschichttheorie untersucht. Weist die wärmeübertragende Plattenseite nach oben, so ist das Problem auf dieser Basis unlösbar, wohl aber findet man eine widerspruchsfreie Lösung, wenn diese Plattenseite nach unten weist. In diesem ist die Nusselt Zahl, die den Wärmeübergang kennzeichnet, proportional der  $1/5$ -ten Potenz der Rayleigh Zahl, welche die Beheizung charakterisiert. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist befriedigend.

(Received: February 27, 1958.)

---

 Varia – Miscellaneous – Divers
 

---

## Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 3. bis 4. Mai 1958 in Romont

### *Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik*

**Quelques considérations sur le développement des compresseurs axiaux transsoniques.** Par P. SCHWAAR, Dammarie-les-Lys, France<sup>1)</sup>.

Pendant longtemps, les constructeurs de compresseurs axiaux se sont systématiquement abstenus de dessiner leurs aubages pour des nombres de MACH supérieurs à ceux reconnus comme limites sur la base des essais de grilles planes<sup>2)</sup>. Ces limites, au-dessus desquelles on fait apparaître une chute rapide du rendement de compression des grilles, se situent approximativement dans un domaine subsonique  $0,7 < M_{w\infty} < 0,9$  des vitesses relatives de l'écoulement d'amont, les valeurs inférieure et supérieure correspondant respectivement à des sections d'aubage voisines du moyeu et de la périphérie d'une roue mobile, ceci pour des rapports diamétraux de l'ordre de 0,4–0,5, c'est-à-dire pour les premiers étages de compresseurs couramment utilisés dans les turbomachines d'aviation.

L'évolution de la technique de ces machines vers la réalisation de débits spécifiques de plus en plus élevés, s'est traduite par l'emploi généralisé d'écoulements giratoires rotationnels à l'entrée des compresseurs. Ces types d'écoulements se distinguent des écoulements irrotationnels classiques par une diminution de la composante axiale de la vitesse et une augmentation du moment cinétique du rayon intérieur au rayon extérieur de la veine. Ils permettent ainsi d'éviter les vitesses relatives trop élevées au sommet des ailettes et de réaliser des débits spécifiques optima par une utilisation intégrale des limites subsoniques des nombres de MACH sur toute la hauteur des ailettes. Il en résulte qu'on ne peut obtenir une augmentation appréciable du débit spécifique qu'en dépassant ces limites. Un gain de l'ordre de 20% peut être réalisé en conservant les conditions

<sup>1)</sup> Société Nationale d'Etude et de Construction de Moteurs d'Aviation.

<sup>2)</sup> Nous ne considérons pas ici les compresseurs axiaux supersoniques au sens habituel du terme, dans lesquels on tente de mettre en jeu des nombres de MACH nettement supersoniques sur toute la hauteur des ailettes d'une couronne fixe ou mobile.



d'écoulement subsoniques classiques au moyeu et en autorisant un nombre de MACH relatif légèrement supersonique ( $M_{w_\infty} = 1,1 - 1,3$ ) au rayon extérieur de l'aubage mobile. Ceci revient simplement à rétablir l'écoulement giratoire irrotationnel à l'entrée de la roue, voire à supprimer le distributeur d'entrée, donc à maintenir la vitesse débitante constante sur le rayon.

C'est à cette définition que répond notre conception initiale de l'étage transsonique à taux de compression modéré. Un relèvement du niveau de MACH relatif au rayon intérieur permet un gain supplémentaire de débit et une augmentation proportionnée du taux de compression.

Le caractère essentiel de l'étage transsonique ainsi défini consiste dans la présence d'ondes de choc détachées du bord d'attaque des ailettes mobiles sur une partie plus ou moins importante de leur hauteur et, pour les taux de compression élevés, dans l'utilisation des chocs pour produire une partie au moins du travail de compression de l'étage.

Quelques propriétés importantes de l'écoulement à ondes de choc détachées peuvent être déduites d'une analyse qualitative du fonctionnement transsonique de la grille plane. Dans l'hypothèse de conditions d'écoulement périodiques le long du front de grille, on montre que le passage transsonique du nombre de MACH d'amont  $M_\infty$  s'effectue de manière continue si la section de passage minimum de la grille ne bloque pas. La croissance de  $M_\infty$  en supersonique peut être limitée par deux circonstances. Une limite inférieure  $M_{\infty_{\min}}$  correspond à l'apparition d'une configuration de choc en fourche dans la grille. Une limite supérieure  $M_{\infty_{\max}}$ , qui ne peut en aucun cas être dépassée dans le schéma de fonctionnement de la grille (abaissement progressif de la pression statique d'aval) qui correspond aux conditions usuelles d'aspiration d'un étage, est donnée par la condition  $M_{\infty_{\max}} \sin \alpha_\infty = 1$ .

L'évolution transsonique de l'écoulement est profondément influencée par la présence des couches limites, dont l'interaction avec les chocs prend une importance particulière dans la grille, non seulement par les décollements et les pertes qui peuvent en résulter, mais aussi par l'effet de striction supplémentaire que l'épaississement consécutif de la couche limite d'extrados provoque au droit des cols de la grille.

Il y a lieu de compléter les considérations sur le fonctionnement transsonique de la grille plane par quelques indications sur les influences tridimensionnelles, qui jouent un rôle important dans la grille circulaire. Le passage transsonique s'effectue plus aisément dans un aubage de compresseur que dans une grille plane, car les conditions d'écoulement les plus critiques ne s'y produisent pas simultanément, comme dans cette dernière, sur toute la hauteur des ailettes. De plus, les écoulements giratoires irrotationnels engendrent des déplacements radiaux des lignes de courant vers l'extérieur de la veine à la traversée de l'aubage mobile, qui favorisent le déblocage des sections voisines du moyeu et tendent à abaisser le niveau de MACH au droit des chocs, tant à la périphérie qu'au rayon intérieur de la roue, réduisant ainsi l'importance des décollements et des pertes dues à l'interaction chocs-couches limites.

Finalement, il importe de choisir une évolution aéro-thermodynamique globale du fluide telle qu'il en résulte un dessin d'aubage transsonique à cambrure modérée. Des profils à faible épaisseur relative, avec maître-couple reporté loin en arrière du bord d'attaque, et l'adoption de charges aérodynamiques modérées contribuent efficacement à éviter les grandes survitesses d'extrados. Ces conditions ne sont pas toujours compatibles avec le but final recherché, de sorte que

le dessin d'un étage transsonique procède généralement d'un compromis qui affecte plus ou moins son rendement.

Les données suivantes ont été adoptées pour le dessin d'un des étages transsoniques expérimentaux réalisés à la SNECMA:

$M_{w_i} = 0,700$ ,  $M_{w_e} = 1,324$ , vitesse périphérique  $U_e = 422$  m/s,

rapport diamétral  $\nu = 0,45$ , taux de compression  $\pi_{tot} = 1,26$ ,

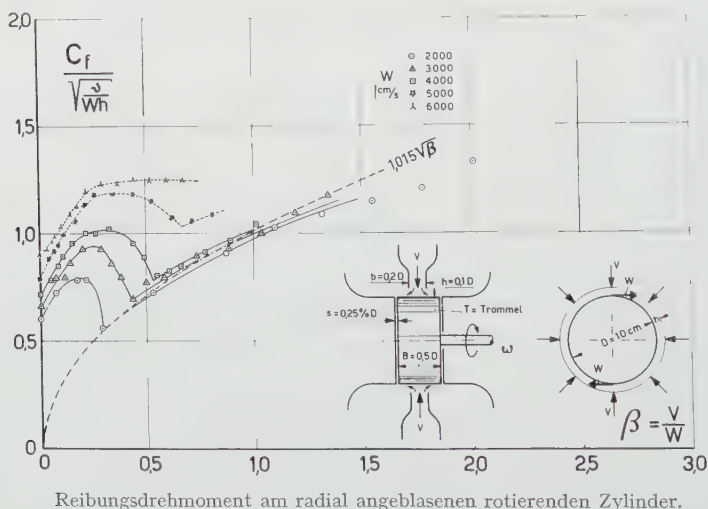
débit rapporté à la section frontale  $D_s = 160$  kg/m<sup>2</sup> s (INA O).

Aux essais, le débit et le taux de compression prévus ont été réalisés au régime d'adaptation avec un rendement adiabatique de 84% de l'ensemble (distributeur amont + roue mobile + redresseur) et une marge de pression au pompage largement suffisante ( $\pi_{tot\ max} = 1,385$ ). L'analyse détaillée des conditions d'écoulement dans cet étage nous a permis de confirmer dans une large mesure la validité des considérations présentées dans cette brève étude.

Une publication détaillée est prévue dans «Technique et Science Aéronautiques».

### Über Reibung und Grenzschicht-Stabilität an rotierenden angeblasenen Zylindern. Von J. ACKERET, Zürich<sup>3)</sup>.

In Zusammenhang mit Untersuchungen über Sekundärströmungen haben wir (Verfasser und H. SPRENGER) einen einfachen Versuch gemacht, der auch selbständiges Interesse bietet.



Reibungsdrehmoment am radial angeblasenen rotierenden Zylinder.

Ein rotierender Zylinder (siehe Figur) wird radial am ganzen Umfang angeblasen und das Drehmoment bei verschiedenen Anblas- und Drehgeschwindigkeiten gemessen.

<sup>3)</sup> Institut für Aerodynamik der ETH.



Im laminaren Fall folgt die Grenzschicht einem exakten und einfachen Gesetz: sie ist auf der ganzen Zylinderoberfläche von konstanter Dicke, falls der Zustrom entsprechend einer Staupunktströmung ( $u = a x$ ,  $v = -a y$ ) erfolgt. Die Reibungsspannung  $\tau_0$  am Umfang ist überall von gleichem Betrag und folgt nach der Theorie zu

$$C_f = \frac{\tau_0}{(\rho/2) W^2} = 1,15 \sqrt{\frac{a}{V}},$$

wo  $W$  die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders ist. Bei unserem Versuch (Figur) floss die Luft aus einer Parallel-Ringdüse, die von der Zylinderoberfläche den Abstand  $h$  hatte. Für diesen etwas veränderten Zustrom ergibt sich

$$a = 0,775 \frac{V}{h},$$

wo  $V$  die (radiale) Geschwindigkeit in der Mündung der Ringdüse bedeutet.

Führt man noch das Verhältnis  $\beta = V/W$  ein, so ergibt sich

$$C_f = 1,015 \sqrt{\frac{V}{W h} \beta},$$

welcher Wert in guter Übereinstimmung mit den Messungen ist, falls  $V$  genügend gross ist.

Bei kleinem  $\beta$  tritt Übergang zur Turbulenz ein. Man kann vermuten, dass durch Zentrifugalkräfte zuerst instabile, aber geordnete Wirbel mit Achsen ungefähr in peripherer Richtung entstehen, wie sie von TAYLOR und GÖRTLER näher betrachtet wurden. – Das Kriterium

$$\frac{W \vartheta}{v} \sqrt{\frac{\vartheta}{R}} = k,$$

wo  $\vartheta$  die Impulsmangeldicke und  $R$  der Zylinderradius ist, wird mit  $k \sim 2$  erfüllt, was plausibel erscheint. Der Zerfall dieser Görtler-Wirbel würde dann zur eigentlichen Turbulenz führen.

### Beispiele zur Theorie der Flügelgitter. Von L. MEYER, Zürich<sup>4)</sup>.

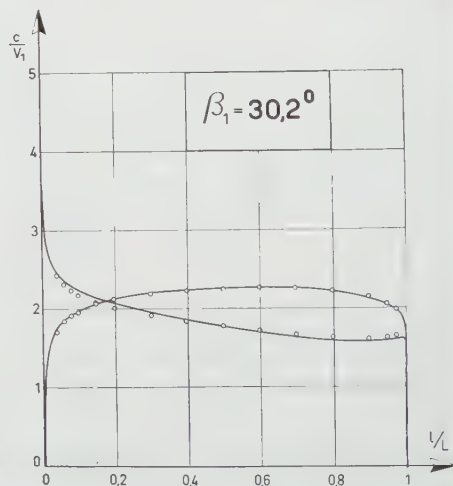
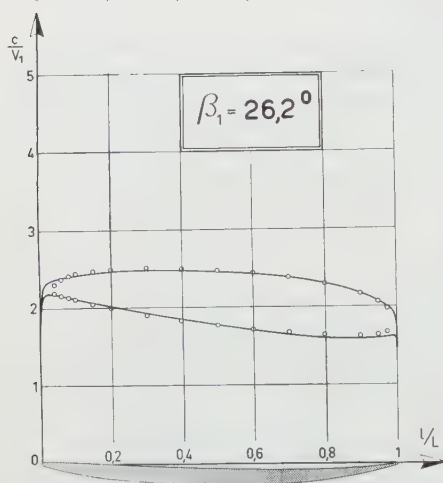
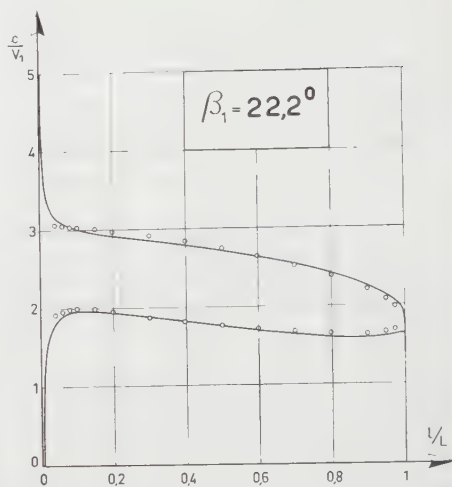
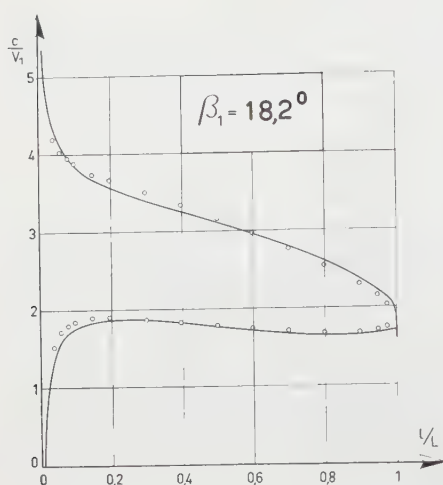
Zur Prüfung der am Institut für Aerodynamik der ETH entwickelten, auf reibungsfreier Strömung basierenden Berechnungsmethode für Schaufelprofile von axialen Turbomaschinen wurden Messungen an Schaufelgittern im elektrolytischen Trog durchgeführt.

Nachdem eine genügende Messgenauigkeit erreicht war<sup>5)</sup>, wurden mehrere verschiedenartige Profile untersucht. Die hier wiedergegebene Figur zeigt zum Beispiel die gerechneten und gemessenen Geschwindigkeiten an einem 5% dicken Profil für Axialverdichter bei stossfreiem Eintritt ( $\beta_1 = 26,2^\circ$ ) sowie bei geänderter Anströmrichtung. Es konnte eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung festgestellt werden<sup>6)</sup>.

<sup>4)</sup> Institut für Aerodynamik der ETH.

<sup>5)</sup> L. MEYER, *Zur Theorie der Flügelgitter*, Z. angew. Math. Phys. 8, Fasc. 4 (1957).

<sup>6)</sup> Ein ausführlicher Bericht wird in den «Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH», herausgegeben von Prof. Dr. J. ACKERET, erscheinen.



Profil für Axialverdichter. Gerechnete und gemessene Geschwindigkeitsverteilungen bei verschiedenen Anströmwinkeln; die Bezugsgeschwindigkeit  $V_1$  ist die zur Gitterrichtung normale Komponente der Eintrittsgeschwindigkeit.

### Über die Belüftung von Autostrassen-Tunnel. Von A. HAERTER, Zürich<sup>7)</sup>.

Zur genügenden Verdünnung der Fahrzeugabgase in der Tunnelluft sind Strassentunnel mit Lüftungsanlagen auszustatten. Beim System der Querlüftung wird aus einem parallel zum Verkehrsraum laufenden Zuluftkanal Frischluft in den Verkehrsraum eingeführt und die Tunnelluft wieder in einen Abluftkanal abgesogen.

<sup>7)</sup> Institut für Aerodynamik der ETH.

Die Druck- und Geschwindigkeitsverläufe in den Luftkanälen berechnen sich nach untenstehendem Gleichungssystem:

$$\frac{d\pi_{az}}{d\xi} = \mp \lambda \frac{L}{D} \omega_{az}^2 - K_{az} \frac{d\omega_{az}^2}{d\xi},$$

$$\frac{d\omega_{az}}{d\xi} = - \frac{f/\sqrt{1+\zeta}}{F/L} \sqrt{\pm \pi_{az} + \beta \omega_z^2 \mp \pi_v},$$

wobei

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \omega_{az} = \frac{u_{az}}{u_{az_0}}, \quad \pi_{az} = \frac{p_{az}}{(\rho/2) u_{az_0}^2},$$

$\lambda$   $L/D$  Rohrreibungsfaktor,  $f$  Schlitzöffnung pro  $d\xi$ ,  $F$  Kanalquerschnitt,  $\zeta$  Umlenk- und Reibungsverlustfaktor für Schlitz,  $K_z$   $\beta_z$  von Grenzschicht abhängig,  $K_a$  von  $v_x/u_a$  abhängig ( $v$  Einstömgeschwindigkeit),  $a$  Abluftkanal,  $v$  Verkehrsraum,  $z$  Zuluftkanal.

Die Randbedingungen lauten  $\xi = 0$ ,  $\omega = 1$ ;  $\xi = 1$ ,  $\omega = 0$ .

Für den Fall konstanter Schlitzöffnungen und konstanten Kanalquerschnitts ist die Mengenverteilung längs des Kanals einerseits von  $\lambda L/D$  und andererseits von

$$\frac{f/\sqrt{1+\zeta}}{F/L},$$

das heisst vom Druckniveau des Kanals gegen aussen abhängig. Wird eine einigermaßen gleichmässige Verteilung verlangt, so muss der mittlere Druckunterschied gegen aussen im allgemeinen gross sein.

Durch Einstellen der Schlitz kann natürlich eine gleichmässige Verteilung auch für kleine Druckunterschiede gegen aussen erzielt werden, wie es bei der Tunnelventilation zwecks Leistungersparnis gemacht wird. Beobachtungen am Schelde-Tunnel in Antwerpen zeigten aber, dass beim Betrieb mit kleinerer Luftmenge als jener, für welche die Schlitz eingestellt wurden, die Kanäle die Luft nicht mehr gleichmässig verteilen.

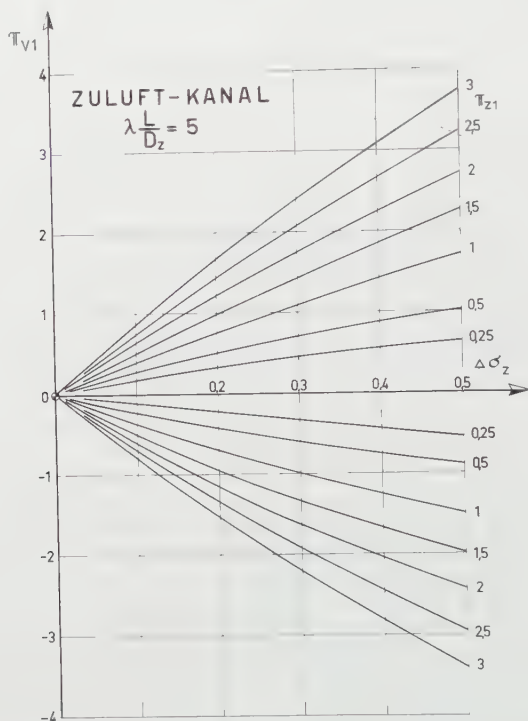
Dafür ergeben sich nun zwei Erklärungen:

Eine Ursache liegt in der Änderung der Reynolds-Zahl entsprechend der Mengenänderung, sie bringt aber bei Verhältnissen, wie sie bei der Tunnelventilation vorliegen, nur kleine Abweichungen.

Die Hauptursache ist die, dass der Druck im Verkehrsraum nicht immer konstant ist, wie für die Schlitzeinstellung angenommen wurde. Atmosphärische und bei Tunnelsteigungen auch thermostatische Einflüsse bewirken Druckgradienten im Verkehrsraum, und der Luftwiderstand der durchfahrenden Fahrzeuge, der sich im Tunnel in einem Druckunterschied vor und hinter dem Wagen äussert, ergibt merkbare Druckveränderungen. Am Modellversuch wurde durch Kraftwägung und Druckabfallmessungen der Einfluss der Tunnelwände und des Fahrzeugabstandes auf den Luftwiderstand auch gemessen. Diese Druckänderungen können sich nun speziell bei kleinen Luftmengen auswirken, die nur noch unter geringem Über- bzw. Unterdruck gegen den Verkehrsraum stehen.

Um den Einfluss der Druckgradienten allgemein überblicken zu können, wurde im Bereich der möglichen Kanalabmessungen (durch  $\lambda L/D$  charakterisiert) und der möglichen Druckunterschiede  $\pi_{v1}$  zwischen Kanalanzug und -ende für verschiedene Unter- bzw. Überdrücke  $\pi_{az1}$  am Kanalende der maximale Unterschied im Vergleich zur mittleren Menge  $\Delta\sigma_{az}$  berechnet. Die umfangreichen

Rechnungen konnten auf der Contraves-Analogie-Rechenmaschine durchgeführt werden. Ein Beispiel der aufgestellten Kurvenblätter gibt unsere Figur. Mit diesen Berechnungen wird es somit möglich sein, Belüftungskanäle optimal auszuliegen.



Druckgradienten im Verkehrsraum  $\pi_{V1}$  (Druckunterschied über gesamte Kanallänge, bezogen auf den Eintrittsstaupressur im Zuluftkanal) ergeben Abweichungen  $\Delta \sigma_z$  von der gleichmässigen Verteilung, je nach Kanalüberdruck  $\pi_{z1}$  (Überdruck am Kanalende).

**Über die Möglichkeit magnetohydrodynamischer Kreisel.** Von P. MAEDER, Zürich<sup>8)</sup>.

Eine ausführliche Veröffentlichung in der ZAMP erfolgt später.

**Systematische Herleitung logischer Schaltungen.** Von H. GLÄTTLI, Zürich<sup>9)</sup>.

In vereinfachter Darstellung besteht das vorgeschlagene Verfahren aus folgenden Schritten:

1. Systematische Komposition von Elementar-Schaltkreisen.
2. Klassierung der erhaltenen Schaltkreise zwecks Erstellung eines Katalogs der mit Kompositionen aus  $R \leq R_0$  Grundsaltungen darstellbaren Funktionen.

<sup>8)</sup> Zurzeit Institut für Aerodynamik der ETH.

<sup>9)</sup> IBM-Forschungslaboratorium.

3. Abtastung der in Frage kommenden Teile des Katalogs entsprechend der zu realisierenden Schaltfunktion; Versuch, die im Katalog enthaltenen Funktionen mit der zu realisierenden in Deckung zu bringen, nötigenfalls durch Gleichsetzung oder Fixierung von überzähligen Variablen.

Ausgehend von der Tatsache, dass alle Vorgänge in Schaltkreisen, die kapazitive und induktive Elemente enthalten, einzeln durch Gleichstromschaltkreise dargestellt werden können, werden 6 Elementarschaltkreise, bestehend aus je einem nichtlinearen Element (Diode, pnp-Transistor, npn-Transistor oder Hochvakuumtriode) in Verbindung mit einem Ohmschen Widerstand, eingeführt.

Alle Anschlüsse werden als variable Eingänge aufgefasst. Spannungen werden nur qualitativ angegeben.

Die logischen Funktionen von Kompositionen lassen sich in Boolescher Algebra durch einfache Substitution herleiten. Ein geeigneter Bezeichnungscode liefert Angaben über Art, Anzahl und Verknüpfung der verwendeten Elementarkreise sowie über die Impedanzverhältnisse.

Zur Klassierung der äusserst allgemeine Funktionen darstellenden Kompositionen werden Abzählmethoden herangezogen. Sie erweisen sich deshalb als erfolgreich, weil jede Variable ein- und nur einmal sowie nur in positiver oder nur in negierter Form auftritt.

Eine zu realisierende, in Boolescher Algebra vorgegebene Funktion wird nach ähnlichen Gesichtspunkten durch «Koordinaten» charakterisiert, wie sie bei der Klassierung gelten.

Gesetzmässigkeiten des Verfahrens gestatten eine rasche Bezeichnung von relativ eng begrenzten Katalogteilen, welche potentielle Lösungen enthalten können.

Demzufolge gestattet das Verfahren Aussagen der folgenden Art:

«Zur Realisierung einer bestimmten logischen Funktion bestehen für eine vorgegebene Maximalzahl  $R_0$  von nichtlinearen Elementen folgende und nur folgende Möglichkeiten.»

Dieses vereinfachte Verfahren wird für den Fall  $R_0 = 2$  simuliert. Als erstes Beispiel weist  $X = AB' + A'B$  («exclusive or») zwei Lösungen auf, während  $X = A(B + C) + BC$  eine einzige Lösung hat. Nebenbei sei bemerkt, dass für  $X = AB + A'B'$  als einzige Funktion mit zwei Variablen keine Lösung für  $R_0 = 2$  existiert.

In einer verfeinerten Form des Verfahrens werden Gesetzmässigkeiten des Aufbaus logischer Funktionen dazu verwendet, um nur noch begrenzte, durch das Problem bestimmte Teile des Katalogs zu entwickeln. Dies ermöglicht die Behandlung komplizierterer Probleme.

Als Besonderheiten der Methode sind zu erwähnen: Vollständigkeit (Garantie für Lösung mit geringstem Aufwand) sowie die Möglichkeit der maschinellen Durchführung (hinreichend exakte Formulierung).

**Ein einfacher Thermostat mit Transistoren.** Von E. BALDINGER und A. MAIER, Basel<sup>10)</sup>.

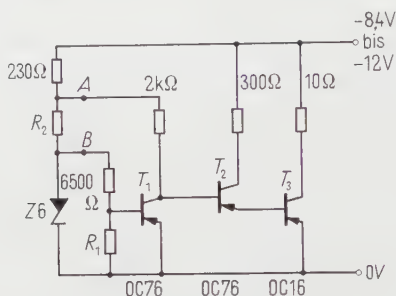
Die Temperaturabhängigkeit der Transistoreigenschaften stört in manchen Anwendungen, speziell wenn hohe Anforderungen an Genauigkeit und Konstanz gestellt werden. Wohl ist durch geeignete Schaltungen eine weitgehende Kompensation von Temperatureffekten möglich. Häufig wird aber die Lösung eines

<sup>10)</sup> Physikalische Anstalt der Universität, Abteilung für angewandte Physik.



Schaltungsprobleme wesentlich erleichtert oder gar erst ermöglicht, wenn ein Teil der Schaltung in einem Thermostaten untergebracht werden kann.

Wir haben einen einfachen Thermostaten entwickelt, der in Betriebsspannung und Betriebssicherheit einer Transistorschaltung angepasst ist (Figur 1). Als



Figur 1

Schaltenschema des Transistor-Thermostaten. Mit  $R_1 = 150 \Omega$  ergab sich eine Gleichgewichtstemperatur von  $46^\circ \text{C}$ .  $R_2 = 10 \Omega$ .

Temperaturindikator dient der Transistor  $T_1$  mit festgehaltener Basisspannung<sup>11</sup>). Bei fallender Temperatur sinkt sein Kollektorstrom. Dadurch wird der Heizstrom, der durch  $T_3$  gesteuert wird, vergrößert.  $T_2$  reduziert, als Emitterfolgestufe, die Belastung von  $T_1$ . Mit Hilfe der Zener-Diode gelingt es, die Gleichgewichtstemperatur des Thermostaten von der Speisespannung unabhängig zu machen:  $R_2$  wird gegenüber dem Innenwiderstand der Zener-Diode derart justiert, dass sich die Spannungsschwankungen an den Punkten A und B<sup>12</sup>) in ihrer Auswirkung auf den Heizstrom so weit kompensieren, dass die *gesamte Heizleistung* (bei gleichbleibender Temperatur) sich nicht ändert.

Die Versuchsausführung des Thermostaten besteht aus einem 3 mm starken, beidseitig geschlossenen Messingzylinder von 5 cm Durchmesser und 5 cm Höhe. Im Innern ist die Regelschaltung (Figur 1) ausser dem Heizwiderstand von  $10 \Omega$  untergebracht, der auf dem Messingzylinder aufgewickelt ist. Der nutzbare Innenraum beträgt  $60 \text{ cm}^3$ , was jedoch keine obere Grenze darstellt. Die Wärmeabgabe nach aussen ist durch eine allseitig 2 cm dicke Schicht von Polystyrolschaum auf  $75 \text{ mW}/^\circ\text{C}$  reduziert.

Der Thermostat wurde mittels  $R_1$  auf eine Gleichgewichtstemperatur von  $46^\circ\text{C}$  eingestellt. Der Temperatur-Stabilisierungsfaktor betrug 50 und der Spannungsbereich  $8,4 \text{ V} \div 12 \text{ V}$ . Die Kurzzeitkonstanz über 4 Stunden war besser als die Messgenauigkeit von  $\pm 0,015^\circ\text{C}$ . Über die Langzeitkonstanz orientiert Figur 2. Bei der Beurteilung des Driftes von  $0,2^\circ\text{C}$  im Dauerversuch von einem halben Jahr ist zu beachten, dass ausser der Alterung der Transistoren und der Zener-Diode auch eine Alterung der verwendeten Kohlewiderstände (Resista,  $1/2 \text{ Watt}$ ) eine Rolle spielen kann. Die Streuung der Messpunkte dürfte vom Einfluss der Umgebungstemperatur auf den einfachen Referenzthermostaten herrühren. Dieser wies einen schlechten Temperatur-Stabilisierungsfaktor (rund 20) auf, seine Langzeitkonstanz war jedoch durch die Verwendung eines Hg-Kontaktthermo-

<sup>11</sup>) E. BALDINGER und W. CZAJA, Z. angew. Math. Phys. 9, 22ff. (1958).

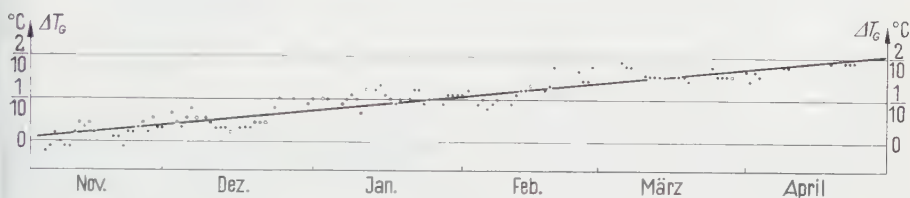
<sup>12</sup>) Unter Umständen müssen die Anschlüsse bei A und B vertauscht werden.



meters gesichert. Obwohl die Messresultate, gemäss der festgestellten Korrelation mit der Zimmertemperatur, korrigiert wurden, bleiben infolge der Trägheit der Anordnung Restfehler bei *schnellen* Änderungen der Zimmertemperatur.

Eine Verbesserung der Temperaturstabilisierung des Transistor-Thermostaten kann durch Erhöhung der Verstärkung der Regelschaltung erreicht werden. Einfache Möglichkeiten sind:

- Ersatz von  $T_2$  durch eine Verstärkerstufe mit einem npn-Transistor;
- Einfügung eines kleinen gemeinsamen Emittterwiderstandes für  $T_1$  und  $T_3$  zur Erzielung positiver Rückkopplung.



Figur 2

Gang  $\Delta T_G$  der Gleichgewichtstemperatur des Transistor-Thermostaten.

Versuche dieser Art sollen in Verbindung mit einem besseren Referenzthermostaten unternommen werden.

Für die finanzielle Unterstützung dieser Untersuchungen sind wir der Stiftung Hasler-Werke zu Dank verpflichtet.

### Ein stabilisiertes Netzgerät hoher Güte mit Transistoren. Von E. BALDINGER und W. CZAJA, Basel<sup>13)</sup>.

Bereits früher haben wir über ein stabilisiertes Netzgerät mit Transistoren berichtet, das einen Stabilisierungsfaktor von rund 1000 und einen Innenwiderstand von etwa  $1\text{ m}\Omega$  aufwies<sup>14)</sup>.

Eine Verbesserung dieser Daten ist dann möglich, wenn eine Verbesserung der Referenzspannung gelingt<sup>15)</sup>.

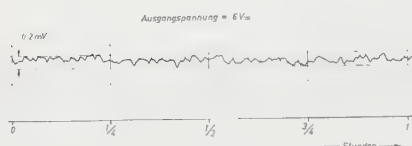
Im folgenden wird über ein stabilisiertes Netzgerät mit Transistoren berichtet, dessen Stabilisierungsfaktor bei einer Ausgangsspannung von 6 V etwa zwischen  $0,5$  bis  $1,0 \cdot 10^4$  (ohne Kompensation) liegt und das einen Innenwiderstand von etwa  $0,2\text{ m}\Omega$  aufweist. Die Ausgangsspannung ist variabel zwischen 1 und 17 V, und die Ausgangsleistung beträgt maximal 15 W, wobei ein Laststrom von 2,5 A nicht überschritten werden darf. Ferner ist das Gerät kurzschlußsicher [die Daten sind gleich wie in <sup>15)</sup>]. Eine Ausgangsspannung von beispielsweise 6 V ist während 1 Stunde besser als  $\pm 0,1\text{ mV}$  konstant (Figur 1). Die Rippelspannung am Ausgang beträgt weniger als  $0,1\text{ mV}$ . Das gesamte stabilisierte Netzgerät weist etwa die Dimensionen eines 1-kW-«Soerenen»-Stabilisators auf.

<sup>13)</sup> Physikalische Anstalt der Universität, Abteilung für angewandte Physik.

<sup>14)</sup> E. BALDINGER und W. CZAJA, Z. angew. Math. Phys. 8, 324 (1957).

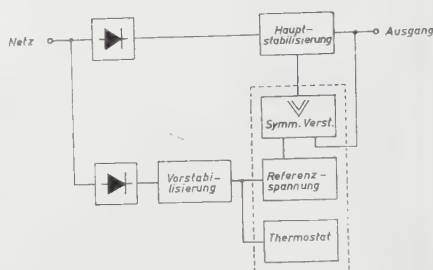
<sup>15)</sup> E. BALDINGER und W. CZAJA, Z. angew. Math. Phys. 9, 1–25 (1958).

Figur 2 zeigt das Blockdiagramm des Gerätes. Als Thermostat wurde ein Transistor-Thermostat<sup>16)</sup> mit einer Ölfüllung verwendet. Zur Vermeidung unkontrollierbarer Temperaturdifferenzen im Apparat selber ist ein Gebläse zur Kühlung eingebaut.



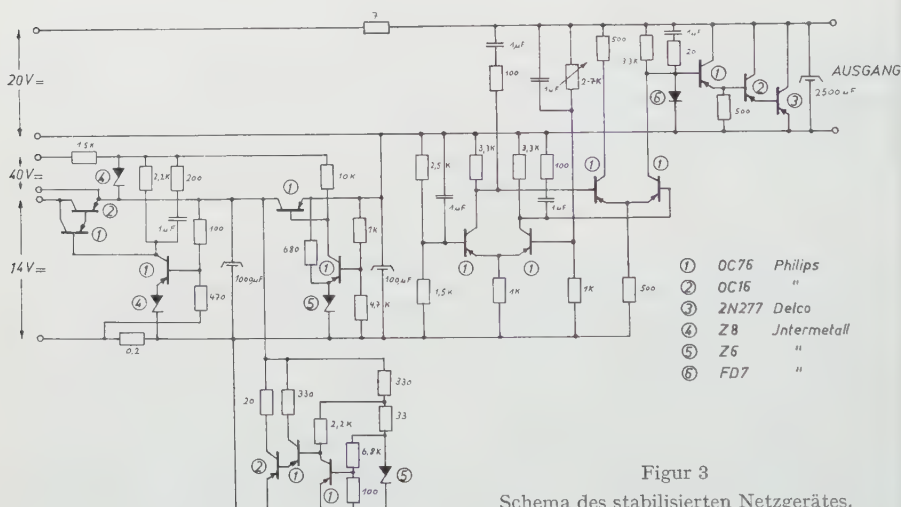
Figur 1

Vorläufige Messung der Ausgangsspannung.  
Vergleich mit 6-V-Bleiakkumulator.



Figur 2

Blockschema des stabilisierten Netzgerätes.  
..... deutet die im Thermostat untergebrachten Schaltungen an.



Figur 3

Schema des stabilisierten Netzgerätes.

Die Transistoren und Widerstände der Schaltung in Figur 3 sind nicht ausgesucht. Es wurde lediglich der symmetrische Verstärker durch passende Wahl der Spannungsteiler bei der Arbeitstemperatur des Thermostaten (etwa 40°C) symmetriert. In der Schaltung wurden ausschliesslich Drahtwiderstände verwendet und Elektrolytkondensatoren nur dort, wo eine Veränderung tolerierbar ist.

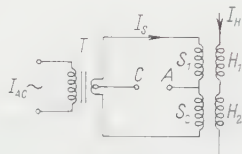
Diese Untersuchungen wurden aus Mitteln der Stiftung Hasler-Werke finanziert, wofür wir unseren Dank aussprechen.

<sup>16)</sup> E. BALDINGER und A. MAIER, siehe voranstehenden Bericht.

# Ein supraleitender Gleichrichter und Verstärker. Von J. L. OLSEN, Zürich<sup>17)</sup>.

Viele Experimente bei der Temperatur des flüssigen Heliums erfordern relativ grosse Gleichströme bei sehr niedrigen Spannungen. Um solche Ströme zu liefern, ohne dass zu grosse Wärmemengen in den Kryostaten eingeführt werden, wäre ein in Helium arbeitender Transformator mit einem passenden Gleichrichter zweckmässig. Jedoch fehlte bisher ein einfacher, bei tiefen Temperaturen arbeitender Gleichrichter.

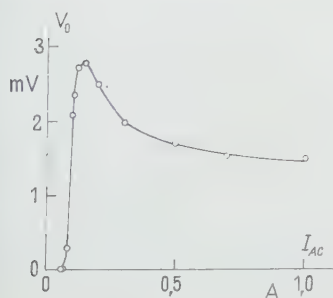
Wir haben jetzt die in Figur 1 gezeigte Schaltung zur Lösung dieses Problems untersucht<sup>18)</sup>. Der Sekundärstrom  $I_s$  des Transformators  $T$  wird durch die beiden



Figur 1  
Schaltbild.

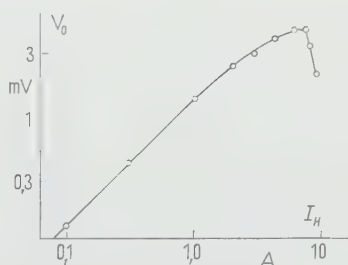
aus supraleitendem Material gewickelten Spulen  $S_1$  und  $S_2$  geführt. Übersteigt  $I_s$  einen gewissen Grenzwert  $I_g$ , so wird in  $S_1$  und  $S_2$  während Teilen der Periode die Supraleitung zerstört und ein Anstieg von  $I_s$  über  $I_g$  erschwert. Durch Anlegen eines axialen Magnetfeldes auf  $S_1$  und  $S_2$  wird der Absolutwert von  $I_g$  von der Stromrichtung abhängig, und mit passender Wahl der Richtung des von den Feldspulen erzeugten Feldes wird eine Gleichspannung zwischen den Punkten  $A$  und  $C$  entstehen.

In einer kürzlich untersuchten experimentellen Ausführung dieser Schaltung hatte der Transformator  $T$  1000 Primärwicklungen und 4 Sekundärwicklungen. Der ganze Sekundärkreis wurde aus Lötzinndraht von 0,6 mm Durchmesser gemacht, da dieses Material etwa die supraleitenden Eigenschaften von Blei, aber viel günstigere mechanische Eigenschaften besitzt.  $S_1$  und  $S_2$  bestanden je aus



Figur 2

$V_0$  in Funktion von  $I_{AC}$  für  $I_H = 0,5$  A.



Figur 3

$V_0$  in Funktion von  $I_H$  für  $I_{AC} = 110$  mA.

<sup>17)</sup> Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik der ETH.

<sup>18)</sup> Siehe auch J. L. OLSEN, Rev. Sci. Inst. 1958 (im Druck).

10 dicht aneinander plazierte Windungen von 2 mm Innendurchmesser.  $H_1$  und  $H_2$  hatten 40 Windungen pro Zentimeter.

In den Figuren 2 und 3 zeigen wir die Ausgangsspannung  $V_0$  zwischen  $A$  und  $C$ ; wobei wir in Figur 2 den Feldstrom  $I_H$  konstant auf 0,5 A und in Figur 3 den Primärstrom  $I_{AC}$  des Transformators konstant auf 110 mA halten.

Es ist klar, dass dieses Gerät ausser als Gleichstromgenerator auch als Verstärker verwendet werden kann. Mit supraleitenden Feldwicklungen, einer Eingangsimpedanz von  $2 \cdot 10^{-6} \Omega$  und einem Belastungswiderstand von  $2 \cdot 10^{-4} \Omega$  erhielten wir einen Stromverstärkungsfaktor von 10 und eine Spannungsverstärkung von 200.

Diese Arbeit wurde aus einem Arbeitsbeschaffungskredit des Bundes finanziell unterstützt.

**Ein nichtlinearer Verstärker zur Verkürzung von Impulsflanken.** Von W. BEUSCH, D. MAEDER<sup>19)</sup> und R. MÜLLER, Zürich<sup>20)</sup>.

Bei der Spektroskopie von  $\gamma$ -Quanten mit anorganischen Szintillatoren liefert die Anode des Photo-Elektronenvervielfachers einen mit der Zeitkonstante  $\tau = 0,3 \mu s$  (für NaJ) exponentiell abklingenden Strom. Für Koinzidenzmessungen hoher Zeitauflösung muss ein kleiner Bruchteil dieses Stromimpulses ein Signal auslösen, das heisst im wesentlichen eine Gitterkapazität aufladen. Der hier beschriebene Verstärker steuert eine Endstufe innert 4 ns aus, wenn die Photoröhre impulsförmig mindestens  $5 \mu A$  liefert. Er gestattet hohe Koinzidenzauflösung auch ohne Elektronenvervielfacher mit extremer Verstärkung.

Die Anstiegszeit des ganzen Verstärkers ist wesentlich höher als die genannten 4 ns<sup>21)</sup>. Weil der Verstärker in jedem Fall übersteuert wird, bestimmt die Zeit, welche er für die ersten 10% des Anstiegs benötigt, die minimale Dauer des Koinzidenzsignals. Der Verstärker besteht aus 8 Röhren, welche je 1,3- bzw. 8fach verstärken. Die Anstiegszeit für eine einzelne Anode ist ungefähr  $RC = 5$  ns. Wären die Arbeitswiderstände rein ohmsch, so würde der 8stufige Verstärker für die ersten 10% des Anstiegs 25 ns, für die nächsten 80% weitere 30 ns benötigen, wäre also für unsere Zwecke unbrauchbar; vor allem, weil die Zeit für die ersten 10% noch stark von der Impulsamplitude abhängt.

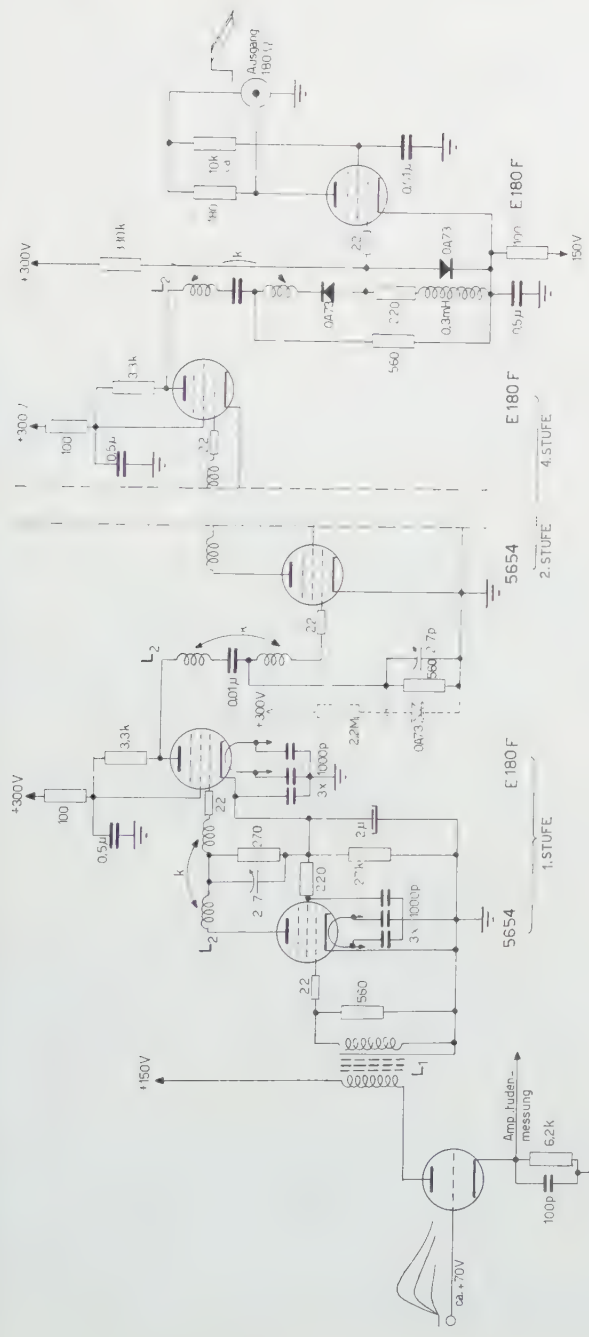
Die Induktivitäten  $L_2$  und die Trimmerkondensatoren bilden mit den Anoden- und Gitterkapazitäten ein doppeltes  $\pi$ -Glieder einer Laufzeitkette. Die Kapazitäten werden teilweise kompensiert, und es resultiert eine von der Impulsamplitude unabhängige Laufzeit im Verstärker. Die Wirkungsweise des Kopplungsgliedes kann so veranschaulicht werden: Die beiden Spulen von  $L_2$  bilden einen Transformator, der einen zum Beispiel negativen Impuls unverzüglich mit positivem Vorzeichen überträgt. Dazu wird der ganze Impuls mit unverändertem Vorzeichen, aber mit der Verzögerung des doppelten  $\pi$ -Gliedes überlagert. Das resultierende Überschwingen ist in Figur 2, oben, sichtbar, desgleichen die Tatsache, dass die ersten 10% des Anstiegs jetzt am raschesten durchlaufen werden.

Berechnungen haben ergeben, dass der Verlauf der ersten 10% des Anstiegs ziemlich kritisch von der Kopplung abhängt und dass  $k = 0,7$  der günstigste Wert ist, was durch das Experiment bestätigt wurde.

<sup>19)</sup> Zur Zeit am ORNL., Oak Ridge, Tennessee.

<sup>20)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>21)</sup> Ein Kettenverstärker mit  $3 \cdot 10$  Röhren könnte zum Beispiel bei 1000facher Verstärkung diese Anstiegszeit besitzen.



Figur 1

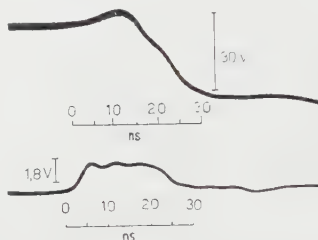
Schema des Verstärkers. Werte in  $\Omega$  bzw.  $k\Omega$  und pF bzw.  $\mu F$ .

Je eine Röhre 5654 und E 180 F bilden eine gleichstromgekoppelte Doppelstufe. An Anodenwiderstand der 5654 (270  $\Omega$ ) entsteht die Gitterspannung der E 180 F, so dass diese beim Übersteuern keinen Gitterstrom zieht. Die gestrichelt eingezeichneten Dioden arbeiten dank der Vorspannung im Knick ihrer Kennlinie. Sie setzen für kleine Impulse die Verstärkung herab. Gleichspannungs- und Heizleitungen sind zur Bekämpfung der Schwingneigung entkoppelt.

Gestrichelt gezeichnete Schaltelemente nur in 3. und 4. Stufe vorhanden.  $L_1$ : 2 · 11 Windungen in FNC IV D 14-8 mit Cu-Abschirmung.  $L_2$ : 2 · 2 Windungen in ExCIV D 14-8.



Bei der Figur 2 wurden auf den Eingang des Verstärkers exponentiell mit  $\tau = 0,3 \mu\text{s}$  ansteigende Impulse der Amplitude 0,2 V gegeben. Eine Vergrößerung der Amplitude um einen Faktor 10 veränderte die Form des Impulses nur unwesentlich, er erschien um 5 ns früher.



Figur 2

Oszillogramme der Impulse am Ausgang. Oben: Impulsform mit «Überschwingen» nach der 4. Doppelstufe. Das Überschwingen wird durch die nachfolgende Seriediode nicht übertragen. Unten: Impulsform nach der Endstufe. Zur Kontrolle der Zeitbasis wurde die Länge des Rechteckimpulses mit einem kurzgeschlossenen Kabel auf 20 ns begrenzt.

**Un amplificateur pour spectrophotomètre.** Par R. DESSOULAVY, J. DURAND et E. LÜSCHER, Lausanne et Herisau<sup>22)</sup>.

Comme décrit<sup>23)</sup>, le spectrophotomètre Metrohm utilise un faisceau lumineux interrompu périodiquement et mesuré par une photocellule à vide.

Il s'agit d'avoir un amplificateur à courant alternatif dont le gain peut être ajusté en 8 pas de 10 db. La précision requise est de  $\pm 0,5\%$  dans toute la gamme de lecture. La sensibilité doit être limitée par le bruit de la résistance d'entrée  $R$ .

#### *Rapport signal / bruit*

Le phototube peut être assimilé à une source de courant  $I$  traversant la résistance de charge  $R$ . Le rapport signal/bruit est:

$$\frac{U_s}{U_B} = \frac{RI}{\sqrt{4kT\Delta f R}} \sim \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\Delta f}} I.$$

Il y a donc intérêt à avoir  $R$  aussi élevé que possible. Une limite de  $R$  est toutefois fixée par l'effet des capacités parasites, effet d'autant plus faible que la fréquence est plus basse. Nous avons choisi  $R = 400 \text{ M}\Omega$  et  $f = 10 \text{ Hz}$ . Avec ces valeurs, le bruit de la lampe d'entrée est négligeable ( $R$  équivalant  $\cong 1 \text{ M}\Omega$ )<sup>24)</sup>.

#### *Largeur de bande*

A une fréquence aussi basse, de simples filtres  $RC$ , passe-bas et passe-haut, permettent d'obtenir une largeur de bande de l'ordre de 12 Hz.

L'amplitude du signal étant généralement beaucoup plus grande que celle du bruit, il n'y a pratiquement aucun avantage à utiliser un redresseur en phase<sup>25)</sup>.

<sup>22)</sup> Laboratoire Metrohm.

<sup>23)</sup> Z. angew. Math. Phys. 8, 223 (1957).

<sup>24)</sup> J. DALBERT, Le Vide 52, 200 (1954).

<sup>25)</sup> R. A. SMITH, Proc. Electr. Eng. 98, 43 (1951).



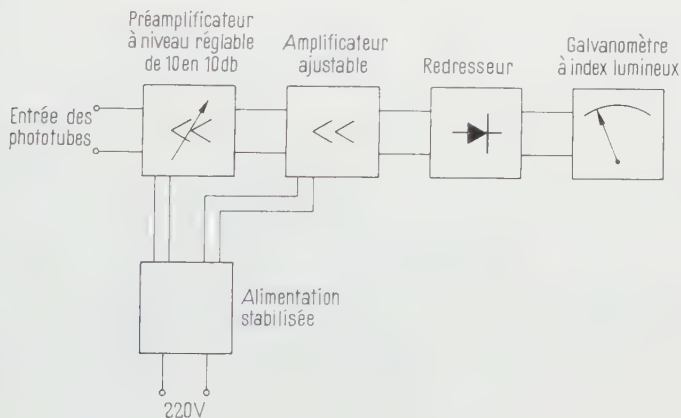
*Sensibilité*

Avec l'amplification maximum, la déviation totale de l'instrument de mesure est donnée par un signal de  $1 \cdot 10^{-12}$  A. Ce courant correspond à une intensité de lumière de  $0,045 \mu\text{lm}$  (avec un phototube 90 AV Philips et une lampe de température de couleur de  $2700^\circ \text{K}$ ).

En l'absence de signal et pour l'amplification maximum, le bruit thermodynamique de la résistance d'entrée provoque une déviation de 3 à 4% de la déviation totale. En présence d'un signal suffisant, le bruit ne provoque plus de déviation, mais seulement des fluctuations de la valeur lue.

*Montage*

Le redresseur utilise 2 diodes au silicium présentant une grande résistance inverse, même à une température élevée. Il possède une caractéristique de redressement extrêmement linéaire (écart de linéarité de  $\pm 0,3\%$  de la valeur maximum) car il est alimenté par une source à haute impédance (pentode sous-alimentée).

*Conclusions*

Cet amplificateur permet de mesurer avec précision des flux lumineux dans une gamme d'intensité variant de 1 à 100 000. Sa sensibilité est à la limite de ce que peut donner un appareil industriel avec cellule à vide.

**Klystron stabilisé en phase.** Par P. KARTASCHOFF, Neuchâtel<sup>26)</sup>.

Dans une communication antérieure nous avons décrit un spectrographe à haute résolution utilisant un klystron stabilisé en phase sur une harmonique élevée de l'oscillation d'un quartz<sup>27)</sup>.

<sup>26)</sup> Laboratoire suisse de Recherches horlogères.

<sup>27)</sup> J. BONANOMI, J. DE PRINS, J. HERRMANN et P. KARTASCHOFF, *Helv. Phys. Acta* 30, 290 (1957).

La fréquence du quartz est balayée par une réactance variable (figure 1). La self  $L_2$  varie grâce à la saturation du noyau en ferrite. Une polarisation appropriée permet d'obtenir une bonne linéarité du balayage.

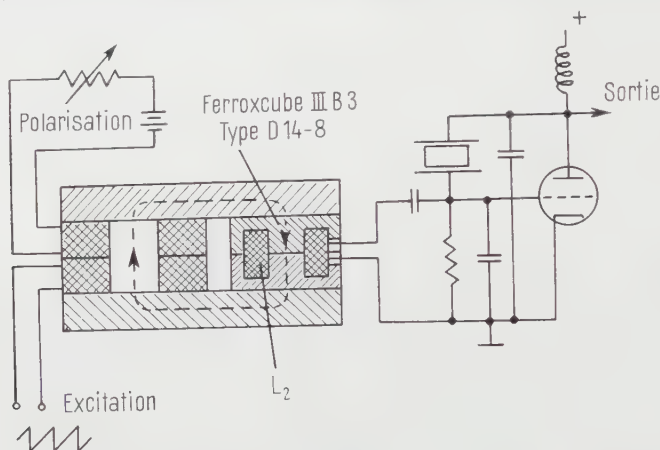


Figure 1

Oscillateur à quartz balayé en fréquence par une self variable.

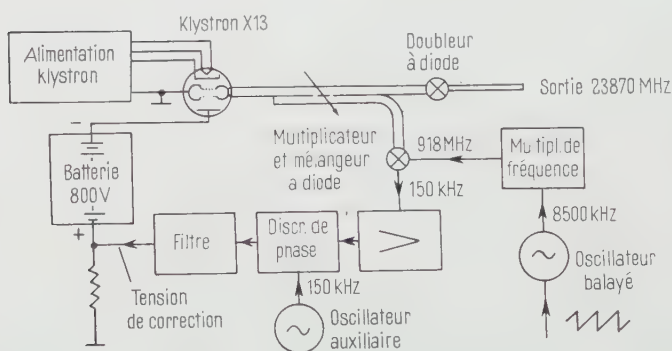


Figure 2

Circuit de stabilisation en phase d'un oscillateur klystron.

Pour que le domaine de maintien de la synchronisation du klystron soit plus grand que celui du balayage maximum il faut que le gain de la boucle d'asservissement soit suffisant. Les propriétés du filtre de la tension de correction (figure 2) permettent un gain plus élevé que dans le circuit original de PETER et STRANDBERG<sup>28)</sup>.

Nous avons obtenu sans difficulté un domaine de synchronisation de 7 MHz autour de la fréquence de 24000 MHz. Le balayage était de quelques centaines de kHz.

<sup>28)</sup> M. PETER and M. W. P. STRANDBERG, Proc. Inst. Radio Engrs. 43, 869 (1955).

La fréquence auxiliaire était de 150 kHz mais elle peut être choisie entre 100 kHz et plusieurs MHz, la limite supérieure étant donnée par l'amplificateur et le discriminateur de phase. Pour des valeurs inférieures à 100 kHz le domaine de synchronisation diminue.

La tension de correction est appliquée au réflecteur du klystron à travers une batterie qui fournit la tension fixe du réflecteur. C'est dans ce sens que ce système diffère de celui réalisé par DAVIS<sup>29</sup>) où le discriminateur de phase et le filtre se trouvent au potentiel élevé du réflecteur.

### Summary

In an earlier communication on High Resolution Microwave Spectroscopy<sup>27</sup>) we described a spectrograph using a phase-stabilized klystron oscillator as a local oscillator in the detection system. The stabilizing system has a 'holding range' of several megacycles which permits the sweeping of the reference crystal oscillator.

**Multiplication de fréquence et stabilité en phase.** Par P. KARTASCHOFF, Neuchâtel<sup>26</sup>).

Les oscillateurs à quartz 100 kHz fournissent une fréquence qui est très stable à long terme. Quand on multiplie la fréquence pour arriver à des fréquences de 10 000 MHz ou plus on observe que l'instabilité de la phase élargit la raie spectrale du signal.

Par contre il a été démontré que des oscillateurs à quartz relativement simples qui travaillent sur des fréquences de 5 MHz ou plus donnent un signal pur et stable à mieux que  $10^{-10}$  à court terme<sup>30</sup>). Ces performances sont réalisées avec des quartz de télécommunication ordinaires (coupe *AT*). Si le quartz est thermostatisé la dérive lente de la fréquence est inférieure à  $10^{-8}$  par jour, mais toujours plus grande que celle d'un oscillateur étalon 100 kHz.

S'il est possible de maintenir la fréquence d'un oscillateur HF sur un multiple exact de 100 kHz on peut obtenir un signal de fréquence plus stable et dont la raie spectrale est pure.

Ceci est réalisé par un système d'asservissement de la phase (figure 1) qui est basé sur le principe IGO<sup>31, 32</sup>).

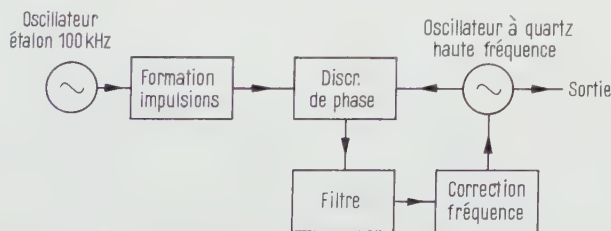


Figure 1

Circuit de stabilisation par impulsions d'un oscillateur (IGO).

<sup>29</sup>) E. F. DAVIS, External Publication No. 380 (Jet Propulsion Laboratory, California Inst. of Technology, 1957).

<sup>30</sup>) M. W. P. STRANDBERG, Letter Proc. IRE **44**, 696 (1956).

<sup>31</sup>) E. G. HUGENHOLTZ, Philips techn. Rundschau **13**, 11 (1952).

<sup>32</sup>) G. SALMET, Proc. IRE **44**, 1582 (1956).

La phase de l'oscillation HF est comparée à des impulsions 100 kHz et le signal de correction passe à travers un filtre intégrateur (figure 2) qui a une constante de temps élevée (10–20 s) afin d'éliminer toutes fluctuations brèves. Pour la même raison le domaine de maintien de l'asservissement doit être aussi petit que possible. Dans nos essais il était de quelques  $10^{-8}$  ce qui suffisait pour produire un signal propre et pour maintenir la fréquence asservie pendant des heures.

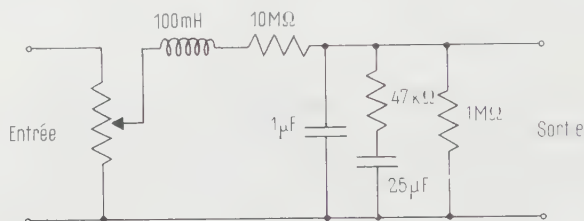


Figure 2

Filtre intégrateur qui élimine l'effet des fluctuations brèves de la phase.

### Summary

A frequency multiplying system which delivers an exact multiple of the frequency of a 100 kc/s standard in the microwave region has been developed. High spectral purity of the signal has been obtained by servo-controlling the phase of a high frequency quartz crystal oscillator through an integrating filter with long time-constant.

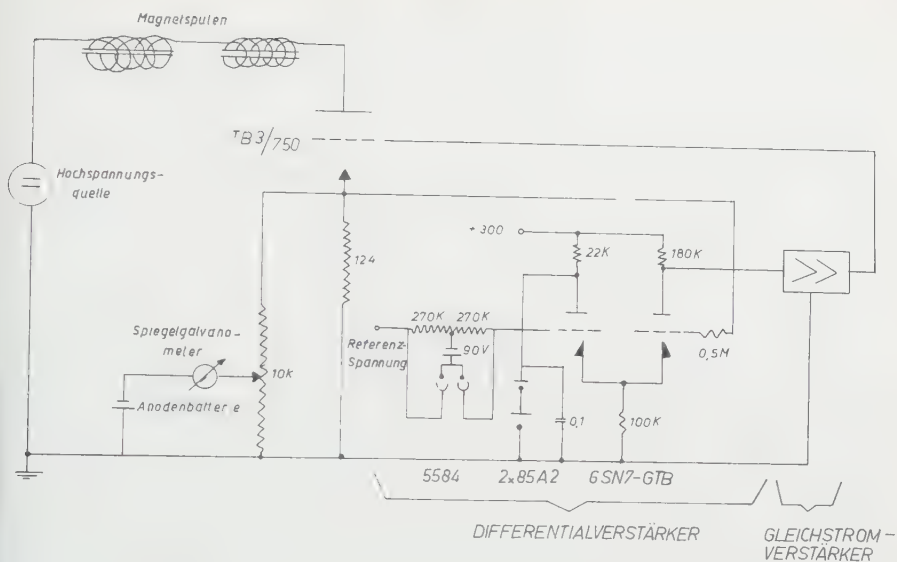
**Verwendung einer Differentialphotoröhre in einem hochstabilisierenden Magnetstromregulator.** Von D. BRINKMANN, E. BRUN und H. H. STAUB, Zürich<sup>33)</sup>.

Für die Beobachtung von Kerninduktionssignalen der Breite von etwa 10 mGs bei einem Magnetfeld von rund 10 kGs ist eine Stabilität (Verhältnis des Magnetfeldes zu seiner Schwankung) von mehr als  $10^6$  erforderlich. Der Stabilisierungsfaktor (Verhältnis der relativen Änderungen von Primärspannung und Magnetfeld) sollte etwa  $10^5$  sein: Eine 1%ige Spannungsschwankung würde das Magnetfeld um 1 mG ändern.

Der bisher von uns benutzte Magnetstromstabilisator, bestehend aus Differential- und Gleichstromverstärker (Figur 1), arbeitete mit negativer Rückkopplung und hatte einen Stabilisierungsfaktor von etwa  $3 \cdot 10^4$  und eine Stabilität von  $10^5$ . Durch Verwendung eines Spiegelgalvanometers, das die Magnetstromschwankungen auf eine Differentialphotoröhre (RCA 5584) überträgt, wurde der Rückkopplungskreis des Stabilisators verbessert und seine Verstärkung heraufgesetzt. Es wurden ein Stabilisierungsfaktor von  $10^5$  und eine Stabilität von  $5 \cdot 10^6$  erreicht. Ein Magnetfeld von 10 kGs schwankt somit jetzt um etwa 2 mGs.

Die Aufnahmen der Figur 2 zeigen Dispersionssignale vom Deuterium, an denen die Verbesserung des Stabilisators ersichtlich ist. Die oberen Signale wurden ohne, die unteren mit Photoröhren-Stabilisierung aufgenommen. Bei den jeweiligen Aufnahmen rechts ist das konstante Magnetfeld auf die Mitte des linearen Teils des Signales eingestellt worden. Das registrierende Schreibgerät zeichnet direkt die Schwankungen auf.

<sup>33)</sup> Physikalisches Institut der Universität.



Figur 2  
Dispersionssignale vom Deuterium.

**Gas Dynamics of Thin Bodies.** Von F. I. FRANKL und E. A. KARPOVICH. Übersetzt aus dem Russischen von M. D. FRIEDMAN (Interscience Publishers, New York und London 1954). 175 S., 33 Fig.; \$5.75.

Der Übersetzer des russischen Buches über die *Gasdynamik der dünnen Körper* erklärt im Vorwort, dass die Übersetzung ins Englische zunächst nur für den internen Gebrauch im Ames Aeronautical Laboratory der NACA vorgesehen war. Die Klarheit und Ausführlichkeit der erklärenden Texte habe ihn jedoch dazu bewogen, die vollständige Übersetzung zu publizieren.

Im ersten Kapitel wird betont, dass auch Russland seinen Teil zur Begründung der Theorie der Gasdynamik beigetragen habe, wobei man mit vielen für westliche Leser unbekannten Namen vertraut gemacht wird. Anschliessend werden die Grundgleichungen hergeleitet und der Begriff des «verzögerten Potentials» eingeführt, welches sich aus der hier weniger gebräuchlichen Wahl eines mit der Strömung mitwandernden Koordinatensystems ergibt.

Im zweiten Kapitel wird der Geschwindigkeitspotential für schlanke Rotationskörper und ähnliche Körper in Unter- und Überschallströmungen berechnet und auch die beschleunigte Bewegung eines solchen Körpers betrachtet. Hierbei ergibt sich das interessante Resultat, dass die Druckkräfte auf einen mit ungefähr Schallgeschwindigkeit fliegenden Körper erst bei Beschleunigungen von über 100 g merklich ändern.

Das dritte Kapitel behandelt im wesentlichen die unendliche und die endliche Tragfläche in Unter- und Überschallströmungen, während im vierten Kapitel die instationäre Strömung um oszillierende unendliche und endliche Tragflächen, das Potential einer pulsierenden Quelle und die Theorie von Hochgeschwindigkeitspropellern (mit Unter- und Überschallgeschwindigkeit der Blattspitzen) besprochen werden. Hier versagt allerdings die linearisierte Theorie in der Nähe des kritischen Propellerradius (Schallgeschwindigkeit), so dass die Resultate wohl als theoretisch interessant, praktisch jedoch wenig brauchbar erscheinen.

Im letzten Kapitel werden die konischen Strömungsfelder behandelt. Für Physiker und theoretisch arbeitende Aerodynamiker dürfte das Buch besonders wegen des ungewohnten Einblickes in russische Arbeiten von Interesse sein. Dem Konstrukteur mögen die Hinweise fehlen, welche Genauigkeit er von den durch die linearisierte Theorie berechneten Resultaten erwarten darf. H. R. VOELLMY

**Praktische Physik.** Von F. KOHLRAUSCH, herausgegeben von H. EBERT und E. JUSTI (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Bd. 1 1955, Bd. 2 1956). Bd. 1 646 S., 394 Abb.; DM 36.80. Bd. 2 756 S., 435 Abb., 133 Tab.; DM 52.-.

Für diese 20. Auflage wurde der altbekannte «Kohlrausch» von den Herausgebern unter Beiziehung eines erweiterten Mitarbeiterstabes vollständig neu redigiert. Die Aufteilung des Stoffes auf die beiden Bände ist im wesentlichen gleich geblieben, nämlich:

Band 1: Mechanik, Akustik, Wärme, Optik.

Band 2: Elektrizität und Magnetismus, Korpuskeln und Quanten; Tabellen zu beiden Bänden.

An Neuem gegenüber früheren Auflagen ist besonders hervorzuheben: Allgemeine Erweiterung auf allen Gebieten unter Berücksichtigung der Forschungs-



ergebnisse bis Herbst 1954; bessere Übersichtlichkeit der Tabellen, deren Zahl zu gutem Nutzen bedeutend vermehrt wurde; die Zehnernumerierung der Abschnitte trägt viel zum leichteren Auffinden der einzelnen Begriffe bei; das wieder neu aufgenommene Kapitel «Technisches» gibt manchen nützlichen Hinweis für praktische Arbeiten im Laboratorium.

Wie der Zusatz zum Titel (Zum Gebrauch für Unterricht, Forschung und Technik) bereits andeutet, ist dieses Werk für alle in einem physikalischen Laboratorium Arbeitenden bestimmt. Stellt sich das Problem der Darstellung oder Messung irgendeiner physikalischen Grösse, so kann man sich anhand des «Kohlrausch» auf wenigen Seiten über die bisher erprobten Methoden rasch orientieren, wobei auch die theoretischen Grundlagen kurz gestreift werden; um die Handlichkeit des Werkes nicht zu beeinträchtigen, mussten natürlich allzu detaillierte Angaben vielfach weggelassen werden ebenso wie die Beschreibung gewisser sehr spezieller Methoden; in diesen Fällen aber wird dem Suchenden die Fülle der Literaturzitate (Originalarbeiten und zusammenfassende Darstellungen) weiterhelfen.

Der schwierige Kompromiss, einen Stoff von gewaltigem Ausmass in ein wirkliches Handbuch zum Laboratoriumsgebrauch zusammenzudrängen, ist den Herausgebern wiederum gut gelungen.

U. KATZ

**Technische Schwingungslehre in ihren Grundzügen.** Von E. HÜBNER (Springer-Verlag, Berlin 1957). 322 S, 208 Abb.; DM 29.40.

Der Springer-Verlag hat eine Anzahl guter Schwingungsbücher herausgebracht. Man denke etwa an die *Technische Schwingungslehre* von HORT, an das gleichnamige, leider noch immer fragmentarische Buch von KLOTTER oder an die verdienstvolle Mesmersche Übertragung der *Mechanical Vibrations* von DEN HARTOG. Wer diese Werke auch nur flüchtig kennt, dem bleibt es unverständlich, wie der Verfasser des vorliegenden Buches (gemäss Vorwort) eine Lücke findet zwischen den Werken «von hohem wissenschaftlichen Niveau...», die deshalb für den durchschnittlich mathematisch Geschulten nur schwer zugänglich sind, und den übrigen Lehrbüchern, die «gut verständlich sind», aber «nicht tief genug in die schwingungstechnischen Problemstellungen eindringen». Das vorliegende Buch schliesst keine Lücke.

Dass die Periode einer Schwingung nunmehr «Periodendauer» heisst (S. 1), die Abszissenachse kurzweg «Abszisse» (S. 4), dass eine Feder nicht etwa verlängert, sondern «gelängt» wird (S. 28) und dass eine Beschleunigung «erfolgt» (S. 28), sind begriffliche und stilistische Details, die lediglich nebenbei vermerkt werden sollen. Schwerer zu übersehen ist es, wenn etwa (S. 3) ein Winkel im Text mit  $\chi$  und in der zugehörigen Abbildung mit  $\psi$  bezeichnet ist, wenn eine Summe (S. 10) über mehr Summanden erstreckt wird, als in Wirklichkeit vorhanden sind, oder wenn das axiale Trägheitsmoment eines Querschnittes (S. 30) in den Rang eines «äquatorialen Trägheitsmomentes» erhoben wird. Dass eine Funktion  $y(t)$  in der Form  $y_t$  geschrieben wird (S. 3), ist ja eine leider noch weitverbreitete Gepflogenheit; trotzdem sollte bei einer komplexen Zeitfunktion  $z(t)$  die reelle Achse (S. 15) nicht mit der Zeitachse verwechselt werden.

Neben diesen kleineren Mängeln enthält das Hübnersche Buch aber auch viele gröbere Fehler.

So wird zum Beispiel (S. 3) festgestellt: «Winkelfunktionen sind dann einander gleich, wenn ihre Argumente gleich gross sind oder sich um den Winkel  $2\pi$  (oder ein Vielfaches davon) unterscheiden.» Bei der Behandlung der Schwebung (S. 20) (die er übrigens auch als «pseudoharmonische Schwingung» bezeichnet) kommt

der Autor auf Grund einer Diskussion in der komplexen Ebene zum Ergebnis, dass die Frequenz der resultierenden Schwingung stetig veränderlich sei. Als Voraussetzung der Entwickelbarkeit einer Funktion in eine Fouriersche Reihe wird (S. 21) neben ihrer Endlichkeit ihre Differenzierbarkeit angeführt.

Behandelt man einen gedämpften Schwinger mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips, so hat man bekanntlich die am Schwinger angreifenden Kräfte, nämlich die Federkraft, die Dämpfungskraft und die Trägheitskraft, ins Gleichgewicht zu bringen. Manchen Studierenden macht dieser einfache Sachverhalt erfahrungsgemäss Mühe. Die Situation wird aber schlechthin hoffnungslos, wenn man, wie dies der Verfasser (S. 32, 38) wörtlich und (S. 71 usw.) in übertragenem Sinne durch den ganzen Text hindurch tut, die Federkraft als Reaktion der an der Feder ausgeübten Kraft, die Dämpfungskraft als Reaktion der « zur Überwindung der Reibungskräfte erforderlichen Kraft » und schliesslich die Trägheitskraft als Reaktion einer Massenkraft » definiert, die zur Beschleunigung des Schwingers aufzuwenden sei.

Diese Beispiele dürften ausreichen, um darzulegen, dass das Buch kaum so « tief in die Zusammenhänge eindringt », wie dies der Autor im Vorwort wörtlich in Aussicht stellt. Im übrigen fehlt es auch nicht an Stellen mit einer heiteren Note, so zum Beispiel, wenn (S. 133) die Auffassung vertreten wird, dass das Verfahren von RAYLEIGH eine Verallgemeinerung des Energiethorems auf Systeme mit mehreren Freiheitsgraden darstelle.

H. ZIEGLER

**High Altitude Rocket Research.** Von HOMER E. NEWELL, jr. (Academic Press, Inc., New York 1953). 298 S., 93 Abb.; \$7.50.

Die von den Amerikanern am Ende des Zweiten Weltkrieges in Deutschland erbeuteten V2-Raketen wurden in Amerika teilweise zur Erforschung der höheren Atmosphäre eingesetzt. Später konnten vom « Upper Atmosphere-Rocket Research Panel » noch die in Amerika entwickelten Höhenraketen Aerobee und Viking eingesetzt werden. Die in den Jahren 1946 bis 1952 gesammelten Resultate sind im vorliegenden Buch in allgemeinverständlicher Form veröffentlicht.

Die einzelnen Abschnitte des Buches sind nach den folgenden Sachgebieten geordnet: Die Rakete als Messkörper, Mess- und Fernmeldetechnik, Druck, Dichte und Temperatur in der höheren Atmosphäre, Winde, Messung der Strahlung der Sonne, Zusammensetzung der oberen Atmosphäre, die Ionosphäre und das erdmagnetische Feld, kosmische Strahlen, Höhenphotographie.

Die gesammelten Daten erstrecken sich zum Teil bis auf Höhen von 220 km. Der Verfasser hat sich verdankenswerterweise die Mühe genommen, nicht nur die Messresultate zu veröffentlichen, sondern auch einen kurzen Abriss über die Messtechnik und die Auswertemethode zu geben. Besonders diese Seite des Buches dürfte einen grösseren Leserkreis anziehen, während es den Physikern, Meteorologen und Aerodynamikern überlassen bleibt, die in Kurven- und Tabellenform erfassten Resultate weiter zu verarbeiten.

H. R. VOELLMY

**Magnetohydrodynamics.** Von T. G. COWLING ([Interscience Tracts on Physics and Astronomy, number 4] Interscience Publishers, New York and London 1957). 115 S., 17 Abb.; \$1.75 / \$3.50.

Als G. E. HALE vor einem halben Jahrhundert die Magnetfelder der Sonnenflecken entdeckte, konnte kein Zweifel bestehen, dass viele Erscheinungen der Sonnenphysik, zu denen später die Bewegungen der Protuberanzen und Eruptionen sowie die Struktur der Korona hinzukamen, nur durch koordinierte thermodynamische, hydromechanische und magnetische Betrachtungen zu ver-

stehen sind. Trotzdem kann erst seit etwa 15 Jahren von einer Magnetohydrodynamik gesprochen werden. Wenn auch ihre vornehmlichsten Gefilde Probleme der Astrophysik sind, so hat sie in neuerer Zeit doch auch Eingang gefunden in der Geo- und Plasmaphysik. Einige wenige der ausschliesslich theoretischen Resultate konnten bereits auch durch Modellversuche an bewegten leitenden Flüssigkeiten in Magnetfeldern verifiziert werden. In diesem Stadium dieser jungen Wissenschaft ist das knappe Büchlein von T. G. COWLING, der an ihrer Entwicklung einen starken Anteil hat, sehr zu begrüßen. Der Autor führt im ersten Kapitel in die Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik ein und behandelt auf ihrer Grundlage in den folgenden Kapiteln eine Reihe von speziellen Problemen, wie das magnetostatische Gleichgewicht von Sonnenflecken, die Spiralarme der Galaxien, die Sternrotation, die magnetischen Sterne, die magnetohydromechanischen Wellen und ihre Anwendung auf die Theorie der Sonnenflecken, sowie interstellare und terrestrische Magnetfelder. Durch diese Abwandlung des Themas bleibt der Leser dieser anspruchsvollen Monographie bis zum Schluss in Spannung. Leider können stets nur die Wege zu den Lösungen, nicht aber diese selbst aufgezeigt werden. Der Grund dafür liegt einerseits in dem fast völligen Fehlen experimenteller Erfahrung in der Magnetohydrodynamik und damit im Mangel an Intuition auf diesem Gebiet, besonders aber in den fast unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten bei der Behandlung nichtlinearer Probleme. In zwei Punkten scheint diesem Büchlein eines Pioniers ein Erfolg sicher zu sein: in der Klärung der noch vielfach wirren Ansichten auf dem Gebiet der Magnetohydrodynamik und in der Weckung von Interesse und Verständnis für dieses dornenvolle Neuland.

M. WALDMEIER

**Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker.** Von R. ZURMÜHL.

2. Auflage (Springer-Verlag, Berlin 1957). 524 S., 125 Abb.; DM 28.50.

Diese bereits in weiten Kreisen bekannte Einführung in die numerischen Verfahren der praktischen Mathematik befasst sich hauptsächlich mit linearen Gleichungssystemen, Matrizen-Eigenwertaufgaben, Ausgleichsrechnung, Rand- und Eigenwertaufgaben von Differentialgleichungen und anderem mehr. Für jede der angegebenen Methoden wird die mathematische Fragestellung klar herausgearbeitet, wobei zum Verständnis lediglich die Grundbegriffe der Integral- und Differentialrechnung vorausgesetzt werden. Das Hauptgewicht liegt jedoch auf der praktischen Anwendung, was mit vielen durchgerechneten Beispielen unterstrichen wird.

Für die zweite Auflage wurde ausser der Neufassung einiger Kapitel auch ein Abschnitt über die wichtigsten Prüfverfahren der Statistik neu aufgenommen.

TH. GINSBURG

**Einführung in die Methoden der Programmierung kaufmännischer und wissenschaftlicher Probleme für elektronische Rechenanlagen.**

1. Teil: *Die Logik der Programmierung*. Von BRUNO THÜRING (Göller Verlag, Baden-Baden 1957). 200 S., 100 Abb.; DM 45.—.

Der vorliegende erste Band behandelt diejenigen elementaren Gesichtspunkte der Programmierung digitaler Rechenanlagen, die von den konstruktiven Besonderheiten der jeweiligen Anlage unabhängig sind. Er setzt keine besonderen Vorkenntnisse voraus und ist deshalb als Einführung in die Programmierungstechnik für Nationalökonomien und Betriebswissenschaftler ebenso wie für Mathematiker und Ingenieure geeignet.

Im ersten Kapitel werden einige grundlegende Dinge, wie das duale Zahlensystem, Buchstaben- und Zahlenverschlüsselung und das Rechnen mit festem und beweglichem Komma, behandelt.

Im zweiten und dritten Kapitel wird anhand von kaufmännischen (2. Kapitel) und wissenschaftlichen Problemen (3. Kapitel) der Aufbau eines Rechenplanes auseinandergesetzt, was in erster Linie durch eine ausführliche Betrachtung der Fluss- oder Ablaufdiagramme geschieht. Als Übergang zur Befehlsverschlüsselung wird die algorithmische Schreibweise eines Rechenplanes nach H. RUTISHAUSER eingeführt.

Das vierte Kapitel befasst sich mit den besonderen Problemen der Ein- und Ausgabe, wie sie sich beim Zusammenspiel innerer und äusserer Speicher ergeben.

Zu bedauern ist, dass frühere Arbeiten über die Programmierung (insbesondere das grundlegende Werk von J. VON NEUMANN und GOLDSTINE), von denen natürlich vieles übernommen wurde, nicht verzeichnet sind.

Das einfach und klar geschriebene Buch, das sich auch durch eine ansprechende drucktechnische Gestaltung auszeichnet, kann als erste Einführung in das Gebiet der Programmierung bestens empfohlen werden.

W. NEF

**Präzisionsmessungen von Kapazitäten, Induktivitäten und Zeitkonstanten.** Von E. BLECHSCHMIDT. Band 2 (Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1957). 166 S., 74 Abb.; DM 11.80.

Anlässlich der Besprechung des ersten Teiles dieser Monographie (Kapazitätsmessungen) wurde bereits auf das baldige Erscheinen des zweiten ergänzenden Heftes über Induktivitätsmessungen hingewiesen [ZAMP 8, 430 (1957)], das nun erschienen ist. Die übersichtliche Zusammenstellung über Induktivitätsnormale und über die bewährten Messverfahren zur Untersuchung von Spulen darf Physikern und Ingenieuren unbedenklich empfohlen werden.

E. BALDINGER

**Momentum Transfer in Fluids.** Von W. H. CORCORAN, J. B. OPFELL und B. H. SAGE (Academic Press Inc., New York 1956). 394 S., 155 Fig.; \$9.-.

Die Verfasser sind von der Absicht ausgegangen, diejenigen Teile der Strömungslehre zusammenzufassen, die für den Chemieingenieur von Interesse sind. Daraus erklärt sich die etwas eigentümliche Auswahl und Abgrenzung des Stoffes. Deutlich spiegelt sich hier die amerikanische Methode der Ingenieurausbildung wieder, die von vornherein mehr den Spezialisten anstrebt als die europäische. Das vorliegende Buch ist aber nichtsdestoweniger weit davon entfernt, nur für den Chemieingenieur von Nutzen zu sein, sondern es verdient die Beachtung aller, die sich mit industriellen Strömungsproblemen abzugeben haben.

Es werden zunächst die wichtigsten Grundtatsachen behandelt (Bernoullische Gleichung usw.). Recht ausführlich werden Erscheinungen der Turbulenz besprochen. Auch eine Einführung in die Grenzschichttheorie wird gegeben. In einem Anhang werden die Elemente der Tensorrechnung gegeben, und auf dieser Grundlage wird in einer mathematisch systematischeren Weise nochmals auf die statistische Turbulenztheorie zurückgegriffen. Das Buch beschränkt sich im wesentlichen auf die zusammenfassende Darlegung bekannter Tatsachen, dies aber in einer Weise, die dem Studierenden und dem Ingenieur in der Praxis eine wertvolle Hilfe sein kann. Über gewisse formale Schönheitsfehler, wie etwa dass immer noch mit dem spezifischen Gewicht statt mit der Dichte gearbeitet wird, kann man wegsehen.

W. TRAUPEL



## Heat Transfer and Reynolds' Analogy in a Turbulent Flow with Heat Release<sup>1)</sup>

By RAUL R. HUNZIKER, Washington, D. C., USA.<sup>2)</sup>

### Introduction

PAI has found polynomial solutions of REYNOLDS' turbulent flow equations expressing the time average axial velocity and correlation distributions in a circular pipe [1<sup>3)</sup>]. OSBORNE REYNOLDS was the first who inferred a dependency between the transference of heat and momentum in turbulent flow [2]. According to the 'momentum transfer theory' [2, 3] these distributions allow a constant semiempirical determination of the eddy diffusivity for heat  $\varepsilon_H = \alpha \varepsilon_M$  [4, 5, 6].

The Reynolds analogy for a circular pipe can be formulated departing from the axial Reynolds equation and the temperature distribution equation [3, 7]. It follows that the nondimensional temperature and velocity profile are identical if the fluid contains heat sources of intensity proportional to the constant axial component of the gradient of pressures and if the effective Prandtl number  $Pr^* = Pr \alpha$  of the turbulent fluid is unity. Extensions of the analogy for  $Pr^* \neq 1$  have been developed by PRANDTL [3] and TAYLOR [8] assuming a laminar layer close to the wall in which heat is transferred by conduction alone.

This separation of the field into laminar and turbulent regions was further improved by von KÁRMÁN, who introduced a transition of buffer layer in which both molecular and turbulent heat transactions were assumed [9, 10]. MARTINELLI has introduced the effect of molecular diffusivity in the turbulent core which is of special significance for the case of liquid metals [11].

Similar analysis allowing the representation of the radial distribution of temperatures at great distance from the pipe inlet have been developed by LYON [12], SEBAN and SHIMAZAKI [13].

The calculations based on the extensions of the analogy are usually compared however with measurements of heat transfer from fluids in which no sources of heat are present.

<sup>1)</sup> The results presented in this paper were obtained in the course of research sponsored by the Office of Scientific Research of the ARDC, US Air Force under Contract AF 18 (603)-104.

<sup>2)</sup> Reed Research Inc., Chief Mathematics Branch, Research Division.

Present address: Convair, A Division of General Dynamics Corporation, San Diego, California.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 314.

The solution of the boundary value problem for the temperature equation can be constructed also for the case of a distribution of heat sources within the fluid. It will be shown that the Reynolds analogy can be extended to a heat releasing turbulent flow, allowing an estimate to the approximation given by the series solution for the temperature distribution.

## 1. Formulation of Equations

For the case of fully developed turbulent flow in a pipe of radius  $a$  defined by

$$0 \leq \eta = \frac{r}{a} \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\infty \leq \xi = \frac{z}{a} \leq +\infty$$

the average velocity components and fluctuations are assumed

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{w} = \bar{w}(\eta), \quad u' = u, \quad v' = v, \quad w' = w - \bar{w}, \quad (1)$$

along the cylindrical coordinates  $\eta, \theta, \xi$  respectively.

The absolute temperature at any point has a time average  $T$  and a fluctuation  $T'$  of zero mean value. The mean value of the eddy heat transfer fluctuation  $g c u' T'$  is assumed to be a function of  $\eta$  only. According to the 'momentum transfer theory' [2, 4, 5, 6]

$$-u' T'(\eta) = \frac{1}{a} \varepsilon_H \frac{\partial T}{\partial \eta}, \quad (2)$$

where  $\varepsilon_H = \alpha \varepsilon_M$  is the eddy diffusivity for heat and

$$\varepsilon_M(\eta) = \frac{-v f_2(\eta)}{a f_1(\eta) / d\eta} \quad (3)$$

defines the eddy diffusivity for momentum. The ratio  $\alpha$  will be assumed  $\alpha = 1$  [4, 5, 6],  $\nu$  is the kinematical coefficient of viscosity and  $f_1(\eta), f_2(\eta)$  are the Pai polynomials expressing the time average axial velocity distribution  $\bar{w}(\eta) = \bar{w}(0) f_1(\eta)$  and correlation of velocities

$$\overline{u' w'}(\eta) = \left(\frac{\nu}{a}\right) \bar{w}(0) f_2(\eta)$$

respectively. With the usual designation  $Pe$  is the Péclet number  $Pe = Pr Re$ , defined as product of the Prandtl number  $Pr = \mu c/k$  and Reynolds number  $Re = 2 a \bar{w}_m/\nu$ , where  $c$  is the specific heat,  $k$  the thermal conductivity and  $\bar{w}_m = \bar{w}(0)$  the maximum of  $\bar{w}(\eta)$  at the pipe axis  $\eta = 0$ .

It will be considered that the fluid and wall of the pipe are maintained at a constant temperature  $T(0, \eta)$  up to a certain cross section  $\xi = 0$  at which the temperature of the fluid at the wall is changed to a different temperature



$\bar{T}(\xi, 1) = \bar{T}_w = \text{const}$  for the remainder ( $0 \leq \xi \leq +\infty$ ) of the pipe. The distribution  $\bar{T}(\xi, \eta)$  is reduced to nondimensional form by the change of variable

$$U(\xi, \eta) = \frac{\bar{T}(\xi, \eta) - \bar{T}_w}{\bar{T}_0 - \bar{T}_w}, \quad (4)$$

where  $\bar{T}_0$  is a mean of the inlet temperatures  $\bar{T}(0, \eta)$ .

It is assumed that the volume heat sources do not cause a convective effect of perturbation on the observed fully developed turbulent flow. The heat source distribution  $\sigma$  is assumed a function of  $(\xi, \eta)$  and the dissipation of energy due to viscosity and the variations of conductivity  $k$ , specific heat  $c$ , kinematic viscosity  $\nu$  and density  $\rho$  due to temperature will be also neglected. By analyzing the local energy balance and the corresponding boundary conditions the average temperature distribution  $T(\xi, \eta)$  is defined by the solution of the following parabolic nonhomogeneous boundary value problem

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ A(\eta) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] - B(\eta) \frac{\partial U}{\partial \xi} &= G(\xi, \eta), \quad \xi > 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \\ U(\xi, 1) &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta}(\xi, 0) = 0, \quad U_0(\eta) = \lim_{\xi \rightarrow 0} U(\xi, \eta), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

where

$$\left. \begin{aligned} A(\eta) &= \eta [1 - \alpha Pr \varphi(\eta)], \quad B(\eta) = \frac{Pe}{2} \eta f_1(\eta), \quad G(\xi, \eta) = - \frac{\eta \sigma(\xi, \eta) a^2}{k (\bar{T}_0 - \bar{T}_w)}, \\ \varphi(\eta) &= \frac{f_2(\eta)}{df_1(\eta)/d\eta}, \quad f_1(\eta) = 1 + C_1 \eta^2 + C_2 \eta^{2n}, \quad f_2(\eta) = C_3 \eta (1 - \eta^{2(n-1)}). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Since the axial conduction is assumed small as compared to the large axial convection, the term  $\eta (\partial^2 U / \partial \xi^2)$  on the left side of the first of equations (5) has been neglected.

From the experimental data of LAUFER [14] for  $Re = 50,000$  it results [4,6]

$$C_1 = -0.32742, \quad C_2 = -0.67258, \quad C_3 = 43.0445, \quad n = 32.$$

## 2. Solution of the Boundary Value Problem

The application of the Laplace transform [15] leads to a function  $\omega(\eta, p)$  defined in  $0 \leq \eta \leq 1$  for real positive values of the parameter  $p = -\lambda$ , which is a solution of a nonhomogeneous Sturm-Liouville boundary value problem

$$\left. \begin{aligned} L[\omega(\eta)] &= \frac{d}{d\eta} [A(\eta) \omega'(\eta)] - p B(\eta) \omega(\eta) = -B(\eta) U_0(\eta) + \Gamma(\eta, p), \\ \omega'(0) &= 0, \quad \omega(1) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where  $\Gamma(\eta, p) = \mathfrak{L}\{G(\xi, \eta)\}$  is the Laplace transform of  $G(\xi, \eta)$ . The solution of equations (5) is found by applying the inverse transformation  $\mathfrak{L}^{-1}$  and the convolution theorem to the solution of equation (7)

$$U(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_m \xi} \omega_m(\eta) \left[ b_m + \frac{c_m}{\lambda_m} (1 - e^{\lambda_m \xi}) \right], \quad (8)$$

having assumed  $G(\xi, \eta) = G(\eta)$  and where  $\lambda_m$  and  $\omega_m(\eta)$  are the eigenvalues and eigenfunctions of the selfadjoint operator  $L[\omega(\eta)]$  of equation (7).

The coefficients are defined by

$$b_m = \int_0^1 B(\eta) U_0(\eta) \omega_m(\eta) d\eta, \quad c_m = \int_0^1 G(\eta) \omega_m(\eta) d\eta. \quad (9)$$

Hence we find that the heat flux distribution is given by

$$q(\xi) = -k \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=a} = \frac{-k}{a} (\bar{T}_0 - \bar{T}_w) \sum_{m=0}^{\infty} \omega'_m(1) e^{-\lambda_m \xi} \left[ b_m + \frac{c_m}{\lambda_m} (1 - e^{\lambda_m \xi}) \right]. \quad (10)$$

The system of eigenfunctions  $\{\omega_m(\eta)\}$  is complete in the sense of approximation in the mean and is orthogonal relative to the weight function  $B(\eta) \geq 0$  over  $[0, 1]$ . Since the eigenvalue problem is definite positive, RITZ's method provides sequences  $\{\lambda_i^{(m)}\}$ ,  $\{\omega_i^{(m)}(\eta)\}$  convergent to the eigenvalues  $\lambda_i$  and eigenfunctions  $\omega_i(\eta)$  as has been proved [16, 17]. The system of 'coordinate functions'

$$\{\psi_i(\eta)\} = \{1 - \eta^{i+2}\}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

is complete and linearly independent and satisfies the boundary conditions. Thus the set

$$\omega_m(\eta) = \sum_{i=0}^m a_i \psi_i(\eta), \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

is admissible. The extremal condition of the functional of which  $L[\omega(\eta)] = 0$  is its Euler equation is given by the linear system

$$\sum_{j=0}^m a_j (I_{ij} - \lambda M_{ij}) = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots),$$

where

$$I_{ij} = \frac{(2+i)(2+j)}{4+i+j} - \alpha Pr (2+i)(2+j) \int_0^1 \frac{C_3 (1 - \eta^{2(n-1)}) \eta^{3+i+j}}{2C_1 + 2nC_2 \eta^{2(n-1)}} d\eta,$$

$$M_{ij} = \frac{Pe}{2} N_{ij}, \quad N_{ij} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{6+i+j} - \frac{1}{4+j} - \frac{1}{4+i} \right. \\
\left. + C_1 \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{8+i+j} - \frac{1}{6+j} - \frac{1}{6+i} \right] \right. \\
\left. + C_2 \left[ \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+6+i+j} - \frac{1}{2n+4+i} \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{2n+i+j} \right] \right\}.$$

The 'secular' equation of degree  $m$ ,  $\mathcal{P}(\lambda) = \det |I_{ij} - \lambda M_{ij}| = 0$ , has  $m$  real positive solutions  $\lambda_k^{(m)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, m$ ), which are upper bounds of the corresponding eigenvalues. For each one of the  $\lambda_k^{(m)}$  each homogeneous system has a solution  $\{a_i^{(m)}\}$  which is finally characterized by the normality condition. Assuming a constant distribution  $\sigma(\xi, \eta) = \sigma_c$  the coefficients in equations (9) are reduced to

$$\left. \begin{aligned} b_m &= \frac{Pe}{2} \sum_{i=0}^m a_i^{(m)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4+i} + C_1 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6+i} \right) + C_2 \left( \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4+i} \right) \right], \\ c_m &= -\sigma_c a^2 \frac{\sum_{i=0}^m a_i^{(m)} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{i+4} \right)}{k (\bar{T}_0 - \bar{T}_w)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

The temperature and local heat transfer distributions are obtained along the whole extension of the wall and not only in the radial direction of a long pipe as in other solutions [11, 12, 13, 18].

### 3. Extension of Reynolds Analogy

OSBORNE REYNOLDS [2] was the first who inferred a dependency between the transference of heat and momentum in turbulent flow. As is known, L. PRANDTL [3] applied REYNOLDS' idea of proportionality between the velocity and temperature field near a heat exchanging surface by comparing the differential equations of the velocity and temperature fields. In this case of turbulent flow in a pipe the Reynolds differential equation along the axis is (see equations (19) and (42) of reference [1])

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ \eta f_1'(\eta) \left[ 1 + \frac{\varepsilon_M(\eta)}{\nu} \right] \right\} = \eta \frac{a^2}{\mu \bar{w}_m} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}, \quad (12)$$

where  $\partial \bar{p} / \partial z$  is the constant derivative of the mean pressure  $\bar{p}$ . By equation (8) it is assured that

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right] = 0 \quad (0 \leq \eta \leq 1),$$

hence the solution given by equation (8) of the boundary value problem [equations (5)] for the temperature satisfies asymptotically the ordinary differential equation

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ \eta U'(\eta) \frac{1 + \frac{\alpha Pr \varepsilon_M(\eta)}{\nu}}{1 + \gamma} \right\} = -\eta a^2 \frac{\sigma_v(\xi, \eta)}{k(\bar{T}_0 - \bar{T}_w)}, \quad (13)$$

assuming

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_v, \quad \gamma = \frac{\sigma_r}{\sigma_v}. \quad (14)$$

Since the boundary conditions of equation (12) and (13) are identical,

$$f(\infty, 1) = U(\infty, 1) = 0, \quad f'(\infty, 0) = U'(\infty, 0) = 0,$$

it follows

$$f_1'(\eta) = \frac{U'(\eta)}{1 + \gamma} \quad (15)$$

if and only if

$$\left. \begin{aligned} Pr^* &= \alpha Pr = 1, \quad \sigma = \sigma_r + \sigma_v = \sigma_c = \text{const}, \\ \sigma_v &= k(\bar{T}_0 - \bar{T}_w) \frac{-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}}{\mu \bar{w}_m}, \quad \gamma = \frac{-\sigma_r \mu \bar{w}_m}{k(\bar{T}_0 - \bar{T}_w) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

which leads to the following

**Theorem:** Consider a fully developed turbulent flow containing volume heat sources of constant density  $\sigma_r = \sigma_r = \sigma_c$  as defined by equations (14) and (16) with constant temperature  $T_w$  at the walls of the conduit and with mean velocity given by  $\bar{w}(\eta) = \bar{w}_m f_1(\eta)$ . The asymptotic distribution of nondimensional temperature in the fluid is

$$\frac{\bar{T}(r, \infty) - T_w}{T_0 - T_w} = U(\eta, \infty) = (1 + \gamma) f_1(\eta) \quad (0 \leq \eta \leq 1) \quad (17)$$

if and only if  $Pr^* = \alpha Pr = 1$ .

When  $\sigma_r = 0$ , that is when  $\gamma = 0$ , the theorem reduces to the original form of PRANDTL.

#### 4. Conclusions

This generalization of 'PRANDTL's heat source theorem' permits us to obtain an exact asymptotic distribution of temperatures. If the asymptotic nondimensional temperature profile  $U(\eta)$  for  $Pr^* = \alpha Pr = 1$  is approximated

by the series solution [equations (8) and (9)] taking into account the presence of virtual sources [equations (16)] within the fluid, it can be compared with the exact solution [equation (17)].

Hence it is possible to estimate the error performed by using RITZ's method of approximation and the consequent series expansions for  $Pr^* = 1$ ,  $z = \infty$ . The same comparison and application holds in the case  $\sigma_r = 0$  or  $\gamma = 0$ . Since the shear stress at the wall  $\tau_0$  satisfies the conditions

$$\tau_0 = -\frac{a}{2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{1}{2} c_f \rho \bar{w}_m^2 = -\mu \left( \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = -\mu \frac{w_m}{a} f_1'(1), \quad (18)$$

it follows by equation (15) that the asymptotic heat flux at the wall is given by

$$q(\infty) = -k \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right)_{r=a, z=\infty} = +k (T_0 - \bar{T}_w) C_f Re^{\frac{1+\gamma}{4a}}. \quad (19)$$

This equation expresses REYNOLDS' analogy of heat transfer and fluid friction which is valid if and only if the fluid contains heat sources of density

$$\sigma_c = \sigma_r + \sigma_v = \sigma_r (1 + \gamma) \quad \text{and} \quad Pr^* = Pr \alpha = 1.$$

If the density of real sources  $\sigma_r$  is zero it follows that the density of sources for which REYNOLDS' analogy applies is  $\sigma_c = \sigma_v$  given by equation (16) as directly proportional to the pressure derivative along  $z$ . Similar results hold for turbulent flow between parallel plates [6]. All these formulae and consequences hold for the particular case of laminar flow, where  $f_1(\eta)$  is represented by a parabola, and equations (5) reduce to the Graetz-Nusselt equations [19, 20]. With consideration of a rectangular velocity distribution, HARRISON [21] has calculated different solutions for the temperature with and without the axial conduction term  $\eta (\partial^2 U / \partial \xi^2)$ . He concludes that the effect of neglecting the axial heat conduction term is not significant for  $Pe \geq 40$  which will be provisionally considered as the lower limit of applicability of this analysis. This is the only limitation of the present analysis which may be applied to any incompressible fluid in fully developed turbulent flow, and in particular to the heat releasing turbulent flows which occur in nuclear reactors. The design of circulating nuclear fuel — reactor systems requires information on the distribution of temperatures in the fissioning fuel. The heat source distribution function in the moderator surrounded channel of a liquid fuel reactor may be considered as  $G = G(\eta)$  in equations (8), (9) and (10). The values of  $\lambda_i^{(m)}$  and  $a_i^{(m)}$ , ( $i = m = 0, 1, 2$ .) have been calculated for five Prandtl numbers in the liquid metals region ( $0.002 \leq Pr \leq 0.030$ ) at a Reynolds number  $Re = 50.000$  and these values can be used for the evaluation of equations (8), (9) and (10) [4, 6].

Using equation (10) for  $G(\eta) = 0$ ,  $\alpha = 1$  a closer agreement with experimental data [22, 23] is obtained than that indicated by the Seban-Shimazaki equation [4, 6, 13].

## REFERENCES

- [1] S. I. PAI, *On Turbulent Flow in Circular Pipe*, J. Franklin Inst. 256, 337–352 (1953).
- [2] O. REYNOLDS, *On the Extent and Action of the Heating Surface of Steam Boilers*, Proc. Lit. Phil. Soc. Manchester 14, 7 (1874).
- [3] L. PRANDTL, *Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten*, Physik. Z. 11, 1072 (1910).
- [4] R. R. HUNZIKER, *Heat Transfer in Turbulent Pipe Flow*, Air Force Office Sci. Research TN-57-219, Contract AF 18(603)–104, April 14, 1957; ASTIA Doc. No. AD-119517.
- [5] R. R. HUNZIKER and J. S. FLORIO, *On Turbulent Flow and Eddy Heat Transfer Diffusivity in a Pipe*, J. aeron. Sci. 24, 782–783 (1957).
- [6] R. R. HUNZIKER, *Heat Transfer in Turbulent Pipe Flow*, J. Franklin Inst. 265, 205–225 (1958).
- [7] H. REICHARDT, *Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten*, Z. angew. Math. Mech. 20, 6, 297–328 (1940).
- [8] G. I. TAYLOR, *Conditions at the Surface of a Hot Body Exposed to the Wind*, Tech. Report of the Advisory Comm. for Aeronautics, 2, Rep. and Mem. No. 272, 423–429 (1916).
- [9] T. VON KÁRMÁN, Proc. 4th Intern. Congr. Appl. Mech., 54–91 (1934).
- [10] T. VON KÁRMÁN, *The Analogy Between Fluid Friction and Heat Transfer*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. 61, 705–710 (1939).
- [11] R. C. MARTINELLI, *Heat Transfer to Molten Metals*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. 69, 947–959 (1947).
- [12] R. N. LYON, *Liquid Metal Heat-Transfer Coefficients*, Chem. Eng. Progress 47, 75–79 (1951).
- [13] R. A. SEBAN and T. T. SHIMAZAKI, Paper No. 50-A-128, Amer. Soc. Mech. Engrs. (1950).
- [14] J. LAUFER, *The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow*, NACA TN No. 2954 (June 1953).
- [15] G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Springer-Verlag, Berlin 1937).
- [16] G. SANSONE, *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*, Parte seconda (Nicola Zanichelli Editore, Bologna 1949), p. 304–309.
- [17] S. G. MIHLIN, *Variational Methods of Solution of Problems of Mathematical Physics*, Uspehi Matem. NAUK. [New Series] 5, No. 6 (40), 3 (1950).
- [18] H. F. POPPENDIEK, *Forced-Convection Heat Transfer in Pipes with Volume-Heat Sources Within the Fluids*, Nuclear Engng., Part I, AICE, Chem. Eng. Program Symposium, Series No. 11, 50, 93–104 (1954).
- [19] L. GRAETZ, *Über die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten*, Ann. Phys. 18, 79–94 (1883); 25, 337–357 (1885).
- [20] W. NUSSELT, *Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge*, Z. Ver. deutsch. Ing. 54, 1154–1158 (1910).
- [21] W. B. HARRISON, *Forced Convection Heat Transfer in Thermal Entrance Regions*, ORNL-915, US Atomic Energy Commission, Oak Ridge (June 1954).



- [22] E. R. GILLILAND, R. J. MUSSER and W. R. PAGE, *General Discussion on Heat Transfer*, 402-404, Institution of Mech. Eng. London (1951).
- [23] B. LUBARSKY and S. J. KAUFMAN, *Review of Experimental Investigations of Liquid-Metal Heat Transfer*, NACA TN No. 3336 (March 1955).

### *Zusammenfassung*

Es wird die Wärmeübertragung von und zu einer voll entwickelten, wärmeabgebenden, turbulenten Strömung in einem Rohr analysiert. Durch die Anwendung der Laplace-Transformation wird die partielle Randwertaufgabe der Temperaturverteilung in einem Rohr von kreisförmigem Querschnitt auf eine gewöhnliche Sturm-Liouvillesche Randwertaufgabe zurückgeführt. Die entsprechenden Eigenwerte und Eigenfunktionen können nun mittels des Ritzschen Verfahrens für verschiedene Werte der Prandtlschen und Reynoldsschen Zahlen berechnet werden.

Die Verteilung der Temperatur und des Wärmeflusses entlang der Wand erhält man in Form einer Reihe, deren Glieder diese Eigenwerte und Eigenfunktionen enthalten. Durch Verallgemeinerung des Prandtlschen Wärmequellen-Satzes wird die Reynoldssche Analogie der Wärmeübertragung und der flüssigen Reibung für eine wärmeabgebende turbulente Strömung erweitert.

Die genaue asymptotische Wärmefluss und Temperaturverteilung, die man erhält, gestattet eine Abschätzung des Fehlers, den man bei einer Anwendung der Ritzschen Methode und der daraus folgenden Reihenentwicklung erhalten würde. Diese Analyse kann für die wärmeabgebenden turbulenten Strömungen in Atomreaktoren angewendet werden.

(Received: April 15, 1958.)

## On the Phenomenon of Brake-Fading<sup>1)</sup>

By FREDERICK F. LING and EDWARD SAIBEL, Troy, New York, USA.<sup>2)</sup>

### Introduction

The importance of knowing the braking-time and braking-distance required to bring a vehicle to rest is apparent. Such calculations however, are quite difficult due to the variation of the coefficient of friction with temperature. This variation brings about a phenomenon known as brake-fading.

In general, the temperature rise due to the friction causes a decrease in the coefficient of friction. The decrease in friction in turn affects the generation of heat and in this way an interaction takes place between the heat generated and the dynamics of the problem. The net effect under these conditions is to increase the time necessary to bring the system to rest.

<sup>1)</sup> This work was sponsored by the Office of Ordnance Research, US. Army.

<sup>2)</sup> Rensselaer Polytechnic Institute, Department of Mechanics.

It is the object of the present paper to indicate how, for a given relation between coefficient of friction and temperature, this interaction may be considered and the actual braking-time and braking-distance calculated.

### Theory

Let  $V$  be the relative sliding velocity between two bodies which constitute a brake system,  $M$  be the effective mass to be decelerated,  $f$  be the coefficient of friction between the rubbing materials,  $A$  be the brake contact area and  $p$  be the normal pressure between the bodies in contact. The law of motion is simply

$$M \frac{dv}{dt} = -f A p - R, \quad (1)$$

where  $R$  is drag or windage force which will be neglected in the present work.

If  $M$ ,  $f$ ,  $A$  and  $p$  are constants, integration of equation (1) yields

$$V = V_0 - \frac{f A p}{M} t, \quad (2)$$

where  $V_0$  is the initial velocity. It follows that the braking-time, i.e., the time for  $V = 0$ , is  $V_0 M / f p A$ .

In many practical situations however,  $f$  is known to decrease with the increase of interface temperature. This is caused by heat generated during the braking process. Thus the braking-time cannot be computed from equation (2). The phenomenon of the increase of braking-time due to the aforementioned temperature dependence is known as brake-fading.

In what follows it is proposed to examine a particular type of brake-fading in which  $f$  is of the form

$$f = f_0 (1 - \sigma \hat{\theta}), \quad (3)$$

where  $\hat{\theta}$  is the interface temperature above ambient. Also  $M$ ,  $A$  and  $p$  are constants. Equation (1) can be expressed

$$V = V_0 - \frac{A p}{M} \int_0^t f[\hat{\theta}(t')] dt'. \quad (4)$$

Equation (4) can only be used if  $\hat{\theta}(t)$  is known. Now, consider the case in which the brake system consists of one insulating body and a conducting body. The more general problem involving conduction of heat in both bodies will depend for its solution on the knowledge of how the heat generated will be divided

between the two bodies. Up to now no rigorous solution of this problem exists. However an approximate solution for a quasi-stationary state has been given by BLOK [1]<sup>3)</sup>. Since the object of this paper is principally to show how the brake-fading problem can be solved we refrain from treating this case because of the extra complexities this method of partitioning entails.

Let the area of contact be large so that a single interface temperature will describe the temperatures at all points over the surface. Thus the problem can be assumed a one-dimension flow problem in the direction perpendicular to the interface,  $z$ . For short duration of braking, the body can be considered semi-infinite. Mathematically, this situation is described by the heat equation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (5)$$

where  $\alpha$  is the thermal diffusivity. The initial condition is  $\theta(z, 0) = 0$ . The boundary conditions are  $\theta(\infty, t) = 0$  and  $\partial \theta / \partial z(0, t) = q$ , where  $q$  is the heat input. At the interface,  $z = 0$ ,  $q = f p V$ . It is known that the integral [2] satisfying equation (5) and the stated conditions is

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^t \frac{f p V}{\gamma c} e^{-z^2/4\alpha(t-t')} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}, \quad (6)$$

where  $\gamma$  is the density of the conducting materials and  $c$  is the specific heat. But, of interest here is only the interface temperature  $\theta(0, t) = \hat{\theta}(t)$ . As  $z \rightarrow 0$ , equation (6) becomes

$$\hat{\theta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^t \frac{p f V}{\gamma c} \cdot \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}. \quad (7)$$

Thus the brake problem is reduced to solving equations (3), (4), and (7) simultaneously.

Introducing the dimensionless groups:

$$v \equiv \frac{V}{V_0}, \quad t_0 \equiv \frac{V_0 M}{f_0 p A}, \quad \xi \equiv \frac{t}{t_0}, \quad \mu \equiv \frac{f}{f_0},$$

$$\beta \equiv \frac{V_0^{3/2}}{2\gamma c} \sqrt{\frac{M p f_0}{\pi \alpha A}}, \quad \lambda \equiv \beta \sigma, \quad T \equiv \frac{\hat{\theta}}{p},$$

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 321.

equations (4), (3), and (7) become

$$v(\xi) = 1 - \int_0^{\xi} \mu(\xi') d\xi', \quad \mu(\xi) = 1 - \lambda T(\xi), \quad T(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{\mu(\xi') v(\xi') d\xi'}{V\xi - \xi'}. \quad (8)$$

Defining

$$K(\xi, \xi') = \frac{v(\xi')}{V\xi - \xi'},$$

the last two of equations (8) yield

$$\mu(\xi) = 1 - \lambda \int_0^{\xi} \mu(\xi') K(\xi, \xi') d\xi', \quad (9)$$

which is a Volterra integral equation of the second kind. The solution can be expressed in the form of a Neumann series

$$\mu(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n F^{(n)}(\xi), \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= \int_0^{\xi} K(\xi, \xi') d\xi', \\ F^{(2)} &= \int_0^{\xi} K(\xi, \xi') F^{(1)}(\xi') d\xi', \\ &\dots\dots\dots \\ F^{(n)} &= \int_0^{\xi} K(\xi, \xi') F^{(n-1)}(\xi') d\xi'. \end{aligned}$$

Note that the series is an alternating one and its convergence depends on  $\lambda$  and the range of  $\xi$ . The order of magnitude of  $\lambda$  in an actual problem is discussed below.

The first of equations (8), and (10) yield

$$v(\xi) = 1 - \int_0^{\xi} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n F^{(n)}(\xi') \right] d\xi'$$

or

$$v(\xi) = 1 - \xi - \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n G^{(n)}(\xi), \quad (11)$$

where

$$G^{(1)} = \int_0^{\xi} \int_0^{\xi'} K(\xi', \xi'') d\xi'' d\xi'.$$

$$G^{(2)} = \int_0^{\xi} \int_0^{\xi'} K(\xi', \xi'') G^{(1)}(\xi'') d\xi'' d\xi',$$

.....

$$G^{(n)} = \int_0^{\xi} \int_0^{\xi'} K(\xi', \xi'') G^{(n-1)}(\xi'') d\xi'' d\xi'.$$

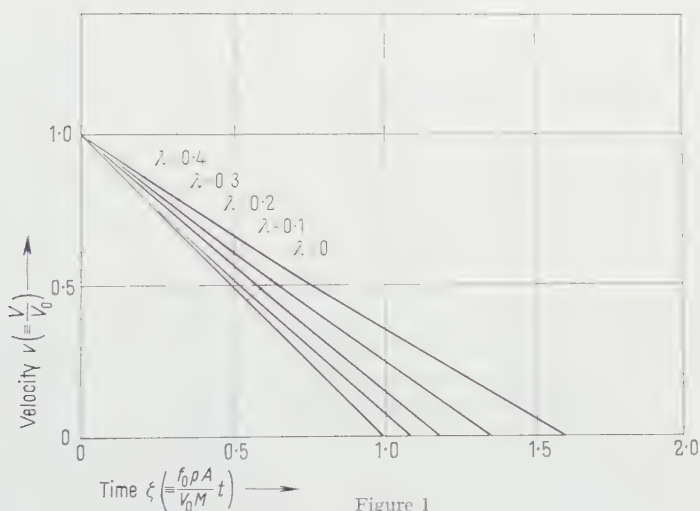


Figure 1

Plot of dimensionless velocity  $v$  versus dimensionless time  $\xi$ .

Since

$$K(\xi, \xi') = \frac{v(\xi')}{\sqrt{\xi - \xi'}},$$

equation (11) is an integral equation in the unknown  $v$ . This can be evaluated by an iteration process. The number of iterations needed depends on the parameter

$$\lambda \equiv \frac{\sigma V_0^{3/2}}{2 \gamma' c} \sqrt{\frac{M p f_0}{\pi \alpha A}}.$$

For  $\lambda = 0$ , equation (11) degenerates into (2).

Estimating from automobile data on weight, dimensions, pressure, thermal and material properties, and using a decrease of 25% in coefficient of friction

in a temperature rise of 700° F, leads to a value of  $\lambda$  of the order of one tenth. Thus rapid convergence is assured.

Define  $v_n$  as the result of one or more iterations considering terms up to those with multiplier  $\lambda^n$ . Thus

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= 1 - \xi, \\ v_1 &= v_0 + \lambda \frac{4}{3} \xi^{3/2} \left( 1 - \frac{2}{5} \xi \right), \\ v_2 &= v_1 + \lambda^2 \frac{5\pi}{48} \xi^4 \left( 1 - \frac{7}{25} \xi \right), \\ v_3 &= v_2 + \lambda^3 \frac{1024}{2835} \left[ 1 - \frac{32}{55} \xi + \left( \frac{64}{715} - \frac{600\pi}{14,729} \right) \xi^2 + \frac{672\pi}{73,645} \xi^3 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Figure 1 shows plots of  $v$  versus  $\xi$  for several selected values of  $\lambda$ . Figure 2 shows a plot of the braking-time versus  $\lambda$ ; also the percentage increase of time required for braking over the ideal case  $f = f_0 = \text{const}$  or  $\lambda = 0$ . For  $\lambda < 1/2$  the percentage increase has already exceeded 50%.

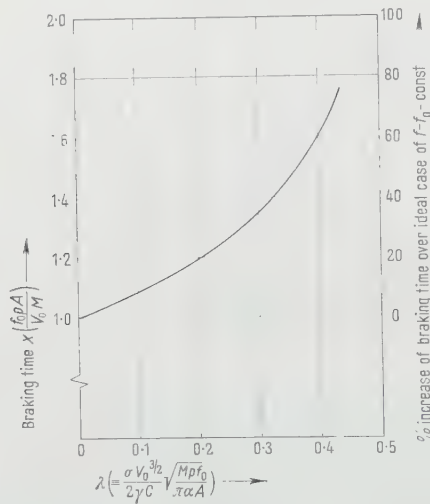


Figure 2  
Plot of braking time and percent increase of braking time versus the parameter  $\lambda$ .

Stopping distance may also be calculated. By definition

$$v \equiv \frac{V}{V_0} \quad \text{and} \quad \xi \equiv \frac{t}{t_0}.$$



Let us define a dimensionless distance  $\psi$  such that

$$\psi \equiv \frac{S}{V_0 t_0},$$

where  $S$  is the actual distance. Thus

$$v = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{V_0 t_0} \cdot \frac{ds}{d\xi}$$

or

$$v = \frac{d\psi}{d\xi}. \quad (13)$$

From equations (12) and (13) the dimensionless braking-distance  $\psi_n$  for the  $n$ -th iteration is

$$\psi_n = \int_0^{\xi_n} v_n(\xi) d\xi, \quad (14)$$

where  $\xi_n$ , the dimensionless braking-time for the  $n$ -th iteration, can be obtained from Figure 2.

### Conclusion

The foregoing method of approach is applicable even for more complicated relations between coefficient of friction and temperature. The calculations would probably be considerably more complex and recourse might have to be made to machine computation. If such facilities are available, a more realistic model of the heat transfer process might well be considered. This could involve both bodies in contact being conductive as mentioned above, the actual geometry of the bodies taken into consideration, consideration of heat loss (forced or natural) to the surroundings, amongst other possibilities.

Should materials be used for which the coefficient of friction increases with temperature, the calculations for what may be called anti-brake-fading can also be accomplished.

### REFERENCES

- [1] H. BLOK, *Theoretical Study of Temperature Rise at Surfaces of Actual Contact Under Oiliness Conditions*, Proc. General Discussion on Lubrication, Lubricants, Inst. Mech. Eng., London, 2, 222 (1937).
- [2] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids* (Clarendon Press, Oxford 1947).
- [3] R. COURANT and D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1 (Interscience Publishers 1953).

*Zusammenfassung*

Das Problem des Bremschwindens wird für einen linear mit der Temperatur abnehmenden Reibungskoeffizienten untersucht. Die verwendete Methode lässt sich auch auf kompliziertere Zusammenhänge zwischen der Temperatur und dem Reibungskoeffizienten anwenden.

(Received: May 16, 1958.)

## Exact Transient Solution of the Buried Line Source Problem for an Asymmetric Source

By MANINDRA MITRA, Calcutta, India<sup>1)</sup>

### Introduction

The problem of the buried symmetric line source in a semi-infinite elastic medium has been considered by NAKANO [5<sup>2)</sup>], LAPWOOD [4] and GARVIN [3]. NAKANO considered both an oscillating and an impulsive dilatational source but LAPWOOD and GARVIN considered only the latter case. LAPWOOD applied Fourier integral methods and obtained approximate expressions for the solutions while GARVIN used CAGNIARD's method to obtain the exact solution. In this paper, the latter method has been used to determine the surface displacement components in the case of an impulsive dilatational source buried in a semi-infinite medium. The impulsive character of the source is different from that considered by GARVIN.

### Problem

The line source is assumed to be situated at  $(0, h)$  in Figure 1, the homogeneous, isotropic elastic medium lying in the region  $y \geq 0$  (Figure 1) and the

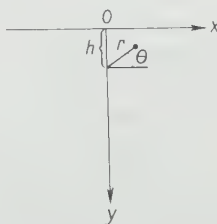


Figure 1

Elastic medium with position of source indicated.

<sup>1)</sup> Jadavpur University, Department of Mathematics.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 331.

medium to be at rest before  $t = 0$ . The surface displacement components will be obtained for a source represented by the wave-function  $\varphi_0$ , given by

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(r, \theta, t) &= 0, \quad t < \frac{r}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha \cos \theta}{r} \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{\alpha^2}}, \quad \frac{r}{\alpha} < t < \frac{r}{\alpha} + t_0, \\ &= \frac{\alpha \cos \theta}{r} \left[ \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{\alpha^2}} - \sqrt{(t - t_0)^2 - \frac{r^2}{\alpha^2}} \right], \quad \frac{r}{\alpha} + t_0 < t, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where  $(r, \theta)$  are indicated in Figure 1,  $\alpha$  is the compressional wave velocity in the medium and  $\varphi_0$  satisfies the wave equation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2)$$

everywhere except for  $r = 0$ , and  $t = \pm r/\alpha$ ,  $t = t_0 \pm r/\alpha$ . The radial and cross-radial displacements  $(u_r)_0$ ,  $(u_\theta)_0$  due to the source alone are indicated in Figures 2 and 3 respectively. Since the radial displacement consists of two sudden jerks in opposite directions, each followed by a gradual incomplete recovery, the impulsive character of the source is different from that considered by LAPWOOD and GARVIN; in the case considered by them, the radial displacement consisted of a single sudden jerk followed by a gradual incomplete recovery.

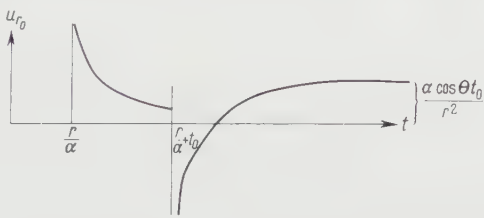


Figure 2  
Radial displacement due to the source alone.

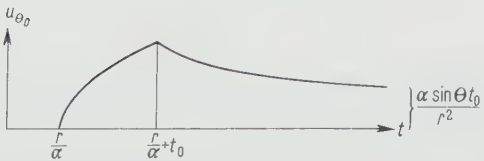


Figure 3  
Cross-radial displacement due to the source alone.

The components  $(u, v)$  of the displacement along the  $x$ - and  $y$ -axes (Figure 1) are given in terms of  $\varphi$  and another wave function  $\psi$  by the relations

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3)$$

where

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2')$$

and  $\beta$  is the shear wave velocity in the medium. The stress components  $\widehat{y'y'}$ ,  $\widehat{x'y'}$  are given by

$$\widehat{y'y'} = \varrho (\alpha^2 - 2\beta^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho \alpha^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \widehat{x'y'} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (4)$$

$\mu$ ,  $\varrho$  being the coefficient of rigidity and density respectively of the medium.

The problem is to obtain a solution

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_0(x, y, t) + \varphi_1(x, y, t), \quad \psi(x, y, t) = \psi_1(x, y, t), \quad (5)$$

where  $\varphi$  satisfies equation (2) and  $\psi$  satisfies equation (2') and which are such that (i) the stresses at the free surface  $y = 0$  of the medium vanish and (ii) the displacement components  $(u, v)$  tend to zero as  $y \rightarrow +\infty$ .

### Solution

Defining the Laplace transform  $\bar{f}(x, y, p)$  (for real positive values of  $p$ ) of a function  $f(x, y, t)$  by the relation

$$\bar{f}(x, y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(x, y, t) dt$$

and denoting all transformed quantities by superimposed bars, we obtain from (2), (2') the differential equations

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} = \frac{p^2}{\alpha^2} \bar{\varphi}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} = \frac{p^2}{\beta^2} \bar{\psi}. \quad (6')$$

We now proceed first to obtain the Laplace transform  $\varphi_0$  of  $\varphi_0$  and then to obtain an integral representation for  $\varphi_0$  for  $0 \leq y < h$ .

It is easily verified that

$$\psi_0 = \bar{f}_1(p) K_1\left(\frac{p}{\alpha} y\right) \cos \theta,$$

where

$$\tilde{f}_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} H(t - t_0) dt = \frac{e^{-pt_0}}{p},$$

$H(t)$  being HEAVISIDE'S unit function.

For  $q_0$  satisfies equation (6) and  $K_1(p r'/\alpha)$  is the Laplace transform of  $\chi(t)$  given by (ERDELYI)

$$\chi(t) = 0, \quad 0 < t < \frac{r}{\alpha},$$

$$= \frac{r}{\alpha} \sqrt{\frac{t^2}{r^2} - \frac{r^2}{\alpha^2}}, \quad t > \frac{r}{\alpha}$$

and so

$$\tilde{f}_1(p) K_1\left(\frac{p r}{\alpha}\right) \cos \theta$$

is the Laplace transform of

$$\int_{r/\alpha}^t H(t - t_0 - \tau) \frac{\tau \cos \theta}{\frac{r}{\alpha} \sqrt{\tau^2 - \frac{r^2}{\alpha^2}}} d\tau$$

which is identical with  $\varphi_0$ .

Now  $r \cos \theta = x$ , and  $r \sin \theta = h - y$  (Figure 1) and

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(h-y)Vk^2 - p^2/\alpha^2}}{Vh^2 + p^2/\alpha^2} k \sin kx dk = \frac{x p/\alpha}{V(h-y)^2 + x^2} K_1\left[\frac{p}{\alpha} \sqrt{(h-y)^2 + x^2}\right],$$

(ERDELYI)

$$= \frac{p}{\alpha} \cos \theta K_1\left(\frac{p r}{\alpha}\right),$$

we have

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{\alpha}{p} \tilde{f}_1(p) \int_0^{\infty} k \frac{e^{-(h-y)\eta_p}}{\eta_p} \sin kx dk, \quad 0 \leq y < h, \quad (7)$$

where  $\eta_p = Vh^2 + p^2/\alpha^2$ .

We assume that

$$\bar{\varphi}_1 = \int_0^{\infty} B(k) e^{-y\eta_p} \sin kx dk, \quad \bar{\psi}_1 = \int_0^{\infty} C(k) e^{-y\eta_s} \cos kx dk, \quad (8)$$

where  $\eta_s = \sqrt{k^2 + p^2/\beta^2}$ . It is easily seen that  $\bar{q}_1, \bar{\psi}_1$  satisfy equations (6), (6') respectively and that the contributions to  $\bar{u}, \bar{v}$  from  $\bar{q}_1, \bar{\psi}_1$  tend to zero as  $y \rightarrow +\infty$ .

Using relations (5), (7), and (8), we obtain

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \int_0^\infty \left[ -\frac{\alpha \bar{f}_1(p) k^2}{p \eta_p} e^{-(h-y) \eta_p} - k B(k) e^{-y \eta_p} - \eta_s C(k) e^{-y \eta_s} \right] \cos k x dk, \\ \bar{v} &= \int_0^\infty \left[ -\frac{\alpha \bar{f}_1(p) k}{p} e^{-(h-y) \eta_p} + B(k) \eta_p e^{-y \eta_p} + k C(k) e^{-y \eta_s} \right] \sin k x dk. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Using (4) and the conditions  $\widehat{x y} = \widehat{y y} = 0$  at  $y = 0$  so that  $\widehat{x y} = \widehat{y y} = 0$  at  $y = 0$ , we obtain

$$(p^2 + 2 k^2 \beta^2) B(k) + (2 \beta^2 k \eta_s) C(k) + \frac{\alpha k}{p \eta_p} (p^2 + 2 k^2 \beta^2) e^{-h \eta_p} \bar{f}_1(p) = 0,$$

$$(2 \beta^2 k \eta_p) B(k) + (p^2 + 2 k^2 \beta^2) C(k) - \frac{2 k^2 \alpha \beta^2}{p} e^{-h \eta_p} \bar{f}_1(p) = 0$$

so that

$$C(k) = \frac{4 k^2 \alpha \beta^2 (p^2 + 2 k^2 \beta^2)}{p \Delta(k^2)} e^{-h \eta_p} \bar{f}_1(p),$$

$$B(k) = -\frac{\alpha k}{p \eta_p} e^{-h \eta_p} \bar{f}_1(p) - \frac{8 k^3 \alpha \beta^4 \eta_s}{p \Delta(k^2)} e^{-h \eta_p} \bar{f}_1(p),$$

where  $\Delta(k^2) = (p^2 + 2 k^2 \beta^2)^2 - 4 k^2 \beta^4 \eta_p \eta_s$ .

Substituting these values of  $B(k), C(k)$  in (9), the following expressions are obtained for  $\bar{u}, \bar{v}$  when  $y = 0$

$$\bar{u}(x, 0) = -4 p \bar{f}_1(p) \int_0^\infty \frac{k^2 \alpha \beta^2 \eta_s}{\Delta(k^2)} e^{-h \eta_p} \cos k x dk,$$

$$\bar{v}(x, 0) = 2 \bar{v}_0 + \frac{4 \bar{f}_1(p)}{p} \int_0^\infty \frac{k^3 \alpha \beta^2 (p^2 + 2 k^2 \beta^2 - 2 \eta_s \eta_p \beta^2)}{\Delta(k^2)} \sin k x dk,$$

where  $v_0$  is the  $y$ -component of the displacement at  $(x, 0)$  due to the source alone

$$\therefore \bar{u}(x, 0) = -4 p \bar{f}_1(p) \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty \frac{\alpha \beta^2 k^2 \eta_s}{\Delta(k^2)} e^{-h \eta_p - i k x} dk \right],$$

$$\bar{v}(x, 0) = 2 \bar{v}_0 - \frac{4 \bar{f}_1(p)}{p} \operatorname{Im} \left[ \int_0^\infty \frac{\alpha \beta^2 k^3 (p^2 + 2 k^2 \beta^2 - 2 \eta_s \eta_p \beta^2)}{\Delta(k^2)} e^{-h \eta_p - i k x} dk \right].$$



Putting

$$z = \frac{h \alpha}{p}, \quad \nu = \frac{\beta}{\alpha}, \quad t = \frac{h \sqrt{1+z^2} + i z x}{\alpha}$$

in the above expressions we get

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, 0) &= -\frac{4 \nu p \bar{f}_1(p)}{\alpha} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty F_1(\nu, z) e^{-pt} dz \right] \\ &= 2 \bar{v}_0 - \frac{4 \nu^2 p \bar{f}_1(p)}{\alpha} \operatorname{Im} \left[ \int_0^\infty F_2(\nu, z) e^{-pt} dz \right], \end{aligned}$$

where

$$F_1(\nu, z) = \frac{z^2 \sqrt{1 + \nu^2 z^2}}{\Delta(\nu, z)},$$

$$F_2(\nu, z) = \frac{z^3 (1 + 2 \nu^2 z^2) - 2 \nu \sqrt{1 + z^2} \sqrt{1 + \nu^2 z^2}}{\Delta(\nu, z)}$$

and  $\Delta(\nu, z) = (1 + 2 \nu^2 z^2)^2 - 4 \nu^3 z^2 \sqrt{1 + z^2} \sqrt{1 + \nu^2 z^2}$ .

The integrands have branch points at  $z = \pm i$ ,  $\pm i/\nu$ , and simple (RAYLEIGH) poles at  $z = \pm i \alpha/V_R$ , where  $V_R$  is the velocity of Rayleigh waves in the medium. As

$$V_R < \beta, \quad \frac{\alpha}{V_R} > \frac{1}{\nu}.$$

We shall now consider the transformation

$$t = \frac{h \sqrt{1+z^2} + i z x}{\alpha}. \quad (10)$$

As  $z$  moves along the real axis from 0 to  $+\infty$ ,  $t$  moves along the curve  $AB$  to infinity where  $AB$  asymptotically approaches the straight line

$$t = z \left( \frac{h + i x}{\alpha} \right),$$

$z$  being a real parameter. As  $z$  decreases from  $+\infty$  through the value  $-ix/\sqrt{h^2 + x^2}$  to  $-i$ ,  $t$  increases along the real axis from  $-x/\alpha$  to  $\sqrt{h^2 + x^2}/\alpha$  and then decreases through real values to  $x/\alpha$ . For imaginary values of  $z$  outside the interval  $(-i, +i)$ ,  $t$  lies on the curves  $I_1$ ,  $I_2$ . The branch points and the Rayleigh poles are shown in Figure 4 (GARVIN).

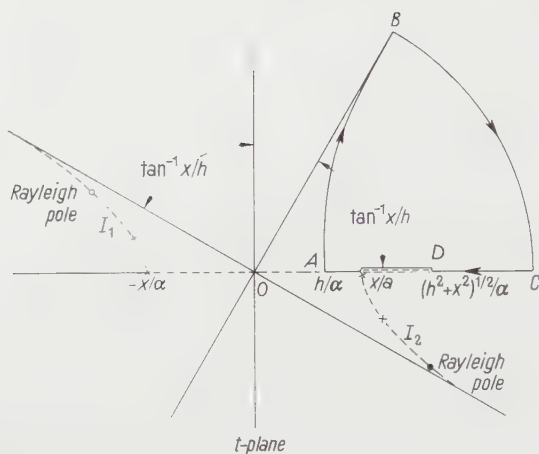


Figure 4

$t$ -plane.  $x$  branch points.

The integrals

$$\int_B^C F_1(\nu, z) e^{-\nu t} \frac{dz}{dt} dt \quad \text{and} \quad \int_B^C F_2(\nu, z) e^{-\nu t} \frac{dz}{dt} dt$$

tend to zero as  $BC$  moves to infinity. Since there are no singularities of the integrands inside the contour  $ABCD$  (it should be noted that the portion  $AD$  of the contour is approached from the upper half-plane)

$$\int_0^\infty F_1(\nu, z) e^{-\nu t} dz = \int_A^B F_1(\nu, z) e^{-\nu t} \frac{dz}{dt} dt = \int_{h/\alpha}^\infty F_1[\nu, z(t)] e^{-\nu t} \frac{dz}{dt} dt$$

and similarly

$$\int_0^\infty F_2(\nu, z) e^{-\nu t} dz = \int_{h/\alpha}^\infty F_2[\nu, z(t)] e^{-\nu t} \frac{dz}{dt} dt.$$

Thus by inspection it is seen that

$$\operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty F_1(\nu, z) e^{-\nu t} dz \right]$$

and

$$\operatorname{Im} \left[ \int_0^\infty F_2(\nu, z) e^{-\nu t} dz \right]$$

are the Laplace transforms of  $G_1(t)$  and  $G_2(t)$  respectively, where

$$\left. \begin{aligned} G_1(t) &= 0, \quad 0 < t < \frac{h}{\alpha}, \\ &= \operatorname{Re} \left[ F_1\{v, z(t)\} \frac{dz(t)}{dt} \right], \quad \frac{h}{\alpha} < t, \\ G_2(t) &= 0, \quad 0 < t < \frac{h}{\alpha}, \\ &= \operatorname{Im} \left[ F_2\{v, z(t)\} \frac{dz(t)}{dt} \right], \quad \frac{h}{\alpha} < t \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

and

$$z(t) = \frac{\alpha}{h^2 + x^2} \left[ -i x t + h \sqrt{t^2 - \frac{x^2 + h^2}{\alpha}} \right],$$

is obtained by inverting (10).

Now for

$$\frac{h}{\alpha} < t < \frac{h^2 + x^2}{\alpha},$$

$z$  is a pure imaginary such that  $|z| < 1$ , while  $dz(t)/dt$  is a pure imaginary. Hence  $F_1(v, z) dz/dt$  is a pure imaginary and  $F_2(v, 2) dz/dt$  is real for

$$\frac{h}{\alpha} < t < \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha}.$$

We can, therefore, replace  $h/\alpha$  in the inequalities in (11) by  $\sqrt{h^2 + x^2}/\alpha$ .

Since

$$\mathcal{P} \bar{f}_1(p) = e^{-pt_0} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t - t_0) dt,$$

$\delta(t)$  being DIRAC's delta function,

$$\begin{aligned} u(z, 0) &= -\frac{4v}{\alpha} \int_0^t \delta(t - t_0 - \lambda) G_1(\lambda) \alpha \lambda \\ &= 0, \quad t < t_0, \\ &= -\frac{4v}{\alpha} G_1(t - t_0), \quad t_0 < t. \end{aligned}$$

Similarly, we obtain

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= 2 v_0, \quad t < t_0, \\ &= 2 v_0 - \frac{4 v^2}{\alpha} G_2(t - t_0), \quad t_0 < t. \end{aligned}$$

From (1) and (3) we obtain

$$\begin{aligned} v_0 &= 0, \quad 0 < t < \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha}, \\ &= -\frac{h x \alpha}{(h^2 + x^2)^2} \left[ \frac{2 t^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}{\sqrt{t^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}} \right], \quad \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha} < t < t_0 + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha}, \\ &= -\frac{h x \alpha}{(h^2 + x^2)^2} \left[ \frac{2 t^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}{\sqrt{t^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}} - \frac{2 (t - t_0)^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}{\sqrt{(t - t_0)^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}} \right], \quad t_0 + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha} < t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore u(x, 0) &= 0, \quad t < t_0 + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha}, \\ &= -\frac{4 v}{\alpha} \operatorname{Re} \left[ F_1\{v, z(t - t_0)\} \frac{dz(t - t_0)}{dt} \right], \quad t_0 + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha} < t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= 0, \quad t < \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha}, \\ &= -\frac{2 h x \alpha}{(h^2 + x^2)^2} \left[ \frac{2 t^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}{\sqrt{t^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}} \right], \quad \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha} < t < t_0 + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha}, \\ &= -\frac{2 h x \alpha}{(h^2 + x^2)^2} \left[ \frac{2 t^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}{\sqrt{t^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}} - \frac{2 (t - t_0)^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}{\sqrt{(t - t_0)^2 - \frac{h^2 + x^2}{\alpha^2}}} \right] \\ &\quad - \frac{4 v^2}{\alpha} \operatorname{Im} \left[ F_2\{v, z(t - t_0)\} \frac{dz(t - t_0)}{dt} \right], \quad t_0 + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{\alpha} < t, \end{aligned}$$

where

$$z(t - t_0) = \frac{\alpha}{h^2 + x^2} \left[ -i x(t - t_0) + h \sqrt{(t - t_0)^2 - \frac{x^2 + h^2}{\alpha^2}} \right].$$

The equations (12) show that the horizontal displacement  $u(x, 0)$  at the surface begins a period  $t_0$  after the beginning of the vertical surface displacement  $v(x, 0)$ .

I am grateful to Prof. B. B. SEN for his kind help and guidance.

#### REFERENCES

- [1] CAGNIARD, L., *Réflexion et réfraction des ondes séismiques progressives* (Gauthier-Villars, Paris 1939).
- [2] ERDELYI, A. (editor), *Tables of Integral Transforms*, vol. 1 (McGraw Hill Book Company 1954), p. 75, 277.
- [3] GARVIN, W. W., Proc. Roy. Soc. [A] 234, 528 (1956).
- [4] LAPWOOD, E. R., Phil. Trans. Roy. Soc. [D] 242, 63 (1949).
- [5] NAKANO, H., Jap. J. Astr. Geophys. 2, 233 (1925).

#### Zusammenfassung

Es wird die Verschiebung an der Grenzfläche eines homogen-isotropen elastischen Halbraums, erzeugt durch die stossartige Dilatation einer eingetauchten Quellstrecke, exakt ermittelt.

(Received: March 17, 1958.)

## Comportement d'un câble porteur-tracteur

Par MARIE MARCEL NICOLAS, Paris, France<sup>1)</sup>

On appelle câble porteur-tracteur tout câble pouvant se déplacer sur des appuis entre lesquels il est suspendu, tout en entraînant des charges qui lui sont accrochées et dont il supporte intégralement les poids.

La détermination des formes diverses que peut prendre un câble porteur-tracteur et celle des tractions qui leur correspondent suscitent des problèmes qui procèdent tous plus ou moins des données schématiques suivantes:  $A$  et  $B$  sont les deux appuis successifs d'un câble pesant, sur lesquels il peut glisser sans frottement et agencés de telle sorte qu'en l'un d'eux,  $A$ , une traction constante est exercée sur le câble tandis qu'en l'autre,  $B$ , la traction du câble est appropriée à la longueur de câble suspendu ainsi qu'aux forces exercées entre  $A$  et  $B$  en des points fixes du câble, c'est-à-dire solidaires de celui-ci.

La longueur et la forme du câble porteur-tracteur ainsi sollicité et la traction appropriée qu'il convient d'exercer sur lui au point  $B$  dépendent de la traction constante exercée en  $A$ , de la longueur et de l'inclinaison de la sustente  $AB$ , du poids du câble par unité de longueur, des poids des charges qui y sont fixés et des emplacements des points d'attache dans l'espace; elles dépendent encore

<sup>1)</sup> Secrétariat d'Etat aux Travaux Publics, aux Transports et au Tourisme.

des trajectoires et des vitesses qu'on veut imposer à ces points d'attache, et par conséquent du mode d'attache des charges.

La confrontation de données aussi complexes ne peut être utilement entreprise tant que l'on n'a pas étudié le comportement d'un câble porteur-tracteur à l'arrêt, observation faite que cette éventualité peut toujours se présenter dans la pratique; observation faite encore que cette éventualité est aussi celle de toutes les installations (ponts suspendus par exemple) où des câbles fixes supportent des charges qui leur sont accrochées.

Telle est l'étude que nous allons exposer, en en simplifiant encore les données puisque nous ne traiterons que le cas d'une charge unique, appliquée en un point fixe,  $C$ , du câble.

Plus précisément les questions auxquelles nous apporterons une réponse sont les suivantes:

Etant donné deux appuis successifs, agencés comme nous l'avons dit, quels sont les points de l'espace où une charge peut être accrochée au câble? Quelle est la valeur de cette charge et aussi celle de la traction appropriée en  $B$  en fonction du point de l'espace où se trouve le point d'accrochage? A quelle condition peut-on disposer pour une charge donnée d'une ligne continue de points d'accrochage entre les deux appuis? Dans quelle zone de l'espace se trouvent ces lignes continues?

Dans nos raisonnements toutes les forces, et notamment les charges, sont exprimées en longueurs de câble dont les poids égalent les forces ainsi mesurées. Dans ce système de mesures l'ordonnée canonique  $[y = m \cosh(x/m)]$  d'un point du câble (dont la forme est celle d'un ou plusieurs arcs successifs de chaînette) mesure donc la traction dans le câble en ce point.

Enfin pour faciliter l'exposé, nous supposerons toujours que l'extrémité contrepesée  $A$  est figurée à gauche de l'extrémité  $B$ .

## 1. Points de l'espace où une charge peut être accrochée au câble porteur-tracteur

Sous l'action d'une charge unique le câble prend la forme de deux arcs de chaînette, de deux catènes,  $\widehat{AC}$  et  $\widehat{CB}$  lesquelles ont même module. S'il n'en était pas ainsi les deux tractions du câble, tangentes à ces catènes de part et d'autre du point  $C$ , ne pourraient pas avoir deux composantes horizontales égales et opposées et l'équilibre statique serait impossible.

Si  $Aa$  est la traction constante exercée en  $A$  sur le câble, la catène de suspension  $\widehat{AC}$  se trouve donc sur l'une des chaînettes isosthènes du faisceau noué en  $A$ , et ayant comme base commune l'horizontale tracée à une distance  $\overline{Aa}$  en dessous du point  $A$ .



La chaînette-support de la catène de suspension  $\widehat{AC}$  renferme le point  $B$  dans sa zone concave. En effet, l'autre catène de suspension  $\widehat{CB}$ , étant un arc appartenant à une chaînette de même module que celui de la chaînette-support de  $\widehat{AC}$ , peut être considérée comme ayant été découpée dans celle-ci suivant l'arc  $\widehat{C'B'}$  et avoir été transférée en  $\widehat{CB}$  par une translation définie par le vecteur  $B'B$ , ou son équipollent  $\widehat{C'C}$  (voir figure 1).



Figure 1

Détermination des deux catènes de suspension afférentes à un point de charge  $C$  et de la charge pouvant y être suspendue.

Si  $B$  n'était pas dans la zone concave susdite, la translation  $C'C$  ferait se joindre en  $C$ , deux arcs de catène ayant leurs tractions dirigées vers le bas, donc ne pouvant s'opposer qu'à une force verticale soulevante et non pas à une charge.

L'appui  $B$ , devant être dans la zone concave de la chaînette-support de la catène de suspension  $\widehat{AC}$ , il en résulte que celle-là ne peut être l'une quelconque des chaînettes isosthènes du faisceau  $A$ , et qu'elle se trouve nécessairement dans l'éventail compris entre la chaînette-support de la catène légère tendue,  $\widehat{AB}$ , et celle de la catène légère lâche,  $\widehat{AB}$ .

Chacune des chaînettes-supports est donc tangente à la courbe enveloppe  $(\Phi)$  des chaînettes isosthènes du faisceau noué en  $A$  et est complètement déterminée par son point de tangence<sup>2)</sup>. Aussi désormais l'expression « chaînette  $(\varphi)$  » nous servira à désigner celle des chaînettes-supports dont  $\varphi$  est le point caractéristique, c'est-à-dire le point de contact avec l'enveloppe  $(\Phi)$ .

<sup>2)</sup> M. M. NICOLAS, *Câble de téléphérique supportant une charge*, Ann. Ponts Chaussées 1955, mai-juin.



La chaînette-support de la suspension minimale ( $q$ ) coupe la suspension légère lâche en un point  $K$  et la verticale de l'appui  $B$  en un point  $b''$ ; cette même verticale coupe la courbe enveloppe ( $\Phi$ ) en un point  $b'$ .

Sur chacune des chaînettes-supports ainsi sélectionnées n'importe quel point  $C$ , compris entre  $A$  et la verticale du point  $B$ , peut être un point de charge, dont la charge est mesurée par la longueur de l'arc compris entre le point  $C$  et l'extrémité  $C'$  d'une corde  $C'B'$  équipollente à  $CB$ .

En conclusion de toutes ces remarques, on se rend compte que les seuls points de l'espace où une charge fixée à un câble porteur-tracteur peut se trouver en suspension sont ceux compris à l'intérieur de la zone délimitée par la catène légère supérieure  $\widehat{AB}$ , par l'arc  $\widehat{Aq''_0}$  de la catène légère inférieure  $\widehat{AB}$ , par l'arc  $\widehat{\varphi''_0 b'}$  de la courbe enveloppe ( $\Phi$ ) et par le vecteur vertical  $b'B$ . A l'intérieur de cette zone des points d'accrochage on distingue la zone en croissant, comprise entre les deux catènes légères, dont chaque point  $C$  ne dispose que d'une seule possibilité de suspension et partant que d'une seule charge. A cette zone est accolée celle figurée par le triangle curviligne  $Kb''B$  et le quadrilatère curviligne  $\varphi''_0 b' b'' K$  à l'intérieur desquels on dispose pour chaque point de deux modes de suspension et de deux charges. Les deux modules des catènes d'un point à double possibilité de charge sont inférieurs à celui,  $m$ , de la suspension minimale, si le point est dans le quadrilatère curviligne, tandis que dans le triangle curviligne  $Kb''B$  l'un des modules est supérieur à celui,  $m$ , de cette suspension minimale ( $q$ ), l'autre lui étant inférieur.

## 2. Détermination de la valeur d'une charge en fonction du point de l'espace où se trouve son point d'accrochage

Pour explorer tous les points de la zone où des charges peuvent être accrochées, il suffira d'examiner la valeur des charges pouvant être fixées à l'extrémité  $C$  d'une catène de suspension  $\widehat{AC}$  tracée sur une chaînette-support quelconque de l'éventail délimité par les deux chaînettes isosthènes ( $q''_0$ ) et ( $q''_0$ ), issues de  $A$  et passant par  $B$ .

Tout point  $C$  d'une telle chaînette, compris entre  $A$  et la verticale de l'appui  $B$ , détermine un vecteur rectiligne  $CB$ , auquel correspond dans la chaînette considérée une, et une seule, corde équipollente  $C'B'$ .

La charge suspendable en ce point  $C$  est évidemment mesurée par l'arc  $\widehat{CC'}$ , dont l'extrémité  $C'$  est celle de la corde  $C'B'$ , équipollente au vecteur  $CB$ .

Réciproquement à tout point  $B'$  de la chaînette, donc à un vecteur de translation  $B'B$ , ne peut correspondre qu'un seul point de charge  $C$ , marquant l'extrémité de la catène de suspension  $AC$  supportée par ladite chaînette.

En effet si ce point  $B'$  avait pu engendrer deux points de charge  $C_1$  et  $C_2$ , c'est qu'on aurait pu tracer à partir de  $B'$  deux cordes  $B'C'_1$  et  $B'C'_2$ , respectivement équipollentes aux vecteurs  $BC_1$  et  $BC_2$ , marquant sur la chaînette une corde,  $C_1C_2$ , équipollente à une autre corde,  $C'_1C'_2$ , ce qui est impossible.

Quand le point générateur  $B'$  se déplace de la droite (alors à l'infini) vers la gauche, son point de charge  $C$  se déplace également vers la gauche sur la chaînette-support. S'il n'en était pas ainsi c'est que  $C$  pourrait rétrograder, donc être engendré par deux points différents  $B'_0$  et  $B'_1$ , auxquels auraient correspondu sur la chaînette deux cordes,  $B'_0C'_0$  et  $B'_1C'_1$  chacune équipollente au vecteur  $\overline{BC}$ ; ce qui est impossible.

Mais il existe une position limite du point générateur  $B'$ , celle pour laquelle le point de charge  $C$  qu'il engendre, atteint l'appui  $A$ . Ce point limite est donc l'extrémité  $B'_l$  de la corde  $A'_lB'_l$  équipollente à  $AB$ . Dans ce cas la catène de suspension  $\widehat{AC}$  se réduit à l'élément rectiligne infiniment petit, ayant pour direction celle de la tangente en  $A$  à la chaînette-support étudiée, et la charge suspendue est égale au poids d'une longueur de câble égale à celle de l'arc  $\widehat{AA'_l}$ .

On remarquera que le point limite  $B'_l$ , générateur du point de charge confondu avec le point  $A$ , ne peut être qu'à droite de la verticale du point  $B$ .

Dans le cas exceptionnel d'un point capable de deux suspensions, donc de deux charges (points situés à l'extérieur de la catène lège lâche, dans le triangle semi-curviligne  $q''_0 b' B$ ) il est facile de démontrer que la plus grande des deux charges correspond à la suspension ayant le plus grand module.

En effet on devra tracer sur chacune des deux chaînettes isosthènes ( $q_1$ ) et ( $q_2$ ) se coupant en  $C$  une corde équipollente au vecteur  $CB$ ; soit  $C'_1B'_1$  celle tracée sur ( $q_1$ ), et  $C'_2B'_2$  celle tracée sur ( $q_2$ ). Si le module  $m_1$  est plus petit que  $m_2$ , l'ordonnée canonique du point  $C'_1$  sera moindre que celle de  $C'_2$ ; cette inégalité, de même sens que celle des modules, concourt à rendre l'arc  $\widehat{CC'_1}$  de ( $q_1$ ) plus petit que l'arc  $\widehat{CC'_2}$  de ( $q_2$ ).

Le cas particulier des charges suspendables en des points de l'espace infiniment voisins des appuis se traitera facilement en utilisant les diagrammes des tractions exercées par un câble sur deux points fixes,  $A$  et  $B$ , auxquels il est attaché, quand on fait varier la longueur de ce câble<sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup> M. M. NICOLAS, *Comment agit le câble tracteur d'un téléphérique*, Z. angew. Math. Phys. 8, 96-121 (1957).

### 3. Comment déterminer si une charge donnée peut être accrochée au câble porteur-tracteur et alors en quels points de l'espace elle se trouvera

Pour qu'une charge soit accrochable, il faut qu'il existe au moins une chaînette-support dont un point  $C$  soit capable de cette charge. Or ce point  $C$  procède d'un point générateur  $B'$  sur la chaînette, lequel détermine avec l'extrémité  $B$  de la sustentante un vecteur  $BB'$ , auquel est équipollent une corde  $CC'$ , dont la catène  $\widehat{CC'}$  mesure la charge accrochable en  $C$  (voir figures 1 et 3).

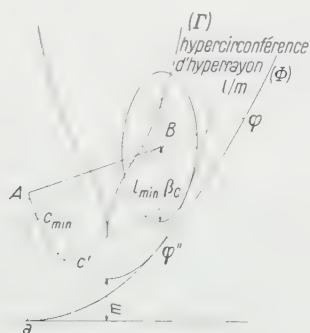


Figure 3

Cas d'une chaînette support, pour laquelle l'extrémité  $B$  est dans la zone monopode. Détermination du point à charge minima.

Donc pour savoir si une charge, mesurée par le poids d'une certaine longueur  $l$  de câble, peut avoir un point d'accrochage sur une chaînette-support donnée ( $q'$ ) ou ( $q''$ ), de module  $m'$  ou  $m''$ , il suffira de tracer, dans le module de cette chaînette, une hypercirconférence de centre  $B$  et ayant pour hyperrayon cette longueur  $l$ , puis on examinera si elle a des points d'intersection avec la chaînette. Ainsi grâce à l'hypergéométrie, le problème à traiter devient aussi simple que celui de l'intersection d'une droite (chaînette ou hyperdroite) et d'une circonférence (hypercirconférence)<sup>4</sup>.

Inversement, étant donné une chaînette-support, il est possible de déterminer les charges extrêmes, soit maxima, soit minima, susceptibles d'être accrochées en des points appropriés de celle-ci.

Toutefois entre le problème euclidien de l'intersection d'une circonférence avec une droite et celui de l'intersection d'une hypercirconférence avec une

<sup>4</sup> M. M. NICOLAS, *Géométrie de la chaînette ou hypergéométrie*, Z. angew. Math. Phys. 8, 122-141 (1957).



hyperdroite, il existe une différence essentielle, qui constitue toute la difficulté des problèmes où interviennent des câbles. Alors que d'un point pris pour centre on ne peut tracer qu'une seule circonférence tangente à une droite, on peut d'un point pris pour centre tracer soit une seule hypercirconférence tangente à une hyperdroite (chaînette) soit trois hypercirconférences, soit très exceptionnellement deux, selon que le centre se trouve dans la zone monopode, ou dans la zone tripode de la chaînette ou sur la ligne de démarcation entre les deux zones. Et la complication de cette triple éventualité est aggravée par le fait que l'une des hypernormales présente une interprétation mécanique différente de celle des deux autres.

Nous désignerons par la notation ( $I'$ ) cette ligne de démarcation, qui n'est autre que la courbe enveloppe des hypernormales à la chaînette-support considérée, chaque point caractéristique  $\gamma$  d'une hypernormale marquant le centre de l'hypercirconférence, qui au point où elle est tangente à la chaînette (point origine de l'hypernormale ou pôle) y a même rayon de courbure que celle-ci.

L'étude du comportement d'un câble porteur-tracteur consiste donc à distinguer les divers cas de tangence qui peuvent se produire entre l'extrémité  $B$ , non contrepesée de la sustente, et les diverses chaînettes-supports comprises dans l'éventail  $\varphi'_0 - \varphi''_0$ , déterminé par cette sustente.

On sait que dans le cas d'un point  $B$  tripode, les hyperrayons des trois hypercirconférences tangentes à la chaînette sont, l'un court, l'autre moyen, le troisième long: nous désignerons leurs points respectifs de tangence par les lettres  $\beta_c$  (pôle court),  $\beta_m$  (pôle moyen), et  $\beta_l$  (pôle long). Chacun de ces points, dits podes du point  $B$ , marque l'origine d'une hypernormale (lieu des centres de toutes les hypercirconférences tangentes à une chaînette en un point de celle-ci) passant par  $B$  (voir figure 4).

On se rappellera aussi que les podes  $\beta_m$  et  $\beta_l$  d'un point  $B$  sont toujours par rapport à l'axe de la chaînette du côté opposé à celui où se trouve ce point, tandis que le pôle  $\beta_c$  est toujours du même côté (et même toujours à une plus grande distance de l'axe que ne l'est le point  $B$ ) et cela quelle que soit la nature podique du point  $B$ .

Si le point  $B$  est dans la zone monopode, son pôle unique sera encore désigné par la lettre  $\beta_c$  parce que, comme nous le verrons par la suite, l'interprétation mécanique de ce pôle unique ne diffère pas de celle du pôle court d'un point tripode.

Si le point  $B$  est sur la ligne des points bipodes (enveloppe des hypernormales à la chaînette) le pôle court  $\beta_c$  subsiste évidemment, tandis que l'autre pôle, qui résulte de la conjonction des podes  $\beta_m$  et  $\beta_l$  (conjonction qui se produit quand le point  $B$  tend à sortir de la zone tripode), sera désigné par la lettre  $\beta_{ml}$ . Le pôle  $\beta_{ml}$  d'un point bipode,  $B$ , est toujours par rapport à l'axe vertical de la chaînette, du côté opposé à celui du point  $B$  et à une distance





vu que pour qu'il en soit ainsi il faut que  $\beta_e$  soit à droite de l'extrémité  $B'_l$  de la corde  $A'_l B'_l$  équipollente à  $AB$ ).

En particulier le pôle court d'une chaînette-support, dont le sommet est à droite de l'aplomb de l'extrémité  $B$  de la sustente, ne peut être générateur de charge puisque, étant à gauche de la verticale de  $B$ , il est nécessairement à gauche de l'extrémité  $B'_l$  de la corde  $A'_l B'_l$  équipollente à  $AB$ .

Donc si le pôle court peut être générateur d'un point de charge  $C_e$  (à charge minima alors), on en déduit que de part et d'autre de celui-ci les charges accrochables vont croissant.

Notre réserve quant à la possibilité d'obtenir sur une chaînette-support un point de charge effectif, à partir du pôle court  $\beta_e$  de l'extrémité  $B$  sur cette chaînette, nous conduit à remarquer que quand  $\beta_e$  est susceptible d'être pris en considération comme point effectivement générateur, les deux autres pôles  $\beta_m$  et  $\beta_l$  sont automatiquement hors de compétition et vice versa (puisque quand  $\beta_e$  est à droite de l'aplomb de  $B$ ,  $\beta_m$  et  $\beta_l$  sont à gauche, et vice versa). Nous remarquons aussi que quand les pôles  $\beta_m$  et  $\beta_l$  sont susceptibles d'être générateurs de points de charge effectifs, l'efficacité de  $\beta_l$  implique celle de  $\beta_m$  (puisque  $\beta_l$  étant alors à droite de l'extrémité  $B'_l$  de la corde  $A'_l B'_l$ , équipollente à  $AB$ , le point  $\beta_m$  l'est aussi, puisque sur la chaînette il est encore plus à droite que  $\beta_l$ ).

Les pôles, moyen  $\beta_m$  et long  $\beta_l$ , s'interprètent en étudiant la progression le long de la chaînette des points d'intersection de celle-ci avec les hypercirconférences de centre  $B$  au fur et à mesure qu'on augmente l'hyperrayon qui a produit la tangence au pôle.

Au début de la croissance de cet hyperrayon on n'a que deux points d'intersection, qui vont en s'éloignant de  $\beta_e$ , l'un numéro 1, s'élevant sur la branche de la chaînette, l'autre numéro 2, tendant vers le sommet. Quand la croissance de cet hyperrayon lui fait atteindre la valeur du contact en  $\beta_m$ , apparaît alors entre la chaînette et l'hypercirconférence un troisième point commun, celui du contact en  $\beta_m$ , tandis que des deux autres points d'intersection du début, l'un (1) se sera encore plus éloigné de  $\beta_e$ , tandis que l'autre (2) se sera rapproché de  $\beta_l$ .

Continuant à faire croître l'hyperrayon, le troisième point commun apparu au contact en  $\beta_m$  se dédouble en deux nouveaux points d'intersection, numéros 3 et 4, générateurs éventuels de deux points de charge à charges croissantes de part et d'autre du point de charge  $C_m$ , engendré par  $\beta_m$ . Continuant à faire croître les hyperrayons, les points d'intersection, numéros 1 et 4, s'éloignent respectivement vers le haut sur leur branche de chaînette, tandis que les points d'intersection 2 et 3 se rapprochent et tendent vers le pôle  $\beta_l$ . Donc celui-ci est générateur éventuel d'un point de charge  $C_l$ , capable de la plus grande de toutes les charges susceptibles d'être accrochées en un point de la chaînette-support considérée; de part et d'autre de ce point  $C_l$  les charges accrochables

sont évidemment égales deux à deux, tout en diminuant au fur et à mesure qu'on s'éloigne de  $C_L$ .

Ainsi quelle que soit la position relative de l'extrémité  $B$  de la sustente à l'égard d'une chaînette-support de l'éventail  $(\varphi'_0) - (\varphi''_0)$ , on est toujours sûr d'avoir à considérer sur celle-ci un point générateur éventuel d'un point à charge minima, de part et d'autre duquel les charges accrochables égales deux à deux vont en augmentant: ce point remarquable, est, selon les cas, engendré soit par le pôle  $\beta_c$  (et alors la forme de la chaînette-support est telle que son sommet est à gauche de l'aplomb de l'extrémité  $B$ ), soit par le pôle  $\beta_m$  (et alors le sommet de la chaînette-support est à droite de l'aplomb de l'extrémité).

#### 4. Ligne des points à charge minima

Ainsi chaque chaînette-support  $(q_k)$  comporte un point éventuel à charge minima,  $C_m^k$ , de part et d'autre duquel les charges accrochables vont en augmentant. Il est évident que ces points à charge minima forment dans le plan vertical de la sustente une ligne continue – que nous désignerons par la notation  $(\cdot) \llcorner (\cdot)$  – joignant le point  $C_m^a$  de la catène légère  $(q_a')$  à celui  $C_m^{a0}$  de la catène légère  $(q_a'')$ , et il est non moins évident qu'en ces deux extrémités les charges minima suspendables sont nulles, ce qui fait présumer que de  $C_m^{a0}$  à  $C_m^{a0}$  les diverses charges minima afférentes aux chaînettes-supports de l'éventail  $\varphi'_0 - \varphi''_0$  vont d'abord en croissant pour atteindre sur une certaine chaînette-support leur plus grande valeur, en un point  $C_M$ , puis décroissent jusqu'à la valeur nulle. C'est ce que nous démontrerons par la suite.

Anticipant sur cette démonstration, tirons en immédiatement les conséquences pratiques. Pour qu'à une charge donnée on puisse faire correspondre dans l'espace une ligne continue de  $A$  à  $B$  (cheminement statique) de ses points d'accrochage au câble supposé à l'arrêt, il faut nécessairement que cette charge soit inférieure à la plus grande des charges minima, sinon le cheminement ne pourrait franchir la ligne de démarcation.

On peut donc comparer à un filtre, à l'égard des charges, le rôle de cette ligne de démarcation.

La chaînette-support  $(q_M'')$ , dont la charge minima accrochable ( $C_M$ ) est la plus grande de toutes celles minima accrochables aux diverses chaînettes-supports, divise le champ des points de charge possibles en deux zones, supérieure et inférieure, où l'on trouve toujours accouplées deux chaînettes-supports  $(q_k)$  et  $(q_l)$ , l'une en zone supérieure, l'autre en zone inférieure, dont les points à charge minima respectifs  $C_m^k$  et  $C_m^l$  supportent des charges égales (et évidemment inférieures à  $(C_M)$ ).

Nous verrons par la suite que cette chaînette-support remarquable  $(q_M'')$  est nécessairement une chaînette-support lâche.

A toute charge minima commune à deux chaînettes-supports ( $q_k$ ) et ( $q_j$ ) correspondront deux cheminements statiques, qui, sauf aux points de franchissement  $C_m^k$  et  $C_m^j$  de la ligne de démarcation ( $\mathcal{N}$ ), seront entièrement tracés l'un au-dessus de la chaînette-support ( $q_k$ ) de la zone supérieure et l'autre au-dessous de la chaînette-support ( $q_j$ ) de la zone inférieure. Donc le cheminement statique inférieur d'une charge pouvant franchir la ligne ( $\mathcal{N}$ ) des minima n'atteindra jamais l'appui  $B$  non contrepesé, et les seuls cheminements statiques joignant  $A$  à  $B$  sont ceux franchissant la ligne ( $\mathcal{N}$ ) au-dessus du point  $C_M$ .

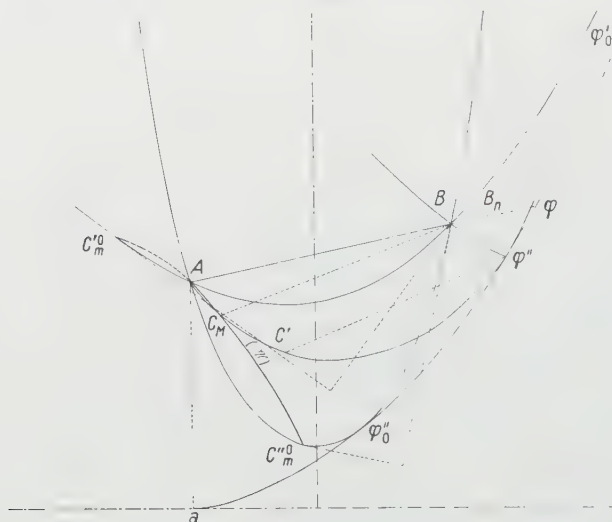


Figure 5

Forme présumée de la ligne ( $\mathcal{N}$ ) — cas d'une sustente  $< \overline{AB}_n$ .

c'est-à-dire composé de points de charges situés sur des chaînettes-supports d'un module supérieur à celui de la chaînette ( $q''_m$ ). On peut même préciser que le long de ce cheminement statique les chaînettes-supports mises à contribution ne le sont que deux fois, pour des points de charge sis de part et d'autre de la ligne ( $\mathcal{N}$ ) (voir figure 5).

Ce bref aperçu des conséquences mécaniques de l'existence de cette ligne ( $\mathcal{N}$ ) montre l'utilité d'une connaissance approfondie de celle-ci pour traiter tout problème où interviennent des câbles porteurs-tracteurs. Aussi convient-il d'en exposer au moins une étude sommaire.

Nous commencerons par mettre en place les points extrêmes  $C_m^0$  et  $C_m^{''0}$ , afférents aux chaînettes-supports ( $q'_0$ ) et ( $q''_0$ ), des deux catènes lèges  $\widehat{AB}$ .

Pour chacune de ces deux chaînettes-supports extrêmes ( $q'_0$ ) et ( $q''_0$ ), ou plus précisément pour des chaînettes-supports de l'éventail  $q'_0 - q''_0$ , qui leur sont

infiniment voisines, l'extrémité  $B$  est dans la zone monopode (et même dans la partie de cette zone qui est à droite de l'axe de la chaînette).

D'autre part, puisque le tracé de toute hypernormale, au voisinage de son origine, est normal à la chaînette, on en déduit que le vecteur  $B\bar{\beta}_c$ , qui joint l'extrémité  $B$  à son pôle  $\beta_c$  sur l'une ou l'autre des chaînettes-supports extrêmes ( $q'_0$ ) et ( $q''_0$ ), est un vecteur infiniment petit, dont la direction est normale à celle des tangentes en  $B$ , respectivement à la chaînette ( $q'_0$ ) et à la chaînette ( $q''_0$ ).

Nous remémorant alors la détermination du point de charge engendré par un point  $B'$  (en l'occurrence  $\beta_c$ , confondu avec  $B$ ), nous en déduisons que l'extrémité  $C_m^{''0}$  de la ligne  $(\mathcal{J}/\mathcal{L})$  est marquée par le point de la chaînette ( $q''_0$ ), où la tangente est orthogonale à celle en  $B$  à cette même chaînette, et que l'autre extrémité,  $C_m^{''0}$ , est marquée par le point de la chaînette ( $q'_0$ ), où la tangente est orthogonale à celle en  $B$  à cette même chaînette.

Nous remarquons que le point  $C_m^{''0}$  a toujours une existence effective en tant que point de charge, puisque toujours situé à droite de l'appui  $A$ , sur la catène légère lâche  $\widehat{AB}$ . (En effet l'angle polaire – celui des deux tangentes à l'extrémité d'une catène – d'une catène lâche étant nécessairement aigu, le point  $C_m^{''0}$  ne peut être au-delà de  $A$ .)

Au contraire le point  $C_m^{''0}$  n'aura une existence effective, en tant que point de charge, que s'il est en deçà de  $A$ . Or l'angle polaire d'une catène tendue peut fort bien être orthogonal et même obtus. (L'étude des catènes minimales apprend que leur angle polaire est toujours aigu, sauf dans le cas extrême de la corde minimale verticale, et l'étude des catènes orthogonales apprend que celles-ci ont toujours leur pôle au-dessus de la base de la chaînette; donc parmi les catènes tendues dont la corde est parallèle à une direction donnée, figure toujours une, et une seule, qui soit orthogonale.)

Ainsi selon que la catène légère tendue  $\widehat{AB}$  aura un angle polaire aigu ou un angle polaire obtus, l'extrémité  $C_m^{''0}$  de la ligne  $(\mathcal{J}/\mathcal{L})$  des points à charge minima sera en deçà (et alors  $C_m^{''0}$  est un point de charge effectif) ou au delà de  $A$ .

L'étude de la ligne  $(\mathcal{J}/\mathcal{L})$  apprend aussi que quand son extrémité supérieure  $C_m^{''0}$  est au delà de  $A$ , la ligne  $(\mathcal{J}/\mathcal{L})$  passe alors par  $A$ ; autrement dit parmi les chaînettes-supports de l'éventail  $q'_0 - q''_0$ , correspondant à ce cas de sustenté, ce n'est qu'à partir, et en dessous d'un certain module, que le point de charge minimum d'une chaînette-support se trouve à droite de  $A$ , et est alors efficace en tant que générateur d'un point de charge utilisable.

Si nous reprenons la représentation de la sustenté  $AB$ , contrepesée de  $\overline{Aa}$ , et dont la plus grande longueur est  $Aq - Aa/\tau$ , on voit que parmi toutes les extrémités possibles entre  $A$  et  $q$  il s'en trouvera une,  $B_n$ , qui donnera une catène légère tendue  $\widehat{AB}_n$  orthogonale.



Cette longueur  $A\widehat{B}_n$ , ou plus exactement le rapport  $AB_n/Aa = t_n$ , se détermine sans aucune difficulté en fonction de l'angle que fait la sustente avec l'horizontale. Selon que cet angle est positif (sustente ascendante) ou négatif (sustente plongeante), à valeur absolue égale de cet angle, la longueur  $AB_n$ , ascendante, est plus grande que la valeur  $AB_n$ , plongeante. (Par exemple pour une sustente horizontale  $t_n = 1,246$  et pour une sustente inclinée à  $15^\circ 15' 30''$  le même rapport vaut 1,520 en sustente ascendante et 1,036 en sustente plongeante.)

Dans le cas d'une sustente dont la longueur est moindre que la longueur  $AB_n$  susvisée (c'est-à-dire dont la catène légère tendue  $\widehat{AB}$  a un angle polaire aigu), il est facile de déterminer la chaînette-support dont le point à charge minima coïncide avec l'appui  $A$ , et en dessous de laquelle (donc pour des modules moindres) les points à charge minima se trouvent en deçà de l'appui  $A$ . Sur cette chaînette-support l'extrémité  $B'_i$  de la corde  $A'_i B'_i$ , équipollente à la sustente  $AB$ , devra être le pôle du point  $B$ , c'est-à-dire l'origine d'une hypernormale passant par  $B$ .

Or la construction d'un point quelconque d'une hypernormale dont on connaît l'origine  $J$  sur une chaînette se fait en associant deux points,  $A$  et  $H$ , de la chaînette qui soient, par les longueurs des catènes, conjugués harmoniques des extrémités de la catène orthogonale  $\widehat{IJ}$  ( $I$  point de la chaînette dont la tangente est orthogonale à la direction de la tangente en  $J$ ); deux points,  $A$  et  $H$ , conjugués harmoniques d'un couple orthogonal  $J$  (un seul point suffit pour le définir) satisfont donc à la relation  $\widehat{AI}/\widehat{AJ} = -\widehat{HI}/\widehat{HJ}$ . De ces deux points l'un,  $A$ , est nécessairement au-dessus de la corde orthogonale  $IJ$ , l'autre en dessous mais sans cependant dépasser le milieu  $K$  de la catène  $\widehat{IJ}$ . A partir de  $A$ , on trace alors un vecteur  $AB$ , équipollent à  $HJ$ , et l'on obtient un point  $B$  de l'hypernormale du point  $J$ ; ainsi se trouve réalisée à l'égard de cette chaînette une sustente  $AB$  pour laquelle la corde équipollente aboutit bien au pôle du point  $B$  (voir figure 6).

On voit qu'à tout point  $J'$  d'une chaînette quelconque, prise comme chaînette de référence, on peut faire correspondre une corde,  $H'J'$ , ayant une direction imposée, en l'occurrence parallèle à celle de la sustente, sous la seule réserve que le point  $J'$  soit tel que le milieu  $K'$  de la catène orthogonale  $\widehat{I'J'}$  détermine une corde  $K'J'$  faisant avec l'horizontale un angle supérieur à celui de la sustente. La détermination de ce point  $J'$ , limite, se fait sans difficulté, en utilisant notamment cette particularité géométrique des catènes orthogonales dont la longueur est toujours égale au double de l'ordonnée canonique de leurs milieux  $K'$  soit:  $\widehat{I'J'} = 2 \overline{K'k'}$ .





Ainsi se trouve indirectement démontré le fait que la ligne de démarcation  $(\mathcal{C})$  passe par l'appui  $A$ , quand la catène légère tendue  $\widehat{AB}$  a un angle polaire obtus.

### 5. Détermination de la chaînette-support dont la charge minima est la plus grande de toutes les autres charges minima

Il nous reste maintenant à étudier la détermination de la chaînette-support, dont le point de charge minima supporte la plus grande de toutes les charges minima afférentes aux diverses chaînettes-supports de l'éventail.

Cette chaînette-support est celle dont le point caractéristique  $q''$  marque sur la courbe enveloppe  $(\Phi)$  des chaînettes-supports le point dont l'hypernormale isomodulée à cette courbe  $(\Phi)$  (c'est-à-dire tracée suivant le module  $m''$  de la chaînette dont le point caractéristique est  $q''$ ) passe par l'extrémité  $B$  de la sustente.

La démonstration de cette propriété fondamentale des câbles porteurs-tractionneurs se déduit très simplement de l'étude des hyperparallèles à la courbe enveloppe  $(\Phi)$ .

Mais faute de pouvoir faire dans le cadre de cette étude celle complète des hyperparallèles à la courbe enveloppe  $(\Phi)$ , nous proposerons une autre démonstration qui ne recourt pas, ou que très peu, à l'hypergéométrie.

Cette démonstration est fondée sur la connaissance des propriétés d'une certaine courbe, dérivée de la chaînette suivant le processus décrit ci-après. A tout point  $A$  d'une chaînette, on fait correspondre un point,  $B$ , extrémité d'un vecteur  $AB$  parallèle à une direction fixe, et dont la longueur  $AB$  est dans un rapport constant,  $AB/Aa$ , avec l'ordonnée canonique  $Aa$  du point  $A$ . Nous appellerons cette courbe la transformée oblique de la chaînette, suivant telle direction, et dans tel rapport, chacun de ses points  $B$ , étant le transposé oblique d'un point,  $A$ , de la chaînette, moyennant un vecteur de transposition,  $AB$ , parallèle à une direction fixe et orientée et ayant une longueur proportionnelle à l'ordonnée canonique de  $A$  (voir figure 7).

L'étude des transformées obliques est très féconde et si facile, qu'il nous paraît suffisant d'en citer leur propriété fondamentale: en tout point  $B$  d'une transformée oblique, la tangente à cette courbe coupe la base là où celle-ci est coupée par la tangente à la chaînette au point  $A$ , dont  $B$  est le transposé oblique.

Soit donc  $AB$  une sustente contrepesée de la quantité  $Aa$ , soit  $Aq$  la longueur maxima que peut atteindre une telle sustente; prenons comme chaînette de référence la chaînette pour laquelle la sustente  $\overline{Aq}$ , associée à l'ordonnée canonique  $Aa$ , marque aussi la corde minimale (les tangentes aux extrémités de la catène  $\widehat{Aq}$  se coupent en  $T$  sur la base).

Traçons à partir de cette chaînette de référence, de module  $m$ , la transformée oblique ( $\mathcal{B}$ ) suivant la direction de la sustente (donc celle de  $Aq$ ) et dans le rapport  $AB/Aa$ , qui définit la longueur  $AB$  de la sustente en fonction de sa contrepesée  $Aa$ .

Cette courbe ( $\mathcal{B}$ ) coupe nécessairement la chaînette en deux points, puisque  $AB/Aa < Aq/Aa$ . En ces deux points d'intersection, soit  $B''_0$  au-dessus de

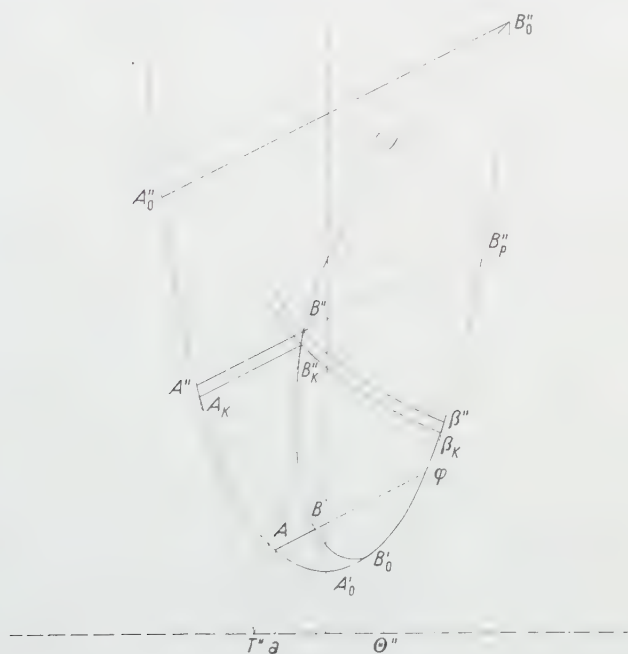


Figure 7  
Chainette et transformée oblique de chaînette.

$Aq$  et  $B'_0$  au-dessous de  $Aq$ , les cordes  $A''_0 B''_0$  et  $A'_0 B'_0$  sont appareillées (c'est-à-dire que  $A''_0 B''_0/A''_0 a''_0 = A'_0 B'_0/A'_0 a'_0$ ); de même tout vecteur de transposition  $A''B''$  tracé au-dessus de  $Aq$ , mais, prolongé jusqu'à la chaînette en un point  $B''_p$  devient une corde  $A''B''$ ; à tout vecteur  $A'B'$  situé en dessous de  $Aq$  on peut toujours associer un vecteur, et un seul,  $A''B''$  situé au-dessus de  $Aq$ , et tel que  $A'B'_p/A'a' = A''B''_p/A''a''$ ; il suffit en effet que les deux cordes  $A'B'_p$  et  $A''B''_p$  soient appareillées.

Dans une telle transformation oblique un vecteur quelconque de transposition  $A''B''$  (ou  $A'B'$ ) associé avec la chaînette de référence représente, à

l'homothétie près, une chaînette-support de l'éventail  $q'_0 - q''_0$ , dont le module est soit  $m'' = m \times Aa/A''a''$  soit  $m' = m \times Aa/A'a'$ ; les chaînettes-supports extrêmes (ou les deux catènes lèges) sont les homothétiques des catènes  $\widehat{A''_0 B''_0}$  et  $\widehat{A'_0 B'_0}$  de la chaînette de référence.

De même deux chaînettes-supports  $(\varphi')$  et  $(\varphi'')$  ayant un point commun entre  $B$  et  $\varphi$  sur le vecteur  $A\varphi$  sont les homothétiques des deux catènes découpées par deux cordes appareillées sur la chaînette de référence.

Ainsi à chaque chaînette-support de l'éventail  $\varphi'_0 - \varphi''_0$  d'une sustente  $\overline{AB}$ , contrepesée de  $Aa$ , correspond un, et un seul, vecteur  $A''B''$  (ou  $A'B'$ ) qui est son vecteur figuratif sur la chaînette de référence.

A partir d'un point  $B''$  de la transformée  $(\mathcal{B})$  traçons l'hypernormale à la chaînette de référence, qui aboutit à celui des podes  $\beta''$  de  $B''$  qui est le plus à droite: nous savons que, quelle que soit la position du point  $B''$  (ou  $B'$ ) par rapport aux zones monopode et tripode de la chaînette de référence, ce pode  $\beta''$  à l'extrême droite est soit un pode court du type  $\beta_c$ , soit un pode moyen du type  $\beta_m$ .

Pour ce pode l'hyperrayon de l'hypercirconférence de centre  $B''$  est la longueur  $l''$  de la catène découpée sur la chaînette de référence par une corde équipollente au vecteur  $B''\beta''$ . Supposons qu'au vecteur  $A''B''$  on en substitue un autre, infiniment voisin,  $A''_k B''_k$  plus proche de  $Aq$ , donc ayant un module plus grand: les deux points  $A''_k$  et  $B''_k$  se trouveront sur les tangentes  $A''T''$  et  $B''T''$ , tandis que le pode  $\beta''_k$  du point  $B''_k$  se trouvera sur la tangente  $\beta''\Theta''$ , à la tangente à la chaînette au point  $\beta''$ . Le nouvel hyperrayon  $l''_k$  correspondra donc à une corde équipollente au vecteur  $B''_k\beta''_k$ . Si le point  $\Theta''$  est à droite du point  $T''$ , au vecteur  $B''_k\beta''_k$  sensiblement parallèle au vecteur  $B''\beta''$  correspondra une nouvelle corde équipollente qui pourra être soit plus grande, soit plus petite que la précédente mais alors dans ce cas avec un rapport de réduction moins élevé que n'est le rapport d'accroissement des modules (soit  $m''_k/m'' = A''_k\overline{a''}/A''_k\overline{a''}$ ) des chaînettes dont les vecteurs figuratifs sont  $A''B''$  et  $A''_k\overline{B''_k}$ .

Donc, quand par les homothétiques  $Aa/A''a''$  et  $Aa/A''_k\overline{a''}$ , on aura réalisé les deux chaînettes-supports de modules respectivement égaux à  $m \times Aa/A''a''$  et à  $m \times Aa/A''_k\overline{a''}$ , l'hyperrayon minimum de la chaînette-support  $m''k$  sera supérieur à celui de  $m''$ , parce que quand on fait varier dans les mêmes proportions la corde d'une catène et le module de celle-ci, le rapport *catène/corde* de leurs longueurs demeure inchangé, tandis que si la corde s'allonge plus vite (ou diminue moins vite) que ne croît (ou décroît) le module de la catène, le rapport *catène/corde* augmente.

Ainsi de deux chaînettes-supports infiniment voisines, figurées par les vecteurs infiniment voisins  $A''B''$  et  $A''_k\overline{B''_k}$ , c'est celle de plus grand module

dont la charge minima est la plus grande, à condition que la tangente à la chaîne-support, de module  $m''$ , au pôle  $\beta''$  de l'extrémité  $B''$  de la sustente coupe la base en un point  $\Theta''$  à droite du point  $T''$  où celle-ci est coupée par la tangente à la chaîne au point  $A''$ .

Un raisonnement identique, appliqué au cas où le point  $\Theta''$  est à gauche de  $T''$ , montre évidemment que les conséquences sont aussi inverses. On en déduit que la plus grande des charges minima est celle afférente à la chaîne-support sur laquelle le pôle  $\beta$  de l'extrémité  $B$  de la sustente marque le point où la tangente coupe la base là où celle-ci est coupée par la tangente en  $A$  à cette même chaîne. Donc  $\beta$  est le conjugué minimal du point  $A$ ; donc la chaîne-support, capable de la plus grande des charges minima, est celle dont le point caractéristique  $\varphi''$  marque le pôle de l'hypernormale dismodulée à la courbe enveloppe  $(\Phi)$ , qui passe par l'extrémité  $B$  de la sustente. On est sûr que cette chaîne-support fait partie de celles que nous avons qualifiées de lâches, puisque le point  $\beta''$ , pôle du point  $B''$ , est nécessairement en dessous de la droite  $A''B''$  quand le point  $A''$  devient le conjugué minimal de ce point  $\beta''$ .

On est sûr aussi que cette chaîne-support exceptionnelle est unique (et n'est nullement subordonnée à un choix du pôle  $\beta$  à l'extrême droite), car, par un raisonnement fondé exclusivement sur l'hypergéométrie (en l'occurrence, l'étude de la courbe enveloppe des hypernormales dismodulées), on montre que par un point  $B$  quelconque, situé à droite de la verticale du nœud  $A$  d'un faisceau de chaînes isosthènes, il ne peut passer qu'une seule hypernormale dismodulée ayant pour pôle un point situé sur la branche droite de la courbe enveloppe  $(\Phi)$ . Une hypernormale dismodulée à la courbe enveloppe  $(\Phi)$ , est celle tracée à partir d'un point  $q$  de celle-ci sous le module  $m$  de la chaîne isosthène dont ce point  $q$  est le point caractéristique.]

D'ailleurs cette longue démonstration se réduit à un raisonnement exprimé en deux ou trois phrases quand on résout le problème par l'hypergéométrie.

Désormais nous distinguerons ce point unique de la courbe  $(\Phi)$ , dont l'hypernormale dismodulée passe par l'extrémité  $B$  de la sustente, par l'appellation «pôle dismodulé de l'extrémité  $B$ », tout en nous rappelant que cette hypernormale est commune à la courbe enveloppe  $(\Phi)$  et à la chaîne isosthène, dont ce pôle marque le point caractéristique.

## 6. A quelles conditions le pôle dismodulé de l'extrémité $B$ d'une sustente peut-il être générateur effectif d'un point de charge?

Cette question mérite d'être résolue, car suivant que sur la chaîne-support ( $q''$ ), définie par le pôle ( $q''$ ) de l'extrémité  $B$  sur la courbe  $(\Phi)$ , l'extrémité  $B'_i$  de la corde  $A'_i B'_i$ , équipollente à  $AB$ , sera à gauche ou à droite du point  $q''$ , le point de charge engendré par celui-ci sera ou ne sera pas un point de charge



effectif; et s'il n'est pas un point de charge effectif, tous les points de charge minima répartis sur la ligne de démarcation ( $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$ ) entre  $A$  et  $\mathcal{C}_m''$  sont des points dont la charge minima décroît quand on passe d'une chaînette-support à une autre de moindre module. Donc dans ce cas, à toute charge suspendable au départ de l'appui  $A$  correspondra sûrement un cheminement statique, de  $A$  à  $B$ , pourvu qu'on s'engage sur une chaînette-support de module supérieur, sans point à charge minima.

Nous allons démontrer qu'à chaque inclinaison de la sustente correspond une longueur de celle-ci (donc un certain rapport  $AB/Aa$ ) en dessous de laquelle à toute charge suspendable aux abords de l'appui  $A$  correspondra une ligne continue de points d'accrochage à l'arrêt (cheminement statique) entre  $A$  et  $B$ .

Rappelons nous d'abord que le point de charge engendré par un point quelconque  $B'$  d'une chaînette-support [en l'occurrence le pôle  $q''$  de la chaînette-support ( $q''$ ), est un point  $C$ , qui marque sur la chaînette considérée l'extrémité  $C$  d'une corde  $CC'$  équipollente au vecteur  $BB'$  (ou, ici,  $Bq''$ ).

Rappelons nous également que par un point,  $B$ , il ne passe qu'une seule hypernormale dismodulée à la courbe enveloppe ( $\Phi$ ).

Enfin rappelons-nous également la construction, point à point, d'une hypernormale, à partir des conjugués harmoniques  $A$  et  $H$ , par rapport au couple de points conjugués orthogonaux, dont l'un est le pôle de l'hypernormale (voir figures 6 et 8).

Si dans chacune des constructions afférentes aux diverses hypernormales, par exemple dans la construction de l'hypernormale de pôle  $J_1$ , nous nous astreignons à n'utiliser qu'un point qui soit le conjugué minimal de  $J_1$ , soit le point  $A_1$  (et son conjugué harmonique  $H_1$ ), nous construisons un point  $\Psi_1$  de l'hypernormale, lequel marque alors l'extrémité d'un vecteur  $A_1\Psi_1$  équipollent à la corde  $H_1J_1$ . Ce point  $\Psi_1$  est donc le point de l'hypernormale issu en quelque sorte du conjugué minimal du pôle de l'hypernormale. L'étude du vecteur  $H_1J_1$  apprend que le pivotement de la corde minimale  $A_1J_1$  dans un certain sens, autour de l'extrémité  $A$ , provoque le pivotement dans le même sens de la corde conjuguée harmonique  $H_1J_1$  et que celle-ci passe par toutes les directions, depuis celle de la verticale descendante  $HJ$ , quand  $J$  est au sommet de la chaînette, jusqu'à celle de la verticale ascendante  $HJ$ , quand  $J$  est à l'infini à droite sur la chaînette. On notera aussi que la direction du vecteur  $HJ$ , orienté de  $H$  vers  $J$ , est toujours plus voisine de la verticale ascendante que ne l'est celle de la corde minimale  $AJ$ , orientée également de  $A$  vers  $J$ .

Il existe donc une direction de corde minimale, et une seule, pour laquelle le vecteur  $A\Psi$  a une direction donnée, en l'occurrence celle de la sustente qui nous importe. Ce vecteur  $A\Psi$  (ou plus précisément le rapport  $A\Psi/Aa = t\psi$ ) peut être calculé suivant le procédé que nous indiquerons ci-après.



Ceci étant, marquons sur la courbe enveloppe ( $\Phi$ ) le point  $q''$ , correspondant à la corde minimale  $Aq''$ , dont la conjuguée harmonique  $H''q''$  est parallèle à la sustente, de direction  $Aq$ .

Sur  $Aq$ , portons le vecteur  $\overline{AB''} = \overline{H''\Psi''}$ , nous obtenons ainsi une extrémité de sustente,  $B''$ , dont le pôle dismodulé  $q''$  engendre, en un point confondu avec l'appui  $A$ , le point de charge  $C_M$ , ayant la plus grande des charges



Figure 8

Construction du point  $\Psi_k$  d'une hypernormale de pôle  $J_k$  à partir de conjugués harmoniques, dont l'un,  $A_k$ , est le conjugué minimal de  $J_k$ .

minima accrochables à toutes les chaînettes-supports de l'éventail  $q'_0 - q''_0$ , afférent à cette extrémité  $B''$ . En fait, comme nous le préciserons plus loin, ce point de charge exceptionnel peut selon les cas correspondre soit à la plus grande des charges minima accrochables, soit à la plus grande de toutes les charges accrochables.

Considérons maintenant un autre point caractéristique,  $q''_1$ , en dessous de  $q''$ . Son hypernormale dismodulée coupe la ligne  $Aq$  en un point  $B''_1$ , sis entre  $A$  et  $B''$  (deux hypernormales dismodulées issues de la branche droite de la courbe enveloppe ( $\Phi$ ) ne se coupent jamais au-dessus de cette branche) (voir figure 9).

Marquons sur la chaînette isosthène ( $q''_1$ ) la corde  $H''_1q''_1$ , conjuguée harmonique de la corde minimale  $Aq''_1$ ; cette corde  $H''_1q''_1$  a subi un pivotement dans



l'appui contrepesé  $A$ . Cette extrémité  $B\psi$  est donc celle à partir de laquelle les podes dismodulés des autres extrémités sont effectivement générateurs de points de charge, si ces extrémités sont à droite de  $B\psi$ , et ne sont plus générateurs effectifs pour les extrémités à gauche de  $B\psi$ .

La détermination du rapport  $AB_{\psi}/Aa = t_{\psi}$ , propre à chaque direction, se fait en dressant systématiquement des tables complètes des caractéristiques des cordes minimales, notamment en calculant pour chacune d'elles,  $\overline{AJ}$ , en grandeur et direction, la corde  $HJ$ , dont l'extrémité  $H$  est conjuguée harmonique de  $A$ , par rapport au couple orthogonal défini par l'extrémité  $J$ .

L'établissement de ces tables ne présente aucune difficulté.

En particulier dans le cas d'une sustente horizontale ce rapport  $t_{\psi}$  a la valeur 0,29233; dans le cas d'une sustente ascendante faisant avec l'horizontale un angle de  $15^{\circ}34'$  ce rapport est égal à 0,52, tandis qu'il devient égal à 0,14 pour une sustente descendante, faisant sensiblement le même angle ( $15^{\circ}17'$ ) en dessous de l'horizontale.

## 7. Nature exacte du point de charge

engendré par le pode dismodulé  $q''$  d'une extrémité  $B$  de sustente

Jusqu'à présent nous avons toujours considéré ce point de charge comme étant un point à charge minima; ceci n'est exact que pour autant que le pode dismodulé du point  $B$  sur l'enveloppe  $(\Phi)$  — pode unique en tant que pode situé sur la courbe  $(\Phi)$  — ne correspond pas, pour ce même point  $B$ , à un pode long,  $\beta_L$ , sur la chaînette-support définie par  $\beta$ .

Considérons la figure qui nous a servi à démontrer, en utilisant la transformée oblique, que la plus grande des charges minima (plus exactement que le point de contact de l'hypercirconférence de centre  $B$ , ayant le plus grand hyperrayon), était sur la chaînette-support dont le point caractéristique était le pode du point  $B$ . Si la transformée oblique ne traverse pas l'axe vertical de la chaînette de référence — et il suffit pour cela que  $AB/Aa$  soit plus grand que  $0,55242/\cos i$ , en appelant  $i$  l'angle de la sustente avec l'horizontale — on sera certain que le pode dismodulé  $\beta$  correspond à un pode court du type  $\beta_c$ . Les charges exceptionnelles afférentes aux diverses chaînettes-supports ne peuvent alors être que des charges minima.

Ce n'est que dans le cas où le rapport  $AB/Aa$  est suffisamment petit, que certaines chaînettes-supports peuvent introduire l'extrémité  $B$  dans la partie gauche de leur zone tripode.

Pour savoir si le pode dismodulé de l'extrémité  $B$  d'une sustente marque sur la chaînette-support, dont le point caractéristique est ce pode dismodulé, un pode moyen ou un pode long (auxquels cas on a affaire soit à un point générateur d'une charge minima, soit à un point générateur d'une charge

maxima), il faut connaître la place sur l'hypernormale ( $\beta$ ) du point caractéristique  $\gamma$  de celle-ci. (Il est évident qu'il s'agit du point caractéristique de l'hypernormale considérée comme faisant partie de la famille des hypernormales isomodulées à la chaîne-support ( $\beta$ ) et non comme faisant partie de la famille des hypernormales disomodulées à la courbe enveloppe ( $\Phi$ ); ainsi une hypernormale disomodulée  $a$ , du fait de sa double appartenance à deux familles d'hypernormales, deux points caractéristiques  $\gamma_{is}$  et  $\gamma_{dis}$ , le point caractéristique disomodulé  $\gamma_{dis}$  étant toujours plus éloigné du pôle  $\beta$  que le point caractéristique isomodulé  $\gamma_{is}$ .)

La mise en place de  $\gamma_{is}$  se déduit facilement de la propriété géométrique suivante des cordes minimales: à toute corde minimale  $AJ$  d'une chaîne quelconque il ne correspond en direction et en grandeur (notamment rapportée à l'ordonnée canonique  $Aa$ ) qu'un seul vecteur  $A\gamma$  joignant le conjugué minimal  $A$  de  $J$  au point caractéristique  $\gamma$  de l'hypernormale à la chaîne en  $J$ . Ce vecteur  $A\gamma$ , dont la direction pivote dans le même sens que celui de la corde minimale, devient tour à tour parallèle à toutes les directions. Plus précisément, quand  $J$  se déplace de gauche à droite, à partir du sommet, le vecteur  $A\gamma$  passe de la direction verticale descendante à la direction horizontale (atteinte pour l'abscisse canonique: 0,751 de  $J$ ), puis à une direction verticale ascendante (atteinte pour l'abscisse canonique 1,0364 de  $J$ ), puis le pivotement continuant, le point  $\gamma$  passe à gauche de la verticale du point  $A$ : pour ces points  $\gamma$  la direction des vecteurs  $A\gamma$  ne peut plus être celle d'une sustente (nous rappelons que nous figurons à gauche l'extrémité contrepesée  $A$  de la sustente  $AB$ ) (voir figure 10).

Donc pour chaque corde minimale il sera possible de déterminer, en direction et en grandeur, ce vecteur  $A\gamma$ , et le rapport  $A\gamma/Aa = t_\gamma$  achèvera de déterminer pour la direction en cause la longueur  $AB$  de la sustente contrepesée, au-dessus de laquelle le point à plus grande charge exceptionnelle est un pôle moyen ou court, tandis que pour les sustentés d'une longueur moindre, le pôle disomodulé de l'extrémité  $B$  marque sur la chaîne-support correspondante un pôle long.

Ainsi pour une sustente de longueur supérieure à  $AB_\gamma$  (plus précisément, pour celles dont le rapport  $AB/Aa$  est supérieur à un certain taux,  $t_\gamma$ , propre à la direction orientée de la sustente) la charge exceptionnelle (celle du point de charge engendré par le pôle disomodulé de l'extrémité) mesure la plus grande des charges minima accrochables aux diverses chaînes-supports susceptibles d'être prises en considération.

Pour une sustente de longueur moindre que  $AB_\gamma$ , la charge exceptionnelle mesure la plus lourde des plus fortes charges accrochables aux diverses chaînes-supports susceptibles d'être prises en considération. Dans ce dernier cas la plus grande des charges minima théoriquement accrochable n'a plus de

point d'accrochage effectif (il serait à gauche de l'appui  $A$ ) et la plus grande pratiquement accrochable des charges minima est alors celle de la chaînette-support, dont le pôle isomodulé (donc qui n'est plus situé sur la courbe  $(\Phi)$ ) engendre un point de charge confondu avec l'appui  $A$ . Cette chaînette-support se détermine aisément en fonction de la chaînette-support dismodulée de l'extrémité  $B_p$ : soit  $AB$  la sustente en cause, le module de celle de ses chaînettes-supports qui engendre un point de charge confondu avec le point  $A$  sera

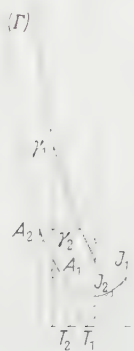


Figure 10

Courbe enveloppe  $(I')$  des hypernormales à une chaînette (on n'a figuré que la branche gauche).

	$x/m$	$y/m$	Point d'inflexion de $(I')$ : $X$ $m = -0,27,$ $Y$ $\frac{Y}{m} = 2,764.$		$x/m$	$y/m$
$A_1$	$-1,385$	$2,122$		$A_2$	$-1,869$	$3,319$
$J_1$	$1,0364$	$1,586$		$J_2$	$0,751$	$1,295$
$\gamma_1$	$-1,385$	$2,93 \times 2,122$		$\gamma_2$	$-0,533$	$3,217$
$T_1$	$-0,25$	$0$		$T_2$	$-0,82$	$0$

égal à celui,  $m_p$ , de la chaînette-support dismodulée de  $B_p$ , multipliée par le rapport  $\overline{AB}/\overline{AB_p}$ , soit:  $m = m_p \times \overline{AB}/\overline{AB_p}$ .

Il est donc essentiel de connaître pour chaque direction de sustente les emplacements relatifs des extrémités remarquables  $B_p$  et  $B_s$  (voir figure 11, les lieux de ces points).

L'étude particulière de ces deux extrémités apprend qu'il existe une direction de sustente, et une seule, pour laquelle ces deux extrémités sont confondues: cette direction est celle d'une sustente ascendante faisant avec l'horizontale un angle dont la tangente a une valeur très voisine de 13,5/100 avec un rapport  $t_s = t_p$  égal à 0,405 à cinq millièmes près (en utilisant une table de fonctions hyperboliques à cinq décimales, on ne peut encadrer cette direction qu'entre deux directions voisines successives, l'une de 12,77/100, l'autre de 14,7/100).

Pour les sustentés orientés (à partir de l'extrémité contrepesée  $A$ ) faisant avec l'horizontale un angle dont la tangente est supérieure à  $13,5/100$ , l'extrémité caractéristique  $B_{\gamma}$  est à gauche de l'extrémité  $B_{\psi}$ ; tandis que pour des angles moindres (et notamment pour toutes les sustentés plongeantes) l'extrémité  $B_{\gamma}$  est à droite de l'extrémité  $B_{\psi}$ .

Donc pour les sustentés orientées faisant avec l'horizontale un angle inférieur à  $13,5/100$ , et ayant une longueur (pour ces sustentés  $AB_{\psi} < AB_{\gamma}$ )

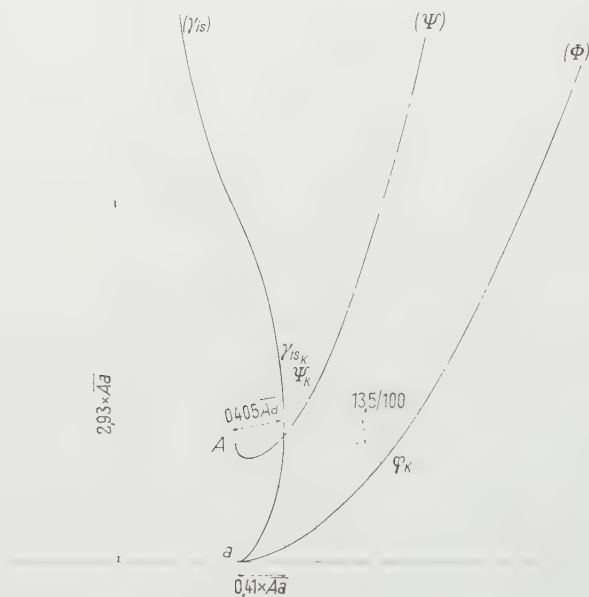


Figure 11

Faisceau de chaînettes isosthènes: 1° Lieu des points caractéristiques isomodulés  $\gamma_{is_K}$  des hypernormales, dismodulés de podes  $\varphi_K$ , à la courbe enveloppe  $(\Phi)$ . 2° Lieu des points  $\psi_K$  des hypernormales dismodulées.

moindre que  $AB_{\gamma}$  (ou  $AB/Aa < t_{\gamma}$ ), la plus grande des charges bénéficiant d'une ligne continue de points d'accrochage entre les deux appuis  $A$  et  $B$  sera celle la plus grande pouvant être accrochée à proximité de l'appui contrepesé  $A$ , tandis que pour des longueurs supérieures à  $AB_{\gamma}$ , la plus grande des charges bénéficiant d'une ligne continue de points d'accrochage sera moindre que la plus grande de celles accrochables à proximité de l'appui  $A$ .

Pour les sustentés orientées faisant avec l'horizontale un angle supérieur à  $13,5/100$  (pour ces sustentés  $AB_{\psi} > AB_{\gamma}$ ) et ayant une longueur moindre que  $AB_{\gamma}$ , la plus grande des charges bénéficiant d'une ligne continue de points d'accrochage sera encore celle la plus grande de celles accrochables à proximité



de l'appui contrepesé  $A$ , et cette particularité subsistera (différence avec le cas précédent), tant que la longueur  $AB$  ne dépassera pas la longueur  $AB_p$ , à partir de laquelle la plus grande des charges, à ligne continue de points d'accrochage, sera moindre que la plus lourde de celles accrochables à proximité de l'appui  $A$ .

### Conclusion

Avant de tirer les conclusions de cette étude du câble porteur-tracteur, il convient de parfaire une observation exprimée au début et signalant une certaine ressemblance entre les problèmes de câbles porteurs-tracteurs à l'arrêt et ceux des câbles fixes d'autres installations (ponts suspendus par exemple).

Si dans ces autres installations il peut se trouver des câbles, sur lesquels s'exerce une traction constante (contrepesée) en un de leurs points de contact sur un appui spécialement aménagé, sur lequel le câble peut glisser sans frottement (théoriquement), cette dernière circonstance ne se retrouve plus sur l'appui voisin (ou un des appuis voisins) où le câble est fixe; ce câble a une extrémité fixe. Au contraire le câble porteur-tracteur est censé glisser sans frottement sur l'appui non contrepesé, où il subit une traction appropriée à son état de charge, avec un changement de longueur, également approprié, notamment entre le point de charge et cet appui.

Donc pour étudier l'accrochage d'une charge donnée en un point donné d'un câble contrepesé, mais fixé en un autre appui,  $B$ , on devra rechercher sur les deux cheminements statiques afférents à cette charge (s'ils existent, quitte à modifier la contrepesée) les points  $C$ , dont la longueur de catène  $\widehat{CB}$ , mesurée sous le module de la chaînette-support du point  $C$  (c'est-à-dire, l'hyperdistance  $\widehat{CB}$ , mesurée sous ce module particulier) est égale à la longueur résultant du point d'accrochage choisi sur le câble.

Inversement, connaissant la longueur  $\widehat{CB}$ , on déterminera les charges pouvant être effectivement accrochées en ce point en recherchant sur chaque cheminement statique les points dont l'hyperdistance dismodulée  $\widehat{CB}$  (dismodulée, puisque le module de leur chaînette de mesure varie avec le point) est égale à la longueur imposée.

On remarquera aussi que dans certains cas de sustente, il peut exister une charge, qui soit, non plus aux abords des appuis, la plus grande de toutes celles accrochables et pour laquelle on ne dispose que d'un seul point de charge (d'une seule longueur  $\widehat{CB}$ ).

Finalement cette étude du câble porteur-tracteur à l'arrêt nous a fait reconnaître l'existence sur chaque direction de sustente contrepesée de quatre longueurs remarquables de sustente, et de chacune nous avons donné l'interprétation mécanique.

Nous les rappelons brièvement, avec leurs notations:

1°  $Aq$ , longueur maxima, définie en fonction de la contrepesée  $Aa$  par la relation  $Aq = Aa - 1/\tau$ , au-dessus de laquelle il est impossible de sustendre un câble, et pour laquelle il n'existe qu'une seule forme de câble sustendu, exclusive de toute charge;

2°  $\overline{AB_n}$  (ou  $\overline{AB_n}/Aa = t_n$ ) longueur de la catène légère tendue dont l'angle polaire est orthogonal et qui marque entre les sustentés la différence mécanique suivante: pour chacune des sustentés de longueur moindre, les suspensions se divisent en deux catégories, savoir celles des chaînettes à modules supérieurs, sur lesquelles les charges accrochables croissent constamment au fur et à mesure que leurs points d'accrochage s'éloignent de l'appui contrepesé  $A$ , et celles des chaînettes à modules inférieurs, sur chacune desquelles il existe un point, dont la charge est la plus petite de toutes celles pouvant y être accrochées;

3°  $AB_v$  (ou  $\overline{AB_v}/Aa = t_v$ ) longueur pour laquelle, selon que l'inclinaison de la sustente au-dessus de l'horizontale est supérieure ou inférieure à 13,5/100 environ, il y aura, accrochable entre les appuis, soit une charge maxima maximorum, soit une charge maxima minimorum; pour les sustentés ayant des longueurs différentes, la disposition de leurs charges accrochables exceptionnelles varie selon que leurs longueurs dépassent ou ne dépassent pas la longueur caractéristique  $AB_v$ ;

4°  $\overline{AB_v}$  (ou  $\overline{AB_v}/Aa = t_v$ ), longueur dont la comparaison avec celle susvisée  $AB_v$  (plus petite que  $AB_v$  pour les sustentés ayant au-dessus de l'horizontale une inclinaison supérieure à 13,5/100, et plus grande que  $AB_v$  pour les sustentés d'inclinaison moindre), modifie notablement la disposition des suspensions à charge maxima.

La mise en évidence des conséquences mécaniques d'une modification de longueur d'une sustente (sa contrepesée demeurant inchangée) dans le cas d'un problème de suspension, pourtant réduit à la plus grande simplicité, convainc que, quelle que soit la méthode employée pour calculer les câbles, ce calcul ne saurait être conduit commodément et efficacement si on ne dispose pas de tables donnant pour chaque direction, de degré en degré au moins, les quatre valeurs fondamentales évoquées ci-dessus. Ni l'établissement de telles tables, ni leur exploitation ne présentent de difficultés.

### *Zusammenfassung*

Die Feststellung der mechanischen und geometrischen Merkmale eines Trag- und Zugseiles ist entweder auf empirischem Wege oder durch Berechnung zu erlangen. Im letzteren Falle kann den sich aus der Berechnung ergebenden Formeln keinerlei Vertrauen geschenkt werden, sofern diese Berechnung nicht ausgeht von einer genauen Kenntnis der theoretischen Gegebenheiten, deren wechselseitige Beziehungen man in Form von Gleichungen ausgedrückt zu haben beansprucht.

Da der einfachste Fall derjenige einer einzigen Last ist, welche an einem Trag- und Zugseil im Zustand des Stillstandes aufgehängt ist, war es angebracht, eine gründliche und vollständige Analyse einer solchen Aufhängung vorzunehmen. Dies ist der Zweck dieses Aufsatzes.

Es wird darin festgestellt, dass jeder Neigungswinkel, in welchem das Trageil gespannt ist, gekennzeichnet ist durch 4 unterschiedliche Werte, welche jeweils das Verhältnis zwischen der Länge des Trageiles und seinem Gegengewicht bestimmen. Der Verfasser ist der Auffassung, die Berechnung von Trageilen lasse sich nicht bequem und wirksam durchführen, wenn man nicht über Tabellen verfügt, die übrigens leicht aufgestellt werden können, welche diese 4 Werte für die in Frage kommenden Neigungswinkel angeben.

Ferner stellt man fest, dass die dargelegte Theorie sich auch auf feste Seile anderer Anlagen anwenden lässt, vor allem auf die Trageile von Hängebrücken.

(Reçu: le 11 octobre 1957.)

## Maschinelle Auswerterechnung bei der Flugabwehr

VON ERNST SCHULTZE, Bern<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

Die optische Erprobung [1]<sup>2)</sup> von Feuerleitgeräten für die terrestrische Fliegerabwehr verfolgt den Zweck, Angaben über die Genauigkeit solcher Geräte im Normalbetrieb zu gewinnen, ohne dass dabei geschossen zu werden braucht. Dabei wird einerseits das Ziel mit speziellen Theodoliten fortlaufend vermessen, und andererseits werden die an den Skalen des Rechengerätes oder Kommandogerätes erscheinenden Ergebnisse, nämlich die ballistischen Koordinaten des voraussichtlichen Treffpunktes in regelmässigen Zeitabständen fotografisch festgehalten und nicht an die Geschütze weitergeleitet.

Will man nur das Kommandogerät (Kgt.) allein prüfen (unabhängig vom Radar), so lassen sich die kostspieligen Theodoliten entbehren. Dafür muss man dann die Eingangswerte des Kgt. fotografieren. Die Kenntnis der Eingangs- und Ausgangswerte des Kgt. ermöglicht allein schon die Beurteilung der dynamischen Rechengenauigkeit, vorausgesetzt, dass sich das Ziel genügend gleichförmig bewegte. Schliesslich lassen sich für diesen Zweck auch Zielflugzeug und Radar entbehren, wenn man dafür die Eingangswerte künstlich durch einen Simulator erzeugt. Die Auswertung solcher Versuche, das heisst die Berechnung der Fehler der Ausgangswerte bei gegebenen Eingangswerten, bietet, auch bei Beschränkung auf das Allernotwendigste, eine ganz beträchtliche Arbeit. Denn um ein zuverlässiges Bild von der Genauigkeit eines Kgt. zu bekommen, müssen Flüge in verschiedenen Höhen, in verschiedenen Ent-

<sup>1)</sup> Hasler AG, Werke für Telephonie und Präzisionsmechanik.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 374.

fernungen und mit verschiedenen Geschwindigkeiten geprüft werden. Da bei jedem Flug viele Bilder gemacht werden, sind bald einmal einige tausend Treffpunkte zu berechnen. Es wurde deshalb der Versuch unternommen, eine solche Auswertung auf der ERMETH durchzuführen (Elektronische Rechenmaschine der ETH). Die vorliegende Arbeit soll über die dabei angewandten Rechenmethoden berichten.

## 2. Grundlagen und Bezeichnungen

### 2.1 Anordnung

Man hat als Eingangswerte die Kugelkoordinaten des Zieles und als Ausgangswerte die ballistischen Koordinaten des zukünftigen Treffpunktes. Will man das ganze Feuerleitgerät prüfen, so verwendet man als Eingangswerte die aus der Theodolitmessung resultierenden Kugelkoordinaten; bei Prüfung des Kgt. allein verwendet man die ins Kgt. eingehenden Kugelkoordinaten.

Eingangswerte und Ausgangswerte werden am einfachsten gleichzeitig fotografiert, und zwar in konstanten Zeitintervallen  $\Delta t$ . (Die Wahl des Zeitintervalles unterliegt bei Anwesenheit eines Ladeverzuges  $k$  der Beschränkung, dass  $k/\Delta t$  eine ganze Zahl sein muss, siehe Abschnitt 4.4.) Die fotografierten Werte werden nach der Entwicklung der Filme abgelesen und auf Lochstreifen oder Lochkarten festgehalten.

Die Auswerterechnung auf der ERMETH geht dann folgendermassen vor sich:

1. Eingeben des auf Lochstreifen oder Lochkarten gespeicherten Rechenprogrammes in die Rechenmaschine.
2. Eingeben der auf Lochstreifen oder Lochkarten gespeicherten Eingangs- und Ausgangswerte eines Fluges in die Rechenmaschine.
3. Durchführung der Auswerterechnung, und zwar:
  - a) Glättung der Eingangswerte, das heisst Berechnung des Normfluges (Abschnitt 2. 2), mit anschliessendem Drucken der Eingangsfehler;
  - b) Schussfehlerberechnung auf Grund des Normfluges und der Ausgangswerte (Abschnitt 2.3) mit anschliessendem Drucken der Schussfehler;
  - c) Drucken der Summenverteilungen der Eingangs- und Schussfehler.

Dies gilt für den ersten Flug. Beim zweiten und den folgenden Flügen braucht das Rechenprogramm nicht nochmals in die Maschine gegeben zu werden, sondern man kann dann gleich mit dem Eingeben der Ein- und Ausgangswerte beginnen.

### 2.2 Die Eingangswerte

Da die Eingangswerte des Kgt. normalerweise mit Fehlern behaftet sind [2], müssen sie zuerst geglättet werden. Unter der hier gemachten Voraussetzung, dass das Kgt. nur für den *gleichförmigen* Flug geprüft werden soll (gleichförmiger Flug – Flug mit konstantem Geschwindigkeitsvektor), wird zunächst

auf Grund der Eingangswerte ein *Normflug* berechnet. Das ist derjenige gleichförmige Flug, der gegenüber den vorhandenen Eingangswerten die kleinsten Unterschiede aufweist. Er braucht bei Verwendung der Eingangswerte des Kgt. nicht mit dem tatsächlich erfolgten Flug übereinzustimmen (zum Beispiel wegen Radarfehlern), hingegen ist er für die Beurteilung der Rechengenauigkeit des Kgt. massgebend. Die Unterschiede zwischen den Eingangswerten des Kgt. und denen des Normfluges werden als *Eingangsfehler* bezeichnet. Der Eingangsfehler ist ein Vektor. Es können von ihm sowohl der Absolutbetrag  $\Delta s_e$  als auch die Komponenten berechnet werden.

### 2.3 Die Ausgangswerte

Wegen seiner eindeutigen Geschwindigkeit gestattet der Normflug eine eindeutige Treffpunktberechnung. Der *Treffpunkt*  $T$  fliegt dem Messpunkt  $M$  bekanntlich immer um die Summe von Geschossflugzeit  $\tau_T$  und Ladeverzug  $k$  voraus. Seine ballistischen Koordinaten  $x_T, y_T$  und  $\tau_T$  werden den Ausgangswerten des Kgt. gegenübergestellt und die Differenzen als *Kgt.-Fehler* bezeichnet. Weiter bestimmen die Ausgangswerte  $x_s, y_s$  und  $\tau_s$  des Kgt. eindeutig einen bestimmten Punkt im Raum, nämlich den *Sprenghpunkt*  $S$  (Ort der Geschossexplosion), dessen ballistische Koordinaten sie sind. Der Abstand  $TS$  der beiden Punkte ist der *theoretische Schussfehler*  $\Delta s_t$ . Als *wirklichen Schussfehler*  $\Delta s_w$  bezeichnet man hingegen den Abstand  $GS$ , wobei  $G$  der *Gegnerpunkt* ist (in welchem sich das Ziel zur Zeit der Geschossexplosion befindet [1]). Beide Schussfehler haben ihre praktische Bedeutung: Der theoretische Fehler ist identisch mit dem eigentlichen Kgt.-Fehler, der wirkliche Fehler ist die praktische Auswirkung des Kgt.-Fehlers.

Es liesse sich noch ein dritter Schussfehler berechnen, der bei Verwendung von Annäherungszündern als wirklicher Fehler in Frage käme. Dieser besteht im kürzesten Abstand, den Ziel und Geschoss in irgendeinem Zeitmoment haben können.

### 2.4 Bezeichnungen

Koordinaten:

$\lambda$	Lagewinkel	}	Kugelkoordinaten,
$e$	Distanz (Schrägentfernung)		
$\alpha$	Seite		
$e_k$	Kartenentfernung	}	Zylinderkoordinaten,
$h$	Höhe		
$x, y$	kartesische Grundrisskoordinaten	}	kartesische Koordinaten,
$\bar{\alpha}$	Seite (inkl. Derivation)		
$\varepsilon$	Elevation	}	ballistische Koordinaten.
$\tau$	Geschossflugzeit		



Alle diese Koordinaten (mit eventueller Ausnahme der ballistischen) beziehen sich auf das Feuerleitgerät als Nullpunkt. Die  $x$ -Achse fällt mit der Nullrichtung für die Seite zusammen (zum Beispiel nach Norden). Die Seite wird im Gegenurzeigersinn positiv gezählt, das heisst, die  $y$ -Achse hat eine Seite von  $1600 A^0_{00}$ .

#### Punkte:

$M$	Messpunkt (Eingangswerte),
$N$	Normpunkt,
$T$	Treffpunkt,
$S$	Sprengepunkt (Ausgangswerte),
$G$	Gegnerpunkt,
$W$	Wechselpunkt.

Ein grosser Buchstabe, als Index an eine Koordinate oder einen Vektor angehängt, bezeichnet immer den Punkt, auf den sie oder er sich bezieht. Der Index 0 bedeutet, dass die betreffende Grösse zur Zeit  $t = 0$  gilt.

#### Vektoren:

$\vec{r}$	Ortsvektor eines Punktes $(x, y, h)$ ,
$\vec{v}$	Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten $(v_x, v_y, v_z)$ .

#### Kenngrössen des gleichförmigen Fluges:

$\kappa$	Kurswinkel,
$v_h$	Horizontalkomponente von $\vec{v}$ ,
$\gamma$	Steigwinkel,
$t_W$	Zeit des Passierens von $W$ ,
$e_{kW}$	Kartenentfernung von $W$ ,
$h_W$	Höhe von $W$ .

#### Fehler:

$\Delta s_e$	Betrag des Eingangsfehlers,
$\Delta \xi$	Komponente in Kursrichtung,
$\Delta \eta$	Komponente senkrecht zur Kursrichtung,
$\Delta h$	Komponente in Höhe,
$\Delta \alpha$	Fehler der Kugelkoordinaten,
$\Delta \lambda$	
$\Delta c$	
$\Delta \alpha$	Kgt.-Fehler,
$\Delta \varepsilon$	
$\Delta \tau$	
$\Delta s_t$	theoretischer Schussfehler,
$\Delta s_w$	wirklicher Schussfehler.



## Sonstige Grössen:

$t$	Zeit,
$\Delta t$	Bildintervall,
$k$	Ladeverzug,
$\beta$	$= \kappa - \alpha$ = Flugrichtungswinkel (Winkel zwischen Visier und Kurs im Grundriss),
$\delta$	Derivation,
$\xi$ $\eta$	} Einheitsvariable [Formel (4.2)].

## 3. Glättung und Eingangsfehler

## 3.1 Berechnung des Normfluges

Die Glättung, das heisst die Berechnung des Normfluges, wird am einfachsten in kartesischen Koordinaten vorgenommen, denn in einem kartesischen System sind die Koordinaten eines gleichförmigen Fluges lineare Funktionen der Zeit:

$$x_N(t) = x_{N_0} + v_x t, \quad y_N(t) = y_{N_0} + v_y t, \quad \dot{h}_N(t) = \dot{h}_{N_0} + v_v t. \quad (3.1)$$

Die Berechnung der sechs Konstanten  $x_N, y_{N_0}, h_{N_0}, v_x, v_y, v_v$ , die den Normflug vollständig bestimmen, erfolgt durch Anwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ([3], § 21) gesondert auf jede der drei Koordinaten.

Zur Umrechnung der Kugelkoordinaten auf kartesische dienen bekanntlich die folgenden Formeln:

$$\left. \begin{aligned} e_{kM} &= e_M \cos \lambda_M, & x_M &= e_{kM} \cos \alpha_M, \\ h_M &= e_M \sin \lambda_M, & y_M &= e_{kM} \sin \alpha_M. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Die Kartenentfernung  $e_{kM}$  ist dabei eine Hilfsgrösse. Die Eingangswerte sind numeriert, wobei das erste Bild die Nummer 0 bekommt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{Mj} \\ \lambda_{Mj} \\ e_{Mj} \end{aligned} \right\} \quad \text{Eingangswerte des Bildes Nr. } j \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.3)$$

Das Bild Nr.  $j$  ist zur Zeit

$$t_j = j \Delta t \quad (3.4)$$

gemacht worden. Die kartesischen Koordinaten sind dann entsprechend:

$$x_{Mj}, y_{Mj}, h_{Mj} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.5)$$

Nun bestimmt sich zum Beispiel die  $x$ -Komponente des Normfluges aus der Bedingung, dass

$$S = \sum_{j=0}^n (x_N(t_j) - x_{M_j})^2 = \sum_{j=0}^n (x_{N_0} + v_x \Delta t j - x_{M_j})^2 \quad (3.6)$$

ein Minimum sein soll. Man hat also die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial x_{N_0}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial v_x} = 0, \quad \dots \quad (3.7)$$

welche durch Ausrechnen das folgende Gleichungssystem liefern:

$$\sum 1 x_{N_0} + \sum j v_x \Delta t = \sum x_{M_j}, \quad \sum j x_{N_0} + \sum j^2 v_x \Delta t = \sum j x_{M_j}. \quad (3.8)$$

Daraus lassen sich  $x_{N_0}$  und  $v_x$  bestimmen. Auf genau dieselbe Weise erhält man auch die andern Komponenten  $y_{N_0}$ ,  $v_y$  und  $h_{N_0}$ ,  $v_r$ , womit der Normflug vollständig bestimmt ist.

Die maschinelle Verwertung der abgeleiteten Formeln und überhaupt der ganzen Auswertrechnung erfolgt durch häufige Verwendung von Unterprogrammen. Für jede grössere Teilrechnung, die an mindestens zwei verschiedenen Stellen gebraucht wird, lohnt es sich, ein Unterprogramm (UP) herzustellen. Dadurch wird das Hauptprogramm wesentlich kürzer und übersichtlicher. Eine Zusammenstellung der verwendeten Programme befindet sich in Abschnitt 6. So erfordert die Berechnung des Normfluges die UP 18, 6 und 9. Dabei braucht UP 6 selbst zweimal das UP 4, und dieses wiederum zweimal das UP 2.

### 3.2 Die Kenngrössen des Normfluges

Die in den Gleichungen (3.1) auftretenden Konstanten  $x_{N_0}$ ,  $y_{N_0}$ ,  $h_{N_0}$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  sind noch nicht die Kenngrössen des Normfluges. Als solche gelten vielmehr  $z$ ,  $v_h$ ,  $v_r$  sowie  $t_W$ ,  $e_{kW}$ ,  $h_W$ . Die letzten drei fixieren die Lage des Fluges in bezug auf das Kgt. (der Wechselpunkt  $W$  ist derjenige Punkt des Fluges, für den die horizontale Projektion den kleinsten Abstand vom Kgt. hat), während die ersten drei vom Kgt. unabhängige Grössen sind.

Die Berechnung von  $z$  und  $v_h$  ist einfach und kann wegen

$$v_x = v_h \cos \kappa, \quad v_y = v_h \sin \kappa$$

mit Hilfe von UP 5 geschehen. Die Berechnung von  $t_W$  und  $e_{kW}$  geschieht anhand der Figur 1 (Grundriss).  $N_0$  ist dabei derjenige Punkt des Normfluges, in dem sich das Ziel zur Zeit  $t = 0$  befindet.

Man hat die Formeln

$$v_h t_W = -e_{k_0} \cos \beta_0, \quad e_{kW} = e_{k_0} |\sin \beta_0| \quad (3.9)$$

und

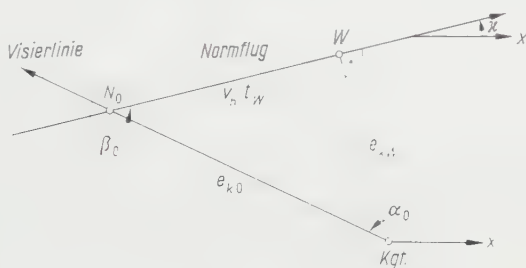
$$\beta_0 = \kappa - \alpha_0. \quad (3.10)$$

Man geht deshalb am einfachsten so vor:

$$(x_{N_0}, y_{N_0}) \Rightarrow (e_{\beta_0}, \alpha_0) \quad \text{mit UP 5.}$$

 $\beta_0$  nach (3.10)

$$(e_{k_0}, \beta_0) \Rightarrow (v_h t_W, \pm e_{k_W}) \quad \text{mit UP 4.}$$



Zur Berechnung von  $t_W$  und  $e_{k_W}$  (Grundriss).

Durch Division durch  $v_b$  bzw. durch Absolutwertbildung erhält man  $t_{II}$  bzw.  $e_{kW}$ . Wegen (3.1) hat man dann:

$$h_W = h_{N^*}(t_W) = h_{N^*} + v_{\tau} t_W. \quad (3.11)$$

Damit sind alle Kenngrößen des Normfluges bestimmt.

### 3.3 Berechnung der Eingangsfehler

In kartesischen Koordinaten hat man als Eingangsfehler:

$$\Delta x_j = x_{M_j} - x_{N_j}, \quad \Delta y_j = y_{M_j} - y_{N_j}, \quad \Delta h_j = h_{M_j} - h_{N_j}, \quad (3.12)$$

wobei sich  $x_{N_j}$ ,  $y_{N_j}$  und  $h_{N_j}$  aus (3.1) für  $t = j \Delta t$  berechnen lassen. Der Abstand der beiden Punkte  $M_j$  und  $N_j$  ergibt sich dann zu

$$\Delta s_{ej} = \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2 + \Delta h_j^2}. \quad (3.13)$$

Eine dem vorliegenden Kgt. besser angepasste Darstellung der Horizontal-  
komponenten des Eingangsfehlers ist die Zerlegung in die Kursrichtung und  
die senkrecht dazu liegende Komponente. Die in Kursrichtung liegende Kom-  
ponente  $\Delta\xi$  ist dann in erster Linie für die Schwankungen der Horizontal-



mässige Ausdrücke für die beiden Funktionen  $\tau$  und  $\varepsilon$  in Frage, die nur elementare Operationen enthalten. Sie wurden zu diesem Zweck durch Polynome approximiert.

Als Approximationsbereich dient ein Rechteck in der  $(e, \lambda)$ -Ebene:

$$(0 \leq) e_{\min} \leq e \leq e_{\max}, \quad \lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max} (\leq 1600 A^0/_{00}). \quad (4.1)$$

Diesem Rechteck entspricht in der  $(c_k, h)$ -Ebene ein Kreisringsektor, dürfte also dem Wirkungsbereich eines Flabgeschützes gut angepasst sein. Die lineare Transformation

$$\xi = a e - b, \quad \eta = c \lambda - d, \quad (4.2)$$

in welcher  $a, b, c, d$  geeignete Konstanten sind, führt das Approximationsrechteck (4.1) in das Einheitsquadrat über:

$$-1 \leq \xi \leq +1, \quad -1 \leq \eta \leq +1. \quad (4.3)$$

In diesen Einheitsvariablen  $\xi$  und  $\eta$  lauten die Polynome:

$$\tau = \sum_{i,j} b_{ij}^{(\tau)} \xi^i \eta^j, \quad \varepsilon = \sum_{i,j} b_{ij}^{(\varepsilon)} \xi^i \eta^j. \quad (4.4)$$

Sie sind vom  $n$ -ten Grade in jeder Variablen.

Die Berechnung der Koeffizienten  $b_{ij}^{(\tau)}$  und  $b_{ij}^{(\varepsilon)}$  kann auf verschiedene Arten geschehen:

Lassen sich  $\tau$  und  $\varepsilon$  an einigen Stützstellen genügend genau bestimmen, so ist eine Tschebyscheff-Entwicklung vorzuziehen. Falls sie aber an vielen Stellen, aber weniger genau, bekannt sind, lässt sich eine Ausgleichsrechnung anwenden. Da  $\tau$  und  $\varepsilon$  als Funktionen zweier Variablen stetig sind (man beschränkt sich ja bei der Flugabwehr auf einen eindeutigen Bereich innerhalb der Enveloppe der Geschossflugbahnen), lassen sie sich durch Ausdrücke der Form (4.4) bekanntlich beliebig genau approximieren. Die Erfahrung zeigte indessen, dass man mit  $n = 3$  schon sehr brauchbare Approximationen finden kann.

Eine den Formeln (4.4) entsprechende Approximation ist auch für die Derivation erforderlich. Wegen ihrer Kleinheit sind jedoch viel weniger Glieder nötig. Die Abhängigkeit vom Lagewinkel  $\lambda$  kann gewöhnlich vernachlässigt werden, so dass man nur noch eine Funktion von  $e$  allein hat, welche zum Beispiel folgende Form haben kann:

$$\delta = e (d_1 + e d_2),$$

wobei  $d_1$  und  $d_2$  zu bestimmende Koeffizienten sind.

#### 4.2 Berechnung des Treffpunktes

Die graphischen Verfahren, derer man sich bei der Treffpunktberechnung normalerweise bedient, sind einfach und übersichtlich. Leider lassen sie sich aber bei digitalen Rechenmaschinen nicht anwenden.

Man hat zunächst zwei Gleichungen. Die erste ist eine Vektorgleichung. Sie extrapoliert den Zielflug um die Zeit  $\tau + k$  in die Zukunft ( $k$  Ladeverzug):

$$\vec{r}_T = \vec{r}_N + (\tau + k) \vec{v}. \quad (4.5)$$

Diese Extrapolationsformel gilt natürlich nur für gleichförmigen Flug, der uns hier allein interessiert. Bei ungleichförmigem Flug kann man sie entsprechend modifizieren, ohne dass die folgenden Überlegungen ihre Gültigkeit verlieren. Die zweite Gleichung liefert die Geschossflugzeit  $\tau$  als Funktion des Ortsvektors  $\vec{r}_T$  des Treffpunktes  $T$  [siehe (4.4)]:

$$\tau = \tau(\vec{r}_T). \quad (4.6)$$

Durch Einsetzen der Zielfluggleichung (4.5) in die ballistische Gleichung (4.6) erhält man eine einzige (nichtlineare) Gleichung für die Unbekannte  $\tau$ :

$$\tau = \tau(\vec{r}_N + (\tau + k) \vec{v}). \quad (4.7)$$

Die Lösung kann zum Beispiel nach dem Newtonschen Iterationsverfahren erfolgen ([3], § 27 C). Dieses besteht bekanntlich darin, dass man aus einer Näherung  $\tau_i$  für die Wurzel der Gleichung

$$f(\tau) = 0 \quad (4.8)$$

eine bessere Näherung  $\tau_{i+1}$  durch die Formel

$$\tau_{i+1} = \tau_i - \frac{f(\tau_i)}{f'(\tau_i)} \quad (4.9)$$

erhält. In unserem Falle folgt durch Vergleich von (4.7) und (4.8):

$$f(\tau) = \tau - \tau(\vec{r}_N + (\tau + k) \vec{v}). \quad (4.10)$$

Mit Hilfe der Abkürzung

$$\tau(\vec{r}_N + (\tau_i + k) \vec{v}) = \tau_i^* \quad (4.11)$$

hat man

$$f(\tau_i) = \tau_i - \tau_i^*.$$



Durch Differentiation von (4.10) folgt ferner (Anwendung der Kettenregel für eine Funktion mehrerer Variablen):

$$f'(\tau_i) = 1 - (\vec{v} \cdot \text{grad}_i \tau),$$

wobei der Ausdruck in runden Klammern das skalare Produkt der beiden Vektoren  $\vec{v}$  und  $\text{grad}_i \tau$  bedeutet. Das Einsetzen der beiden letzten Ausdrücke in die Formel (4.9) liefert als Iterationsformel:

$$\tau_{i+1} = \tau_i + \frac{\tau_i^* - \tau_i}{1 - (\vec{v} \cdot \text{grad}_i \tau)}. \quad (4.12)$$

Als nullte Näherung  $\tau_0$  wird man natürlich die vom Kgt. gelieferte Tempierung nehmen. Diese Näherung ist schon relativ gut, so dass die nächste Näherung  $\tau_1$  in fast allen Fällen schon genügend genau sein wird (quadratische Konvergenz). Die Iteration wird abgebrochen, sobald das zweite Glied in (4.12) genügend klein wird. Das skalare Produkt

$$(\vec{v} \cdot \text{grad } \tau) \quad (4.13)$$

im Nenner liegt in folgenden Schranken, da der Vektor  $\text{grad } \tau$  in einer Vertikal-ebene durch das Kgt. liegt und ungefähr in Visierrichtung vom Kgt. wegweist:

$$(\vec{v} \cdot \text{grad } \tau) = \left\{ \begin{array}{l} < 0 \text{ im Anflugbereich,} \\ = 0 \text{ wenn } T = W, \\ > 0 \text{ im Wegflugbereich,} \\ = 1 \text{ bei der Erreichbarkeitsgrenze des Wegfluges.} \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

Die Erreichbarkeitsgrenze des Wegfluges liegt dort, wo bei der konventionellen Flugabwehr infolge Geschwindigkeitsverlust des Geschosses die letzte Treffmöglichkeit besteht. Aus (4.14) folgt, dass der Nenner von (4.12) praktisch immer positiv ist.

Man kann das skalare Produkt (4.13), das ja durch die Ableitung von (4.7) nach  $\tau$  entstanden ist, durch einen Differenzenquotienten ersetzen:

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}_i \tau) \approx \frac{\tau_i^{**} - \tau_i^*}{\tau_i^* - \tau_i}, \quad (4.15)$$

wobei analog zur Abkürzung (4.11)

$$\tau(\vec{r}_N + (\tau_i^* + k)\vec{v}) = \tau_i^{**} \quad (4.16)$$

gesetzt wurde. Man erhält dann durch Einsetzen in (4.12) eine weitere Itera-

tionsformel, welche keine Ableitungen mehr enthält:

$$\tau_{i+1} = \tau_i - \frac{(\tau_i^* - \tau_i)^2}{\tau_i^{**} - 2\tau_i^* + \tau_i}. \quad (4.17)$$

Diese Formel wird in der Mathematik nach STEFFENSEN benannt ([3], § 27,7) und dient ganz allgemein zur Konvergenzverbesserung von Iterationen [5]. Auf die aus (4.7) folgende «primitive» Iteration

$$\tau_{i+1} = \tau_i^*$$

sei hier nicht eingegangen, da sie in den meisten Fällen zu wenig rasch konvergiert [lineare Konvergenz mit dem Quotienten (4.13)].

Ist  $\tau_T$  durch Iteration bestimmt worden, so lässt sich der Treffpunkt  $T$  durch Einsetzen von  $\tau_T$  in die Formel (4.5) berechnen. Damit lassen sich auch  $\varepsilon_T$  und  $\alpha_T$  bestimmen. Für die ballistische Koordinate  $\bar{\alpha}_T$  ist noch die Berücksichtigung der Derivation nötig:

$$\alpha_T = \alpha_T + \delta. \quad (4.18)$$

#### 4.3 Berechnung des Sprengpunktes

In mathematischer Formulierung ist die Sprengpunktberechnung nichts anderes als die Transformation von ballistischen Koordinaten in kartesische (Abschnitt 2.3). Es handelt sich also zunächst um die Umkehrung der Polynome (4.4): Gegeben sind  $\tau_s$  und  $\varepsilon_s$ , gesucht sind  $\xi_s$  und  $\eta_s$ . Zur Berechnung dieser Umkehrung wurde wiederum das Verfahren von NEWTON herangezogen, diesmal jedoch formuliert für die Auflösung der folgenden zwei Gleichungen ([3], § 27, (16)):

$$\tau(\xi, \eta) = \tau_s, \quad \varepsilon(\xi, \eta) = \varepsilon_s. \quad (4.19)$$

Aus der  $i$ -ten Näherung  $(\xi_i, \eta_i)$  ergibt sich die  $(i+1)$ -te Näherung durch

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \Delta\xi_i, \quad \eta_{i+1} = \eta_i + \Delta\eta_i, \quad (4.20)$$

wobei  $\Delta\xi_i$  und  $\Delta\eta_i$  Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \Big|_i \cdot \Delta\xi_i + \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \Big|_i \cdot \Delta\eta_i &= \tau_s - \tau_i, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \Big|_i \cdot \Delta\xi_i + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \Big|_i \cdot \Delta\eta_i &= \varepsilon_s - \varepsilon_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Dabei sind

$$\tau_i, \quad \varepsilon_i, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \eta_i}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta_i}$$

die Werte der betreffenden Funktionen an der Stelle  $(\xi_i, \eta_i)$ .

Man ist auch hier wiederum in der Lage, als nullte Näherung Werte  $\xi_0, \eta_0$  zu nehmen, die schon relativ nahe der Lösung sind, nämlich das Resultat der vorhergehenden Treffpunktberechnung. Eine einmalige Iteration genügt in den meisten Fällen. Die Iteration wird abgebrochen, sobald beide Fehler  $\tau_s - \tau_i$  und  $\varepsilon_s - \varepsilon_i$  dem Betrage nach unter einer gewissen Schranke liegen.

Nachdem  $\xi_s$  und  $\eta_s$  als Resultat der Iteration vorliegen, berechnet man daraus durch Umkehrung der Formeln (4.2) die Grössen  $\varepsilon_s$  und  $\lambda_s$ . Diese gestatten dann die Derivation zu bestimmen (UP 11), womit man dann die von der Derivation freie Seite berechnen kann:

$$\alpha_s = \alpha_s - \delta. \quad (4.22)$$

Damit sind die Kugelkoordinaten  $z_s, \lambda_s$  und  $c_s$  des Sprengpunktes bekannt. Die kartesischen Koordinaten ergeben sich daraus nach (3.2) (UP 6).

#### 4.4 Berechnung der Schussfehler

Die durch den Ladeverzug bedingte Komplikation bewirkt, dass das Kgt. die zu einem Sprengpunkt gehörenden ballistischen Koordinaten nicht alle drei im gleichen Zeitmoment liefert. Vielmehr erscheinen  $\alpha$  und  $\varepsilon$  um die Ladeverzugszeit  $k$  später als das zugehörige  $\tau$ . Deshalb muss  $k/H$  eine ganze Zahl sein, nämlich gleich der Anzahl der Bilder, um welche  $\alpha$  und  $\varepsilon$  verschoben werden müssen, um mit  $\tau$  zusammen die ballistischen Koordinaten  $\alpha_s, \varepsilon_s, \tau_s$  des Sprengpunktes zu geben.

Die Differenzen

$$\Delta \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_s - \bar{\alpha}_T, \quad \Delta \varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_T, \quad \Delta \tau = \tau_s - \tau_T \quad (4.23)$$

sind Kgt.-Fehler (Abschnitt 2.3). Die ballistischen (und auch die kartesischen) Koordinaten von  $T$  werden dabei von UP 14 geliefert. Zur Berechnung der Schussfehler braucht man ferner die kartesischen Koordinaten  $x_s, y_s, z_s$  des Sprengpunktes (UP 13). Für den theoretischen Schussfehler gilt dann (UP 15):

$$\overline{TS} = \Delta s_i = \sqrt{(x_s - x_T)^2 + (y_s - y_T)^2 + (h_s - h_T)^2}. \quad (4.24)$$

Zur Bestimmung des wirklichen Schussfehlers braucht man noch den Gegnerpunkt. Nach dem in Abschnitt 2.3 Gesagten gilt für ihn:

$$\vec{r}_G = \vec{r}_N + (\tau_s + k) \vec{v}. \quad (4.25)$$

Dann ergibt sich:

$$\overline{GS} = \Delta s_w = \sqrt{(\overline{x_s - x_G})^2 + (\overline{y_s - y_G})^2 + (\overline{h_s - h_G})^2}. \quad (4.26)$$

Bekanntlich ist im Anflugbereich der wirkliche Schussfehler grösser als der theoretische, im Wegflugbereich kleiner; nur wenn der Treffpunkt in einer gewissen Umgebung des Wechsellpunktes ist, kann beides vorkommen.

## 5. Fehlerverteilung

Die Berechnung der Fehlerverteilung ist relativ einfach. Sie wurde hier nur durchgeführt für die Fehler  $\Delta s_e$ ,  $\Delta s_t$  und  $\Delta s_w$ , welche ja nur positiv oder Null sein können. Für jeden dieser drei Fehler werden 50 Zellen im Speicher der Rechenmaschine reserviert. Diese werden vor Beginn der Auswertung jedes Fluges mit Hilfe von UP 17 mit Nullen gefüllt. Ist dann im Laufe der Auswertung ein Fehler berechnet worden, so liefert seine Grösse die Adresse derjenigen Zelle, deren Inhalt um Eins erhöht werden soll. Am Schlusse hat man dann in jeder dieser Zellen die Anzahl derjenigen Fehler, deren Grösse der Adresse der betreffenden Zelle entspricht, das heisst, man hat die Dichteverteilung des Fehlers.

Die Summenverteilung erhält man daraus durch einfache Summenbildung. Diese sowie das Drucken der Summenverteilung wird von Hauptprogramm 3 besorgt. Gedruckt wird folgende Funktion:

$A(\Delta s)$  ist die Anzahl derjenigen Fehler, welche kleiner sind als  $\Delta s + h$  ( $h$  Schrittweite), und zwar

$A_e(\Delta s)$  für den Eingangsfehler  $\Delta s_e$ ,

$A_t(\Delta s)$  für den theoretischen Schussfehler  $\Delta s_t$ ,

$A_w(\Delta s)$  für den wirklichen Schussfehler  $\Delta s_w$ .

## 6. Zusammenstellung der verwendeten Rechenprogramme

### 6.1 Unterprogramme

Mit Ausnahme der Quadratwurzel, für welche das in der Rechenmaschine eingebaute UP benützt wurde, wurden alle UP selbst hergestellt.

UP 1: Berechnung der Quadratwurzel.

UP 2: Berechnung von  $\sin x$ , auf 4 Stellen genau.  $x$  ist dabei in  $10^\circ$  gegeben und braucht nicht auf das Intervall  $0 \leq x < 6400^\circ$  beschränkt zu sein.

UP 3: Berechnung von  $\arctg |x|$ , wobei  $x$  beliebig aber  $|x| \neq \infty$ . Das Resultat wird in  $10^\circ$  geliefert mit  $1/10^\circ$  Genauigkeit.

- UP 4: Transformation von ebenen Polarkoordinaten in kartesische.  $\cos x$  wird dabei als  $\sin(x + 1600^\circ/_{00})$  gerechnet. Benützt UP 2.
- UP 5: Transformation von ebenen kartesischen in Polarkoordinaten, wobei der Winkel zwischen 0 und  $6400^\circ/_{00}$  geliefert wird. Benützt UP 1 und UP 3.
- UP 6: Transformation von Kugelkoordinaten in kartesische. Benützt UP 4.
- UP 7: Transformation von kartesischen in Kugelkoordinaten. Benützt UP 5.
- UP 8: Lineare Extrapolation in kartesischen Koordinaten um eine gegebene Zeit.
- UP 9: Auflösung eines linearen Gleichungssystems zweiter Ordnung.
- UP 10: Berechnung der ballistischen Polynome (4.4) mitsamt je den ersten partiellen Ableitungen ( $n$  beliebig).
- UP 11: Berechnung der Derivation.
- UP 12: Transformation von kartesischen in ballistische Koordinaten. Benützt UP 7, 10 und 11.
- UP 13: Transformation von ballistischen in kartesische Koordinaten (Sprengpunktberechnung nach Abschnitt 4.3). Benützt UP 6, 9, 10 und 11.
- UP 14: Treffpunktberechnung nach Abschnitt 4.2. Liefert die kartesischen und die ballistischen Koordinaten des Treffpunktes. Benützt UP 4, 5, 8 und 12.
- UP 15: Berechnung des Abstandes zweier Punkte, deren kartesische Koordinaten gegeben sind [zum Beispiel (4.26)]. Benützt UP 1.
- UP 16: Verwertung eines Fehlers für die Dichteverteilung (Abschnitt 5).
- UP 17: Nullsetzen der Dichteverteilung eines Fehlers.
- UP 18: Trennung der drei in einem Wort zusammengefassten Koordinaten.

Mit UP 18 hat es folgende Bewandnis: Da ein Flug bis zu 200 Bilder haben kann, wurden zwecks Einsparung an Speicherzellen alle drei Koordinaten (ballistische oder Kugelkoordinaten) eines Punktes in einem 14-stelligen Wert zusammengefasst und in einer einzigen Zelle gespeichert. Deshalb brauchten für die Eingangswerte und die Ausgangswerte nur je 200 Zellen reserviert zu werden.

UP 2 und UP 3 ( $\sin x$  und  $\arctg x$ ) verwenden Polynomapproximationen der betreffenden Funktionen in beschränkten Intervallen (siehe zum Beispiel [4]).

## 6.2 Hauptprogramme

HP 1: Berechnung des Normfluges und Drucken von dessen Kenngrößen sowie Berechnung und Drucken der Eingangsfehler. Verlangt am Anfang die Eingabe (Tastatur) von Bildintervall  $\Delta t$ , Anfangsnummer  $j_\alpha$  und Endnummer  $j_\mu$  der bei der Glättung zu berücksichtigenden Bildfolge.

- HP 2: Berechnung von Treff-, Spreng- und Gegnerpunkt, Drucken der Kgt.- und Schussfehler. Dabei wird der zuletzt mit HP 1 berechnete Normflug verwendet. Verlangt die Eingabe des Ladeverzugs  $k$ .
- HP 3: Drucken der Summenverteilung von Eingangsfehler, theoretischem und wirklichem Schussfehler. Die Dichteverteilung dieser Fehler wird bereits in HP 1 bzw. 2 berechnet.
- HP 4: Zur Kontrolle von UP 14. Verlangt Eingabe von  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $e$ ,  $\kappa$ ,  $v_h$ ,  $v_v$  und  $k$  sowie eines Näherungswertes für  $\tau$ . Liefert  $e_{kT}$ ,  $h_T$ ,  $\tau_T$ ,  $\delta$ ,  $\bar{\alpha}_T$ ,  $\varepsilon_T$  für den Fall  $k = 0$  sowie  $\tau_T$  für das eingegebene  $k$ .
- HP 5: Zur Kontrolle von UP 13. Verlangt Eingabe von  $\tau_S$  und  $\varepsilon_S$  sowie Näherungswerte für  $e_{kS}$  und  $h_S$ . Liefert  $e_S$ ,  $\lambda_S$ ,  $e_{kS}$  und  $h_S$ .

Zu HP 4 und HP 5 ist zu bemerken, dass vorausberechnete Ergebnisse (Einzelpunkte) schon längst in den Kontrolltabellen existieren, die zur statischen Prüfung der Kgt. verwendet werden. Anhand dieser Tabellen kann deshalb die Treff- und Sprengpunktberechnung nachgeprüft werden.

Für das ganze Rechenprogramm sind total etwa 600 Befehlszellen erforderlich, was über 1000 Befehlen entspricht. Insgesamt braucht es für Befehle, Konstante, Parameter und Variable im Maximalfall 1400 Zellen. Ferner wurden alle neun Indexregister verwendet.

## 7. Schlussbemerkungen

Die vorstehenden Darlegungen zeigen in groben Zügen, wie die maschinelle Auswerterechnung bei der Flugabwehr durchgeführt werden kann. Leider verbietet es der vorhandene Platz, auf weitere Einzelheiten einzugehen.

Man findet auch in diesem Falle wiederum die Tatsache bestätigt, dass programmgesteuerte elektronische Rechenmaschinen wesentlich andere Rechenmethoden verlangen, als sie sonst üblich sind. Hier betrifft es vor allem:

Verwendung von Approximationen statt Tabellen;

iterative statt graphische Auflösung von nichtlinearen Gleichungen.

Ist das Rechenprogramm einmal gemacht (wie es hier zum Beispiel der Fall ist), so lassen sich damit beliebig viele Flüge auswerten. Die reine Rechenzeit wird gegenüber den bisherigen Methoden schätzungsweise etwa um den Faktor 50 erniedrigt (Stunden statt Wochen). Dadurch wird es möglich, in kürzerer Zeit wesentlich mehr statistisches Material zu gewinnen als bisher.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. SCHLEMMERMEIER, *Aufnahme und Auswertung bei der Fliegerabwehr*, Z. Ver. dtsh. Ing. 86 (1/2), 7–14 (1942).
- [2] A. P. SPEISER, *Koordinatensysteme in Feuerleitgeräten*, Z. angew. Math. Phys. 7 (1), 1–16 (1956).
- [3] F. A. WILLERS, *Methoden der praktischen Analysis*, 2. Aufl. (W. de Gruyter, Berlin 1950).



- [4] C. HASTINGS, *Approximations for Digital Computers* (Princeton University Press 1955).
- [5] A. OSTROWSKI, *Über Verfahren von Steffensen und Householder zur Konvergenzverbesserung von Iterationen*, Z. angew. Math. Phys. 7 (3), 218–229 (1956).

### Résumé

L'auteur montre dans les grandes lignes comment on procède à l'analyse des épreuves optiques d'appareils de commande de tir (appareils directeurs) pour la défense terrestre contre avions sur une calculatrice digitale électronique dirigée par programme. Il donne entre autre des méthodes de calcul pour

l'aplanissement des valeurs d'entrée,  
la représentation de la ballistique,  
le calcul du point d'impact, etc.

Le programme de calcul pour l'analyse complète comprend dans le cas présent 5 programmes principaux et 18 sous-programmes.

(Eingegangen: 19. November 1957.)

---

### Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

---

## A Method for Studying the Diffusion of Silver Iodide Particles in the Atmosphere by Means of $I^{131}$ <sup>1)</sup>

By RAFEL CARRERAS-PATXOT and RAYMUND SÄNGER, Zürich<sup>2)</sup>

### 1. Introduction

Although the use of silver iodide vapours to stimulate either rain or various other meteorological phenomena is nowadays common practice, it runs up against an unknown factor that is crucial: where does the vapour go after leaving the generator?

A variety of authors have studied the question by employing a freezing chamber, which allows the icing nuclei to be counted on the basis of the ice crystals they have formed about themselves. In this way it has been possible to make clear that the number of nuclei is considerably increased in the neighbourhood of the generator and even over large distances in the direction of the wind.

In the work presented here we have attempted to check the presence in the air of silver iodide, without relying upon those of its properties which might involve ambiguity. To this end we have tried marking the silver iodide with radioactive iodine 131. The originality of the method lies, we believe, in the use of relatively

<sup>1)</sup> Paper presented at the 3rd International Symposium on Atmospheric Condensation Nuclei, Cambridge, England, July 16–18, 1958.

<sup>2)</sup> Swiss Federal Institute of Technology, Department of Physics.

minute levels of activity, so that no danger attaches to working with the product prior to its dispersal in the atmosphere.

On the other hand this also means that we have to perfect measurement and detection of extremely slight activity, of the order of  $10^{-17}$  curies per litre of air, which corresponds to one disintegration per litre per month!

Let us follow, then, the particles from their production to the measurement of their activity:

## 2. Production of the Vapour

The process is well-known: the silver iodide marked with iodine 131, which we get from Amersham, with an addition of sodium iodide is dissolved in acetone and the mixture is burnt in a propane flame. Very fine dispersion is achieved in this way, the particles having a diameter of several hundredths of a micron (Figure 1).

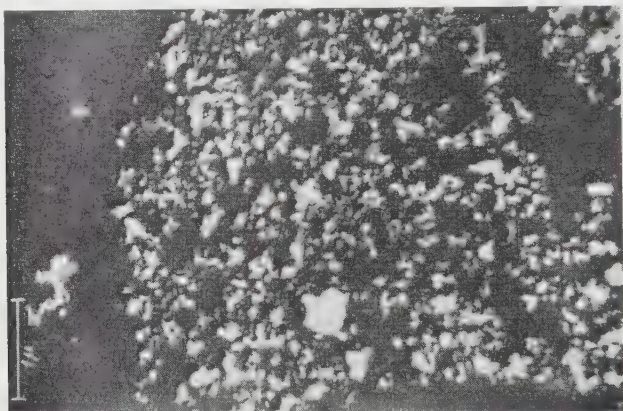


Figure 1

Particles of silver iodide seen in the electronic microscope.

## 3. Taking the Sample

The extreme fineness of the particles makes very exacting demands on the filter which is to retain them. Above all it must offer sufficient flow for the slight differences of pressure that are available: the filter will, in fact, be mounted on an aircraft and it is only the dynamic pressure of the air which comes into play in bringing the air into the filter. The choice was decided in favour of a paper similar to that used in Swiss Army gas masks.

This filter is placed in two airtight collecting tubes designed to be fitted under each wing of the aircraft (Figures 2 and 3). The volume of air filtered is measured by integrating the flow, which is recorded from the resistance in a platinum wire raised to red heat and cooled by the current of filtered air. Calibration is carried out in a wind tunnel.

From the way in which the filter is folded and then positioned in the collecting tubes, it is possible to achieve a filter surface of nearly  $2 \text{ m}^2$  in each collector with an aerodynamic section of only  $2.5 \text{ cm}^2$ .



Figure 2  
Collecting tube.



Figure 3  
The aircraft equipped with a filter.

#### 4. Concentration of the Sample

After about  $10 \text{ m}^3$  of air have been filtered, the traces of silver iodide must be extracted from the paper, and for this we first tried a biological method.

It is an established fact that if iodine is given to mammals, a considerable proportion will become concentrated in the thyroid gland, which is generally tiny. We chose to use rabbits, even though these animals are known to be fussy about their food. Despite this psychological difficulty we managed to get them used to a

diet consisting of 50% filter paper and 50% cabbage leaves. Unfortunately, while the concentration in the thyroid was most satisfactory with regard to the sodium iodide, the yield of silver iodide was extremely small, as a result probably of its insolubility and its annoying tendency to form complexes of indeterminate structure.

It was necessary, therefore, to revert to a very much longer chemical process. In outline it is as follows: the filter paper, together with 0.2 mg of nonradioactive silver iodide, is calcinated slowly in the presence of sodium carbonate. The iodine is converted into sodium iodide which is then dissolved in water. After adjustment of the pH value around 7, silver nitrate is added to the solution, which gives a precipitate of silver iodide containing the activity of the iodine  $^{131}$  from the filter.

This precipitate is filtered, and the dry filter, with a surface area of about 10 cm<sup>2</sup>, is placed in a watch glass, into which is poured 2 cm<sup>3</sup> of acetone and 0.15 mg of sodium iodide. Thus we have the activity of the iodine from the filtered air concentrated in these 2 cm<sup>3</sup> of solution.

### 5. Measurement of the Activity

The radioactivity of this solution is so slight, however, that even with the best Geiger-Müller counters or scintillation counters one would not obtain more than several dozen impulses a day, whereas the background is around a dozen impulses a minute. The method which has been used is based on the capacity of certain nuclear plates, such as Ilford G5, to register electron traces of some hundreds keV; the beta electrons of iodine  $^{131}$  are of this order of energy.

The activity of the residue must, then, be concentrated into the smallest possible surface, in order to achieve a maximum density of traces, which will contrast most clearly with the inevitable background of the plate.

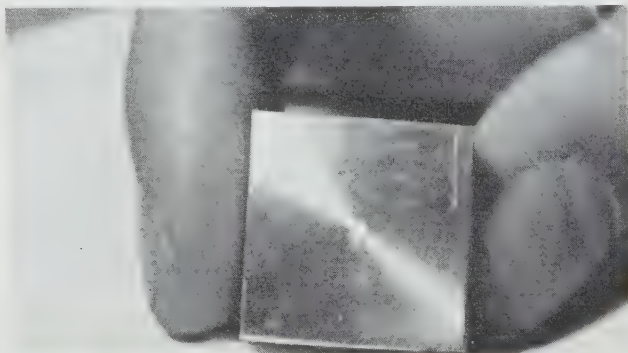


Figure 4

The measuring block with the active source in the middle.

For this purpose the active solution is evaporated in a kind of crater hollowed out of an anticorodal block. The deposit is carefully detached from the walls and compressed at the bottom to form a small disc 1 mm in diameter and 1/2 mm in height (Figure 4). This disc is then placed on a nuclear plate during two radioactive periods; for iodine  $^{131}$  this is fifteen days. The plate is then developed.

If we reckon that five electrons out of six will not reach the emulsion, and if we have filtered a volume of  $10\text{ m}^3$  of air, then an activity of  $10^{-17}\text{ c}$  per litre of air will give about a thousand traces per square millimetre (Figure 5).

However, if all possible precautions are taken (the newest plates are used, contamination is suppressed, etc.) the number of traces from sources other than the

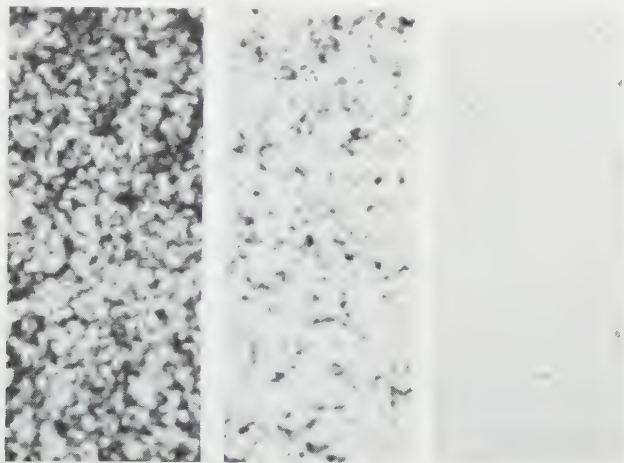


Figure 5

Traces corresponding to total activity of 20, 1,  $1/50\text{ pc}$ .

iodine 131, and which might be confused with those we are looking for, amounts to several dozen per square millimetre. This number is relatively small because, if we make a visual count (and this has proved the only easy method), then parasite traces due to alpha rays, such as those caused by high energy particles coming from cosmic rays, can be clearly recognized and disregarded.

### Conclusions

This method has only recently been perfected and we have not yet been able to conduct many experiments. The first results obtained with a very weak emission of  $0.1\text{ }\mu\text{c/s}$  have enabled us to detect silver iodide at a distance of several hundred metres from the generator. With an emission one hundred times stronger, of the type that is normally planned, it should be possible to detect silver iodide up to a dozen kilometres away, by exploiting the maximum sensitivity of our method; this would be its furthest range.

By reducing the dimensions of the active surface, sensitivity could be increased by a factor of 100 without great difficulty; but then the iodine which arises from the nuclear explosions in the world, and which is present most irregularly, will distort the results.

Although our point of departure is quite different from that of authors who use a freezing chamber for the same research, we finally encounter the same difficulty: is what we are detecting the silver iodide which we produced on the ground, or is it something else?



If one is content to utilize such small amounts of activity that there is no practical problem of protection from radiation, then radioactive marking of silver iodide to study its diffusion is a process which, with all its advantages, snags and natural limitations, can be added to existing methods, even though it has not produced the revolutionary results that we are perhaps overinclined to expect in our present fascination with the wonders achieved by radioactive isotopes in other fields.

### Acknowledgment

We would express our deep gratitude for the valuable assistance lent to us by Prof. Dr. J. ACKERET and Prof. Dr. O. GÜBELI, Swiss Federal Institute of Technology, and Prof. HEDY FRITZ-NIGGLI and PD. Dr. G. JOYET, University of Zürich.

### REFERENCES

- [1] PAUL B. MACCREADY, THEODORE B. SMITH, R. J. DIAMOND, and THOMAS LOCKHART, *Investigations of Silver Iodide Decay Transport and Natural Nuclei*, ACWC, Dec. 31, 1955.
- [2] MORTON L. BARAD and DUANE A. HAUGEN, *An Evaluation of Sutton's Hypothesis for Diffusion from a Continuous Point Source*, Bull. Amer. met. Soc. 38, 603 (1957).
- [3] GLENN R. HILST, *Meteorological Parameters Related to the Diffusion of Stack Gases in Stable Atmospheres*, Bull. Amer. met. Soc. 38, 603 (1957).

### Zusammenfassung

Es wird eine neue Methode entwickelt zur Erfassung der Diffusion des zur künstlichen Wetterbeeinflussung verwendeten AgI-Rauches in der freien Atmosphäre. Der durch Verwendung von  $I^{131}$  radioaktiv gemachte AgI-Rauch wird in speziellen Papierfiltern, die am Messflugzeug befestigt sind, aufgefangen; mittels eines chemischen Prozesses wird das AgI aus den Filtern gelöst und sodann auf eine Kernphotoplatte gebracht, wo die Zahl der  $\beta$ -Spuren ein Mass für die Anzahl der in der Luft gefundenen AgI-Partikel darstellt.

(Received: May 12, 1958.)

## The Solution of Cubic Equations by Iteration

By WILLIAM ANDREW COPPEL, London, England<sup>1)</sup>

1. A very simple iterative method of factorizing polynomials has been suggested by LIN [1]<sup>2)</sup>. Applied to the determination of a linear factor, that is, to the determination of a root of the polynomial equation  $p(x) = 0$  it takes the form of calculating a sequence of successive approximations  $(x_n)$  according to the rule

$$x_{n+1} = \frac{p(0) x_n}{\{p(0) - p(x_n)\}}.$$

<sup>1)</sup> Department of Mathematics, Birkbeck College.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 383.



Since  $\{p(0) - p(0)\}/x$  is a polynomial of degree one less than  $p(x)$  itself the number of operations needed to produce a new approximation is reduced to a minimum. On account of its simplicity the method can be less time-consuming than other methods, such as NEWTON's, with a nominally higher order of convergence. The disadvantage of the method lies in its uncertain convergence. The only criteria which have been proposed (see, e. g. [2]) establish convergence under certain conditions provided the starting-point lies in a sufficiently small neighbourhood of the root. But as the root has yet to be found the interval in which the starting-point may be taken is initially unknown. A criterion which does not suffer from this defect is obtained in the following for the simplest case of a real cubic equation. It turns out that convergence is closely connected with the position of the real parts of the roots, and in the type of problem for which the method was originally proposed this is known in advance.

2. Let

$$p(x) \equiv x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

be the given cubic equation. If we put

$$f(x) = -\frac{c}{(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{b}{4})}$$

then the successive approximations to a root of  $p(x)$  are determined by the recurrence relation  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

The function  $f(x)$  is defined for all real values of  $x$  if and only if  $a^2 < 4b$ . We will suppose this condition satisfied. If  $c = 0$  then  $f(x) \equiv 0$  and the iteration process converges immediately to the root  $x = 0$  of  $p(x)$ . We may therefore suppose  $c \neq 0$ . We can actually assume  $c < 0$ . Otherwise, if  $c > 0$ , we have only to take  $-x$  as the unknown in order to obtain an equation of the same form with negative constant term.

Under these assumptions  $f(x)$  is a positive, continuous function which increases from zero at  $x = -\infty$  to a maximum value at  $x = -a/2$ , and then decreases to zero again at  $x = +\infty$ . We assume finally that  $f(x) < x$  at  $x = -a/2$ . That is, we assume  $p(-a/2) > 0$  or, in terms of the coefficients,

$$c - \frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} a^3 > 0.$$

This last condition ensures that all real roots of the equation  $f(x) = x$ , which is equivalent to the given cubic equation, fall inside the interval  $(-\infty, -a/2)$  in which  $f(x)$  is an increasing function. We can therefore apply to this interval the following elementary result (cf. [3]):

*Let  $f(x)$  be a continuous, increasing function in an interval  $\alpha \leq x \leq \beta$  in which  $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ . Starting from any point  $x_0$  in  $(\alpha, \beta)$  let  $(x_n)$  be the sequence defined recurrently by setting  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Then the equation  $f(x) = x$  has a root situated on the same side of  $x_0$  as  $x_1$  and the sequence  $(x_n)$  converges monotonically to the nearest such root.*

We deduce that every iteration sequence whose starting-point lies in the interval  $(-\infty, -a/2)$  converges monotonically to a root of  $p(x)$ . If  $p(x)$  has three real roots the sequence converges to the greatest or least root according as the starting value  $x_0$  is greater or less than the middle root. The restriction on the starting point is of no consequence, since  $x_1 = f(x_0)$  lies in the interval  $(0, -a/2)$  for arbitrary  $x_0$ .

It is remarkable that the three conditions which we have had to impose on the coefficients of  $p(x)$ , namely

$$b > \frac{1}{4} a^2, \quad c - \frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} a^3 > 0, \quad \text{and} \quad c < 0, \quad (1)$$

are equivalent to the single condition that *all roots of  $p(x)$  have real part less than  $-a/2$* . In fact all roots of  $p(x)$  have negative real part if and only if  $b > 0$ ,  $c > 0$ , and  $a b > c$  [4]. For the cubic

$$p\left(x - \frac{1}{2} a\right) \equiv x^3 - \frac{1}{2} a x^2 + \left(b - \frac{1}{4} a^2\right) x + c - \frac{1}{2} a b + \frac{1}{8} a^3$$

these conditions are exactly the inequalities (1). Since  $-a$  is the sum of the real parts of all three roots an equivalent formulation is that *the real part of any root is less than the sum of the real parts of the remaining roots*. If we denote the three real parts by  $r_1, r_2, r_3$  ( $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ ) it follows that

$$r_1 > 0, \quad r_2 > -\frac{1}{4} a, \quad r_3 < -\frac{1}{2} a.$$

To make our iteration process completely automatic we can prescribe the initial point  $x_0$ . For  $x_0 = -a/2$  we will always arrive at the greatest real root of  $p(x)$ , and for  $0 \leq x_0 \leq -a/4$  at the least real root. Since the roots may lie anywhere between 0 and  $-a/2$  the best universal starting-point is  $x_0 = -a/4$ .

The inequalities (1) can be somewhat simplified. In fact since the last two inequalities imply  $a(b - a^2/4) < 0$  the first inequality can be replaced by  $a < 0$ . Thus (1) is equivalent to

$$a < 0, \quad p\left(-\frac{1}{2} a\right) > 0, \quad \text{and} \quad p(0) < 0. \quad (2)$$

If  $p(x)$  has only one real root the first inequality actually follows from the other two.

3. Consider now an *arbitrary* cubic  $\bar{p}(x)$  and let

$$p(x) \equiv \bar{p}(x - d) = x^3 + (a - 3d)x^2 + \dots$$

The roots of  $p(x)$  are obtained by adding  $d$  to the roots of  $\bar{p}(x)$ . Therefore  $p(x)$  will be a cubic of the type just considered if all roots of  $\bar{p}(x)$  have real part less than  $(d - a)/2$ . Thus the iteration process can always be applied with certainty when an upper bound for the real parts of the roots is known.

If nothing is known about the position of the roots we can try to choose  $d$  so that  $\bar{p}(x)$  satisfies the conditions (2). That is, we require

$$d > \frac{1}{3} a, \quad \bar{p}\left(\frac{d - a}{2}\right) > 0, \quad \text{and} \quad \bar{p}(-d) < 0.$$

The first condition can be omitted if it is known that not all roots of  $\bar{p}(x)$  are real. Evidently there exists a value  $d_0$  such that these requirements are met by all  $d \geq d_0$ . Hence *the iteration process can be applied with certain success to an arbitrary cubic equation*. It is not difficult to show that we can always take

$$d_0 = a + 2 + 2 \max(|a|, |b|, |c|),$$

but when  $a, b, c$  have numerical values it is usually possible, and preferable, to find much smaller values for  $d$ .

It is perhaps worth remarking that with given numerical values for the coefficients of  $p(x)$  the coefficients of  $\bar{p}(x)$  are in general most simply obtained by using HORNER's well-known scheme for 'synthetic division'.

There is one frequently occurring type of problem for which the present method seems especially appropriate. In the solution of linear differential equations with constant coefficients it is often known *a priori*, or is determined by a preliminary investigation, that all roots of the characteristic equation have negative real parts. Thus, in the case of a third order system, we can take  $d = a$  in the analysis above. With this value of  $d$  we have

$$p(x) = p(x - a) = x^3 - 2ax^2 + (a^2 + b)x + c - ab.$$

The coefficients here are particularly simple and the formation of  $p(x)$  determines of itself if the stability conditions are satisfied:  $p(x)$  must have positive coefficients and  $\bar{p}(x)$  must have negative constant coefficient.

The equations originally encountered by LIN were of just this type and arose in a study of the effects of gusts on aeroplanes. LIN observed that in some cases where his method failed convergence could be brought about by a suitable change of variable  $x = x' - d$ . The results which have been established here explain why this is so and give a practical prescription for the choice of  $d$ : take  $d = a$ .

#### REFERENCES

- [1] S. N. LIN, *A Method of Successive Approximations of Evaluating the Real and Complex Roots of Cubic and Higher Order Equations*, J. Math. Phys. 20, 231–241 (1941).
- [2] A. C. AITKEN, *On the Factorization of Polynomials by Iterative Methods*, Proc. Roy. Soc. Edinb. [A] 63, 174–191 (1951).
- [3] T. CHAUNDY, *The Differential Calculus* (Oxford, 1935), p. 192.
- [4] E. J. ROUTH, *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies*, 5th ed. (London, 1892), p. 198.

#### Riassunto

L'autore tratta la convergenza del metodo iterativo di LIN nel caso di un'equazione cubica. Stabilisce una relazione fra la convergenza e la grandezza delle parti reali delle radici, e dimostra che una radice può essere sempre trovata in questo modo.

(Received: March 18, 1958.)

### Low Prandtl-Number Free Convection

By JOHN L. GREGG and EPHRAIM M. SPARROW, Cleveland, Ohio, USA.<sup>1)</sup>

#### Introduction

PRANDTL's boundary layer concept was first applied to the analysis of free convection by SCHMIDT and BECKMANN [1]<sup>2)</sup> in 1930. They considered the problem of an *isothermal* plate situated in a large body of quiescent fluid whose

<sup>1)</sup> NACA, Lewis Flight Propulsion Laboratory.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to Reference, pages 387.

temperature is different from that of the plate. The mathematical model and coordinate system are shown in the sketch below.

These first investigators focused their attention on air and obtained a series solution of the laminar boundary layer (ordinary) differential equations<sup>3)</sup> for a Prandtl number of 0.733. Later, numerical solutions of these same boundary layer equations were carried out for Prandtl numbers between 0.72 and 1000 by SCHUH [2] and OSTRACH [3].

The increasing interest in liquid metals as heat transfer media has directed attention toward an altogether different range of Prandtl numbers. Technically important liquid metals have Prandtl numbers lying between 0.003 and 0.03. For this range, isolated numerical solutions of the laminar boundary layer equations for

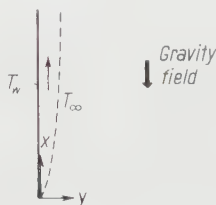


Figure 1  
Coordinate system.

free convection on an isothermal vertical plate have been contributed by OSTRACH [3] for  $Pr = 0.01$  and SUGAWARA and MICHIOYOSHI [4] for  $Pr = 0.03$ . The aim of the present note is to summarize new numerical solutions which extend over the entire liquid metal range. Comparisons will be made with the previous work noted above as well as with an approximate Kármán-Pohlhausen formulation due to ECKERT [5] and SQUIRE [6]. We will deal here with the most important quantity of technical interest, namely, the heat transfer. Details of the temperature distributions must be omitted because of space limitations.

### Brief Review of Theory

Using the mathematical ideas of boundary layer theory, SCHMIDT and BECKMANN introduced a new independent variable  $\eta$  by the transformation

$$\eta \equiv C \frac{y}{x^{1/4}}, \quad C \equiv \left[ \frac{g \beta (T_w - T_\infty)}{4 \nu^2} \right]^{1/4}, \quad (1)$$

where  $g$  is the acceleration of gravity,  $\beta$  the thermal expansion coefficient, and  $\nu$  the kinematic viscosity. Then, the stream function  $\psi$  and the temperature  $T$  were related in the following way to new dependent variables  $F$  and  $\theta$  which are functions only of  $\eta$ .

$$\psi = 4 \nu C x^{3/4} F(\eta), \quad T = \theta(\eta) [T_w - T_\infty] + T_\infty. \quad (2)$$

In terms of the new variables, the equations expressing conservation of mass, momen-

<sup>3)</sup> See equations (3) and (4).

tum, and energy for laminar free convection on an isothermal vertical plate become

$$F''' + 3 F F'' - 2(F')^2 + \theta = 0 \quad (3)$$

and

$$\theta'' + 3(Pr) F \theta' = 0, \quad (4)$$

where the primes represent differentiation with respect to  $\eta$ , and  $Pr$  denotes the Prandtl number.

The physical boundary conditions require that both velocity components vanish at the plate surface ( $y = 0$ ), and that the vertical velocity component vanish far from the plate as  $y \rightarrow \infty$ . It is also required that the temperature  $T$  take on the value  $T_w$  at the wall and  $T_\infty$  in the ambient fluid. The expression of these conditions in terms of the transformed variables is

$$\left. \begin{array}{l} F = 0 \\ F' = 0 \\ \theta = 1 \end{array} \right\} \eta = 0, \quad \left. \begin{array}{l} F' = 0 \\ \theta = 0 \end{array} \right\} \eta \rightarrow \infty. \quad (5)$$

The conditions for  $\eta \rightarrow \infty$  are always troublesome in any numerical treatment and can only be satisfied approximately. Inasmuch as the new solutions were obtained with a relatively fast electronic computer, it was possible to satisfy the boundary conditions for large  $\eta$  more closely than in previous work which was done on desk machines or on slower computers. This circumstance, coupled with the fact that smaller steps were taken in the numerical process, suggests that the present results may be more accurate than those obtained in the past.

Numerical solutions of equations (3) and (4) subject to conditions (5) have been carried out for Prandtl numbers of 0.03, 0.02, 0.008, and 0.003, and the results will be used in the heat transfer computation below.

### Heat Transfer Results

The heat transfer results are reported in terms of the local heat-transfer coefficient,  $h$ , and local Nusselt number,  $Nu_x$ . Also involved are the Grashof number,  $Gr_x$ , and the Prandtl number. These several quantities are defined as follows

$$h = \frac{q}{T_w - T_\infty}, \quad Nu_x \equiv \frac{h x}{k}, \quad Gr_x \equiv \frac{g \beta (T_w - T_\infty) x^3}{\nu^2}, \quad Pr \equiv \frac{c_p \mu}{k},$$

where  $q$  is the local heat flux. In terms of the variables of the analysis, a dimensionless representation of the local heat-transfer results may be written as

$$\frac{Nu_x}{(Gr_x Pr^2)^{1/4}} = \frac{[-\theta'(0)]}{(2 Pr)^{1/2}}. \quad (6)$$

The quantity  $\theta'(0)$  is an abbreviation for  $[d\theta/d\eta]_{\eta=0}$  and is found from the solutions of equations (3) and (4).

A tabulation of heat transfer results based on existing numerical solutions of equations (3) and (4) for the low Prandtl number range is given in the table. It is immediately seen that the quantity  $Nu_x/(Gr_x Pr^2)^{1/4}$  is relatively independent of the Prandtl number, and this is the reason for its selection as a correlating group.

It is noteworthy that dimensional analysis predicts such a finding provided that viscous forces are omitted from the momentum equation.

$Pr$	$Nu_x/(Gr_x Pr^2)^{1/4}$	Investigation
0.03	0.5497	Present analysis
0.03	0.555	See [4]
0.02	0.5582	Present analysis
0.01	0.574	See [3]
0.008	0.5729	Present analysis
0.003	0.5827	Present analysis

To facilitate comparison with other solutions, the results of the present study have been plotted on Figure 1. Also shown are OSTRACH's point at  $Pr = 0.01$  and SUGAWARA-MICHIYOSHI's point at  $Pr = 0.03$ . These latter results fall slightly above our results (within 1%); such deviations are to be expected from their earlier, less accurate solutions. The heat transfer result from the Kármán-Pohlhausen formulation as carried out by ECKERT and SQUIRE is

$$\frac{Nu_x}{(Gr_x Pr^2)^{1/4}} = \frac{0.508}{(Pr + 0.952)^{1/4}} \tag{7}$$

Equation (7) is also plotted on Figure 1 and lies from 7% to 12% below the present numerical solution, the greater deviations occurring at the lower Prandtl numbers.

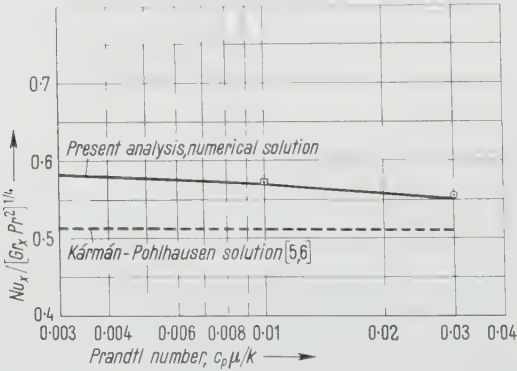


Figure 2

Local heat transfer results for low Prandtl number fluids ( $h_{av} = 4 h_{loc}/3$ ).

□ [3], numerical solution; ○ [4], numerical solution.

This agreement is remarkably good when one considers the relatively broad assumptions employed in carrying out the Kármán-Pohlhausen procedure for this problem.



For engineering purposes, a simple representation of our results for the liquid metal range is

$$Nu_x = 0.565 (Gr_x Pr^2)^{1/4}. \quad (8)$$

This formula represents the numerical solutions to an accuracy of better than 3%.

For an isothermal plate of length  $L$ , it is easy to show that the average heat-transfer coefficient  $h_{av}$  is equal to 4/3 of the local coefficient at  $x = L$ .

#### REFERENCES

- [1] E. SCHMIDT and W. BECKMANN, Tech. Mech. Thermo. 1, 391 (1930).
- [2] H. SCHUH, Repts. and Trans. 1007, AVA Monographs, British M. A. P. (1948).
- [3] S. OSTRACH, NACA Rep. 1111 (1953).
- [4] S. SUGAWARA and I. MICHIMOTO, Proc. Third Japan National Congress for Applied Mechanics, 1953.
- [5] E. R. G. ECKERT, *Introduction to the Transfer of Heat and Mass* (McGraw-Hill Book Co., 1950), p. 158.
- [6] L. HOWARTH, ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics – High Speed Flow*, vol. 2 (Clarendon Press, Oxford 1952), p. 806.

#### Zusammenfassung

Eine Untersuchung der freien Konvektion wurde an einer senkrechten isothermen Platte bei Prandtl'scher Zahl im Bereiche von 0,003–0,03 (das heisst flüssige Metalle) durchgeführt. Dabei wurden zahlenmässige Lösungen der laminaren Grenschichtgleichungen erhalten. Für die örtlichen Wärmeübergänge bei diesem Bereiche der Prandtl'schen Zahl lassen sich die Resultate als  $Nu_x = 0,565 (Gr_x Pr^2)^{1/4}$  darstellen.

(Received: March 14, 1958.)

### A Note on Magneto-Hydrodynamics of a Finite Rotating Disk

By SHYAMAL KUMAR MAJUMDAR, Kharagpur, India<sup>1)</sup>

In a recent paper STEWARTSON<sup>2)</sup> has considered the problem of steady rotation of a finite disk in an electrically conducting liquid in the presence of a magnetic field. In the solution of the problem, the radial component  $H_r$  of the magnetic field has been neglected in comparison with the 'strong' external field  $H$  imposed along the axis of rotation. In this note it is shown from considerations of geometric dimensions that for a rotationally symmetric steady hydromagnetic field the radial component of the magnetic field can always be neglected in comparison with the field  $H_z$  along the axis of rotation if the depth of liquid column  $d$  is small compared with the radius  $a$  of the disk. It is also shown that in LEHNERT'S<sup>3)</sup> experiments this condition is satisfied.

<sup>1)</sup> Indian Institute of Technology.

<sup>2)</sup> K. STEWARTSON, Quart. Mech. appl. Math. 10 (1957).

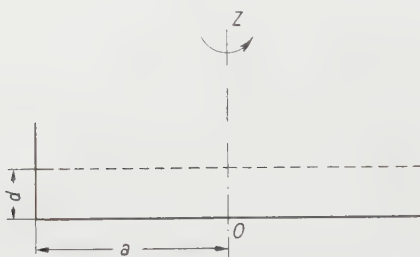
<sup>3)</sup> B. LEHNERT, Proc. Roy. Soc. Lond. [A] 233 (1955).

*Proof.* Since the disk is in steady rotation the relevant equations are

$$\text{curl } \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\text{curl } \mathbf{H} = 4 \pi \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\mathbf{j} = \sigma [\mathbf{E} + \mu (\mathbf{v} \times \mathbf{H})], \quad (3)$$



Trough containing liquid the base of which is rotating about the vertical axis ( $OZ$ ).  $a$  radius of the rotating disk;  $d$  depth of the liquid column.

where the vectors and the constants ( $\mu, \sigma$ ) have their usual meaning. From (2) and (3)

$$\text{curl } \mathbf{H} = 4 \pi \sigma [\mathbf{E} + \mu (\mathbf{v} \times \mathbf{H})]. \quad (4)$$

In a system of cylindrical polar co-ordinates ( $r, \theta, z$ ) on account of rotational symmetry all dependent variables are independent of  $\theta$ . Hence the radial component of (1) and the azimuthal component of (4) reduce to

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma E_\theta. \quad (6)$$

From (5) and (6) one obtains

$$\frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial z}. \quad (7)$$

Since  $a$  and  $d$  are representative lengths in the radial and axial directions respectively, equation (7) suggests the following relation between the orders of magnitude

$$\frac{H_r}{d^2} = \frac{H_z}{a d} \quad (8)$$

or

$$H_r = \frac{d}{a} H_z. \quad (8')$$

Thus if  $d/a \ll 1$ ,  $H_r$  is small compared to  $H_z$ .

In the experiment described by LEHNERT the mean diameter of the rotating copper rings is 7 cm and the depth of mercury is 6 mm; consequently the neglect of radial magnetic field is justified.

I thank Prof. B. R. SETH for his kind interest in the work.

*Zusammenfassung*

Es wird gezeigt, dass in elektrisch leitender Flüssigkeit bei zylindrischer Symmetrie die Radialkomponente des Magnetfeldes klein ist im Vergleich zur Axialkomponente, sobald die axiale Ausdehnung des Gefäßes klein ist im Vergleich zu seinem Durchmesser.

(Received: May 16, 1958.)

## Zur Frage der Charakterisierung stationärer Bewegungen in der Hydrodynamik

VON HENNING MÜLLER, Mainz, Deutschland<sup>1)</sup>

Nach einem Satz von HELMHOLTZ und KORTEWEG [1]<sup>2)</sup> ist die unter Einwirkung von konstanten Kräften eindeutigen Potentials zustande kommende Bewegung einer reibenden Flüssigkeit durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass die Energiedissipation unter der Voraussetzung vernachlässigbarer Trägheitsglieder für jedes feste Gebiet im stationären Zustand kleiner ist als im Fall irgendeiner anderen Bewegung mit denselben Randwerten der Geschwindigkeit. Für diesen Satz wird eine Verallgemeinerung gegeben und eine Anwendung diskutiert.

Betrachtet werde die Strömung einer inkompressiblen, reibenden Flüssigkeit. Der Ausdruck für die Energiedissipation in der Zeiteinheit hat die Form

$$\int \Phi \, d\tau = \int r_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \, d\tau$$

(wobei – wie auch im folgenden – in üblicher Weise über die zweimal vorkommenden Indizes – hier  $i$  und  $k$  – zu summieren ist).  $r_{ik}$  bedeutet den Reibungstensor,  $v_k$  den Geschwindigkeitsvektor und  $x_i$  den Ortsvektor. Vergleicht man zwei Bewegungszustände  $v_k$  und  $v'_k$  – wobei  $v_k - v'_k$  am Rande des Integrationsbereiches verschwinden soll –, so kann man schreiben

$$\int \Phi(v'_k) \, d\tau - \int \Phi(v_k) \, d\tau = \int \Phi(v'_k - v_k) \, d\tau + \int \Omega \, d\tau \quad (1)$$

oder, da  $\Phi$  unabhängig von seinem Argument, wegen

$$r_{ik} = 2 \, \eta \, b_{ik}$$

( $b_{ik}$  bedeutet den symmetrischen Teil des Tensors der Verschiebungsgeschwindigkeit grad;  $\eta$  und  $\eta$  den Koeffizienten der inneren Reibung) stets positiv ist,

$$\int \Phi(v'_k) \, d\tau - \int \Phi(v_k) \, d\tau > \int \Omega \, d\tau. \quad (2)$$

Die Funktion  $\Omega$  ist jetzt folgendermassen zu ermitteln [2] (der Tensor  $r'_{ik}$  gehört zum Strömungsfeld  $v'_k$ ):

$$\int \Omega \, d\tau = \int \left( r'_{ik} \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} - r_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - (r'_{ik} - r_{ik}) \frac{\partial (v'_k - v_k)}{\partial x_i} \right) d\tau;$$

<sup>1)</sup> Institut für theoretische Physik der Universität Mainz.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 392.

wegen

$$r_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

ist

$$r_{ik} \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} = r'_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

und damit

$$\int \Omega \, d\tau = 2 \int r_{ik} \left( \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) d\tau.$$

Schliesslich folgt wegen des Verschwindens von  $v_k - v'_k$  am Rande des Integrationsbereiches durch partielle Integration

$$\int \Omega \, d\tau = 2 \int (v_k - v'_k) \frac{\partial r_{ik}}{\partial x_i} d\tau.$$

Wegen

$$\frac{\partial r_{ik}}{\partial x_i} = \eta \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2} \right)$$

und wegen der Voraussetzung der Inkompressibilität ist damit

$$\int \Omega \, d\tau = 2 \eta \int (v_k - v'_k) \Delta v_k \, d\tau. \quad (3)$$

Der Differentialausdruck  $\Delta v_k$  kann nun aus der Bewegungsgleichung entnommen werden; wird einschränkend vorausgesetzt, dass  $v_k$  einen stationären Strömungszustand kennzeichnet, so lautet sie

$$\varrho v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \eta \Delta v_k + \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0, \quad (4)$$

wobei  $\varphi$  natürlich das Potential der äusseren Kräfte,  $\varrho$  die Dichte und  $p$  den Druck bedeuten. (3) in Verbindung mit (4) ergibt für  $\Omega$  jetzt folgendes:

$$\int \Omega \, d\tau = 2 \int (v_i - v'_i) \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \varrho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) d\tau.$$

Wegen der Übereinstimmung von  $v_k$  und  $v'_k$  am Rande  $\sigma$  des Integrationsbereiches ist

$$\int (v_k - v'_k) \frac{\partial p}{\partial x_k} d\tau = \int p (v_k - v'_k) d\sigma_k$$

und natürlich

$$\int (v_k - v'_k) \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} d\tau = 0,$$

also

$$\int \Omega \, d\tau = 2 \varrho \int (v_k - v'_k) v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} d\tau$$

oder

$$\int \Phi(v_k) \, d\tau = 2 \varrho \int (v_k - v'_k) v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} d\tau > \int \Phi(v_k) \, d\tau. \quad (5)$$

Diese Extremalaussage – im Fall  $\varrho = 0$  besagt sie, dass in irgendeinem festen

Gebiet unter den gegebenen Voraussetzungen der stationären Bewegung einer Flüssigkeit ein Kleinstwert der Energiedissipation entspricht – soll jetzt auf eine spezielle Bewegung angewandt werden, und zwar auf das an anderer Stelle untersuchte Verhalten eines in einfacher Weise schematisierten Makromolekülmodells in einem inhomogenen Strömungsfeld [3, 4]. Dass man mit Hilfe von (5) hierbei überhaupt zu einer einerseits richtigen und andererseits nichttrivialen Aussage kommen kann, ist keineswegs selbstverständlich. Während (5) sich auf eine reine Flüssigkeitsströmung bezieht, wobei von irgendwelchen, in gewissem Sinne mitschwimmenden Partikeln gar nicht die Rede ist, basieren die Überlegungen, die sich an (6) anschliessen werden, auf der unter dem Einfluss Stokesscher Reibungskräfte zustande kommenden Bewegung eines in eine inhomogen, aber ungestört strömende, reibende Flüssigkeit suspendierten, in geeigneter Weise schematisierten Körpers.

Ausgangspunkt ist die Differentialgleichung

$$\Theta \ddot{\vartheta} - 12 \pi \eta s a^2 (q \sin^2 \vartheta - \dot{\vartheta}) = 0. \quad (6)$$

Ihr liegt die Vorstellung der zweidimensionalen Bewegung einer Flüssigkeit (Zähigkeit  $\eta$ ), charakterisiert durch einen Geschwindigkeitsvektor  $v_{x,y} = (0, xq)$  (0 und  $xq$  bedeuten die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen  $x$  und  $y$ ,  $q$  ist eine Konstante) und eines Hantelmodells (Trägheitsmoment  $\Theta$ ) zugrunde, das aus zwei schweren Kugeln (Radien  $s$ ) besteht, deren Schwerpunkte den festen Abstand  $2a$  haben.  $\vartheta$  kennzeichnet die Lage der Hantel in bezug auf die  $y$ -Achse. Kräfte werden durch Stokessche Reibung übertragen. Die Differentialgleichung (6) beschreibt mithin die Bewegung des Hantelmodells, die dieses unter dem Einfluss des durch  $v_{x,y}$  gegebenen inhomogenen Strömungsfeldes ausführt. – Durch eine Transformation

$$\dot{\vartheta} = q \cdot z(\vartheta)$$

und mit der Abkürzung

$$\psi = \frac{\Theta q}{12 \pi \eta s a^2}$$

geht (6) über in

$$\psi z z' - \sin^2 \vartheta + z = 0. \quad (7)$$

Unter der Annahme einer periodischen Lösung

$$z(\vartheta) = z(\vartheta + \pi) = z_{\text{per}}(\vartheta)$$

– die Diskussion von (7) etwa mit Hilfe des Isoklinenverfahrens bestätigt die aus physikalischen Gründen naheliegende Vermutung, dass sich alle Bewegungen des Modells schliesslich einer periodischen Bewegung asymptotisch nähern – liefert die Integration von  $\vartheta$  bis  $\vartheta + \pi$  (tritt  $\vartheta$  als Integrationsvariable auf, so wird an seiner Stelle der Buchstabe  $\zeta$  geschrieben)

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta + \pi} z_{\text{per}}(\zeta) d\zeta = \frac{\pi}{2}.$$

Diese Aussage bezieht sich also, um es zu wiederholen, auf eine periodische Bewegung des Modells im ungestörten Strömungsfeld, auf eine Bewegung, der «im Grossen» der Zustand der Stationarität entspricht. – Nun der Ausdruck für die

Energiedissipation: Bedeutet  $u$  die vektorielle Strömungsgeschwindigkeit am Ort des Schwerpunktes einer der beiden Kugeln, die – starr miteinander verbunden – das Teilchenmodell darstellen, und bezogen auf diesen Schwerpunkt, so ist die in Reibungswärme umgesetzte Energie

$$E_r = 12 \pi \eta s \int u \, ds = 12 \pi \eta s \int u^2 \, dt$$

mit

$$u^2 = a^2 (q^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2 - 2 q \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta),$$

und zwar natürlich sowohl für den Fall stationärer als auch für den Fall nichtstationärer Bewegung. Es liegt jetzt nahe, die in (5) aufgetretene Energiedissipation mit der durch die Bewegung des Hantelkörpers in der Zeiteinheit verzehrten Energie zu identifizieren, das heisst zu schreiben

$$\Phi = 12 \pi \eta s a^2 (q^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2 - 2 q \dot{\vartheta} \sin^2 \vartheta).$$

Die Ungleichung (5) lautet damit, natürlich unter Verzicht auf die räumliche Integration, folgendermassen:

$$6 \pi \eta s [z^2 - z_{per}^2 - 2 \sin^2 \vartheta (z - z_{per})] - q (z - z_{per}) z_{per} z'_{per} > 0.$$

Division durch  $z - z_{per}$  und Integration nach  $\vartheta$  über einen Bereich  $\pi$  liefert

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta + \pi} (z + z_{per}) \, d\zeta \leq \pi,$$

wenn  $z - z_{per} \leq 0$ , und diese Ungleichung wird erfüllt, das heisst, sie stimmt für alle möglichen durch die Differentialgleichung (7) erfassten Bewegungen des betrachteten Modells im Rahmen der angegebenen Schematisierung.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I (Leipzig 1882), S. 223.
- [2] LAMB, *Hydrodynamics* (Cambridge 1953), S. 618.
- [3] W. KUHN, H. KUHN und P. BUCHNER, *Hydrodynamisches Verhalten von Makromolekülen in Lösung*, *Ergebn. exakt. Naturw.* 25 (1951).
- [4] H. MÜLLER, *Ann. Phys.* 19, 304 (1957).

## Summary

HELMHOLTZ and KORTEWEG propose that the steady motion of a viscous fluid under constant extraneous forces having a single-valued potential dissipates – for any given region and assuming that inertia terms in the dynamic equations can be neglected – less energy than any other motion with the same values of velocity at the boundary. – A generalization of this proposition is here given, and an application discussed. The application deals with the motion of a simple macromolecule model in an inhomogeneous field of flow – a motion caused only by the influence of STOKES' friction.

(Eingegangen: 14. März 1958.)



---

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques
 

---

**Handbuch der Kältetechnik.** Herausgegeben von R. PLANK. Achter Band: H. HAUSEN, *Erzeugung sehr tiefer Temperaturen. Gasverflüssigung und Zerlegung von Gasgemischen* (Springer-Verlag, Berlin 1957). 412 S., 307 Abb.; DM 72.–.

Das zwölfbändige Werk R. PLANKS, dessen achter Band jetzt erschienen ist, bedarf wohl keiner nähern Beschreibung, da es dem Physiker und Ingenieur, der sich mit der Kältetechnik befasst, wohlbekannt ist.

Die Erzeugung sehr tiefer Temperaturen, womit sich H. HAUSEN im vorliegenden Band eingehend auseinandersetzt, hat in der letzten Zeit auf allen Gebieten der Technik sehr an Bedeutung zugenommen.

Der erste Teil befasst sich mit der Theorie der Gasverflüssigung und der Zerlegung der Gasgemische. Die dazu nötigen thermodynamischen Beziehungen sind in knapper und übersichtlicher Form behandelt, gefolgt von Zustandsdiagrammen der tiefsiedenden Gase. In angenehmer Weise wird der theoretische Teil durch kurze Beschreibungen typischer Anwendungen der Technik aufgelockert. Ferner ist der Theorie der Wärmeübertragung im Gegenstrom, die für die Ausführung solcher Apparate und Anlagen von grundsätzlicher Bedeutung ist, ein separates Kapitel gewidmet.

Der zweite Teil befasst sich mit der Ausführung und dem Betrieb der Verflüssigungs- und Zerlegungsapparate sowie mit der Anwendung der gewonnenen Flüssigkeiten und Gase. Dabei streift der Verfasser die in der Technik bewährten Ausführungen von Kompressoren, Expansionsmaschinen, Wärmeaustauschern und Rektifikationskolonnen. Über den Betrieb solcher Anlagen liegen verschiedene praktische Hinweise, Betriebsergebnisse und Kostenrechnungen vor.

Abschliessend kann vorliegender Band, als ein wirklich brauchbares und umfassendes Buch der Tieftemperaturtechnik, empfohlen werden. Nicht vergessen sei, auf die zahlreichen Literaturangaben hinzuweisen.

H. GRÜTER

**Handbuch der Laplace-Transformation.** Von GUSTAV DOETSCH. Bd. 2: *Anwendungen der Laplace-Transformation*, 1. Abteilung, 436 S., 48 Fig.; Ganzleinen Fr./DM 56.15, broschiert 52.– (1955). Bd. 3: *Anwendungen der Laplace-Transformation*, 2. Abteilung, 300 S., 23 Fig.; Ganzleinen Fr./DM 40.–, broschiert 36.– (Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1956).

Unter dem Titel der beiden Bände könnte man zunächst ein Werk vermuten, welches die Lösung von technischen Problemen mit Hilfe der Laplace-Transformation behandelt, nachdem in Band 1 die theoretischen Grundlagen bearbeitet wurden. Indessen ist hier der Begriff der Anwendung in einem sehr viel weiteren Sinne zu verstehen; es werden nämlich Anwendungen der Laplace-Transformation auf Probleme aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik behandelt. So gibt das ausserordentlich reichhaltige – stellenweise fast zu reichhaltige Material nicht nur eine Übersicht über die Anwendungsmöglichkeiten der Laplace-Transformation, sondern ist auch eine Fundgrube für funktionentheoretische Beziehungen.

Der Inhalt ist wie folgt in 7 Teile gegliedert (Teil 1–3 in Band 2, Teil 4–7 in Band 3):

Der erste Teil behandelt die Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten der Laplace- sowie der Mellin-Transformation auf die Ermittlung von asymptotischen Entwicklungen, welche sich meist mit auffallender Leichtigkeit ergeben. Ferner

werden interessante Aussagen über das asymptotische Verhalten von Faltungsintegralen der Form

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} \Phi_1(\zeta) \Phi_2\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

gemacht.

Im zweiten Teil finden wir Anwendungen auf Fakultätenreihen: Auf Grund der Korrespondenz

$$n! \quad (s+1)(s+2)\cdots(s+n) = \mathfrak{L}\{(1-e^{-t})^n\}$$

lassen sich verschiedene Aussagen, insbesondere über die Ausführung elementarer Operationen an Fakultätenreihen, sehr leicht herleiten und die Entwicklung von Funktionen nach Fakultätenreihen wird stark erleichtert.

Im dritten Teil kommen alsdann die bekannten Anwendungen der Laplace-Transformation auf gewöhnliche Differentialgleichungen und insbesondere auf Probleme der Elektrotechnik zur Behandlung, wobei auch Regelungstechnik und Filtertheorie gebührend berücksichtigt werden. Der Verfasser benützt hier die in der Elektrotechnik übliche Terminologie, was dem technisch orientierten Leser das Studium erheblich erleichtern dürfte. Der dritte Teil befasst sich ausserdem auch mit linearen Differentialgleichungen (und Systemen von solchen), deren Koeffizienten variabel, aber analytisch sind.

Der vierte Teil bringt Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen. Mit der Laplace-Transformation lassen sich in der Regel nur hyperbolische und parabolische Typen behandeln, und zwar, indem man die Zeitvariable wegtransformiert. Dabei führen eindimensionale Wellen- und Wärmeleitungsprobleme bekanntlich unter gewissen Bedingungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen, so dass in diesen Fällen eine vollständige Diskussion der Lösung möglich ist.

Der fünfte Teil ist den Differenzengleichungen gewidmet. Hier ist die Laplace-Transformation dank des Verschiebungssatzes ein besonders bequemes Hilfsmittel; freilich nur solange es sich um lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten handelt. Dafür lassen sich in der gleichen Weise auch Differentialdifferenzengleichungen behandeln.

Ebenso ist die Laplace-Transformation für die im sechsten Teil behandelten Faltungsintegralgleichungen prädestiniert, entspricht doch dem Faltungsintegral im Originalraum eine gewöhnliche Multiplikation im Bildraum, und dem komplexen Faltungsintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \int f(s-\sigma) g(\sigma) d\sigma$$

im Bildraum (gleicher Integrationsweg wie beim Umkehrintegral) das Produkt  $F(t) G(t)$  im Originalraum. Eine gewisse Schwierigkeit entsteht lediglich dadurch, dass eine Laplace-Transformierte für  $S \rightarrow \infty$  notwendigerweise gegen 0 konvergieren muss.

Schliesslich behandelt der siebente Teil die endliche Laplace-Transformation.

$$\int_a^b e^{-st} F(t) dt,$$

die mit den Funktionen vom Exponentialtypus zusammenhängt.

H. RUTISHAUSEN





*J. Wheeler*

FESTSCHRIFT  
JAKOB ACKERET





# FESTSCHRIFT JAKOB ACKERET

ZUM 60. GEBURTSTAG  
17. MÄRZ 1958



1958

BIRKHÄUSER VERLAG BASEL  
UND STUTTGART

SONDERBAND ZAMP IXb, 5/6 (1958)  
BIRKHÄUSER VERLAG BASEL 1958

©

DRUCK VON BIRKHÄUSER AG, BASEL

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

	Seite Page
TANK, F.: Jakob Ackeret . . . . .	9
Bibliographie Ackeret. Zusammenestellt von TH. GINSBURG, L. MEYER und H. SPRENGER . . . . .	17
GYGI, H.: Professor Dr. sc. techn. Jakob Ackeret und die schweizerische Maschinen- industrie . . . . .	26
WATTENWYL, R. von: Professor Ackeret und die Landesverteidigung . . . . .	31
BETZ, A.: Ackeret in Göttingen . . . . .	34
GERBER, A.: Aus der Zusammenarbeit des Institutes für Aerodynamik mit der privaten Rüstungsindustrie . . . . .	37
KELLER, C.: Aus dem Werdegang der aerodynamischen Wärmekraftanlagen (AK- Anlage) . . . . .	47

## WISSENSCHAFTLICHE BEITRÄGE

*Scientific Papers - Articles scientifiques*

KÁRMÁN, TH. VON: Address . . . . .	55
ASHLEY, H., BRUNELLE, E., and MOSER, H. H.: Unsteady Flow Through Heli- copter Rotors . . . . .	57
BAXTER, D. C., and FLÜGGE-LOTZ, I.: Compressible Laminar Boundary Layer Behavior Studied by a Finite Difference Method . . . . .	81
BERGH, H., and BERG, B. VAN DEN: On the Visualization of Laminar Boundary Layer Oscillations and the Transition to Turbulent Flow . . . . .	97
BERNDT, S. B.: Theoretical Aspects of the Calibration of Transonic Test Sections .	105
BETZ, A.: Die Begriffe Auftrieb, Widerstand und Zirkulation bei Schaufeln von Strömungsgittern. . . . .	125
BRIEDEN, K.: Die anisentrope Überschalldurchströmung des Streckengitters . . .	132
BROER, L. J. F., and HAAN, R. E. DE: Total-Head Measurements in Fluctuating Flows . . . . .	162
BRUHN, G., und HAACK, W.: Ein Charakteristikenverfahren für dreidimensionale instationäre Gasströmungen . . . . .	173
BUSEMANN, A.: Aus- und Eintrittsstöße an Schaufelgittern . . . . .	191
CHAIX, B.: Mesures et calculs relatifs au couple de pivotement agissant sur les aubes de turbines Kaplan . . . . .	203

	Seite Page
DARRIEUS, G.: Le flux d'énergie en mécanique: Application aux turbo-machines	225
DRIEST, E. R. VAN: On the Aerodynamic Heating of Blunt Bodies	233
DRYDEN, H. L.: Combined Effects of Turbulence and Roughness on Transition.	249
ECKERT, E. R. G., und HARTNETT, J. P.: Einfluss eines Verbrennungsvorganges auf den Wärme- und Stoffaustausch in einer laminaren Grenzschicht	259
FEINDT, E. G., und SCHLICHTING, H.: Berechnung der reibungslosen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten	274
FRÖSSEL, W.: Beachtenswerte Vorgänge bei hochtouriger hydrodynamischer Lagerschmierung	285
GÖRTLER, H., und WITTING, H.: Einige laminare Grenzschichtströmungen, berech- net mittels einer neuen Reihemethode	293
GRASSMANN, P.: Einordnung der Gleichungen der inkompressiblen, reibenden und schweren Flüssigkeit	307
GREBER, I., HAKKINEN, R. J., and TRILLING, L.: Laminar Boundary Layer Oblique Shock Wave Interaction on Flat and Curved Plates.	312
GROHNE, D., und MANOHAR, R.: Über ein Charakteristiken-Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten	332
HEINZ, C.: Verwundene Überschallflügel und Überschallflügel im Wirbelfeld	347
HUTTON, ST. P.: Tip-Clearance and Other Three-Dimensional Effects in Axial Flow Fans.	357
JAQUET, E.: Über einen Modellversuch aus dem Gebiete der Physiologie	372
JARAY, P.: Aerodynamik und Maschinenbau	382
JARRE, G.: The Dissociation of a Pure Diatomic Gas Behind a Strong Normal Shock Wave	389
KRAFT, H.: The Development of a Laminar Wing Type Turbine Bucket	404
LUKASIEWICZ, J.: Some Problems in Design and Operation of Blowdown Wind Tunnels	422
MAEDER, P. F., and THOMMEN, H. U.: On the Boundary Layer at Perforated Walls	438
MEYER, R. E.: On the Structure of Supersonic Flow	454
OSWATITSCH, K., und TEIPEL, I.: Die Pulsationen von Stossdiffusoren	462
ODART, A.: Couche limite tridimensionnelle	479
PAULI, W.: Zur Thermodynamik dissoziierter Gleichgewichtsgemische in äusseren Kraftfeldern	490
PLASKOWSKI, Z.: Einige Messresultate von konisch zugespitzten Zylindern in Über- schallströmung	498
RESLER JR., E. L., and SEARS, W. R.: Magneto-Gasdynamic Channel Flow	509
ROSSOW, V. J.: On Magneto-Aerodynamic Boundary Layers	519
ROTH-DESMEULES, E., und SÄNGER, R.: Über den Einfluss eines mit der Höhe ver- änderlichen Windes auf die Flugbahn einer Rakete	528
ROTT, N.: On the Viscous Core of a Line Vortex	543
ROY, M.: Remarques sur l'écoulement tourbillonnaire autour des ailes en flèche	554
RUDINGER, G.: The Reflection of Shock Waves from an Orifice at the End of a Duct	570
RUTISHAUSER, H.: Zur Bestimmung der Eigenwerte schiefssymmetrischer Matrizen	586
SÄNGER, E.: Einige optische und kinematische Effekte in der interstellaren Raum- fahrt	591

	Seite Page
SAUER, R.: Überschallströmung um Rumpf-Flügel-Anordnungen . . . . .	601
SCHARDIN, H.: Ein Beispiel zur Verwendung des Stosswellenrohres für Probleme der instationären Gasdynamik . . . . .	606
SCHMIDT, E.: Das Gleichgewicht eines Wasserringes mit freier Oberfläche in einem rotierenden Hohlkörper . . . . .	622
SCHULTZ-GRUNOW, F.: Ein neues Isotopentrennverfahren . . . . .	628
SHAPIRO, A. H.: A Note on the Vorticity Downstream of a Curved Shock . . . .	637
SPANNHAKE, W.: Dimensionslose Theorie der isentropischen Gasströmung durch Kreiselräder unter der Voraussetzung kleiner Breite und unendlicher Schaufel- zahl (Stromfadentheorie) . . . . .	642
STRSCHELETZKY, M.: Geschwindigkeitsverteilung in rotationssymmetrischen Drall- strömungen inkompressibler Flüssigkeiten . . . . .	648
STÜSSI, F.: Zur Prandtlischen Membrananalogie der Torsion . . . . .	661
THEODORIDES, PH.: Parallel Effects of Bulk Viscosity and Time Lag in Kinetics of Non-Monatomic Fluids . . . . .	668
TRAUPEL, W.: Theorie zur Berechnung des Abströmwinkels bei Turbinengittern .	687
WALZ, A.: Näherungstheorien für die Berechnung von Strömungsgrenzschichten .	695
WENK, F.: Bewegung und Ansammlung von Ionen und sonstigen Schwebeteilchen in Wirbelströmungen . . . . .	710
WESKE, J. R.: Ein Beitrag zur Untersuchung stetiger und unstetiger dreidimensio- naler Strömungsfelder in Turbomaschinen . . . . .	721
WINTERNITZ, F. A. L.: The Use of an Electronic Computer in Diffuser Boundary- Layer Investigations . . . . .	725
ZAND, ST. J.: Three Hundred Years of Vibration Engineering . . . . .	737
ZIEGLER, H.: An Attempt to Generalize Onsager's Principle, and its Significance for Rheological Problems . . . . .	748
ZIEREP, J.: Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil . . . . .	764

\* \* \*

SÄNGER, R.: Nachwort . . . . .	777
--------------------------------	-----





## Jakob Ackeret

«*Verde, was du bist.*»

An Glückwünschen von nah und fern, an Zeichen aufrichtiger Verehrung und Dankbarkeit wird es JAKOB ACKERET am 17. März 1958 zur Feier seines 60. Geburtstages nicht fehlen. Mit ganzem Herzen schliessen wir uns den Gratulanten an. Ein reiches Lebenswerk im Dienst der Wissenschaft und Technik liegt hinter ihm, der noch keineswegs gesonnen scheint, sich beschaulicher Ruhe hinzugeben.

Wenn ein wesentlicher Sinn des Lebens darin liegt, zu werden, wozu Anlage und inneres Gesetz uns bestimmt haben, so hat ACKERET diesen Ruf des Schicksals verstanden und in Treue seine Lebensaufgabe nach ihm ausgerichtet. Seine Welt war und blieb stets die Welt des wissenschaftlichen Denkens und der technischen Tat. Die Versenkung in die Wunder der Schöpfung ist ihm angeborenes Bedürfnis; der Physik und ihren Meistern gehört seine besondere Liebe. Und doch kennt er sehr wohl das Feld, wo um die Verwirklichung technischer Gedanken gerungen wird – gerungen bis zum klaren Entscheid. «Es ist so wichtig, etwas Angefangenes wirklich fertigzumachen» – dies hörten wir mehrfach aus seinem Mund. Ihn reizt, was es noch nicht gibt, was aber kraft immanenter Möglichkeiten einmal sein könnte. Ein Gespräch mit ACKERET ist deshalb so reizvoll, weil seine technische Phantasie unerschöpflich scheint – aber nie verlässt sie den Boden der durch die Naturgesetze vorgeschriebenen Tatsachen. Wenn es um die Bemeisterung von Problemen geht, dann erwacht in ihm der Kämpfer.

Die ACKERET von Seuzach bei Winterthur tragen ihren Namen von einem uralten, heute verschwundenen Hof. Naturverbunden durch ihre bäuerliche Tätigkeit, wurden sie mit der Zeit ein verzweigtes, tüchtiges Geschlecht. JAKOB ACKERETS Grossvater hat noch mit eigener Hand das Land bestellt. Ein Winterthurer Chronist berichtet eingehend von einem rechtsgeschichtlich merkwürdigen Raufhandel zwischen den ACKERET und den WIPF von Seuzach aus dem Spätherbst 1530.

Im elterlichen Heim in Zürich-Riesbach wuchs JAKOB ACKERET auf. Die Schlosserwerkstatt des Vaters war sein Tummelplatz. Zwischen Esse und Amboss, bei Drehbänken und Maschinen wurde ihm das gestaltende Handwerk zum Jugenderlebnis, das ihn der Technik entgegenführte. Zusammen mit der lieben Schwester wurden *Staubs Bilderbücher* studiert, die damals sehr ver-

breitet waren. Lesen und Rechnen waren des jungen Schülers grösste Freude. Später gesellte sich dazu das eifrige Interesse für die Tier- und Pflanzenwelt, für Heimatkunde, Geschichte und Geographie. Jugendbücher wie *Der gute Kamerad*, *Das Universum*, *Technik und Wissenschaft* wurden zu seinen Lieblingsen. Und wenn ihn dann JULES VERNES Schöpfungen wie *Von der Erde zum Mond*, *20000 Meilen unterm Meer*, *Reise um die Erde in 80 Tagen* in ihren Bann zogen, so war dies wohl nur zu verständlich.

Der Vater gab seine Einwilligung zum Besuch der Oberrealschule und dann der Eidgenössischen Technischen Hochschule – wohl nicht leichten Herzens –, darauf verzichtend, in seinem Sohn dereinst einen Mitarbeiter und den Nachfolger im eigenen Betrieb zu erhalten. Das Studium bot keinerlei Schwierigkeiten. Seinen Lehrern und Kurskameraden blieb ACKERET auch später in Anhänglichkeit verbunden. Die Diplomprüfung an der Abteilung für Maschineningenieurwesen bestand er 1920 und wurde anschliessend Assistent bei Prof. STODOLA. STODOLAS fesselnde Persönlichkeit, seine hohe Auffassung vom Wesen der Wissenschaft und von der Sendung der Technik verfehlten ihren tiefen Eindruck auf den jungen ACKERET nicht. Der Ruf, den STODOLA insbesondere auf dem Gebiete des Dampfturbinenbaues erlangt hatte, war ein überzeugender Beweis für den Erfolg der kritischen, theoretischen Betrachtungsweise im Vergleich zu einseitiger Empirie. Aber die Anwendung und Erprobung des Neuen ist ein Ziel, das auf die Jugend stets eine besondere Anziehungskraft ausübt. So bot die Gründung der akademischen Gesellschaft für Flugwesen «AGIS» ACKERET die willkommene Gelegenheit, neben seiner Assistententätigkeit mit einem in voller Entwicklung begriffenen, technischen Zukunftsgebiet in nahe Berührung zu kommen. In diesen verheissungsvollen Strom hinein steuerte er sein Lebensschifflein.

Im Herbst 1921 beschloss ACKERET auf STODOLAS Rat, in Göttingen weiterzustudieren und sich auf dem Gebiet der Aerodynamik auszubilden. Es hätte keinen besseren Weg für ihn geben können. Und doch war es keine Kleinigkeit, nach dem Ersten Weltkrieg in Deutschland zu leben. Das deutsche Staatsgefüge zeigte noch keinerlei Stabilität; Entbehrungen waren an der Tagesordnung. Aber Deutschland hatte an seinen alten Hochschulen den Geist der Wissenschaft durch die Fährnisse der Zeiten hindurch gerettet. Göttingen mit seiner grossen Tradition war ein fruchtbarer Acker geistigen Lebens geblieben. Wo man stand und ging, in den Hörsälen und den Korridoren, auf der Strasse und im eigenen Heim galt das Gespräch in erster Linie der Wissenschaft und ihren Problemen. In LUDWIG PRANDTL fand ACKERET den Lehrer, der ihm zum grossen Vorbild wurde. Nicht nur erfuhr er durch ihn eine ausgezeichnete Einführung in das Gebiet der Aerodynamik, sondern er erhielt bald Gelegenheit, sich unter PRANDTL in der aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen zu betätigen. Nach einem Jahr, anlässlich des Wegganges von Dr. WIESELSBERGER, wurde er daselbst Abteilungsleiter; dies war ein vielversprechender Anfang.



Figur 1

ACKERET auf dem Flugzeug «Hero» der «AGIS» (1921).

Zunächst hatte er die Leitung der aerodynamischen Versuchsarbeiten inne. Zu den überraschenden Leistungen des jungen Maschineningenieurs gehörte hier unter anderem die Konstruktion eines Elektromotors zum Antrieb von Modellpropellern mit der sehr hohen Umdrehungszahl von 50000 Touren in der Minute. Von 1925 bis 1926 beschäftigten ihn dann vor allem Entwurf, Bau und Ausstattung des neuen Kaiser-Wilhelm-Institutes für Strömungsforschung. Bereits 1926 konnte er mit den neuen Einrichtungen Untersuchungen durchführen, die den Problemen der Gasdynamik und der Kavitation galten.

Der Göttinger Aufenthalt formte ACKERETS wissenschaftliche Persönlichkeit. In jener Zeit sammelte er den Schatz von Anregungen und Kenntnissen, durch welchen auf Jahre hinaus seine wissenschaftliche Tätigkeit bereichert wurde.

Wir dürfen in diesem Zusammenhang auf den Beitrag von A. BETZ, *Ackeret in Göttingen*, in dieser Festschrift hinweisen. Eine Reihe von Veröffentlichungen legt Zeugnis ab von der Fruchtbarkeit der Göttinger Jahre, als deren Abschluss er uns den Abschnitt über Gasdynamik im *Handbuch der Physik* (1927) schenkte.

Nach 5½jähriger Tätigkeit (1927) verliess ACKERET Göttingen, um die Stellung eines Chef-Hydraulikers bei der Escher Wyss AG in Zürich zu übernehmen. Die wichtige Aufgabe, das hydraulische Versuchswesen in dieser Firma

neu aufzubauen, hat ACKERET glänzend gelöst. Wie wusste er seine Mitarbeiter durch seinen Schwung mitzureissen; wie bewunderten sie sein Wissen und seinen Ideenreichtum; wie oft wurde über der Arbeit die Nacht zum Tag! Und immer war er der Uermüdlichste von allen. Er konnte 1931 seinem Nachfolger, Dr. C. KELLER, eine wohlgeordnete und leistungsfähige Versuchsteilung übergeben.

1928 habilitierte ACKERET sich als Privatdozent an der Eidgenössischen Technischen Hochschule. Seine Habilitationsschrift *Der Luftwiderstand bei sehr grossen Geschwindigkeiten* bedeutete nicht nur einen ausgezeichneten Überblick über den damaligen Stand des Fachgebietes, sondern geradezu ein Programm künftiger Forschung. Kennzeichnend ist auch hier ACKERETS Fähigkeit, im Einzelnen das Allgemeine zu sehen und die Probleme im Rahmen umfassender Gesichtspunkte zu betrachten. Für ihn stand fest, dass die Geschwindigkeiten der Flugzeuge noch weiter wachsen würden und dass der Aerodynamik höchster Geschwindigkeiten die Zukunft gehöre. Liebenswürdig ist der Kranz, den er dem hochverdienten Physiker ERNST MACH widmet. Er sagt: «In der Aerodynamik höherer Geschwindigkeiten tritt das Verhältnis  $v/a$  dauernd auf ( $v$  = Geschwindigkeit des betrachteten Körpers bzw. der Luftströmung,  $a$  = Schallgeschwindigkeit). Es empfiehlt sich deshalb, eine abkürzende Bezeichnung einzuführen. Da der bekannte Physiker ERNST MACH auf unserem Gebiete die grundlegende Bedeutung dieses Verhältnisses besonders klar erkannt und durch geniale experimentelle Methoden bestätigt hat, scheint es mir sehr berechtigt,  $v/a$  als Machsche Zahl zu bezeichnen.» Seither ist der Ausdruck «Machsche Zahl» in die gesamte Fachliteratur bis zur populären Darstellung eingedrungen.

Was ändern ein Endziel wissenschaftlicher Bestrebungen bedeuten kann, nämlich das erfolgreiche Ablegen der Doktorprüfung, ist für ACKERET eine Angelegenheit, die mehr oder weniger nebenbei erledigt wird, «...weil es doch einmal so sein soll!» Eine Studie über Kavitation wird als Promotionsarbeit eingereicht und bringt ihm den Titel. Die Berufung zum ausserordentlichen Professor für Aerodynamik an die ETH erfolgt 1931 und zum ordentlichen Professor daselbst 1934, unter gleichzeitiger Ernennung zum Vorstand des neugegründeten Institutes für Aerodynamik. Dies veranlasst zu haben, war eines der Verdienste des damaligen Schulratspräsidenten ROHN. Der rechte Mann war nun am rechten Platz. Eine Zeit angespanntester Tätigkeit, aber auch schönster Erfolge, beginnt.

Der Bau des ersten grossen Überschallkanals mit kontinuierlichem Betrieb 1933/34 erregte in der Fachwelt berechtigtes Aufsehen. Er wurde zum Vorbild ähnlicher Anlagen im Ausland. Seine Verwendungsmöglichkeit beschränkte sich nicht nur auf Messungen an Flugzeugmodellen, sondern er war von Anfang an auch für Untersuchungen auf dem Gebiete der Ballistik sowie des Dampf- und Gasturbinenbaues geplant. ACKERET hat darüber und über sein





Figur 2

ACKERET in Göttingen (1924) bei einem aerodynamischen Versuch  
(rotierender Zylinder).

Institut im allgemeinen ausführlich in der Schweizerischen Bauzeitung (Bd. 111, Nr. 7/8, S. 73) und in den «Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH» (Nr. 8, 1943) berichtet.

Das Institut wurde zum Anziehungspunkt begabter junger Ingenieure, die hier ihre wissenschaftliche Ausbildung erweiterten und abschlossen und die berufen waren, später der Wissenschaft und der Technik ausgezeichnete Dienste zu leisten. Ein Stab bewährter Mitarbeiter bildete sich heran und wurde zum Kern der anerkannten Leistungsfähigkeit des aerodynamischen Institutes. Bei der Bewertung der Erfolge ist nicht zu vergessen, dass sich dieses Institut nicht auf eine grosse Spezialindustrie stützen konnte, wie dies im Ausland der Fall ist. Zahlreiche Veröffentlichungen wurden zum äusseren Spiegelbild intensivster interner Tätigkeit. Es erschienen: aus dem Gebiete der Strömungslehre Arbeiten über Kavitation, Grenzschicht-Absaugung und Winddruck auf Gebäude; aus dem Gebiete der Strömungsmaschinen Arbeiten über Gittertheorie, Ähnlichkeitstheorie, Kaplan-Turbinen, Luftschrauben, Gasturbinen, Windräder, Axialverdichter; aus dem Gebiete der Aerodynamik hoher Geschwindigkeiten Arbeiten über Gasdynamik, Luftkräfte auf Flügel, Grenzschichten bei kompressibler Strömung und Raketentheorie. Es ist schwer, in Kürze einzelnes hervorzuheben, doch seien der Verstellpropeller und die Ackeret-Keller-Gasturbine besonders erwähnt. Letztere wurde von der Escher Wyss AG gebaut und nach ihrer Vollendung im Januar 1945 einer grösseren Anzahl geladener Gäste vorgeführt.

Sich selber treu, hat ACKERET die moderne Entwicklung der Aerodynamik nicht nur verfolgt, sondern auch massgebend beeinflusst. Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang seine grundlegende Arbeit *Zur Theorie der Raketen* (Helv. Phys. Acta 1946, 103). Damit war letzten Endes der Schritt zu den Fragen der Weltraumfahrt getan. Der Folgerichtigkeit dieses Schrittes vermochte sich ACKERETS unvoreingenommenes Denken nicht zu entziehen, und so sehen wir ihn 1953 in Zürich den vierten Kongress der Internationalen Astronautischen Föderation eröffnen. Ihm war es um die Diskussion der vielen weitgespannten, noch schwebenden Probleme zu tun. Als eine ehrenvolle Anerkennung wurde ihm die Einladung zu einer Vortragsreise in den USA zuteil, wo auch eine Reihe seiner ehemaligen Schüler und Mitarbeiter erfolgreich tätig sind. Sechs Vorträge hatte er mit Sorgfalt vorbereitet; vierundzwanzig Vorträge hat er im Laufe von vier Wochen im gesamten Gebiet der USA gehalten. Dazu kamen noch die vielen Besprechungen und Besichtigungen. Man muss zum Stamm der ACKERET von Seuzach gehören, um einer solchen Belastung gewachsen zu sein.

Für ACKERET ist die Technik ein Stück und Bestandteil des Lebens, eingebettet in den Strom einer mächtigen Entwicklung. Daher lässt sich für ihn das Verständnis der Technik nicht vom Wissen um den geschichtlichen Werdegang trennen. Seine Verehrung für die grossen Meister legt davon Zeugnis ab.



Als MAX PLANCK 1947 die Augen für immer schloss, erinnerte er die Ingenieurwelt daran, von welcher Bedeutung PLANCKS Entdeckung des universellen Wirkungsquantums heute und für alle Zukunft für die Technik ist [Schweiz. Bauztg. 65, 651 (1947)]. Es war das Gegebene, in der Herausgabe von LEONHARD EULERS Gesamtwerk die Redaktion des Abschnittes über die hydrodynamischen Arbeiten dieses grossen Mathematikers ACKERET anzuvertrauen. Die Vorrede, die er schrieb, zeugt von tiefem Eindringen in die Aufgabe. EULERS Kunst der Analyse lässt er die volle Würdigung zukommen. Bemerkenswert ist aber auch seine Anerkennung intuitiver Begabung; so sagt er über den Zimmermann Rennequin Sualem aus der Zeit Ludwigs XIV.: «Hier erkennt man die grosse Bedeutung der Beobachtung. Auch wenn sie nicht rationell verstanden wird, weckt sie doch die tief verborgenen mechanischen Instinkte und gibt, verbunden mit Phantasie, den Weg frei zur Überwindung von Schwierigkeiten.»

Als eine Frucht dieser Beschäftigung ergab sich die Nachbildung einer Wasserturbine, maßstäblich genau nach den Eulerschen Vorschlägen (1754); die Ausführung übernahm die Escher Wyss AG im hundertsten Jahr ihres Turbinenbaues (1944). Darüber sowie über die Messergebnisse hat ACKERET eingehend berichtet [Schweiz. Bauztg. 123, Nr. 1, 2 (1944)]. Er bemerkt dabei über EULER: «Wo immer er eine Möglichkeit einer rationellen Behandlung sah, griff er zu, und dadurch, dass er sich nicht durch den primitiven Zustand der damaligen Technologie entmutigen liess, fand er ganz neue Zusammenhänge und Beziehungen und kam zu Vorschlägen, die zu seiner Zeit wohl unausführbar waren, im Laufe der nächsten zwei Jahrhunderte aber schliesslich zum Allgemeingut der Technik wurden.» Dies klingt wie ein Leitmotiv in ACKERETS eigener Tätigkeit.

JAKOB ACKERET hat den Sinn für schweizerische Eigenart stets bewahrt. Es bedeutete für ihn eine hohe Befriedigung, wenn er seinem Land dienen konnte; nie entzog er sich einer Verpflichtung, die im allgemeinen Interesse lag und die seine besondere Mitwirkung erforderte. So wurde er 1943 Mitglied der Eidgenössischen Kommission für militärische Flugzeugbeschaffung, die er von 1950 an präsidierte. Seine Verdienste um die Zusammenarbeit mit der Kriegstechnischen Abteilung des EMD sind in einem besonderen Beitrag aus der Feder von Oberst VON WATTENWYL gewürdigt. Ein glücklicher Wurf war die Gründung der Studienkommission für Luftfahrt an der ETH, die ACKERET vorbildlich organisierte und deren erster Präsident er war; die Forschung an der ETH hat er dadurch wesentlich gefördert. Er ist auch Mitglied der Kommission der Schweizerischen Kriegstechnischen Gesellschaft, wo seine Erfahrung und sein Rat Gewicht besitzen. Ferner finden wir ihn in der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und Hagelabwehr; hier waren es die wissenschaftlichen Probleme, die ihn fesselten, wie er überhaupt der Meteorologie viel Interesse schenkt.

ACKERET sorgte dafür, dass seine Veröffentlichungen und diejenigen seiner Mitarbeiter nach Möglichkeit in der Schweiz erschienen. Die Entwicklung der «Helvetica Physica Acta» verfolgte er mit grossem Interesse; gerne hätte er hier eine vermehrte Berücksichtigung der angewandten Physik gesehen. Die Mitgliedschaft in der Redaktionskommission der «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik» ist ihm ein wichtiges Anliegen. Lebhaft befürwortete er vor einer Reihe von Jahren die Gründung einer Sektion für angewandte Physik innerhalb der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft und übernahm später persönlich das Sekretariat dieser Sektion, um ihr zu vermehrter Aktivität zu verhelfen.

Nach Ehren hat ACKERET nie gestrebt; Gewinn war ihm nie wesentlich. Wie sehr die Fachwelt des In- und Auslandes ihn schätzt, wissen wir alle. Zahlreiche Auszeichnungen und Ehren legen davon Zeugnis ab. Möge die vorliegende Festschrift unter den Zeichen der Verbundenheit und Anerkennung einen besonders schönen Platz einnehmen. Seinen Schülern ist ACKERET ein Vorbild, seinen Kollegen ein Freund, dem Vaterland ein treuer Sohn und der Wissenschaft ein unermüdlicher Diener. In diesem Dienst hat er sich oft zuviel zugemutet und musste ein Übermass an Arbeit wiederholt durch das Krankenlager büssen. Auch ersparte ihm das Leben Schwerstes nicht. Aber gerade auch deshalb verehren und lieben wir ihn. Und wenn wir ihm danken und ihm Glück wünschen, so schliessen wir in Dank und Glückwunsch auch seine nächsten Angehörigen ein, die ihm so eng verbunden sind. Möge ihm und den Seinen Gesundheit und langes Leben beschieden sein!

FRANZ TANK

## Bibliographie Ackeret

(Bis Dezember 1957)

### 1. Originalveröffentlichungen

- [1] *Ein Beispiel zum statischen Segelflug*, Z. Flugtech. 14, 86–89 (1923).
- [2] *Motoren zum Antrieb von kleinen Modell-Luftschauben*, Z. Flugtech. 15, 101–103 (1924).
- [3] *Bemerkungen zu zwei neueren Schriften von G. Lilienthal*, Z. Flugtech. 15, 242 bis 244 (1924).
- [4] *Neue Untersuchungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen*, Z. Ver. dtsh. Ing. 68, 1087 (1924).
- [5] *Neue Untersuchungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen*, Z. Ver. dtsh. Ing. 68, 1155 bis 1156 (1924).
- [6] *Versuche mit Ausschnitten an Tragflügeln*, 5. Mitt. AVA Göttingen, Heft 1.
- [7] *Versuche an Profilen mit abgeschnittener Hinterkante*, 5. Mitt. AVA Göttingen, Heft 2; und Erg. AVA Göttingen, 3. Lieferung, 82–86 (1927).
- [8] *Versuche an einem Flügel mit Grenzschichtabsaugung* (J. ACKERET, A. BETZ und O. SCHRENK), 5. Mitt. AVA Göttingen, Heft 4.
- [9] *Neuere Untersuchungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen*, Z. Flugtech.; Beiheft 12, 57 (1924); Z. Flugtech. 16, 44–52 (1925).
- [10] *Luftkräfte auf Flügel, die mit grösserer als Schallgeschwindigkeit bewegt werden*, Z. Flugtech. 16, 72–74 (1925).
- [11] *Neue Versuche an Windmühlenmodellen*, Z. Ver. dtsh. Ing. 69, 1172 (1925).
- [12] *Das Rotorschiff und seine physikalischen Grundlagen* (Verlag Vandenhoeck & Rupprecht, Göttingen 1925), 48 S.; 7 Taf., 44 Abb.
- [13] *Über Grenzschichtabsaugung*, Z. Ver. dtsh. Ing. 70, 1153–1158 (1926).
- [14] *Über Grenzschichtabsaugung*, Verhandlungen des 2. Int. Kongresses für technische Mechanik, 12.–17. Sept. 1926 in Zürich (Verlag Orell Füssli, Zürich 1927), S. 462–464.
- [15] *Tragflügeluntersuchungen*, Beitrag zum 3. Heft der Erg. der AVA Göttingen.
- [16] *Gasdynamik*, in: *Handbuch der Physik* (Verlag Springer, Berlin 1927), Bd. VII, Kap. 5, S. 289–342, 70 Abb.
- [17] *Über Hohlraumbildung (Kavitation) in Wasserturbinen*, Escher-Wyss-Mitt. 1, 40–45 (1928).
- [18] *Das höchstzulässige Gefälle bei Wasserturbinen*, Schweiz. Bauztg. 91, 135–136 (1928).
- [19] *Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen mit endlicher Amplitude (Riemannscher Verdichtungsstoss)*, Z. math.-naturw. Unterricht 59, 307–314 (1928).
- [20] *Luftkräfte bei sehr grossen Geschwindigkeiten, insbesondere bei ebenen Strömungen*, Helv. Phys. Acta 1, 301–322 (1928).
- [21] *Experimentelle Methoden zur Ermittlung von Potential-Strömungsbildern*, Escher-Wyss-Mitt. 1, 174–176 (1928).

- [22] *Über das Leitrad bei Vollstrahl-Wasserturbinen* (Diskussionsbeitrag), Schweiz. Bauztg. 92, 167 (1928).
- [23] *Der Luftwiderstand bei sehr grossen Geschwindigkeiten* (Antrittsvorlesung an der ETH), Schweiz. Bauztg. 94, 179–183 (1929).
- [24] *F. Prasil* (Nachruf), Z. angew. Math. Mech. 9 (1929).
- [25] *Energieverluste in Gleichdruck-Schaufelgittern*, Stodola-Festschrift (Verlag Orell-Füssli, Zürich-Leipzig 1929), S. 1–7.
- [26] *Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Hohlraumbildung (Kavitation) im Wasser*, Dissertation (VDI-Verlag); Tech. Mech. Thermodyn. 1, 1–22, 34 Abb. (1930).
- [27] *Bemerkung zur Strömung über scharfkantige Überfallwehre*, Schweiz. Bauztg. 95, 3–4 (1930).
- [28] *Über stationäre Hohlwirbel*, Ing.-Arch. 1, 399–402 (1930).
- [29] *Modellversuche zur Ermittlung des günstigsten Längenprofils im Unterwasserkanal einer Niederdruck-Anlage* (E. MEYER-PETER, H. FAVRE und J. ACKERET), Schweiz. Bauztg. 96, 230–233 (1930).
- [30] *Forschung und Unterricht im Flugwesen* (L. KARNER und J. ACKERET), Schweiz. Bauztg. 96, 240–241 (1930).
- [31] *Theoretische Betrachtungen zur Kaplan-Turbine*, Escher-Wyss-Mitt. 4, 73–85 (1931).
- [32] *Kavitation*, in: *Handbuch der Experimentalphysik* (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1931), S. 461–486, 30 Abb.
- [33] *Bewegung von Luftblasen in fließendem Wasser* (Diskussionsbeitrag), Schweiz. Bauztg. 98, 216–217 (1931).
- [34] *Untersuchungen über Korrosion durch Wasserstoss* (Vorl. Mitteilung) (J. ACKERET und P. DE HALLER), Schweiz. Bauztg. 98, 309–310 (1931).
- [35] *Kavitation und Kavitationskorrosion*; in: *Hydrodynamische Probleme des Schiffsantriebs* (Kempf & Foerster, Hamburg 1932), S. 227–240.
- [36] *Kavitation und Kavitationskorrosion*, Werfft, Reederei, Hafen 13, 239–240, 253 bis 255 (1932).
- [37] *Schnellaufende Hochdruck-Gegendruck-Wasserturbinen*, Ver. dtsh. Ing., 71. Hauptversammlung, Berlin (VDI-Verlag, 1933), S. 54–56.
- [38] *Über Profile mit Landeklappen* (J. ACKERET und H. L. STUDER), Schweizer Aero-Rev. 8, 111–113 (1933).
- [39] *Theorie und Berechnung von Tragflügelprofilen auf vereinfachter Grundlage*, Samstagskurse ETH (W.S. 1932/33).
- [40] *Einfluss hoher Umfangsgeschwindigkeiten auf den Wirkungsgrad von Luftschrauben*, Schweiz. Bauztg. 101, 11–12 (1933).
- [41] *Tragflügelprofile in Bodennähe*, Z. Flugtech. 24, 442 (1933).
- [42] *Winddruck-Untersuchungen an einem Gasbehälter-Modell*, Escher-Wyss-Mitt. 7, 124–129 (1934).
- [43] *Winddruck-Untersuchungen an einem Gasbehälter-Modell*, Monatsbull. schweiz. Ver. Gas- u. Wasserfachm. 14, 218–224 (1934).
- [44] *Bemerkungen über die Messfehler bei Flügelmessungen in schräger Strömung*, Schweiz. Bauztg. 103, 39 (1934).
- [45] *Bemerkungen über Tragflügel-schwingungen* (J. ACKERET und H. L. STUDER), Helv. Phys. Acta 7, 501–504 (1934).
- [46] *Verwendung von Luft als Untersuchungsmittel für Probleme des Dampfturbinenbaus* (J. ACKERET, C. KELLER und F. SALZMANN), Escher-Wyss-Mitt. 7, 143–159 (1934).

- [47] *Verwendung von Luft als Untersuchungsmittel für Probleme des Dampfturbinenbaus* (J. ACKERET, C. KELLER und F. SALZMANN), Schweiz. Bauztg. 104, 259 bis 263, 275–278, 292–295 (1934).
- [48] *Geräuschbekämpfung bei einem Kühlturm-Ventilator* (J. ACKERET und J. EGLI), Schweiz. Bauztg. 105, 171–172 (1935).
- [49] *Die Bedeutung des Modellversuchs für die Flugtechnik*, Schweizer Aero-Rev. 10, 105–106 (1935).
- [50] *Der neue Windkanal des Instituts für Aerodynamik an der ETH Zürich*, Schweizer Aero-Rev. 10, 107–111 (1935).
- [51] *Der Überschallkanal des Instituts für Aerodynamik an der ETH*, Schweizer Aero-Rev. 10, 112–114 (1935).
- [52] *Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten*, Z. angew. Math. Mech. 15, 3–4 (1935).
- [53] *Verstellpropeller für Schiffe*, Escher-Wyss-Mitt. 8, 63–67 (1935).
- [54] *Aerodynamische Entwicklung der Flugzeuge*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich 81, XXIII f. (1936).
- [55] *Gallerie aerodinamiche per alte velocità*, Relazione presentata al V Convegno Volta su *Le alte velocità in aviazione*, Roma 1935, L'Aerotecnica 16, 885–925, 50 Fig. (1936).
- [56] *High Speed Wind Tunnels*, NACA TM Nr. 808 (1936).
- [57] *Der Winddruck auf Schornsteine mit Kreisquerschnitt*, Schweiz. Bauztg. 108, 25 (1936).
- [58] *Über die Zerstörung von Werkstoffen durch Tropfenschlag und Kavitation* (J. ACKERET und P. DE HALLER), Schweiz. Bauztg. 108, 105–106 (1936).
- [59] *Verstellpropeller*, Die ETH dem SIA zur Jahrhundertfeier (Büchler & Co., Bern 1937), S. 161–165.
- [60] *Das Institut für Aerodynamik im neuen Maschinenlaboratorium der ETH*, Schweiz. Bauztg. 111, 73–79, 89–93 (1938).
- [61] *Neue Untersuchungen über Autorotation von Flugzeug-Leitwerken* (J. ACKERET, P. DE HALLER und W. PFENNINGER), Schweiz. Bauztg. 111, 170–172 (1938).
- [62] *Probleme des Flugzeugantriebes in Gegenwart und Zukunft*, Schweiz. Bauztg. 112, 1–4 (1938).
- [63] *Über Werkstoffzerstörung durch Stosswellen in Flüssigkeiten* (J. ACKERET und P. DE HALLER), Arch. angew. Wiss. Tech. 4, 293 (1938).
- [64] *Constant-Speed Luftschrauben* (J. ACKERET und W. PFENNINGER), Flugwehr u. Tech. 1, 24–27 und 52 (1939).
- [65] *Eine aerodynamische Wärmekraftanlage* (J. ACKERET und C. KELLER), Schweiz. Bauztg. 113, 229–230 (1939).
- [66] *Untersuchungen am Modell eines Windkraftwerkes* (J. ACKERET und C. CAILLE), Schweiz. Bauztg. 114, 41–42 (1939).
- [67] *Hot Air Power Plant* (J. ACKERET und C. KELLER), Engr. Lond. 169, 373–374 (1940).
- [68] *Kompressibilität*, Flugwehr u. Tech. 2, 18–20 (1940).
- [69] *Der schweizerische Flugzeug-Verstellpropeller*, Neue Zürcher Ztg., Beilage Technik, 5. Nov. 1941.
- [70] *Zum Einsturz der Tacoma-Hängebrücke* (J. ACKERET und F. STÜSSI), Schweiz. Bauztg. 117, 137–140 (1941).
- [71] *Über Verhinderung der Grenzschicht-Turbulenz durch Absaugung* (J. ACKERET und M. RAS), Helv. Phys. Acta 14, 323 (1941).



- [72] *Verhinderung des Turbulentwerdens einer Grenzschicht durch Absaugung* (J. ACKERET, W. PFENNINGER und M. RAS), *Naturwissenschaften* 29, 622–623 (1941).
- [73] *Aerodynamische Wärmekraftmaschine mit geschlossenem Kreislauf* (J. ACKERET und C. KELLER), *Z. Ver. dtsh. Ing.* 85, 491–500 (1941).
- [74] *Zum Entwurf dichtstehender Schaufelgitter*, *Schweiz. Bauztg.* 120, 103–108 (1942).
- [75] *Das Institut für Aerodynamik der ETH*, *Mitt. Inst. Aero. ETH* Nr. 8 (Verlag Leemann, Zürich 1943).
- [76] *Auf dem Wege zur Gasturbine* (Vortrag), *Schr. dtsh.-Akad. Luftfahrtf.* 7B, 73–75 (1943).
- [77] *Untersuchung einer nach den Eulerschen Vorschlägen (1754) gebauten Wasserturbine*, *Schweiz. Bauztg.* 123, 2–4 (1944).
- [78] *Bemerkungen über den Rückstossantrieb von Flugzeugen*, *Schweiz. Bauztg.* 123, 235–237 (1944).
- [79] *Zum gegenwärtigen Stand der Entwicklung der aerodynamischen Wärmekraftmaschine*, *Schweiz. Bauztg.* 123, 37–38 (1944).
- [80] *Leonhard Eulers letzte Arbeit*, *Festschrift Speiser* (Orell Füssli, Zürich 1945), S. 160–168, 4 Abb.
- [81] *Die theoretisch-physikalischen Grundlagen des AK-Verfahrens* (Ackeret-Keller-Gasturbine), *Neue Zürcher Ztg.*, Beilage Technik, 24. Jan. 1945.
- [82] *Untersuchungen an Verdichtungsstößen und Grenzschichten in schnell bewegten Gasen* (J. ACKERET, F. FELDMANN und N. ROTT), *Mitt. Inst. Aero. ETH* Nr. 10 (Verlag Leemann, Zürich 1946).
- [83] *Zur Theorie der Raketen*, *Helv. Phys. Acta* 19, 103–112 (1946).
- [84] *Über die Verwendung von leichten Gasen für Wärmekraftmaschinen mit geschlossenem Kreislauf*, *Schweiz. Bauztg.* 127, 51–52 (1946).
- [85] *La turbina aerodinamica* (J. ACKERET und C. KELLER), *Ingenieria*, Buenos Aires 50, 166–183, 269–282, 333–344 (1946).
- [86] *Hot-Air Turbine Power Plant* (J. ACKERET und C. KELLER), *Engng. Lond.* 161, 1, 12, 25, 49 (1946).
- [87] *Ein Windzähler zur Bestimmung der Bruttoleistung des Windes* (J. ACKERET und J. EGLI), *Elektrizitätsverw.* 21, 75–82 (1946/47).
- [88] *Der Wind in der Technik* (Vortrag 16. Mai 1947), *Nat. Ges. Bern, Mitt.*, neue Folge, 5. Bd.
- [89] *Max Planck* (Nachruf), *Schweiz. Bauztg.* 65, 651 (1947).
- [90] *Über die Strömung von Gasen durch ungestaffelte Profilvergitter* (J. ACKERET und N. ROTT), *Schweiz. Bauztg.* 67, 40–41, 58–61 (1949).
- [91] *Elementare Betrachtungen über die Stabilität der Langgeschosse*, *Helv. Phys. Acta* 22, 127–134 (1949).
- [92] *Untersuchungen an gepfeilten und ungepfeilten Flügeln bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten* (J. ACKERET, M. DEGEN und N. ROTT), *Z. angew. Math. Phys.* 1, 32–42 (1950).
- [93] *On Aerodynamic Cooling Effects*, *Ric. sci. Mem.* 20, 1926–27 (1950).
- [94] *Winddruck und Winddruckvorschriften*, *Schweiz. Bauztg.* 68, 100 (1950).
- [95] *Über die Druckverteilung an schräg angeströmten Rotationskörpern bei Unterschallgeschwindigkeit* (J. ACKERET, M. DEGEN und N. ROTT), *L'Aerotecnica* 31, 11–19 (1951).
- [96] *Über exakte Lösungen der Stokes-Navier-Gleichungen inkompressibler Flüssigkeiten bei veränderten Grenzbedingungen*, *Z. angew. Math. Phys.* 3, 259–271 (1952).



- [97] *Akustische Probleme bei hohen Fluggeschwindigkeiten*, Neue Zürcher Ztg., Beilage Technik, 17. Sept. 1952.
- [98] *Akustische Phänomene bei hohen Fluggeschwindigkeiten*, Schweiz. Aero-Rev. 11, 429–430 (1952).
- [99] *Probleme der Weltraumforschung*, Eröffnungsansprache zum 4. Internationalen Astronautischen Kongress 1953 in Zürich (Verlag Laubscher & Co., Biel) S. 17–18.
- [100] *200 Jahre Turbinentheorie* (Vortrag Strömungstagung, Zürich 1954), Tech. Rdsch. Bern 46, 1–2 (1954).
- [101] *Über die Temperaturverteilung hinter angeströmten Zylindern*, Mitt. Inst. Aero. ETH Nr. 21 (Verlag Leemann, Zürich 1954), S. 5–17.
- [102] *Nabeneffekte bei axialen Radgittern*, Z. angew. Math. Mech. 35, 360–362 (1955).
- [103] *Fliegende Teller*, Neue Zürcher Ztg., Beilage Technik, 9. März 1955.
- [104] *Über Widerstände, die durch gasdynamische Relaxation hervorgerufen werden*, Z. Flugwiss. 4, 14–17 (1956).
- [105] *Probleme der Astronautik*, Der Bund, Bern, 18. November 1956.
- [106] *Über die Grenzen der Erreichbarkeit ferner Weltkörper*, Interavia 11, 989–991 (1956).
- [107] *Eulers Arbeiten über Turbinen und Pumpen*, Euleri Opera Omnia Series II, vol. 15 (Verlag Orell Füssli, Zürich 1957), 53 S., 27 Abb.
- [108] *Elementare Betrachtungen zum Satelliten- und Raumfahrtproblem*, Schweiz. Bauztg. 75, 814–822, 13 Abb. (1957).

## 2. Nachgedruckte Arbeiten

- [1] *Air Forces on Airfoils Moving Faster than Sound*, NACA TM Nr. 317 (1925).
- [2] *Recent Experiments at the Göttingen Aerodynamic Institute*, NACA TM Nr. 323 (1925).
- [3] *Experiments with an Airfoil from Which the Boundary Layer is Removed by Suction* (J. ACKERET, A. BETZ und O. SCHRENK), NACA TM Nr. 374 (1926).
- [4] *Removing Boundary Layer by Suction*, NACA TM Nr. 395 (1926).
- [5] *Drag Measurements of Two Thin Wing Sections at Different Index Value*, NACA TM Nr. 417 (1927).
- [6] *Experiments on Airfoils with Trailing Edge Cut Away*, NACA TM Nr. 431 (1927).
- [7] *Cavitation Phenomena in Hydraulic Turbines*, Bull. tech. Suisse rom. 54, 99 bis 102 (1928).
- [8] *Maximum Permissible Suction Head on Water Turbines*, Mech. Engng. 50, 547–549 (1928).
- [9] *Experimental and Theoretical Investigations of Cavitation in Water*, NACA TM Nr. 1078 (1930).
- [10] *Aeronautical Education and Research at the Swiss Institute of Technology in Zürich* (J. ACKERET und L. KARNER), NACA TM Nr. 616 (1931).
- [11] *Cavitation* (brief English abstract), Mar. Engr. and Motorship Bldr. 55, 661 (1932).
- [12] *L'Institut d'Aérodynamique de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich*, Génie Civil 113, 156–162 (1938).
- [13] *Model Tests of Wind Power Station* (J. ACKERET und C. CAILLE), Engrs. Dig. 1, 52 (1940).

- [14] *Hot Air Power Plant* (J. ACKERET und C. KELLER), *Engrs. Dig.* 1, 23–25 (1940).
- [15] *Future Problems of Airplane Propulsion*, NACA TM Nr. 976 (1941).
- [16] *Heat Power Engine operating on Closed Cycle* (J. ACKERET und C. KELLER), NACA TM Nr. 1034 (1942).
- [17] *Compressibility*, *Engrs. Dig.* 4 (1943).
- [18] *Bemerkungen über den Rückstossantrieb von Flugzeugen*, *Motortech. Z.* 6, 123 (1944).
- [19] *Investigation on Compression Shocks and Boundary Layers in Gases Moving at High Speed* (J. ACKERET, F. FELDMANN und N. ROTT), NACA TM Nr. 1113 (1947), 34 p.
- [20] *Untersuchungen an gepfeilten und ungepfeilten Flügeln, Investigations on Wings with and without Sweepback at High Subsonic Speeds*, NACA TM Nr. 1320 (1951), 14 p.

### 3. Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Ackeret (Verlag Leemann, Zürich)

- Nr. 1: G. DÄTWYLER, *Untersuchungen über das Verhalten von Tragflügelprofilen sehr nahe am Boden* (1934).
- Nr. 2: C. KELLER, *Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie* (1934).
- Nr. 3: P. DE HALLER, *L'influence des limites de la reine fluide sur les caractéristiques aérodynamiques d'une surface portante* (1934).
- Nr. 4/5: H. L. STUDER, *Experimentelle Untersuchungen über Flügelschwingungen*.  
P. DE HALLER, *La portance et la traînée induite minimum d'une aile au voisinage du sol* (1936).
- Nr. 6: A. GERBER, *Untersuchungen über Grenzschichtabsaugung* (1938).
- Nr. 7: E. PREISWERK, *Anwendung gasdynamischer Methoden auf Wasserströmungen mit freier Oberfläche* (1938).
- Nr. 8: J. ACKERET, *Das Institut für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule*.  
G. DÄTWYLER, *Eine Apparatur zur Messung turbulenter Schwankungen in Strömungen*.  
P. DE HALLER, *Die Schlierenoptik des Überschallkanals*.  
W. PFENNINGER, *Vergleich der Impulsmethode mit der Wägung bei Profilwiderstandsmessungen* (1943).
- Nr. 9: N. ROTT, *Das Feld einer raschbewegten Schallquelle* (1945).
- Nr. 10: J. ACKERET, F. FELDMANN und N. ROTT, *Untersuchungen an Verdichtungsstößen und Grenzschichten in schnell bewegten Gasen* (1946).
- Nr. 11: R. MEYER, *Beitrag zur Theorie feststehender Schaufelgitter* (1946).
- Nr. 12: E. MÜHLEMANN, *Experimentelle Untersuchungen an einer axialen Gebläsestufe* (1946).
- Nr. 13: W. PFENNINGER, *Untersuchungen über Reibungsverminderungen an Tragflügeln, insbesondere mit Hilfe von Grenzschichtabsaugung* (1946).
- Nr. 14: F. FELDMANN, *Untersuchungen von symmetrischen Tragflügelprofilen bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten in einem geschlossenen Windkanal* (1948).
- Nr. 15: M. ALI HASSAN, *Anwendungen der elektrolytischen Methode auf die Betz'sche Theorie der Spaltverluste an Schaufelgittern* (1949).

- Nr. 16: E. R. VAN DRIEST, *Die linearisierte Theorie der dreidimensionalen kompressiblen Unterschallströmung und die experimentelle Untersuchung von Rotationskörpern in einem geschlossenen Windkanal* (1949).
- Nr. 17: W. T. SAWYER, *Experimental Investigations of a Stationary Cascade of Aerodynamic Profiles* (1949).
- Nr. 18: L. F. RYAN, *Experiments on Aerodynamic Cooling*.  
M. DEGEN, *Untersuchungen an einem Gegenlaufpropeller im Windkanal* (1951).
- Nr. 19: R. M. EL BADRAWY, *Ebene Plattengitter bei Überschallgeschwindigkeit* (1952).
- Nr. 20: R. W. DETRA, *The Secondary Flow in Curved Pipes* (1953).
- Nr. 21: J. ACKERET, *Über die Temperaturverteilung hinter angeströmten Zylindern*.  
H. SPRENGER, *Über thermische Effekte in Resonanzrohren*.  
Z. PLASKOWSKI, *Schubvermehrung durch Strahlmischung* (1954).
- Nr. 22: TH. GINSBURG, *Untersuchungen über die dreidimensionale Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter* (1956).
- Nr. 23: V. J. ROSSOW, *An Analysis of the Error, Involved in Unrolling the Flow Field in Turbine Problems* (1957).
- Nr. 24: H. R. VOELLMY, *Experimentelle Untersuchungen an verschieden stark konvergierenden, schlanken Rotationskörpern bei mässig hohen Überschallgeschwindigkeiten* (1958).

#### 4. Weitere Veröffentlichungen einiger Mitarbeiter von Prof. Dr. J. Ackeret

- [1] H. GERBER, *Experimentelle Methoden zur Ermittlung von Potential-Strömungsbildern*, Escher-Wyss-Mitt. 1, 171–174 (1928).
- [2] E. AMSTUTZ, *Zur theoretischen Vorausberechnung der Charakteristiken von spezifisch schnelllaufenden Axialrädern*, Stodola-Festschrift (Verlag Orell Füssli, Zürich 1929), S. 8–15.
- [3] G. DÄTWYLER, *Der Einfluss der elastischen Deformationen auf die Luftkräfte um Tragflügel*, Schweizer Aero-Rev. 6, 264 (1931).
- [4] P. DE HALLER, *Induzierter Widerstand einer Tragfläche in einem elliptischen freien Luftstrahl*, Forschung 2, 379 (1931).
- [5] P. DE HALLER, *Untersuchungen über die durch Kavitation hervorgerufenen Korrosionen*, Schweiz. Bauztg. 101, 243–246 und 260–264 (1933).
- [6] G. DÄTWYLER, *Der Einfluss des statischen Aufbaues auf die Verdrehungen des elastischen Tragflügels*, Schweizer Aero-Rev. 9, 87–88 (1934).
- [7] C. STREIFF, *Turbinen- und Pumpenspeicheranlagen mit Gegendruck*, Escher-Wyss-Mitt. 8, 3–10 (1935).
- [8] G. DÄTWYLER, *Calculations of the Effect of Wing Twist on the Air Forces Acting on a Monoplane Wing*, NACA TN Nr. 520 (1935).
- [9] P. DE HALLER, *Versuche mit dem Escher-Wyss-Verstellpropeller des Motorbootes «Etzel» am Modell und am fertigen Schiff*, Escher-Wyss-Mitt. 8, 68–72 (1935).
- [10] P. DE HALLER, *Note sur l'autorotation d'un fuselage*, Schweiz. Bauztg. 110, 11–12 (1937).
- [11] E. PREISWERK, *Application of the Methods of Gas Dynamics to Water Flows with Free Surface*, NACA TM Nr. 934, 1940; NACA TM Nr. 935, 1940.
- [12] A. BIOLLEY, *Hilfsmittel zur Verringerung der Verluste in scharfen Krümmern*, Schweiz. Bauztg. 118, 85–86 (1941).

- [13] M. RAS, *Contribution à l'étude de la couche limite aspirée*, Dissertation (Verlag Birkhäuser, Basel 1941).
- [14] G. DÄTWYLER, *Zwei Beiträge zur Hitzdraht-Messmethode*, Helv. Phys. Acta 15, 266–272 (1942).
- [15] G. DÄTWYLER, *Über selbsterregte Schwingungen von Flugzeugteilen bei anliegender Strömung*, Flugwehr u. Tech. 4, 270–274 (1942).
- [16] D. BAZJANAC, *Untersuchungen mit Hilfe der elektrischen Analogie über den Einfluss der Luftstrahlbegrenzung in Windkanälen auf Tragflügelmessungen*, Diss. ETH (Verlag Leemann, Zürich 1943).
- [17] J. PATRY, *Instabilité d'une rangée de tourbillons de long d'une paroi*, Helv. Phys. Acta 16, 83–90 (1943).
- [18] M. A. IBRAHIM und M. A. HASSAN, *Druckverluste in Abzweigungen von quadratischen Kanälen*, Schweiz. Bauztg. 124, 48–50 (1944).
- [19] F. FELDMANN, *Windkanaluntersuchung am Modell einer Möve*, Schweizer Aero-Rev. 19, 219–222 (1944).
- [20] E. BRANDENBERGER und P. DE HALLER, *Untersuchungen über Tropfenschlag-erosion*, Schweiz. Arch. angew. Wiss. Tech. 10, 331–340 und 379–386 (1944).
- [21] K. R. SCHEUTER, *Theoretische Betrachtungen über Gasturbine und Strahlantrieb für Flugzeuge*, Flugwehr u. Tech. 7, 209–214 (1945).
- [22] H. QUIBY, *Compte-rendu des essais de la turbine aérodynamique Escher Wyss, A. K.*, Schweiz. Bauztg. 125, 269–273 und 279–282 (1945).
- [23] C. KELLER, *Cheap Power from Coal and Gases*, Colliery Eng. 23, 236–240 (1946).
- [24] C. COLOMBI, *La turbine aérodynamique en circuit fermé (AK)*, Chaleur et Industrie 27, 5–15, 39–48, 60–68 (1946).
- [25] F. SALZMANN, *Remarks on Regulation Theory for Thermal Power Plants Employing Closed Gas Cycles*, Amer. Soc. Mech. Engrs., Advanced Papers Nr. 46-SA-29 for Meeting June 1946. 19 p.
- [26] C. KELLER, *Escher-Wyss AK Closed Cycle Turbine, Its Actual Development and Future Prospects*, Amer. Soc. mech. Engrs. Trans. 68, 791–812, 812–822 (discussion) (1946).
- [27] K. R. SCHEUTER, *Theoretische Betrachtungen über einige Strahltriebwerke*, Flugwehr u. Tech. 8, 290–295 und 318–323 (1946).
- [28] F. FELDMANN, *Kompressibilitätseffekte in der Flugtechnik*, Interavia 1, 55–62 (1946).
- [29] P. MAEDER, *Methode zur einfachen Berechnung der Flugleistungen von Flugzeugen mit Turbotriebwerken*, Flugwehr u. Tech. 9, 104–106 (1947).
- [30] N. ROTT, B. CHAIX und Z. PLASKOWSKI, *Ein Diagramm zur Beurteilung der Feuchtigkeitsverhältnisse in rascher Luftströmung*, Schweiz. Bauztg. 66, 555–556 (1948).
- [31] E. MÜHLEMANN, *Zur Aufwertung der Wirkungsgrade von Überdruck-Wasserturbinen (nach Formeln von J. ACKERET)*, Schweiz. Bauztg. 66, 331–333 (1948).
- [32] B. CHAIX, *Le rendement de la compression par ondes de choc stationnaires dans un gaz animé d'une vitesse supersonique*, Schweiz. Arch. angew. Wiss. Tech. 14, 39–49 und 161–169 (1948).
- [33] W. PFENNINGER, *Experiments on a Laminar Suction Airfoil of 17% Thickness*, J. aeron. Sci. 16, 227–236 (1949).
- [34] Z. PLASKOWSKI, *Zur Anwendung von Zusatzraketen bei schnellen Jagdflugzeugen*, Flugwehr u. Tech. 12, 134–139 (1950).
- [35] N. ROTT, *Flügelerschwingungsformen in ebener kompressibler Potentialströmung*, Z. angew. Math. Phys. 1, 380–410 (1950).

- [36] Z. PLASKOWSKI, *The Use of Auxiliary Rockets in High Speed Aircraft*, Aircr. Engng. 23, 72–75 (1951).
- [37] N. ROTT, *Über die Wirksamkeit von Flügelendklappen*, Z. angew. Math. Phys. 2, 208–212 (1951).
- [38] H. SPRENGER, *Beobachtungen an Wirbelrohren*, Z. angew. Math. Phys. 2, 293 bis 300 (1951).
- [39] K. ISERLAND, *Über die Auslaufbremsung von Strahl-Flugzeugen, insbesondere mit Hilfe des Triebwerkstrahles*, Interavia 8, 151–154 (1953).
- [40] Z. PLASKOWSKI, *Über ringförmige Tragflügel*, 4. intern. Astronaut. Kongress über Probleme der Weltraumforschung (Verlag Laubscher & Co., Biel 1953), S. 75–79.
- [41] K. ISERLAND, *Strahlumlenkung für Bremszwecke*, 4. intern. Astronaut. Kongress über Probleme der Weltraumforschung (Verlag Laubscher & Co., Biel 1953), S. 80–82.
- [42] H. R. VOELLMY, *La pesée des forces aérodynamiques sur un corps de révolution et le calcul élémentaire de la composante normale*, 4. intern. Astronaut. Kongress über Probleme der Weltraumforschung (Verlag Laubscher & Co., Biel 1953), S. 83–88.
- [43] H. R. VOELLMY, *Aerodynamische Kräfte auf schlanke Rotationskörper*, Z. angew. Math. Phys. 5, 263–269 (1954).
- [44] Z. PLASKOWSKI, *Neue Startmethode für Flugzeuge: der Punkt-Start*, Flugwehr u. Tech. 17, 143–147 (1955).
- [45] H. SPRENGER, *Neue Erkenntnisse über thermische Effekte beim Expandieren von Gasen*, Z. Schweisstechnik 46, 227–246 (1956).
- [46] H. SPRENGER, *Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss der Eintrittsgrenzschicht auf die Druckumsetzung in geraden und gekrümmten Diffusoren*, Z. angew. Math. Phys. 7, 372–374 (1956).
- [47] A. HAERTER, *Über die Einflüsse der Pfeilung auf die aerodynamischen Eigenschaften der Tragflügel*, Flugwehr u. Tech. 19, 157–159 und 187–189 (1957).
- [48] L. MEYER, *Zur Theorie der Flügelgitter*, Z. angew. Math. Phys. 8, 316–318 (1957).

Zusammengestellt von TH. GINSBURG, L. MEYER und H. SPRENGER



## Professor Dr. sc. techn. Jakob Ackeret und die schweizerische Maschinenindustrie

VON HANS GYGI, Zürich<sup>1)</sup>

Seien wir froh, dass es Geburtstage gibt. Sie dienen uns als willkommener Anlass und geeigneter Rahmen, um Freunden oder Mitarbeitern gegenüber jenen Dank auszusprechen, den wir im stillen schon lange für sie hegen, so auch heute, am 60. Geburtstag von Prof. Dr. sc. techn. JAKOB ACKERET, dem langjährigen Freund unserer Firma und hochverdienten Förderer des schweizerischen Maschinenbaues. Wir gratulieren dem Jubilar zum Abschluss des sechsten Jahrzehntes, und wir danken ihm für all die fruchtbare Forschertätigkeit und all die pädagogischen Mühen, mit denen diese sechzig Jahre bis zum Rande angefüllt waren und die unserem Wirtschaftszweig sichern Gewinn brachten. ACKERET begnügte sich jedoch nicht damit, die technische Entwicklung durch originelle und geistreiche Theorien zu unterstützen, er nahm auch stets regen Anteil an der Realisierung seiner Ideen. Was dies alles für die gesamtschweizerische Wirtschaft zu bedeuten hat, ist uns wohl bewusst.

Unser Land verfügt weder über nennenswerte Bodenschätze noch über genügend agrarische Reserven. Könnten wir diesen Mangel nicht durch industriellen Fleiss ausgleichen, so würde sich unser heutiger Lebensstandard kaum merklich von demjenigen der alten Eidgenossen unterscheiden.

In Wirklichkeit aber zählt die Schweiz, das ehemalige typische Bauernland, heute nicht nur zu den am meisten industrialisierten, sondern auch zu den in zivilisatorischer Hinsicht am weitesten fortgeschrittenen Staaten der Welt. Da sich der Umschwung jedoch rasch und ohne schwerwiegende Revolutionserscheinungen vollzogen hat, ist er bis heute noch nicht überall ins Volksbewusstsein eingedrungen.

Die nachstehenden, dem Statistischen Jahrbuch der Schweiz, Ausgabe 1955, entnommenen Zahlen veranschaulichen eindrücklich die industrielle Entwicklung:

	1888	1910	1930	1950
Total Berufstätige	1 304 834	1 783 195	1 942 626	2 155 656
In diesen Zahlen sind enthalten:				
Berufstätige				
im Land- und Forstwesen	488 530	477 118	413 336	355 427
in Industrie und Handwerk	539 856	805 148	852 371	998 041

<sup>1)</sup> Escher Wyss AG.



Der Maschinen- und Apparatebau einschliesslich der Fahrzeug-, Eisen- und Stahlwarenproduktion hat sich besonders stark entwickelt:

	1888	1910	1930	1950
Berufstätige	37 567	99 238	172 226	266 305

Die Exportsummen der Maschinen- und Apparatefabriken zeigen entsprechend grosse Zunahmen:

	1900	1925	1950	1955	1956
Ausfuhr des Maschinen- und Apparatebaues in Millionen Franken	61	346	1230	1833	2041

Bei den obigen Exportsummen sind die Werte für die Jahre 1900 und 1925 früheren Statistischen Jahrbüchern entnommen. Bei der Beurteilung der Exportsummen ist zu berücksichtigen, dass der Kaufwert des Frankens beträchtlich gesunken ist. Der Grosshandelsindex ist beispielsweise heute etwa zweimal höher als zu Beginn des Zweiten Weltkrieges. Andererseits darf angenommen werden, dass die effektiven Produktionszahlen der Maschinen- und Apparateindustrie etwa 25% höher liegen als die Exportbeträge.

In der Höhe der Ausfuhrbeträge folgen die Uhren- und die chemischen Industrien, die zusammen über 100000 Leuten Arbeit und Brot geben und die im Jahr 1955 eine Ausfuhr von 1077 und 923 Millionen Franken aufwiesen. An vierter Stelle unter den Industrien finden wir die Textilbranche mit einem Export für das Jahr 1955 von 884 Millionen Franken. Der vor allem im Ausland viel zitierte schweizerische Fremdenverkehr spielt in unserem Wirtschaftsleben wohl eine wichtige, aber keine entscheidende Rolle. Heute betragen die von ihm erzielten Umsätze etwa 1 Milliarde Schweizer Franken.

Diese nüchterne Zahlenaufstellung und die ergänzenden Bemerkungen zeigen drastisch den Aufstieg der Maschinenindustrie in den vergangenen Jahrzehnten. Derartige Entwicklungen sind nur möglich, wenn starke und überlegene Kräfte am Werk sind. Zu beachten ist im weiteren, dass einige Produkte der schweizerischen Maschinenindustrie, wie zum Beispiel die Dampfturbinen, praktisch überhaupt keinen «home market» haben. Es mag dies wie ein nationalökonomisches Wunder erscheinen, sprachen doch alle äusseren Umstände gegen eine solche Entwicklung. Wenn unsere Industrie erfolgreich auf dem Weltmarkt konkurrieren kann, so nur dank dem Umstand, dass sie, bei konkurrenzfähigen Preisen und bei gleichen Lieferbedingungen, höhere Qualität der Produkte zu bieten vermag. Voraussetzungen dieser Qualität aber sind ein tatkräftiges Unternehmertum, ein gut geschulter technischer Stab, ein tüchtiger Arbeiterstand sowie die erfolgreiche Forschertätigkeit wissenschaftlicher Institute. Im Dampfturbinenbau beispielsweise hätte die Schweiz

wohl niemals eine führende Stellung erringen können, ohne das Wirken von AUREL STODOLA. Und sie würde ihre Spitzenstellung bald eingebüsst haben, hätte Professor STODOLA nicht würdige Nachfolger gefunden, die heute seine Werke weiterführen, ergänzen und vollenden.

Zu den prominentesten Nachfolgern STODOLAS gehört unser Jubilar, der nach Abschluss seiner Studien an der Eidgenössischen Technischen Hochschule zwei Jahre lang Assistent des hervorragenden Lehrers und Forschers war. Später kam ACKERET ans Kaiser-Wilhelm-Institut in Göttingen zu LUDWIG PRANDTL und erhielt dort eine glänzende Einführung in die damals noch sehr junge Aerodynamik. Die Erfahrungen und Erkenntnisse der Göttinger Zeit sollten für seine spätere Karriere bestimmend sein.

Wieder zurück in Zürich, übernahm ACKERET die Leitung des hydraulischen Labors der Firma Escher Wyss, wo er sogleich eine überaus fruchtbare Tätigkeit entfaltete. In dieser Zeit standen die Vorschläge von KAPLAN für raschlaufende, propellerartige Wasserturbinen im Mittelpunkt der Diskussionen unter den Hydraulikern. ACKERET wandte die Ergebnisse der Tragflügeltheorie konsequent auf Berechnung und Bau dieser neuen Maschinengattung an und erreichte, dass schon die ersten Grossausführungen erfolgreich waren. Über das Wesen der Kavitationsphänomene, die bei raschlaufenden hydraulischen Maschinen einen entscheidenden Einfluss auf deren Gestaltung und ihren Anwendungsbereich haben, führten er und seine Schüler grundlegende Versuche und Studien durch. Er übertrug als erster und in konsequenter Weise die neugewonnenen aerodynamischen Erkenntnisse auf die Praxis und stellte damit den Strömungsmaschinenbau auf eine neue Basis. Die alten, umständlichen Versuchsmethoden mussten leicht überwachbaren Modellversuchen weichen. Gleichzeitig wurden die viel kompliziertere Messeinrichtungen erfordernden Medien Wasser und Dampf durch Luft ersetzt, ein Vorgehen, das erst seit dem Bekanntwerden der Ähnlichkeitsgesetze möglich wurde. Der Erfolg blieb nicht aus. Auf Grund der neuen Untersuchungsmethoden konnte die Formgebung von Schaufeln und Kanälen bald entscheidend verbessert werden, und die Wirkungsgrade der Strömungsmaschinen stiegen. Unter diesen Umständen kann es nicht verwundern, dass sich die von ACKERET entwickelte aerodynamische Versuchsmethode rasch überall einführte und heute eigentlich als Selbstverständlichkeit gilt. Eine grössere Anerkennung für den praktischen und originellen Geist ihres Schöpfers wäre kaum denkbar.

Im Jahre 1934 ernannte die ETH in Zürich ACKERET zum ordentlichen Professor für Aerodynamik. Fortan konnte der Jubilar bei der Ausbildung junger Ingenieure auch seine pädagogischen Talente voll zur Anwendung bringen und damit der schweizerischen Maschinenindustrie einen weiteren Dienst erweisen. Die lebendigen, oft brillanten Vorlesungen von ACKERET sind vielen ETH-Absolventen in bester Erinnerung; auch haben sie schon manchen Studenten zu eigener Gestaltung und selbständiger Forschungsarbeit angeregt.

ACKERET weiss eben aus eigener Anschauung, was die Industrie von ihren Ingenieuren verlangt.

Die anstrengende akademische Lehrtätigkeit konnte unseren Jubilar nicht davon abhalten, auch weiterhin in engem Kontakt mit der Praxis zu bleiben, Neues zu ergründen und Neues zu verwirklichen. Von den zahlreichen Erfindungen, mit denen er sich eingehend beschäftigte, seien hier jedoch nur diejenigen erwähnt, die in unserer Firma realisiert wurden.

Der Verstellpropeller für Schiffe entstand auf Grund aerodynamischer Modellversuche und fand erstmals Anwendung beim Motorschiff «Etzel» auf dem Zürichsee. Dabei bewährte er sich so gut, dass unmittelbar nach seiner Inbetriebnahme neue Bestellungen einliefen, darunter auch solche für Schlepper und Tanker. Auch konnte mit der weltbekannten schottischen Werft John Brown ein Lizenzabkommen getroffen werden. Dank diesem neuartigen Propeller lassen sich die Schiffe rascher und leichter manövrieren, ein Vorzug, der im Hinblick auf die wirtschaftliche Nutzung der Häfen und der Docks von grosser Bedeutung ist.

Neben dem Verstellpropeller für Schiffe entstand auf Anregung von ACKERET ein hydraulisch betätigter Verstellpropeller für Flugzeuge, der als erster seiner Art die Landebremse ermöglichte. Er wurde während des Zweiten Weltkrieges von der schweizerischen Armee gekauft und viel gebraucht. Dabei erfüllte auch er alle in ihn gesetzten Hoffnungen. Wenn der Verstellpropeller sich trotzdem in der Aviatik nicht durchsetzen wird, so weil die zunehmende Einführung des Düsenflugzeuges ihn mehr und mehr überflüssig macht.

Ganz anders das Axialgebläse. Dieses war im Prinzip zwar bereits bekannt, hingegen blieb es ACKERET vorbehalten, das Axialgebläse mit Hilfe der aerodynamischen Erkenntnisse theoretisch exakt zu erforschen, womit er seine Einführung in die Praxis gefördert hat. Das Axialgebläse eignet sich vor allem dort, wo grosse Volumen gefördert werden müssen, ferner findet es bei der Gasturbine Anwendung.

Die aufsehererregendste Erfindung von ACKERET ist wahrscheinlich die Gasturbine mit geschlossenem Kreislauf, die er in Zusammenarbeit mit CURT KELLER entwickelte (Schweizer Patent Nr. 189724). Der geschlossene Kreislauf ermöglicht es, durch blosse Druckpegeländerung eine Leistungsänderung herbeizuführen, so dass die volumetrische Beaufschlagung beinahe gleich bleibt und der Wirkungsgrad nur wenig absinkt. Vorteilhaft an dieser Bauart sind auch ihre relative Kleinheit sowie vor allem ihr indirektes Beheizungssystem. Dank dieser ist die Brennstoffwahl praktisch frei: es kommt auf jeden Fall nur reines Gas mit der Schaufelung in Berührung, so dass eine Verschmutzung ausgeschlossen erscheint. Von den verschiedenen bereits in Betrieb stehenden Gasturbinen sei hier nur die mit Kohlenstaub gefeuerte Anlage in Ravensburg erwähnt. Wie gross das Interesse an der originellen, völlig neuartigen Kraftmaschine ist, zeigen zahlreiche Lizenzverträge mit bedeutenden Industrie-

unternehmen in Deutschland, England, den USA und in Japan. Endlich bietet der geschlossene Kreislauf auch im Hinblick auf die Ausnützung der Atomkernenergie aussichtsreiche Möglichkeiten.

ACKERET machte sich im weiteren auch verdient durch seine Untersuchungen von flugtechnischen Fragen, so besonders Flügelprofilen, Profilgittern, und zwar auch für Überschallgeschwindigkeiten, Stossvorgänge usw., der Wirkung von Luftkräften auf Bauwerke, des Raketenantriebes und vielem anderem. Er erklärte den Einsturz der Tacoma-Brücke in den Vereinigten Staaten, er prüfte mit den neuesten Methoden das Eulersche Wasserrad und die Heissluftmaschine von ERICSSON. Ja er soll einst sogar eine ausgestopfte Möve auf ihre aerodynamischen Qualitäten hin untersucht haben. Nicht nur das von unserem Jubilar vorgetragene Fach, auch sein Temperament ist von dynamischer Art.

Die wissenschaftlichen Publikationen von ACKERET haben das erste Hundert bereits überschritten. Viele von ihnen fanden internationale Anerkennung, auch wurde ihr Autor in der Schweiz, in Österreich, Italien, Deutschland und in den Vereinigten Staaten mit verschiedenen akademischen Ehrungen bedacht.

«Das Wesentliche für den produktiven Techniker (oder Ingenieur) ist der Wille zur Gestaltung», schreibt THEODOR BOVERI in einem Aufsatz *Über die Erziehung zum Ingenieur*. Zum technischen Fortschritt braucht es also nicht nur wissenschaftliche Erkenntnisse, sondern ebenso sehr schöpferische Intuition und handwerklich-praktisches Verständnis. Bei ACKERET erscheinen alle diese drei Elemente in glücklicher Weise vereint. Im bürgerlich-handwerklichen Milieu seines Elternhauses, an den Drehbänken des Vaters lernte er den Sinn für Präzision, Verantwortung und Realität. Als Gelehrter verlor er sich deshalb nie in den Wolken der schönen Spekulationen, sondern er blieb sich stets der ökonomisch bedingten Begrenzungen sowie der wirtschaftlichen Notwendigkeiten bewusst. Gepaart mit diesem typisch schweizerischen Realismus sind bei ACKERET eine sprühende schöpferische Gestaltungsgabe und ein kristallklarer wissenschaftlicher Verstand, der es ihm erlaubt, die Probleme bis auf den Grund zu durchleuchten. Diese höchst seltene Kombination von sich widersprechenden Eigenschaften lassen ACKERET berufen erscheinen, jener Spaltung von Theorie und Praxis, die sowohl die Industrie als auch die Forschung bedroht, mit Erfolg entgegenzutreten. Er erinnert die Wissenschaft daran, dass sie unter ihren Formeln nicht die solide Basis der Realität verlieren darf, und er trägt das Seine dazu bei, dass die Industrie nicht in Routine erstarret. ACKERET erfüllt damit über seine akademische Lehr- und Forschungstätigkeit hinaus eine wertvolle Vermittlerrolle, für die wir ihm zu grossem Dank verpflichtet sind. Wir hoffen, dass es dem Jubilar vergönnt sein möge, seine gewichtige Mission noch lange und stets erfolgreich zu erfüllen.



## Professor Ackeret und die Landesverteidigung

VON RENÉ VON WATTENWYL, Bern<sup>1)</sup>

Die Zeiten sind vorbei, wo die Wichtigkeit einer Persönlichkeit für die Landesverteidigung am militärischen Rang und Gradabzeichen erkannt werden kann. Was es heute braucht, um Armee und Rüstung auf der Höhe der Erfordernisse zu halten, sind – neben militärischen Führern – Männer, welche nach Intelligenz, Können und Einstellung berufen sind, die Mächte der Wissenschaft und der Technik der Verteidigung des Vaterlandes dienstbar zu machen.

Nach Gesetz ist die Allgemeine Wehrpflicht auf die körperliche, militärische Dienstleistung jedes Wehrfähigen beschränkt. Kein Gesetz verlangt, dass auch die geistigen Gaben jedes einzelnen der Landesverteidigung dienstbar gemacht werden müssen. Freiwilligkeit ist der Grundsatz, der die geistige Dienstleistung ausserhalb der Armee beherrscht.

Es ist ein grosses Glück für unser Land, dass wir über eine im Verhältnis zur Einwohnerzahl grosse Anzahl von Männern verfügen die, im Besitze ausgezeichneter wissenschaftlicher und technischer Fähigkeiten, bereit sind, diese ohne Ehrenkleid und ohne Gradabzeichen voll und ganz in den Dienst des Landes zu stellen. JAKOB ACKERET ist einer der Hervorragendsten unter ihnen.

Obleich nicht Offizier, bekundete ACKERET schon in jungen Jahren ein waches Interesse für die militärische Seite der Wissensgebiete, denen er beruflich am nächsten stand. Frühzeitig nahmen die militärischen Behörden seinen Rat für Fragen des Flugmaterials und der Ballistik in Anspruch. ACKERET war ein weit über die Landesgrenzen hinaus bekannter, führender Aerodynamiker, als im Jahre 1943 die unter der Abkürzung KMF bekannte Kommission für militärische Flugzeugbeschaffung gegründet wurde. Es war gegeben, ihn um seine Mitarbeit in dieser Kommission zu ersuchen. Von der Gründung an war er ohne Unterbruch eines der einflussreichsten Mitglieder dieses Gremiums.

Die Mitgliedschaft bei der Kommission für militärische Flugzeugbeschaffung ist keine Sinekure. Unter den zahlreichen militärischen Fachkommissionen gibt es wenige, welche mit der gleichen Intensität, aber auch mit der gleichen Gründlichkeit die ihnen obliegenden Aufgaben behandeln. Zusammengesetzt aus Vertretern der Fliegertruppe, des Generalstabes, der Wissenschaft, der Industrie und der Kriegstechnik, bildet sie das zentrale Planungs- und Begutachtungsorgan für alle Fragen des militärischen Flugmaterials. Wenn sie auch

---

<sup>1)</sup> Kriegstechnische Abteilung des EMD.

keine Entscheide zu fällen hat – diese sind der Landesverteidigungskommission und den politischen Organen vorbehalten –, so lastet doch eine schwere Verantwortung auf ihr und das um so mehr, als das Flugzeuggebiet mehr als fast jeder andere Teil der Rüstungsfrage die Öffentlichkeit im Banne hält und Gegenstand lebhaftester Anteilnahme des souveränen Volkes ist.

Freilich besteht die Aufgabe dieser Kommission nicht in der militärischen Zielsetzung. Dies ist niemals Sache der Kriegstechniker. Wie aber ein von der militärischen Führung gestecktes Ziel materiell unter den günstigsten Bedingungen erreicht werden kann, diese Frage erfordert Überlegungen wissenschaftlicher, technischer und wirtschaftlicher Art, die über das rein militärische Wissensgebiet bei weitem hinausreichen. Zur richtigen Beurteilung solcher schwerwiegender Fragen braucht es Fachleute ersten Ranges von der Art ACKERETS.

Unter den zahlreichen konkreten Problemen, welche der KMF während der Amtszeit von Prof. ACKERET zugewiesen wurden oder ihr heute noch obliegen, seien nur einige erwähnt:

Welches Vertrauen konnte man am Ende des Zweiten Weltkrieges dem Gasturbinenantrieb bei Flugzeugen entgegenbringen? War ein rascher Übergang auf Flugzeuge mit Düsentriebwerken, wie zum Beispiel die Vampire, gerechtfertigt? Sollte die Eigenentwicklung von Flugzeugen in der Schweiz eingestellt werden, oder war es richtig, sie weiterzuführen? Soll die Entwicklung in kleinen Schritten vorangehen, auf die Gefahr, nach Fertigstellung etwas schon Veraltetes zu besitzen, oder durfte man sich zu revolutionären Projekten entschliessen mit allen Risiken, welche diese einschliessen? Wo ist das richtige Mass? Soll die Fabrikation von Flugzeugen im Inland weitergeführt werden, oder muss sie endgültig den Großstaaten überlassen werden? Welches Vertrauen verdienen sensationelle Ankündigungen neuen Materials in Zeitschriften? Wann ist der Augenblick gekommen, um eine in die Hunderte von Millionen Franken gehende Bestellung aufzugeben?

Man ermisst die Schwere der Verantwortungslast derjenigen, welche dazu berufen sind, auf solche Fragen zu antworten. ACKERET hat sich dieser Verantwortung nie entzogen und trägt seit über 12 Jahren tapfer seinen Teil, unbekümmert um die nie zu vermeidende unsachliche Kritik. Gespannt hört man an den Sitzungen auf seine Meinung. Mass, vernünftiges Mass in allem, ist dasjenige, was aus seinen Voten klingt; Besonnenheit und Ruhe gewinnt das Auditorium, wenn er spricht.

Als Ende 1950 der verdiente Vorsitzende der KMF, Oberst ALFRED BÜCHI, aus Altersgründen sein Amt niederlegte, wurde JAKOB ACKERET zur allgemeinen Genugtuung zum Präsidenten ernannt, womit wohl zum erstenmal ein Zivilist an eine so bedeutende Stellung im Militärdepartement gelangte. Damit wurde das Mass seiner Verantwortung bei der Vorbereitung der Rüstungsarbeit noch einmal erhöht. Die militärischen Behörden bringen ihm Vertrauen ent-



gegen und sind ihm dankbar für seine auf dem ungeschriebenen Gesetz der Wehrpflicht von Intelligenz und Tüchtigkeit beruhende Arbeit im Dienste der Landesverteidigung.

Mit der Tätigkeit in der Kommission für militärische Flugzeugbeschaffung ist aber die Arbeit von ACKERET für die Landesverteidigung keineswegs erschöpft. Es wäre undankbar, nicht auch in diesem Zusammenhang an seine Lehrtätigkeit zu denken, welche eine grosse Anzahl tüchtiger junger Aerodynamiker hervorgebracht hat. Wenn auch infolge der Verhältnisse manche von ihnen ins Ausland abwandern, so wirkt doch eine grosse Reihe direkt oder indirekt an unserer Rüstungsarbeit mit.

Endlich befindet sich ACKERET unter den Gründern der Schweizerischen Kriegstechnischen Gesellschaft, jener Gesellschaft, welche berufen ist, Wege zu finden, um alle im Lande vorhandenen Kapazitäten zur Mitarbeit auf kriegstechnischem Gebiete heranzuziehen und die Kriegstechnische Abteilung in ihrer erdrückenden Arbeit nach Kräften zu unterstützen.

Es ist eine Ehre für die militärischen Behörden des Landes, mit Männern wie JAKOB ACKERET zusammenarbeiten zu dürfen.

## Ackeret in Göttingen

Von ALBERT BETZ, Göttingen

Im Herbst 1921 tauchte in Göttingen ein junger Schweizer Diplom-Ingenieur auf. Er erzählte, dass er Assistent bei Professor STODOLA gewesen sei und sich dabei eine kleine Summe gespart habe, von der er hoffe, bei den damaligen Inflationsverhältnissen in Deutschland ein Jahr lang in Göttingen leben zu können. Es war sein dringender Wunsch, an der Aerodynamischen Versuchsanstalt mitarbeiten zu können, um seine Kenntnisse auf dem Strömungsgebiet zu vervollkommen. Er hiess JAKOB ACKERET. Es sind ja schon viele junge Leute nach Göttingen gekommen, um in der Schule von PRANDTL sich weiterzubilden oder den Doktor zu machen. ACKERETS Tätigkeit an der AVA unterschied sich aber von Anfang an stark von der dieser vielen. Er beschränkte sich nicht auf eine bestimmte Aufgabe, sondern half immer da mit, wo man ihn gerade gut brauchen konnte. Er war nicht nur Lernender, sondern übte bald auf Grund seiner besonderen Kenntnisse, seiner klaren Auffassungsgabe und vor allem seiner tatkräftigen Schaffensfreude selbst einen starken Einfluss auf das wissenschaftliche Leben in der AVA in Göttingen aus. Es war ein glücklicher Umstand, dass etwa ein Jahr nach seinem Eintreffen in Göttingen Dr. WIESELSBERGER aus der AVA ausschied, um nach Japan zu gehen. Professor PRANDTL ergriff mit Freuden die Möglichkeit, ACKERET die hierdurch freiwerdende Assistentenstelle anzubieten und ihn so noch länger in Göttingen zu behalten.

In der ersten Zeit half mir ACKERET bei Versuchen, die ich für die Siemens-Schuckert-Werke an Axialgebläsen zur Entwicklung des Siemens-Betz-Schraubenlüfters durchführte. Weiterhin unterstützte er mich sehr wirksam bei der Entwicklung von schnelllaufenden Elektromotoren (30000 U/min), die zum Antrieb von Propellern der Flugzeugmodelle im Windkanal gebraucht wurden[1]<sup>1)</sup>. Ohne seine sachkundige Hilfe wäre ich wohl kaum imstande gewesen, diese ungewöhnliche und schwierige Konstruktion zu einem brauchbaren Ergebnis zu führen. Weitere Arbeiten, die unter seiner tatkräftigen Leitung entstanden, galten unter anderm der Untersuchung des Auftriebes von rotierenden Walzen (Magnus-Effekt) und seiner technischen Verwendung [2] sowie der Grenzschichtabsaugung zur Erhöhung des Auftriebes von Tragflügeln oder zur

---

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 36.

Verkürzung von Diffusoren [3]. Diese Aufgaben waren durch das Bestreben von FLETTNER angeregt worden, die Segelschiffe zu modernisieren. Als Ergebnis ist ja damals die «Buckau» mit Erfolg zu einem «Rotorschiff» umgebaut worden [2].

Als dann später Mittel zum Ausbau der AVA zu einem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung zur Verfügung standen, widmete er sich vor allem dem Entwurf, dem Bau und der Einrichtung dieses neuen Instituts. Auch konnte er dann in ihm noch grundlegende Versuche über Kavitation und Gasdynamik durchführen. Er arbeitete dabei sehr eng mit Herrn BUSEMANN zusammen, und aus dieser Zusammenarbeit ist eine enge Freundschaft entstanden.

Neben seiner wissenschaftlichen und technischen Tätigkeit bewährte sich ACKERET bereits als Führer des Nachwuchses und des Personals. Vielleicht erinnert er sich noch an einen nicht sonderlich begabten Doktoranden, der uns aber doch manchmal durch recht vernünftige Bemerkungen überraschte. Schliesslich fand aber ACKERET die Erklärung: Der Betreffende unterhielt sich der Reihe nach jeweils mit PRANDTL, ACKERET und mir und erzählte jedem von uns etwas von dem, was er von den beiden anderen gehört hatte, und erweckte dadurch den Anschein, als ob dies sein eigenes Geistesprodukt sei. Wie sehr sich Herr ACKERET schon damals für die Erzielung von Ergebnissen einsetzte, zeigt folgende Bemerkung. Er klagte mir einmal: «Man tut eigentlich den ganzen Tag gar nichts und ist doch abends hundsmüde. Ich weiss aber jetzt auch, woher das kommt. Unten am Windkanal wird schon seit einigen Tagen ein Versuch vorbereitet. Diese Vorbereitungen befriedigen nicht, deshalb werden sie immer fortgesetzt. Nun gehe ich hinunter und sage, dass der Versuch jetzt ausgeführt werden soll, obwohl ich natürlich auch weiss, dass die Vorbereitungen eigentlich nicht ausreichen. Ähnliche Entscheidungen muss ich immer wieder treffen, und diese Entschlüsse, die die anderen eben nicht aufbringen, die sind es, die einen so müde machen.»

Anfang 1927 schied ACKERET von Göttingen, um bei Escher Wyss eine leitende und verantwortliche Stelle zu übernehmen. Wir bedauerten sein Ausscheiden sehr. Auch ihm selbst fiel, wie ich glaube, der Abschied von Göttingen nicht ganz leicht. Aber er glaubte doch, den Ruf seiner Heimat und der heimatischen Industrie nicht überhören zu dürfen. Die Folgezeit zeigte ja auch, dass seine Tätigkeit in der Schweiz von höchster Wirksamkeit war. Seine Beziehungen zu Göttingen blieben auch nach seinem Ausscheiden sehr rege und angenehm. Es war uns daher eine grosse Freude, als er 1949 anlässlich des Jubiläums beim 25jährigen Bestehen des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung neben BUSEMANN zum auswärtigen wissenschaftlichen Mitglied dieses Instituts berufen wurde. An der Feier dieses Jubiläums nahm er persönlich teil und trug zur erfolgreichen Durchführung des damit verbundenen Kolloquiums ganz wesentlich bei.

Herr Professor ACKERET kann jetzt an seinem 60. Geburtstag mit Stolz und Befriedigung auf eine lange, arbeitsreiche, aber auch mit Erfolgen reich gesegnete Zeit zurückblicken. Wir hoffen, dass ihm dabei auch die Göttinger Zeit frohe Erinnerungen weckt. Möge sein reger Geist noch viele Jahre Gaben austeilen zum Nutzen der Wissenschaft und der ganzen Menschheit.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. ACKERET, *Motoren zum Antrieb von kleinen Modell-Luftschauben*, Z. Flugtech. 15, 101–103 (1924).
- [2] J. ACKERET, *Das Rotorschiff* (Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1925).
- [3] J. ACKERET, *Grenzschichtabsaugung*, Z. Ver. dtsch. Ing. 70, 1153–1158 (1926).

## Aus der Zusammenarbeit des Institutes für Aerodynamik mit der privaten Rüstungsindustrie

VON ALFRED GERBER, Zürich<sup>1)</sup>

Als anfangs der dreissiger Jahre J. ACKERET an die ETH berufen wurde, galt sein Hauptinteresse der Einrichtung und Ausgestaltung des Institutes für Aerodynamik (IfA). In diesen Jahren sind die heute noch in mancher Beziehung als bahnbrechend bekannten Versuchsanlagen, insbesondere der oft als Vorbild benützte Überschallkanal entstanden. Wenn wir jungen Doktoranden anfänglich die wissenschaftliche und industrielle Bedeutung der von ACKERET geschaffenen Anlagen nicht voll zu würdigen wussten, so wurden uns die Augen besonders durch die ausländischen Besucher geöffnet, die in grosser Zahl erschienen, um die neuartigen Kanäle und die darin erzielten Resultate zu sehen. Unter diesen Besuchern befanden sich schon damals die berühmtesten Aerodynamiker der ganzen Welt; ihre Urteile liessen uns aufhorchen und zeigten uns, wie sehr das IfA mit einem Schlag ins Rampenlicht der aerodynamischen Forschung gerückt war. Die Möglichkeiten und die Bedeutung erkennen, hiess aber gleichzeitig die Forderung der Zusammenarbeit mit der schweizerischen Industrie stellen. In konsequenter Verfolgung dieses Gedankens sind in den letzten 20 Jahren unter anderem verschiedene beachtliche Arbeiten auf dem Gebiete der Waffentechnik entstanden, von denen in der Folge einige Beispiele herausgegriffen seien.

### Entwicklung neuartiger Geschossformen

Bis zum Zweiten Weltkrieg wiesen sämtliche 20-mm-Granaten eine ausgesprochen stumpfe Form auf (Figur 1, Nr. 1). Die Geschosse waren sehr stabil, ergaben sehr gute Trefferbilder und konnten zufolge der breiten Spitze einen hochempfindlichen Zünder aufnehmen.

Als mit zunehmender Flugzeuggeschwindigkeit eine Verkürzung der Geschossflugzeit verlangt wurde, mussten Lösungen sowohl waffen- als auch munitionsseitig gesucht werden. Da Änderungen an der Waffe meist zeitraubend und teuer sind, versuchte man zuerst, die Möglichkeiten munitionsseitig auszuschöpfen. In mehrjähriger Zusammenarbeit zwischen dem IfA, W. HAACK, Berlin, und O. SCHWAGER, Waffenkonstruktionsabteilung, entstand

<sup>1)</sup> Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon Bührle & Co. und Contraves AG.



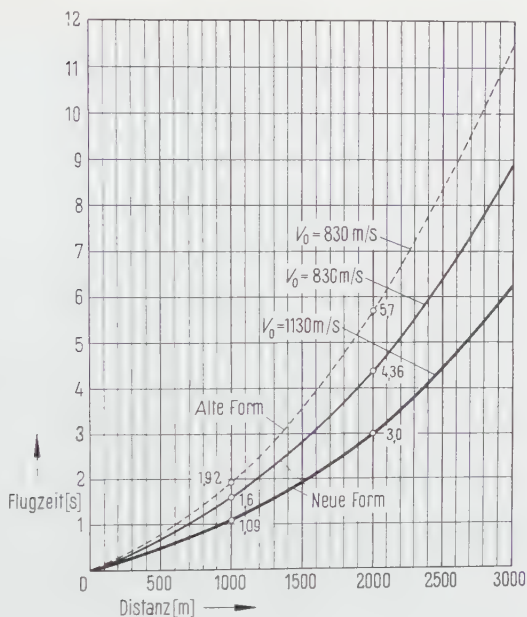
Figur 1

20-mm-Geschosse. 1 alte Geschossform,  $V_0 = 830$  m/s; 2 neue Geschossform,  $V_0 = 830$  m/s; 3 neue Geschossform,  $V_0 = 1130$  m/s.

die seither als «Spitzform» bekannte Oerlikon-Munition (Figur 1, Nr. 2). Die Verbesserung der Flugzeit ist aus Figur 2 ersichtlich. Während die alte Form auf 2 km eine Flugzeit von 5,7 s benötigte, zeigte die neue Form eine grosse Überlegenheit mit nur 4,36 s, und ihr Wert konnte später durch geänderte Waffe und Vergrösserung der Treibladung auf 3,0 s gesenkt werden, so dass es gelang, die Flugzeit auf die Entfernung von 2 km nahezu zu halbieren. Die enge, harmonische Zusammenarbeit zwischen Ballistiker und Waffenkonstrukteur hatte dieses erstaunliche Resultat zur Folge. Es war besonders erfreulich, dass es gelang, die Probleme grundsätzlich zu lösen und die Erkenntnisse auch auf grössere Kaliber (30, 35, 40, 42 und 50 mm) zu übertragen.

Parallel zu den Berechnungen und Windkanalversuchen wurden die schiess-technischen Messungen durchgeführt, wozu unter anderem auch Blitzlichtschattenaufnahmen des fliegenden Geschosses gehören (Figur 3). Sie gaben uns im besonderen Aufschluss über Stabilitätsverhältnisse kurz nach Verlassen





Figur 2

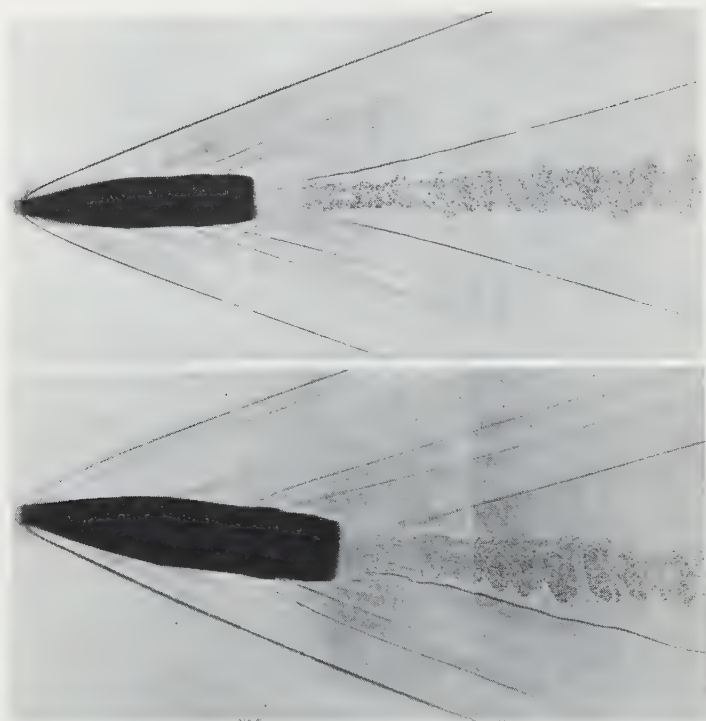
Flugzeiten der Geschosse in Abhängigkeit der Distanz.

der Mündung und gaben wertvolle Hinweise für die Weiterentwicklung. Diese Aufnahmen wurden von W. ROTH, Ballistische Versuchsanstalt, mit einer unter seiner Leitung entwickelten Apparatur gemacht. Dass diese Geschosse heute auch bei Geschwindigkeiten von über 1200 m/s einwandfrei fliegen, ist ein Beweis für die Gründlichkeit der seinerzeitigen Arbeit.

### Entwicklung von flügelstabilisierten Pulverraketen

Nach dem Zweiten Weltkrieg galten Pulverraketen mit 350 m/s maximaler Geschwindigkeit als «Hochgeschwindigkeits-Raketen». Bei unseren Entwicklungen wurden von Anfang an Geschwindigkeiten von über 600 m/s angestrebt, was zur Folge hatte, dass die bis dahin üblichen überkalibrigen Geschossköpfe aerodynamisch nicht brauchbar waren. Unter der Leitung von H. R. VOELLMY wurden Pulverraketenformen entwickelt, die ab Flugzeug, aber auch ab Boden mit besonders guter Präzision verschossen werden können und einen erstaunlich geringen Luftwiderstand aufweisen. Sie wurden anfänglich mit starrem Leitwerk, später auch mit Klappleitwerk für 8-cm- sowie auch für 5-cm-Geschosse entwickelt, die sich durchwegs bewährt haben (Figur 4).

Spezielle Untersuchungen mussten den Raketenaufnahmebehältern gewidmet werden. Auch hier ist ACKERET immer wieder mit Rat unseren Ingenieuren



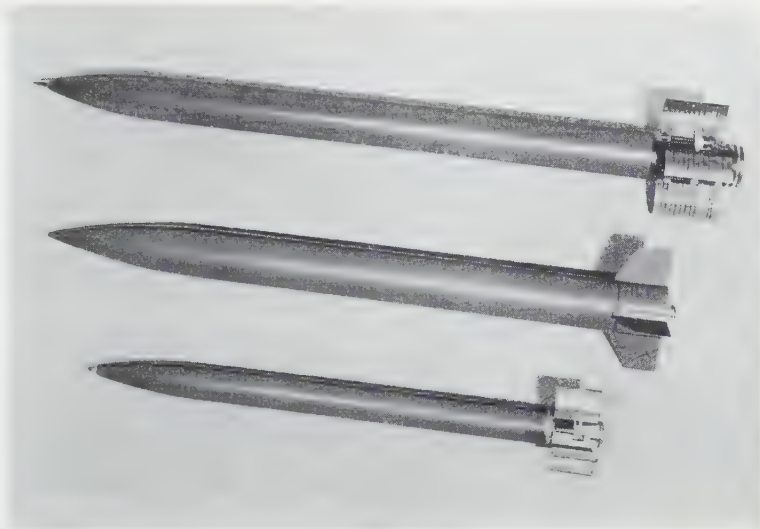
Figur 3

Schattenaufnahmen eines 20-mm-Geschosses kurz nach Verlassen der Mündung.  
Oben: stabil fliegend; unten: pendelnd.

beigestanden, auch dann, wenn zufolge starken Andranges am IfA die Messungen wie im vorliegenden Falle (Figur 5) im Windkanal des Flugzeugwerkes Emmen gemacht werden mussten.

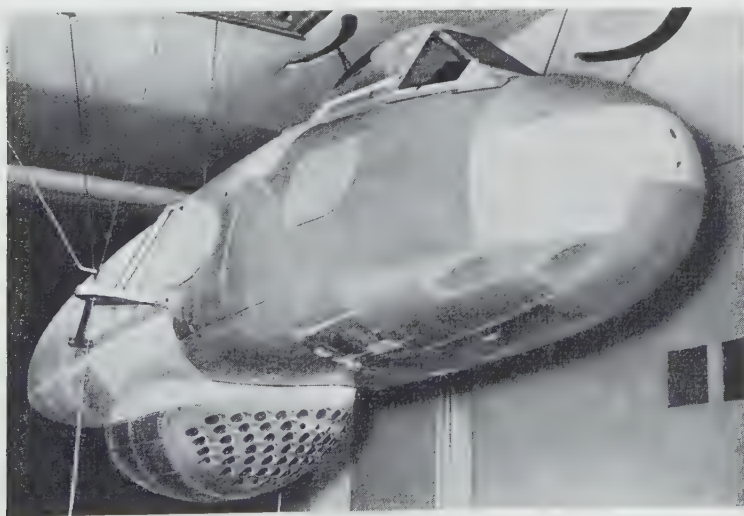
### Entwicklung der Fernlenkrakete Contraves-Oerlikon

Seit 1946, dem Beginn der Entwicklung unserer Fernlenkrakete, hat H. R. VOELLMY am IfA laufend die notwendigen aerodynamischen Messungen durchgeführt. So wurden Druckverteilungsmessungen am Rumpf des Geschosses und ganz speziell zwischen den Flügeln vorgenommen, wobei durch Integration der Druckverteilung die am Rumpf wirkenden Kräfte und Momente bestimmt wurden (Figur 6). Diese Messungen erfolgten sowohl im normalen Unterschallbereich als auch bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten sowie schliesslich auch im Überschallbereich (Figur 7). Im Laufe dieser Untersuchungen wurden sowohl die Geschossform als ganz besonders die Flügelform auf Grund der Mess-



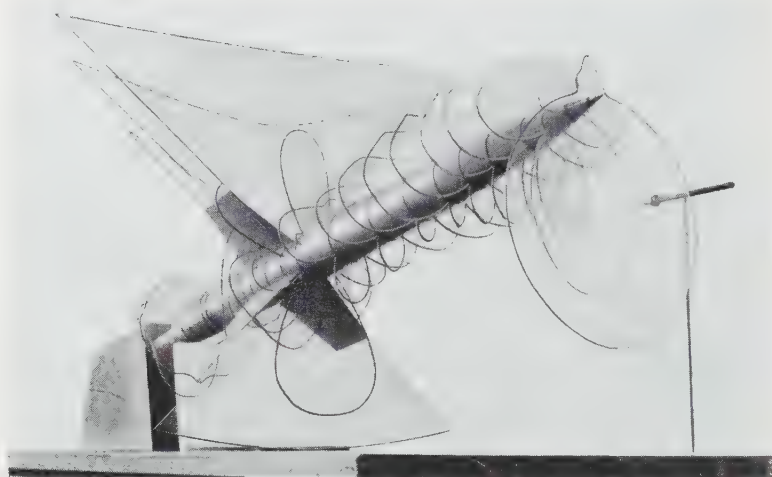
Figur 4

8-cm- und 5-cm-Oerlikon-Raketen mit Klappleitwerk sowie 8-cm-Rakete mit starrem Leitwerk.



Figur 5

Aufhängung eines Jagdflugzeugrumpfes mit 76fach-Raketenwerfer im grossen Windkanal des Flugzeugwerkes Emmen.



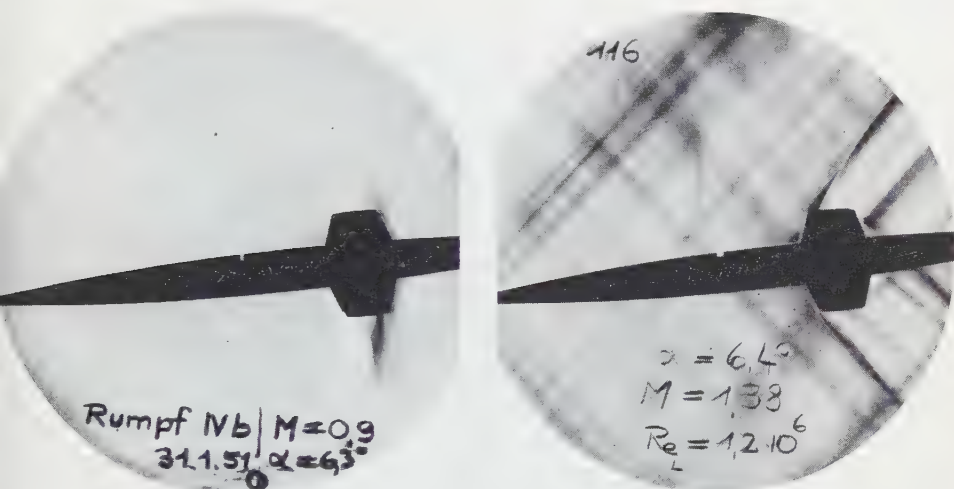
Figur 6

Schaumodell, die Druckverteilung bei Schrägströmung am Rumpf der Fernlenkrakete (1949) darstellend.

ergebnisse verändert, so dass zum Beispiel aus dem symmetrischen Trapezflügel später ein Deltaflügel entstand (Figur 8). Das tiefere Eindringen in die aerodynamischen Eigenschaften des Geschosses führte zur Anbringung von Leitwerkflächen zur Steuerung nach Brennschluss sowie zur Druckpunktänderung durch längs verschiebbare Tragflächen. Die Messungen haben als Grundlage für den Aufbau der Steuerung gedient und haben die exakte Berechnung der für die Steuerung notwendigen Koeffizienten ermöglicht. Diese nun über 12 Jahre ununterbrochenen weiterlaufenden Messungen bilden einen wesentlichen Bestandteil der Entwicklung der Fernlenkrakete, und es darf ohne Übertreibung behauptet werden, dass ohne die durch das IfA gegebenen Möglichkeiten eine ernsthafte Entwicklung eines solchen Flugkörpers undenkbar wäre. Von besonderem Interesse mag ein Auswertegerät sein, das im Laufe dieser Windkanalarbeiten entstanden ist und als Analog-Computer von der Contraves AG gebaut wurde. Dieses Gerät beschleunigte die erwähnte Arbeit und half besonders, die Kanalbenützungszeit auf ein Minimum zu reduzieren.

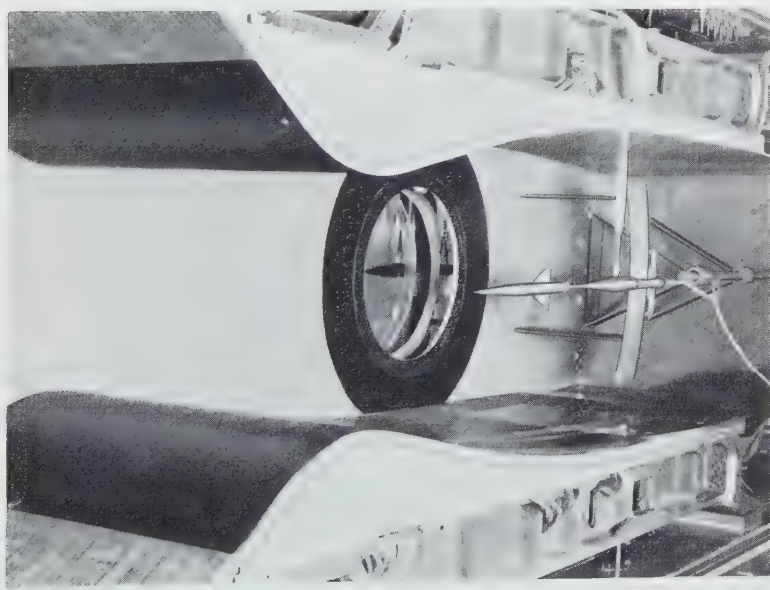
### Entwicklung einer drahtgelenkten Kleinrakete zur Panzerabwehr

Die Erkenntnisse, die bei der vorstehend beschriebenen Fliegerabwehrrakete gesammelt wurden, zeigten, dass bei vereinfachten Flugbedingungen (zum Beispiel konstanter Geschwindigkeit) auch die Steuerung in ihrem Aufbau wesentlich vereinfacht gestaltet werden kann. Diese Ideen wurden zur Ent-



Figur 7

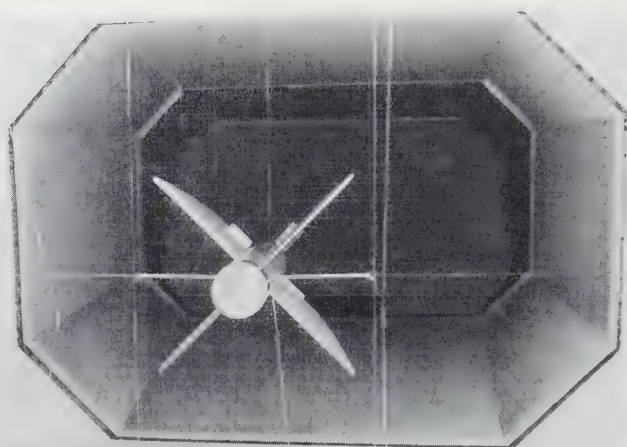
Schlierenbilder der Trapezflügelrakete bei Unter- und Überschall ( $M = 0,9$  und  $M = 1,38$ ).



Figur 8

Ansicht der geöffneten Meßstrecke des Überschallkanals des IfA mit Düse für  $M = 2$  und Deltaflügelrakete.





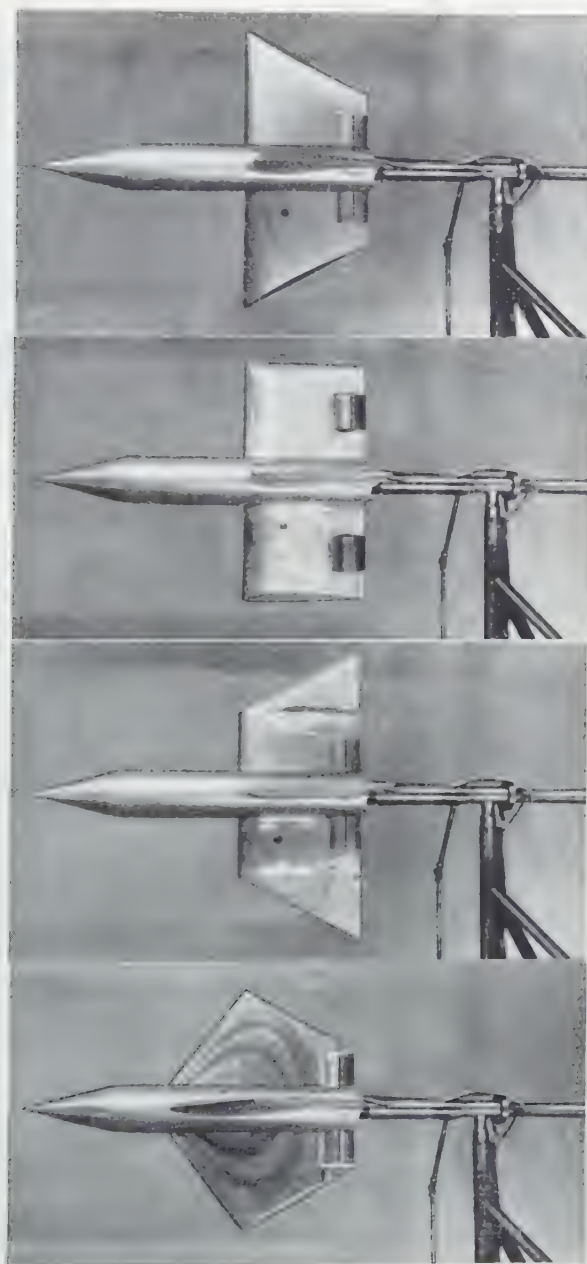
Figur 9

Modell der Kleinrakete im grossen Windkanal der ETH bei einer 3-Komponenten-Messung.

wicklung einer über Draht gelenkten, pulvergetriebenen Panzerabwehrrakete angewendet, wobei erstmalig für uns eine Spoilersteuerung vorgesehen wurde. Die von K. Iserland, Contraves AG, im IfA durchgeführten Messungen haben Aufschluss gegeben über den Widerstand sowie über die aerodynamischen und steuerungstechnischen Eigenschaften, wobei die Spoilersteuerung auch grundlagemässig für den in Frage kommenden Geschwindigkeitsbereich untersucht werden konnte (Figuren 9 und 10). Spezielle Messungen galten der Stabilität sowie den Rollmomenten bei grossen Anstellwinkeln (Figur 11). Besonders interessant war es, in diesem Zusammenhang erstmalig die Windkanalergebnisse zur Simulation des Flugverhaltens auf einer grösseren Integrieranlage beizuziehen. Diese Methode gestattete, die Flugeigenschaften des neuartigen Flugkörpers viel schneller und rationeller zu ermitteln, als dies durch Versuchsflüge möglich gewesen wäre. Hier sind die ausführlichen Windkanalversuche wesentlich an der relativ kurzen Entwicklungszeit des Gerätes beteiligt.

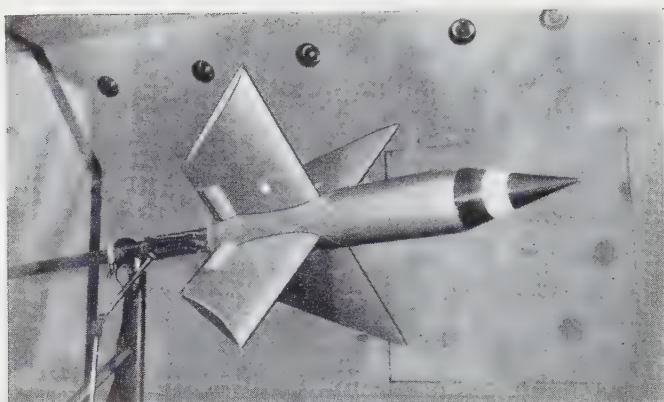
Die vorstehend angeführten Beispiele, aus dem grossen Tätigkeitsprogramm der letzten 20 Jahre ausgewählt, haben gezeigt, dass die Zusammenarbeit zwischen ACKERET, seinen Mitarbeitern im IfA, die hier aus Platzgründen leider nicht einzeln aufgeführt werden können, sowie den Ingenieuren unserer Firmen zu interessanten, direkt anwendbaren Erkenntnissen geführt hat. Dies ist nicht nur der zweckmässigen technischen Ausrüstung des IfA, sondern in erster Linie der zielstrebigem, erfahrenen Führung durch dessen Leiter, seinem tiefen Wissen und seiner sprichwörtlichen Gründlichkeit, die für alle Mitarbeiter wegleitend und verpflichtend ist, zu verdanken. Ohne Zweifel ist ein grosser Teil des gemeinsamen Erfolges der stets guten persönlichen Zusammen-





Figur 10

Untersuchung verschiedener Flügelformen für die Unterschallkleinrakete.



Figur 11

Einbau der Kleinrakete mit Spoilersteuerung im Windkanal des IfA für Rollmomentmessungen und Rollversuche.

arbeit aller Stufen zuzuschreiben, und ich möchte hiermit auch im Namen aller meiner Mitarbeiter Herrn Prof. Dr. J. ACKERET und dem IfA hierfür ganz besonders danken und damit den Wunsch auf weitere erfolgreiche Tätigkeit verbinden.

## Aus dem Werdegang der aerodynamischen Wärmekraftanlagen (AK-Anlage)

VON CURT KELLER, Zürich<sup>1)</sup>

Schon in den ersten Jahren seiner Tätigkeit bei Escher Wyss (1927-1931) beschäftigte sich ACKERET als Leiter des Wasserturbinenlabors nicht nur mit hydraulischen Maschinen, sondern er versuchte die neuen Erkenntnisse der Aero-, Hydro- und Gasdynamik auch bei Dampfturbinen, Gasturbinen und Kompressoren anzuwenden. Ich hatte als junger Ingenieur des Dampfturbinenbaues, der an Strömungs- und Schaufelungsproblemen arbeitete, oft Gelegenheit, mit ihm zusammenzusein, und der so anregende Kontakt wurde im Laufe der Zeit immer enger. Dies war damals, vor 30 Jahren, noch gar nicht so selbstverständlich, weil hydraulische und kalorische Maschinenbauer noch auf getrennten Wegen marschierten und die Vorschläge von ACKERET, der aus der neuen Göttinger Schule kam, in der Praxis bei der thermischen «Konkurrenz»-Abteilung nicht überall auf Gegenliebe stiessen. Die letzten Schüler von STODOLA und die ersten von ACKERET, zu denen auch ich gehörte, sahen aber, wieviel in Zukunft von der Flugtechnik und der modernen Prandtlischen Strömungslehre, die von den meisten Praktikern noch skeptisch betrachtet wurden, gelernt werden könnte. So folgten wir mit Begeisterung allen Überlegungen und Studien zur Weiterentwicklung der Gasturbine, die in verschiedenen Schweizer Firmen im Begriff stand, Eingang in die Praxis zu finden.

An einem Frühsommertag im Jahre 1935 sass ich wieder einmal auf der damals noch existierenden Dachterrasse des neuen Maschinenlabors der ETH mit ACKERET zusammen. Er war inzwischen Professor an der ETH geworden, was ihm Gelegenheit bot, viele Ideen früherer Jahre zu fördern und der Industrie zur Verwirklichung vorzuschlagen. Dazu gehörten auch die Pläne zur Wiederbelebung der alten Heissluftmaschine (Kolbenmaschine) aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts mit neuen Mitteln (Turbomaschinen). Die damals sich abzeichnende verbesserte und verfeinerte aerodynamische Formgebung der Schaufeln von Kompressoren und Turbinen in Anlehnung an die Tragflügelentwicklung liess eine entsprechende Erhöhung der Wirkungsgrade von Gasturbinen, speziell auf der Verdichterseite, erwarten. Rechnungen und Versuche an Axialgebläsen, die ich bei ACKERET 1934 beendet hatte, bestätigten die Erwartungen.

<sup>1)</sup> Escher Wyss AG.

An jenem Sommermorgen diskutierten wir thermodynamisch mögliche Kreisläufe, Entropiediagrammskizzen und Überschlagsrechnungen und kamen endlich zum Schluss, ich sollte mich näher der Berechnung und Projektausarbeitung einer neuartigen Wärmekraftmaschine annehmen, deren Möglichkeit wir schon so oft diskutiert hatten. So entstand die AK-Gemeinschaft, die jetzt über 20 Jahre alt ist und trotz unzähligen Besprechungen, Beschlüssen, Stimmungsumschwüngen, auch ohne feste Abmachungen oder Verträge zu unserer Befriedigung noch heute besteht. Diese lange AK-Zeit darf wohl auch als Beispiel für die traditionell enge und doch freie Zusammenarbeit der schweizerischen Wissenschaft und Praxis gelten. Als Nächstbeteiligter möchte ich darüber einiges berichten, zur späteren Erinnerung an eine wichtige Zeitspanne des schweizerischen Turbomaschinenbaues.

Mit Begeisterung hatte ich die Anregungen ACKERETS aufgegriffen, und im Sommer 1935 entstand ein eingehender Bericht mit Vorschlägen zum Bau einer neuartigen Wärmekraftanlage, den wir am 4. September 1935 der Geschäftsleitung von Escher Wyss unterbreiteten. Wir kamen darin zum Schluss, dass die Anwendung eines geschlossenen Kreislaufes unter Überdruck mit äusserer Wärmezufuhr neben den bekannten Dampf- und offenen Gasturbinenprozessen Vorteile bieten dürfte.

Die gegenüber allem Neuen und auf gesunder Basis Stehenden aufgeschlossenen Geschäftsleiter von Escher Wyss, J. SCHMIDHEINY und H. GYGI, die damals am Beginn ihres Wirkens für die Firma standen, unterstützten als sachverständige Ingenieure den Bau einer ersten 2000-kW-Versuchsanlage mit Freude, und auch der damalige Direktor der Turbinenabteilung, H. GUYER, trieb die Arbeiten mit allen Kräften voran. Das Prinzip der Anlage war einfach und leicht zu überblicken, es war aber doch viel Wagemut, Vertrauen und Initiative in der Firma nötig, um allein die ganze Anlage von recht beträchtlichem Ausmass und mit Vorstössen in konstruktives Neuland zu erstellen. Dies um so mehr, als der Bau in die Zeit vor dem Zweiten Weltkrieg mit ihrer unsichern Zukunft fiel.

Eine kleine Gruppe von nur einem halben Dutzend Berechnern und Konstrukteuren arbeitete mit Freude und Eifer, wussten doch alle, dass auch ACKERET hinter uns stand. Nach kurzer Konstruktions- und Fabrikationszeit von zweieinhalb Jahren kam die Anlage bereits im Frühsommer 1939 in Betrieb. Die schweren Kriegsjahre hemmten die Versuche und die Weiterentwicklung sehr stark, weil die Beschaffung des Materials für Sonderstähle und der nötigen Messinstrumente fast unmöglich wurde. Dank dem guten Geist und der Ausdauer aller Beteiligten kam es dann doch so weit, dass nach vielen widrigen Schwierigkeiten die offiziellen Abnahmeversuche durch Professor QUIBY am 12. und 13. Dezember 1944 durchgeführt werden konnten, welche alle in die Anlage gesetzten Erwartungen erfüllten. Am 18. und 25. Januar 1945 wurde die Anlage Behörden, Wissenschaftern und Industriellen vorge-

führt, wobei ACKERET den Hauptvortrag über die theoretisch-physikalischen Grundlagen des AK-Verfahrens hielt.

In der Zwischenzeit hatten sich viele in- und ausländische Fachleute mit dieser Wärmekraftmaschine befasst, und auch Persönlichkeiten wie STODOLA, dem ACKERET und ich zur Feier seines 80. Geburtstages in der Schweizerischen Bauzeitung vom 13. Mai 1939 die erste Veröffentlichung, *Eine aerodynamische Wärmekraftanlage*, widmeten, waren von den Zukunftsmöglichkeiten des Verfahrens überzeugt und unterstützten ihre Weiterentwicklung. Wir wählten damals als Gattungsbegriff diesen Namen, weil neue aerodynamische Erkenntnisse entscheidend zur Möglichkeit der Verwirklichung beitrugen.

Dem Vorschlag ACKERETS entsprechend, wurde auch in der Folge je nach dem Stand über die entscheidenden Entwicklungsphasen zuerst in der Schweizerischen Bauzeitung berichtet. Da hier nur einige Stufen des Werdeganges verfolgt werden können, sei auf diese Rechenschaftsberichte besonders hingewiesen<sup>2)</sup>.

Ein Durchlesen dieser Berichte erinnert auch in diesem Falle daran, wie mühsam, wechselvoll und kostspielig eine technische Neuentwicklung ist. Aber die wohlfundierte Überzeugung von ACKERET, dass sich das theoretisch als richtig Erkannte früher oder später auch in der Praxis durchsetzen werde, galt als Leitgedanken und Hilfe aller Beteiligten in guten und bösen Stunden.

Während des Baues der Versuchsanlage bei Escher Wyss nahm ACKERET regsten aktiven Anteil, was auch heute noch der Fall ist. Die Leitsätze der Entwicklung wurden von ihm schon in der ersten oben erwähnten Veröffentlichung umschrieben. Daraus sei die folgende Zusammenfassung zitiert, beschreibt sie doch das im Laufe der Zeit etwas in Vergessenheit geratene Ziel:

«Die neue Kraftanlage soll vor allem für grosse Antriebsleistungen bei gleichbleibender Drehzahl, also etwa für Stromerzeugung, geeignet sein. Sie muss mit verschiedenen Brennstoffen, wie Öl, Kohle, Gas, betrieben werden können und muss den thermischen Wirkungsgrad guter Dampfanlagen mindestens erreichen.

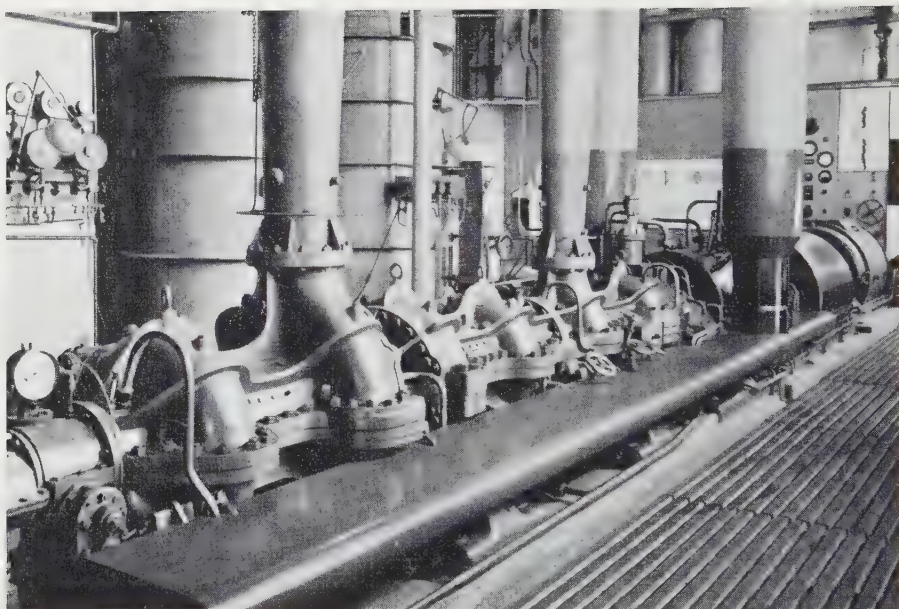
Sie soll nach dem Gleichdruckverfahren arbeiten, also keinerlei periodische Füll- oder Auspuffvorgänge bedingen mit den Nachteilen der Ventile, Klappen, Zündungen usw.

Sie soll den guten Wirkungsgrad nicht durch sehr hohe Temperaturen oder Drücke zu erreichen suchen, sondern mit mässigen Temperaturen durch weitgehende Ausnützung der Abwärme und durch sorgfältige Verminderung jeder einzelnen Verlustquelle.

---

<sup>2)</sup> *Eine aerodynamische Wärmekraftanlage*, Schweiz. Bauztg., 13. Mai 1939; *Zum gegenwärtigen Stand der Entwicklung der aerodynamischen Wärmekraftmaschine*, Schweiz. Bauztg., 22. Januar 1944; *Compte-rendu des essais de la turbine aérodynamique Escher Wyss AK*, Schweiz. Bauztg., 9./16. Juni 1945; *Heissluft-Turbinenanlagen mit geschlossenem Kreislauf. Geschichtliche Entwicklung, heutiger Stand und Zukunftsprobleme*, Schweiz. Bauztg., Juni 1957.





Figur 1

Maschinengruppe der ersten ölgefeuerten Versuchsanlage Zürich mit den vierteiligen Verdichtern und Turbinen.

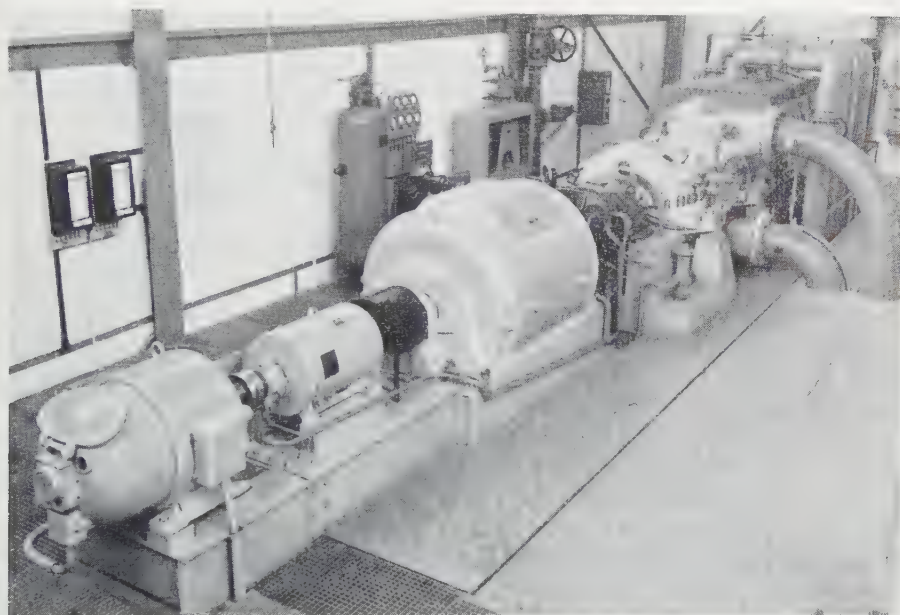
Zwecks Erhöhung der Betriebssicherheit sollen Verbrennungsprodukte nicht in bewegte Teile gelangen. Dadurch werden auch Veränderungen im Wirkungsgrad durch Abnützung und zeitlich wachsende Verschmutzung vermieden.

Man gelangt folgerichtig zu einer Konstruktion, die nicht durch Verwendung von Erfinderkniffen, sondern durch rücksichtslose Konsequenz in der Anwendung an sich teils bekannter Prinzipien gekennzeichnet ist, ähnlich wie das moderne Flugzeug, das seine überragende Leistung durch äusserste Vereinfachung an sich bekannter Formen erzielt und mehr durch Weglassen als durch Zufügen gewonnen hat.

Das von Escher Wyss angewandte und entwickelte Arbeitsverfahren stellt im Gegensatz zum bekannten Gasturbinenprozess einen geschlossenen Gaskreislauf dar, bestehend aus Gaserhitzer, Vorwärmer, Regenerator, Kompressor und Turbine. Die Wärmezufuhr erfolgt also durch metallische Flächen. Als Betriebsgas kommt natürlich in erster Linie Luft in Betracht, es sind aber bei geschlossenen Kreisläufen prinzipiell auch andere Gase verwendbar.»

In diesem Zusammenhang und als Beispiel für die vorausschauenden Anregungen ACKERETS und der in seinem Institut betriebenen Forschungsarbeiten sind die schon 1945 veröffentlichten Studien über den Einfluss verschiedenster





Figur 2

Vereinfachte Gruppe in neuerer Bauweise der ersten kohlenstaubgefeuerten Ravensburger Anlage gleicher Leistung.

Gase und Gasmischungen, wie zum Beispiel Helium, Stickstoff, Kohlensäure, auf die Gestaltgebung und die Arbeitsweise der geschlossenen Gasturbine typisch, Arbeiten, die heute im Zusammenhang mit zukünftigen Atomanlagen wiederum im Mittelpunkt technischer Diskussionen stehen. Aus dieser Zeit stammt auch der Entwurf einer 20-MW-Atomanlage mit gasgekühltem Reaktor und Gasturbine in geschlossenem Kreislauf<sup>3)</sup>.

Es dürfte ACKERET doch mit Genugtuung erfüllen, dass seine Vorschläge trotz den vielen zu überwindenden konstruktiven maschinenbaulichen Schwierigkeiten und Rückschlägen heute einem guten Ziel entgegengehen. Zu diesen Fortschritten haben auch die Bemühungen der Lizenznehmer des Systems im Ausland wesentlich beigetragen. Man kann heute feststellen, dass das Arbeitsprinzip ohne Änderungen beibehalten werden konnte und Schwierigkeiten prinzipieller Natur nicht auftraten. Die Arbeiten und Resultate an den bisherigen AK-Anlagen haben zudem auch andere Maschinenarten, wie Dampfturbinen und Kompressoren und gewöhnliche Gasturbinen, indirekt beeinflusst, wurden doch viele Erfahrungen mit Hochtemperaturbetrieb gesammelt.

Die erste industrielle Grossanlage von 12000 kW in Paris, anfangs 1952 in Betrieb gestellt, basierte noch auf lückenhaften Unterlagen. Über das Verhalten

<sup>3)</sup> Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. November 1946, August 1950, April 1957.

von Materialien war nach dem Krieg, als der Bau dieser Anlage in Angriff genommen wurde, noch weit weniger bekannt, als dies heute der Fall ist, und dies gilt auch für das Strömungsverhalten von Schaufeln in hochverdichteten Gasen mit Temperaturen, die schon weit über denjenigen heutiger Dampfturbinen liegen. Für die AK-Anlagen waren viele neue Bauelemente an Lufterhitzern und Maschinen notwendig, und die verhältnismässig kleine Versuchsanlage in Zürich, die als erste Gasturbinenanlage mit bis zu 700° C Arbeitstemperatur gegen 6000 Stunden im Betrieb war und heute als erste ihrer Art im Deutschen Technischen Museum in München steht, war nur beschränkt als Vorbild für weitere Maschinen brauchbar.

Erst die weiteren Bauunternehmen lieferten im Laufe der Zeit die nötigen praktischen Erfahrungen, mit denen sich die Praxis den durch die Theorie ACKERETS vorgezeichneten besten Lösungen annähern konnte.

Wann immer Schwierigkeiten auftauchten, war es ACKERET, der von höherer Warte aus dazu beitrug, die Entwicklung weiterzutreiben. Im Drang der Industrie geschieht es oft, dass man über täglichen Sorgen die grosse Linie vergisst. ACKERET hat, ohne momentane Anstände zu bagatellisieren, in vielen Diskussionen mit den Konstrukteuren immer wieder auf die wesentlichen Gesichtspunkte für die Weiterentwicklung hingewiesen. Die verhältnismässig kleinen Abmessungen der Maschinen im Vergleich zu offenen Bauarten infolge des erhöhten Druckpegels bezeichnet er immer wieder als wichtige Ausgangsposition für den Vorstoss zu hohen Temperaturen. Seine Hinweise auf den möglichen Leichtbau und die Schnelläufigkeit, in grösserem Masse vorhanden als bei Dampfturbinen, führten zu stark vereinfachten Neubauten. Einen beachtlichen Erfolg bildet in dieser Hinsicht die erste industrielle, mit Kohlenstaub betriebene 2000-kW-Anlage Ravensburg, die Anfang 1956 anstandslos in Betrieb gesetzt werden konnte und heute über 10000 Stunden im Betrieb steht.

Die vielen Aussprachen und Beratungen, die wir mit ACKERET in den letzten Jahren pflegten und in denen er immer wieder auf den Wert grundsätzlichen und systematischen Vorgehens hinwies, haben viel dazu beigetragen, die Moral der Beteiligten immer wieder zu stärken, denn jeder, der ACKERET kennt, weiss, dass seine Ratschläge überlegt und wohlfundiert sind. Nicht vergebens hat er seinerzeit für unsere erste Veröffentlichung über die AK-Anlage als Motto gestellt: «*Quidquid agis prudenter agas et respice finem.*»

Wenn der schweizerische Turbinenbau auch auf die weitere Mitarbeit ACKERETS zählen kann, so ist das für ihn wertvollste Gewähr für eine gesunde und fortschrittliche Zukunft. Für diese Mitarbeit und Stütze in vergangenen und zukünftigen Jahren dankt ihm der Schreibende anlässlich seines sechzigsten Geburtstages ganz besonders.

WISSENSCHAFTLICHE BEITRÄGE

*Scientific Papers — Articles scientifiques*



## Address

Dear friend, Jacob Ackeret:

Your friends and students asked me to introduce with a few words this special issue of the ZAMP celebrating your 60th birthday. I am very glad to have the opportunity of transmitting to you my most sincere greetings and congratulations in this way. As a matter of fact I always felt that somehow my way of thinking is very near to yours, in spite of the fact that we never had the opportunity of working together for any longer period. You came to Goettingen eight years later after I left for Aachen and we mostly met only at such occasions as international congresses, anniversaries of schools of scientific societies, symposia and alike.

Nevertheless I always felt that our ways of thinking are similar. How much of this is due to the influence of past great masters, is very difficult to decide. You started as a student and assistant of STODOLA. I did not have the luck of having him as a teacher, but as I started out to study Mechanical Engineering in Budapest and worked with Professor DONAT BANKI, I received many inspirations from STODOLAS' works, especially his book on *Steam Turbines*.

Then both you and I were exposed to the inspiring influence of LUDWIG PRANDTL, whom I consider as a great master in combining simple mathematical formulation and clear physical picture in solving problems important for technical applications.

I was very much flattered once by one of your remarks. You talked about a problem of nonsteady circulation effects which was discussed before by many authors for many years. You said, nevertheless, you understood the matter immediately after you read my paper (published jointly with W. R. SEARS), and I can reciprocate this compliment; many complex phenomena became clear to my mind after reading what you wrote about them. For example, cavitation damage.

Building windtunnels was a hobby for both of us.

I believe your influence on machine design problems was more important and successful than my modest attempts in this field.

We both liked to write survey articles, chapters for handbooks; many very able research scientists are reluctant to do such work which they consider a waste of time and effort.

I have often been accused that when I wrote a paper on some new problem I liked to take off the cream and leave the sour part of the work to those who follow up the investigation and try to complete it. I found, with satisfaction, that you suffer from the same fault.

Finally, we both had the good luck in having educated a devoted and able group of students who now continue, we hope, with even greater success what we started! Also, I believe we tried to show them that the love of science and the endeavor to understand nature and technology can be combined with a quantum of sound sense of humor.

Many happy returns!

THEODORE VON KÁRMÁN



## Unsteady Flow Through Helicopter Rotors<sup>1)</sup>

By HOLT ASHLEY, EUGENE BRUNELLE, and HERBERT H. MOSER,  
Cambridge, Mass., USA<sup>2)</sup>

### 1. Introduction

The related problems of aerodynamically-induced vibration and aeroelastic instability are a regular source of annoyance and danger to designers of rotary wing aircraft, but most past attempts to cope with them have involved rule-of-thumb modifications to the rotor and its linkages. It has been found, for example, that mass-balancing the rotor blade with respect to its quarter-chord line, which is done to minimize control forces, normally assures that flutter speeds lie outside of the operating range. Theoretical analyses of vibration phenomena generally put more emphasis on accurately representing the mechanical properties of the rotor than on finding reliable expressions for the aerodynamic loads. As a rule, some adaptation of steady-flow theory has been employed, often on a two-dimensional basis without regard for the several sources of aerodynamic induction present in the actual rotor flow field.

As in the case of fixed-wing aircraft, however, post-war efforts to push the performance of the lifting rotor closer to its inherent limits are creating, among many other requirements, a need for more rational, precise aerodynamic tools. The ultimate objective is clearly a complete theory of three-dimensional, unsteady flow through the rotor in any flight condition. This objective is far from achievement today, for reasons that need not be elaborated to anyone familiar with unsteady lifting-surface theory. Nevertheless, a significant forward step was recently made by LOEWY [3, <sup>3)</sup>] (and independently by TIMMAN and VAN DE VOOREN [5]), who was first able to explain the large loss of aerodynamic damping experienced by a hovering rotor when it vibrates at or near frequency ratios  $m$  which are integral multiples of the number of blades. LOEWY's theoretical model, which is discussed further in subsequent sections, is purely two-dimensional but accounts for the influence of the counter-vortices that are shed from the trailing edge and spiral back into close proximity with the blades because of the helical shape of the wake.

<sup>1)</sup> This investigation was performed under USAF Contract AF33(616)-3270 sponsored jointly by the US Army and Dynamics Branch of the Aircraft Laboratory, Wright Air Development Center.

<sup>2)</sup> Department of Aeronautical Engineering, Massachusetts Institute of Technology.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 78.

The success and mathematical simplicity of LOEWY's work give strong encouragement to other similar unsteady-flow investigations. The present paper undertakes to review two such, which were carried out incidentally to a broad program of research on helicopter vibrations at the Massachusetts Institute of Technology. One, a two-dimensional study of ground effect on an oscillating rotor blade, is described in section 3. The other a first and rather unwieldy attempt to predict unsteady three-dimensional loading of a blade in simple harmonic motion by analogy with REISSNER's theory [12] of oscillating wings, is covered in section 4. By way of introduction to the important influence of unsteady effects, section 2 discusses the comparison between two-dimensional calculations and measurements of the forced response of a simplified rotor model.

### *Principal Symbols*

$a$	location of pitch axis, in semichords aft of midchord axis;
$b'$	blade semichord;
$b'_0$	semichord at midspan of blade;
$C(k) = F + i G$	THEODORSEN's lift-deficiency function [2];
$C' = F' + i G'$	LOEWY's lift-deficiency function [3];
$C_{F,D.}$	flap-damping coefficient;
$C_{P,D.}$	pitch-damping coefficient;
$h' = 2 \pi u / \Omega$	spacing between successive rows of helical wake;
$H'_0$	distance between rotor plane and ground plane;
$H_n^{(2)}$	Hankel function of the second kind and order $n$ ;
$i = \sqrt{-1}$	imaginary unit;
$I_n, J_n, K_n$	Bessel functions, as defined by WATSON [14];
$k = \omega b' / V = m/r$	reduced frequency of oscillation;
$k'_0$	reduced frequency based on $b'_0$ ;
$L_n$	modified Struve function of order $n$ ;
$m = \omega / \Omega$	frequency ratio;
$n$	physical rotor revolution index;
$N_A, N_B, N_C$	functions defined by equations (22), (23), and (24);
$p$	ambient pressure, total number of shed wakes;
$r$	radius of blade section;
$r', \eta', r^*, \eta^*$	radial coordinates measured from blade midspan (Figure 9);
$R, R_2$	radius of rotor;
$s$	dimensionless semispan of blade;
$t$	time coordinate;
$u$	inflow velocity to rotor;
$v$	upwash at blade surface;
$V = \Omega r$	'free-stream' velocity;
$W, \tilde{W}$	wake weighting functions;

$x', \xi'$	dimensional streamwise coordinates, positive aft;
$x, \xi, z, \zeta$	dimensionless streamwise coordinates;
$y$	vertical displacement of blade section;
$z_m$	dimensionless midchord sweep (Figure 9).
$\alpha$	angle of attack;
$\gamma, \delta$	spanwise and chordwise components of running circulation of vortex sheet;
$\Gamma$	total circulation around airfoil;
$\Gamma'$	circulation function defined by equation (18);
$\theta, \varphi$	angle variables defined by equation (32);
$\lambda, \xi$	dummy variables of integration in streamwise direction;
$\rho$	density of incompressible fluid;
$\omega$	circular frequency of simple harmonic oscillation;
$\omega_z$	frequency of vertical displacement of rotor hub;
$\omega_\theta$	frequency of collective pitch variation;
$\Omega$	angular velocity of rotor.
$a$	Denotes a quantity on the blade surface;
$n$	rotor revolution index; order of function;
$w$	denotes a quantity in the shed wake;
$(\quad)'$	denotes a dimensional quantity;
$(\quad)^{(2)}$	two-dimensional flow;
$(\quad)$	complex amplitude of a quantity with simple harmonic time dependence.

## 2. Forced Response of a Hovering Rotor Calculated by Aerodynamic Strip Theory

In a recently issued report [1], one of the present authors and co-workers describe an extensive study of the dynamic response of a helicopter rotor subjected to several types of forcing. The determination and mathematical description of the airloads, both steady and unsteady, was based on the well-known strip-theory approach, in which the flow at any given blade station is assumed unaffected by that at any other station. The application of this assumption to the case of a hovering rotor is, of course, equivalent to describing the flow at any blade station as two-dimensional at all azimuth locations.

The above-mentioned report considers, in particular, two cases. In the first case, the response of the first two natural modes, rigid flapping and first bending, of a fully-articulated, two-bladed rotor to a sinusoidal variation in collective pitch was investigated. Equations of motion were derived by an energy approach and solved for a range of frequency ratios  $\omega_\theta/\Omega$  from 0 to 4,

and for a rotor corresponding to that used in the experimental phase. In defining the natural modes, the rigid flapping mode shape was, of course, known and the first bending mode was described by the common approximation

$$y(\eta) \simeq 4 \frac{\eta^2}{R} - 3 \eta,$$

where  $\eta$  is the station radius measured from the hub,  $y(\eta)$  is the displacement from its equilibrium position of the blade section located by  $\eta$ , and  $R$  is the radius of the rotor.

The second case considered was the response of the first two modes to a sinusoidal vertical displacement of the rotor hub. These equations were derived by GALERKIN'S method, and the solution was obtained for the frequency ratios  $\omega_z/\Omega$  from 0 to 4, and for the same rotor as in the first case.

The primary purpose of the investigation was to measure the effects of the unsteady aerodynamic forces on the rotor. Accordingly, the rotor response to each type of forcing was computed by each of three existing unsteady aerodynamic theories, and the predicted response corresponding to each theory was compared with the measured response obtained in the experimental program.

The first unsteady aerodynamic theory used was the so-called 'quasi-static' theory in which the effect of the wake upon the aerodynamic forces acting on the airfoil is neglected entirely. The second theory consisted of assuming that the shed vortices arising from the varying circulation about the airfoil trail off along the chord-line of the airfoil to infinity. This assumption gives rise to the 'lift-deficiency function'  $C(k)$  described by THEODORSEN [2].

The third theory considered, one applicable to helicopter rotors in particular, consists of assuming, and accounting for, the presence of not only the shed vortices trailing off behind the airfoil, but also those lying in planes (approximately) in or beneath the plane of rotation due to preceding blades and/or revolutions. This is the previously mentioned method of LOEWY [3], which was first verified experimentally by DAUGHDAY, DUWALT, and GATES [4]. A similar theoretical model was used by TIMMAN and VAN DE VOOREN [5], but these authors considered only the particular case of the vortex pattern in the plane of rotation (corresponding to no inflow through the rotor). Applying this theory in the expressions for lift in the equations of motion consists of simply replacing  $C(k)$  by a 'modified lift-deficiency' function  $C'(k, m, h')$  which depends not only on the reduced frequency  $k$ , but also on the inflow and number of blades.

To provide background for the developments that follow, some results of the above work are reproduced here in Figures 1, 2, and 3. Figures 1 and 2 present the magnitude and phase, respectively, of the flapping response to sinusoidal variation in collective pitch; Figure 3 shows the magnitude of the

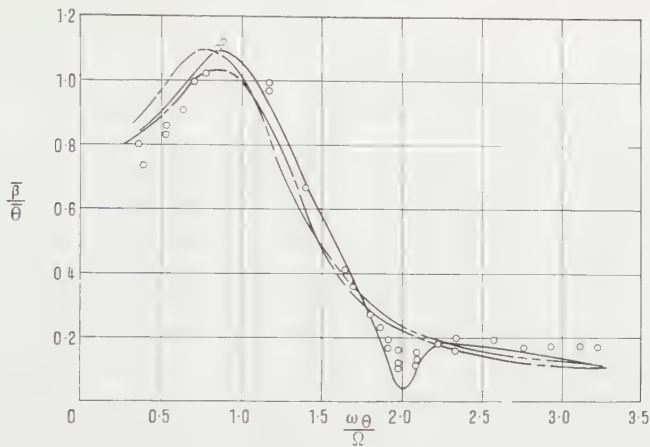


Figure 1

Flapping response to pitch input-amplitude.

Theoretical curves  $h = 0.25$ ; experimental points  $h = 0$ .

quasi-static;  $C(k) = F + iG$ ;  $C'(k, h, m) = F' + iG'$ .

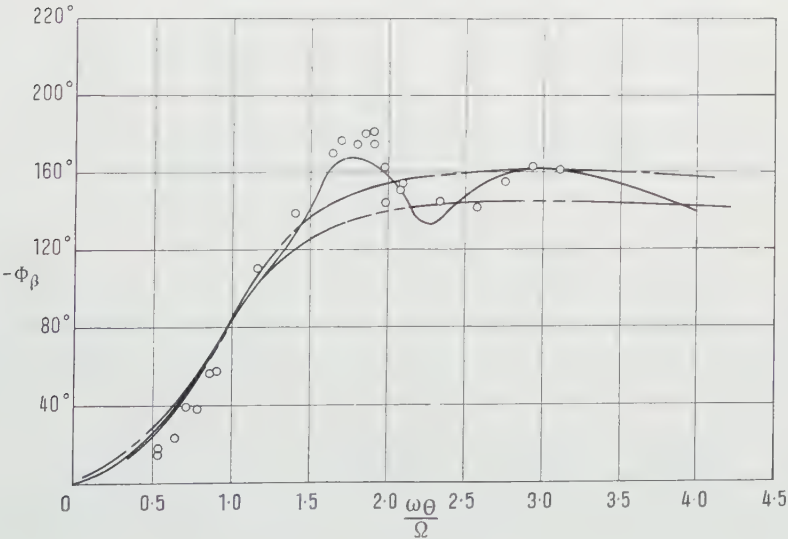


Figure 2

Flapping response to pitch input-phase.

Theoretical curves  $h = 0.25$ ; experimental curves  $h = 0$ .

quasi-static;  $C(k) = F + iG$ ;  $C'(k, h, m) = F' + iG'$ .

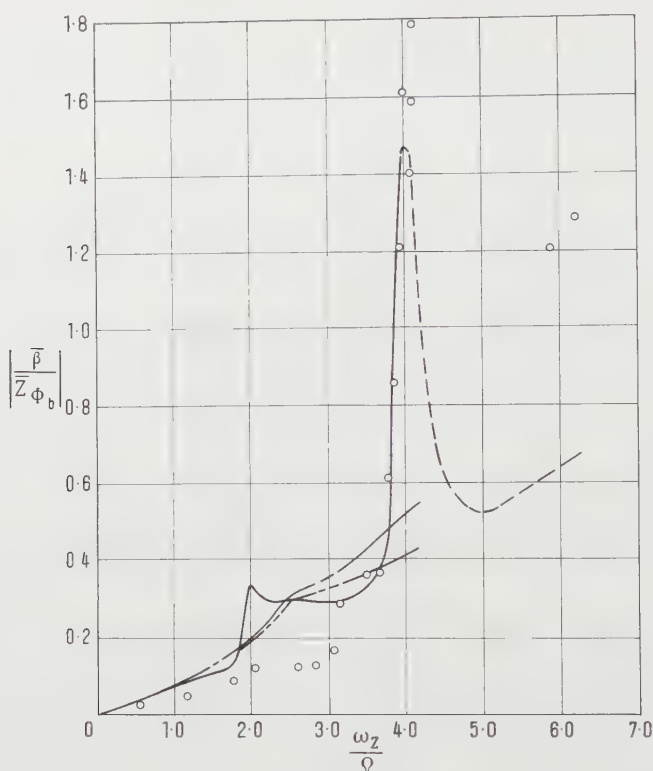


Figure 3

Flapping response to displacement input at hub-amplitude.

Theoretical curves  $h = 0.25$ ; experimental points  $h = 0$ .

— — — — — quasi-static; — — — — —  $C(k) = F + iG$ ; — — — — —  $C'(k, h, m) = F' + iG'$ ;  
 ° experimental points.

flapping response due to sinusoidal variation in hub displacement. In each figure, the response predicted by each of the three aerodynamic theories is plotted together with some experimental points found in the experimental part of that study<sup>4</sup>).

The flapping responses calculated on the basis of quasi-static aerodynamics will be recognized as essentially the responses of a second-order system with a finite amount of damping to the different types of inputs. The effect of the wake, as predicted by THEODORSEN [2], is to decrease the magnitudes of both the flap-damping and the unsteady lifts, with the result that the response so

<sup>4</sup>) The authors are indebted to Messrs. JOHN ZVARA and NORMAN D. HAM, co-authors of the report [1], which this section of the present paper summarizes in part. Figures 1, 2, 3 are reproduced with their kind permission.



calculated is not very much different from that predicted by quasi-static theory at the frequency ratios considered (although the difference becomes more significant as the reduced frequency increases).

However, the unsteady effects assume a new significance in vibration work when the influence of the returning wake is taken into account. In this case (Figures 1 and 3) the flap-damping coefficient falls off markedly as the flapping frequency ratio approaches multiples of the number of blades. It is seen from the pitch forcing case (aerodynamic forcing) that the magnitude of the unsteady lift also falls off at these values of frequency ratio, so that there are 'dips' in the magnitude of the flapping response to an aerodynamic input. On the other hand, the flapping response of the articulated rotor to a displacement input at the hub is highly sensitive to the returning wake, in that while the driving forces are maintained essentially constant by the nature of the excitation, there is a loss of damping when the frequency ratio approaches multiple values of the number of blades. An increased amplification ratio at these frequencies results.

It may, therefore, be concluded that the effect of the returning wake is indeed appreciable in vibration analysis, as predicted by LOEWY and TIMMAN-VAN DE VOOREN, and already confirmed experimentally by DAUGHADAY, DuWALT, and GATES. It is, in addition, noted that the two-degree-of-freedom analyses not only predict with reasonable accuracy the effects of the returning wake on the rotor response, but also show satisfactory correlation with the measured responses throughout the entire range of frequency ratios considered. Thus the importance of unsteady flow is established, and justification is provided for advancing the theory beyond the fairly severe restrictions to which it is still subject. It would be unreasonable to infer from the above that in all rotor vibration studies the Loewy airloads will be adequate. Both the data in Figures 1-3 and those of [4] were taken outside of appreciable ground effect. Furthermore, the reductions in amplitudes of airloads due to three-dimensional flow occur in all aerodynamic terms of the equations of motion, and there is reason to believe in the example presented here that the accuracy of two-dimensional predictions of pitching and flapping response may result partly from self-cancelling errors. One cannot assume that three-dimensional effects will be equally secondary in every application.

### 3. Unsteady Loading of a Rotor in the Presence of a Ground Plane

The theory of LOEWY [3] was of course derived for rotary wings operating in an unbounded medium. For practical reasons, however, it appears desirable to re-cast the problem so that the effects of a solid boundary may be considered. This re-casting yields (1) an expression for the aerodynamic loads and damping coefficients as a function of the distance above the ground plane,

(2) a more accurate interpretation of rotary wing test data taken on a test pylon in the proximity of a ground plane, and (3) a rough approximation to the aerodynamic pulse loading experienced by a rotor as it passes over a fuselage.

The basic aerodynamic model postulated in [3] is retained, hence no attempt is made in this paper to reiterate that complete development. Furthermore, since the main consideration is a study of the ground plane effects, a single-bladed rotor has been considered, so as to separate clearly the ground effects from multi-blade considerations. This step promotes the interests of clarity and simplicity, the extension to a multi-bladed rotor being straightforward.

When the basic aerodynamic model postulated by LOEWY [3] is placed in the proximity of a ground plane, additional conditions must be fulfilled. One obvious condition is that the velocity component normal to the ground plane is zero along the ground plane. Also it is assumed that the shed wake does not rebound from the ground plane. The wake is collected, held captive at the ground level and quickly dissipated by vortex-ground plane interaction (Figure 4). This behavior is observed, for example, when a smoke ring is blown against a flat surface.

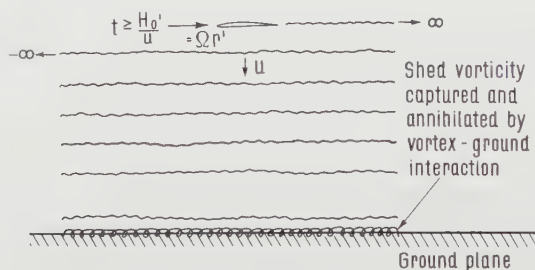


Figure 4  
Schematic of vortex cancellation.

The assumption of quick dissipation of the vorticity at the ground level implies that the instant a row of shed wake touches the ground it can no longer contribute to the downwash distribution over the airfoil. With this simple physical picture in mind, it is easy to construct a vortex image system that provides (1) the required normal velocity at the ground plane, (2) the condition of no wake reflection, and (3) the annihilation of all vorticity at the ground level (Figure 5). If vortices first begin to be shed at time  $t = 0$ , the aerodynamic model depicted in Figure 5 is valid for all times  $t \geq H'_0/u$ ; that is, when at least one row of shed vorticity has contacted the ground plane. The time history of the aerodynamic loads in the interval may be obtained by deleting successive rows of vorticity ( $p, p-1, \dots$ , etc.).

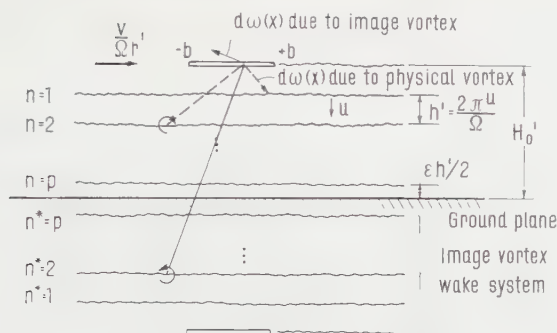


Figure 5

Picture of theoretical model with ground plane.

Using the configuration illustrated in Figure 5 and applying the law of BIOT and SAVART, the induced upwash (i.e., neglecting sidewash and wake-wake interaction effects) on the physical airfoil resulting from the complete vortex system is:

$$v_a(x', t) = -\frac{1}{2\pi} \left[ \oint_{-b'}^{b'} \frac{\gamma_a(\xi', t)}{x' - \xi'} d\xi' - \int_{-b}^{b'} \frac{\gamma_a(\xi', t) (x' - \xi')}{(x' - \xi')^2 + (f h')^2} d\xi' \right. \\ \left. + \int_{b'}^{\infty} \frac{\gamma_w(\xi', t)}{x' - \xi'} d\xi' - \int_{n'}^{\infty} \frac{\gamma_w(\xi', t) (x' - \xi')}{(x' - \xi')^2 + (f h')^2} d\xi' \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^p \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{wn}(\xi', t) (x' - \xi')}{(x' - \xi')^2 + (n h')^2} d\xi' - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{wn}(\xi', t) (x' - \xi')}{(x' - \xi')^2 + (n^* h')^2} d\xi' \right] \right] \quad (1)$$

where primes (') denote dimensional quantities and

$$n^* = 2p + \varepsilon - n = f - n, \quad (2)$$

$$f = 2p + \varepsilon. \quad (3)$$

Letting  $\gamma_w = \bar{\gamma}_w e^{i\omega t}$ , and since  $\gamma_{wn}$  is the vorticity shed at some earlier time,

$$\bar{\gamma}_{wn} = \bar{\gamma}_w e^{-i2\pi mn} \quad \left( m = \frac{\omega}{\Omega} \right). \quad (4)$$

Now using the boundary condition of zero pressure difference across the wake pattern, defining a circulation function

$$\bar{I}' = \frac{e^{ik}}{b'} \int_{-b}^{b'} \gamma_a d\xi' \quad \left( k = \frac{m}{r} \right)$$

and nondimensionalizing the upwash equation with respect to the semichord  $b'$ ; the upwash equation becomes

$$\bar{v}_a(x) = -\frac{1}{2\pi} \left[ \oint_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\xi)}{x-\xi} d\xi - i k \bar{\Gamma}' \int_1^\infty \frac{e^{-ik\xi}}{x-\xi} d\xi + i k \bar{\Gamma}' \int_1^\infty \underbrace{\frac{e^{-ik\xi}}{(x-\xi)^2 + (f h)^2} d\xi}_{I_1} \right. \\ \left. - i k \bar{\Gamma}' \sum_{n=1}^P \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i2\pi m n - ik\xi}}{(x-\xi)^2 + (n h)^2} d\xi}_{I_2} \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i2\pi m n - ik\xi}}{(x-\xi)^2 + (n^* h)^2} d\xi}_{I_3} \right\} \right] \quad (5)$$

Resorting to integrations in the complex plane and a change of variable  $x - \xi = \eta$ :

$$I_2 = i \pi e^{-k q_2} e^{-i(kx + 2\pi m n)}, \quad (6)$$

$$I_3 = -i \pi e^{-k q_3} e^{-i(kx + 2\pi m n)}, \quad (7)$$

where

$$q_2 = n h, \quad q_3 = n^* h.$$

Now letting  $(\xi - x) = \lambda$ , also noting that  $-1 \leq x \leq 1$  and  $0 \leq \lambda \leq \infty$ :

$$I_1 \cong -e^{-ikx} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-ik\lambda}}{\lambda^2 + l^2} d\lambda. \quad (8)$$

Two more integrations in the complex plane yield the result:

$$I_1 \cong -e^{-ikx} \left[ B(kl) - i \frac{\pi}{2} e^{-kl} \right], \quad (9)$$

where

$$B(kl) = \frac{1}{2} \{ [-Ei(-kl)] e^{kl} - [Ei(kl)] e^{-kl} \}, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} -Ei(-kl) &= \int_{kl}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, & Ei(kl) &= \int_{-kl}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned} \right\} \quad \text{exponential integrals,}$$

$$l = f h.$$

Collecting results, the upwash equation may be rewritten as

$$\bar{v}_a(x) = \frac{ik}{2\pi} \bar{\Gamma}' \int_1^\infty \frac{e^{-ik\xi}}{x-\xi} d\xi + \frac{k}{2} \bar{\Gamma}' e^{-ikx} \bar{W} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\xi)}{x-\xi} d\xi, \quad (11)$$

where

$$\tilde{W} = - \left[ \frac{e^{-kl}}{2} + \frac{i}{\pi} B(kl) \right] + \sum_{n=1}^p (e^{-kq_n} - e^{-kq_0}) e^{-i2\pi mn}. \tag{12}$$

Applying SÖHNGEN'S 6 inversion relation to equation (11) and following the classical work of SCHWARTZ [15], the pressure distribution is expressible as

$$\left. \begin{aligned} \frac{-\Delta \bar{p}_a(x)}{\rho v' \Omega} = & \frac{2}{\pi} [1 - C'] \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{v}_a(\xi) d\xi \\ & + \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left( \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} - i k A_1(x, \xi) \right) \bar{v}_a(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

where

$$A_1(x, \xi) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x\xi + \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - x^2}}{1 - x\xi - \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - x^2}} \tag{14}$$

and

$$C' = \frac{H_1^{(2)}(k) + 2 J_1(k) \tilde{W}}{H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k) + 2 [J_1(k) + i J_0(k)] \tilde{W}}. \tag{15}$$

The above pressure distribution equation has the same form as that for a corresponding two-dimensional fixed wing, oscillating in incompressible flow. Therefore, as noted in 3 , the usual fixed-wing expressions for lift and moment may be used when describing the simple harmonic unsteady aerodynamics of a rotating blade section in the presence of a ground plane, provided that the above definition of  $C'$  is substituted for the fixed-wing Theodorsen function  $C(k)$ . Additionally, the flap-damping coefficient is given by  $C_{F.D.} = 2\pi F'$ , and the pitch-damping coefficient [7] is given by

$$C_{P.D.} = \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{2} - a - \left( \frac{1}{2} + a \right) \frac{2G'}{k} - \left( \frac{1}{4} - a^2 \right) 2F' \right],$$

where  $C' = F' + i G'$  ( $a$  pitch axis location measured aft of the midchord in semichords).

Therefore, by calculating  $\tilde{W}$ , and hence  $C'$ , all the necessary aerodynamic information is then available to perform the standard dynamic stress analysis routines, the 'typical section' flutter analyses and the approximate three-dimensional (strip theory) flutter analyses.

Of most immediate interest, however, is an assessment of the ground-plane effects on the rotary wing. This assessment can be made by observing the functional dependence of  $C'$ ,  $C_{F.D.}$  and  $C_{P.D.}$ , on frequency ratio, with the wake-spacing and the total rotor-ground spacing as parameters. Furthermore, since the dependence of  $C'$ ,  $C_{F.D.}$  and  $C_{P.D.}$  on  $h'$  is qualitatively the same as exhibited in [3], only  $H'_0$  will be considered as a new parameter. These functional dependences are shown in Figures 6, 7, and 8. As to be expected, when

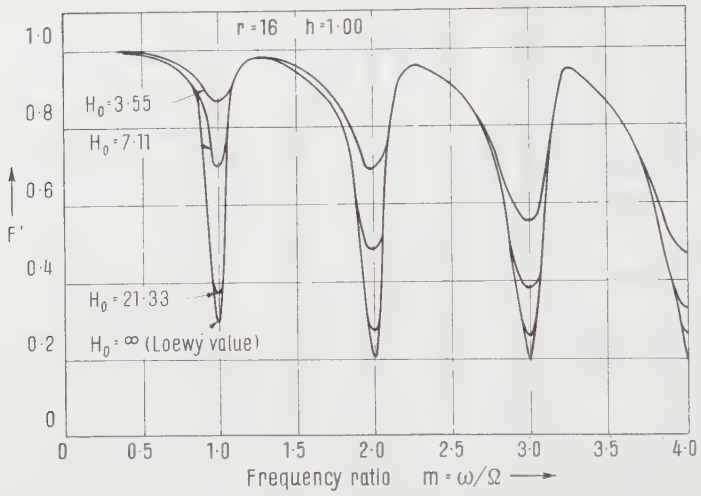


Figure 6  
Flap damping coefficient.

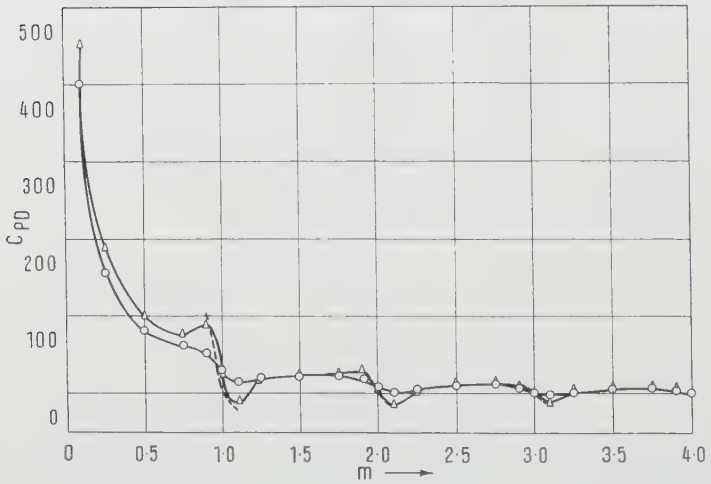


Figure 7  
Pitch damping coefficient ( $a = 0$ ).  
○—○  $H_0 = 3.5556$ ;    △—△  $H_0 = 7.1111$ ;    ----  $H_0 = 21.3334$

$H'_0 \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{W}$  uniformly approaches  $W$ , where  $W$  is the wake weighting function given in [3].

It can be concluded from the figures that the presence of the ground plane provides additional positive aerodynamic damping to all blade modes of



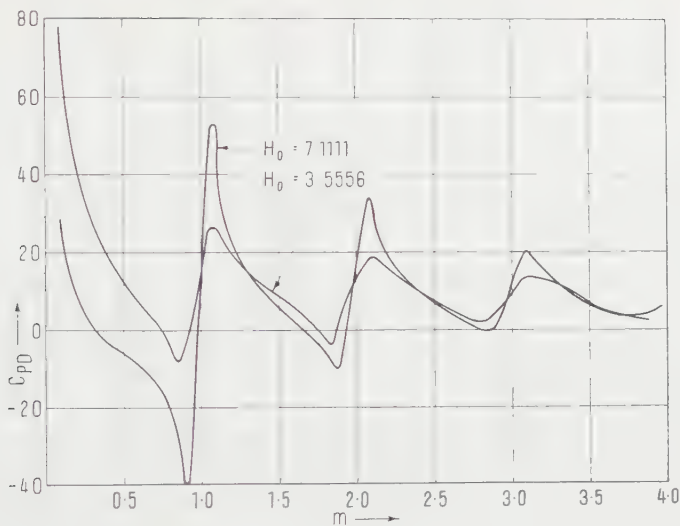


Figure 8  
Pitch damping coefficient ( $a = -1$ ).  
 $C.P.D.$  versus  $m$ .

motion, hence greatly reducing the possibility for one-degree-of-freedom flutter to occur when the helicopter rotor plane is less than one rotor diameter above the ground plane. Note, however, that this type of flutter is still possible under unfavorable circumstances. When the helicopter rotor plane is more than two rotor diameters above the ground plane, the ground effects are completely negligible and  $\tilde{W} \cong W$ .

4. Three-Dimensional Unsteady Flow Effects

Flow past a single helicopter rotor blade is three-dimensional because of the curvature of the streamlines, the presence of 'wingtips' and the spanwise variation of relative wind. Since the blade aspect ratio is usually quite large, the third effect may have equal or greater importance than the other two. As applied to rotors, two-dimensional strip theory contains an inconsistency, associated with this nonuniform relative wind, which does not occur in the case of a conventional airplane wing: even in steady rotation at constant angle of attack the bound circulation varies linearly with radial distance from the hub, thus violating the law of continuity of vortex lines. For steady, vertical flight of a lightly-loaded rotor this and other objections are fully overcome by GOLDSTEIN's vortex model [8]. Discussions of several other approximate, steady-state theories of the finite rotor will be found in NIKOLSKY [9]. An elaborate

vortex representation of the hovering condition has been given recently by GRAY and NIKOLSKY [10].

Sections 1 and 2 above demonstrate the need for a theory that predicts loads due to unsteady, three-dimensional flow. Since such a theory would perforce be linearized and its results therefore capable of superposition, a restriction to simple harmonic motion is acceptable. It is not surprising, however, that no efforts along these lines appear to have been published; no fully rational theory exists even for the finite airplane wing in unsteady motion, and most of the suggested approximations involve severe mathematical complexities. The paragraphs below describe a first attempt at analyzing the oscillating finite rotor. The authors freely admit that radical modifications of the true physical system have been made in constructing their vortex model. Even then, the computations remain lengthy, and only a few examples have been worked out. Two facts lent encouragement in carrying the development through to completion. First, the large aspect ratios of typical rotors insure that a theory of the lifting-line type will furnish the loads needed for nearly any practical dynamic calculation. Second, a modified lifting-line theory was found to yield satisfactory steady-flow results.

To construct a steady lifting-line theory for vertical flight of a blade whose root and tip lie at  $r = R_1$  and  $r = R_2$ , respectively, let the bound circulation  $\Gamma(r)$  be concentrated in a single straight vortex along the quarter-chord line. As seen from a coordinate system mounted on the blade, the oncoming stream has a velocity  $V(r) - \Omega r$  normal to the lifting line. The vortices trailing into the rotor wake, whose circulation is  $d\Gamma/dr$  per unit radial distance, are assumed to extend straight downstream to infinity. Hence one neglects both the helical shape of the actual wake and the centrifugal terms in the equations of fluid motion relative to the rotating coordinates, approximations which can be justified under certain circumstances but which are best assessed from the accuracy of the results. One is thus led to the problem of an ordinary airplane wing in a sheared main stream, and by direct analogy with conventional lifting-line theory (cf. GLAUERT [11], chaps. 10-11), the bound circulation satisfies the integrodifferential equation

$$\Gamma = c_{l\alpha} b' \Omega r \left[ \alpha_0(r) - \frac{1}{4\pi\Omega r} \oint_{R_1}^{R_2} \frac{(d\Gamma/d\eta) d\eta}{r - \eta} \right]. \quad (16)$$

Here  $c_{l\alpha}$ ,  $b'$ , and  $\alpha_0$  denote the local lift-curve slope, blade semichord, and incidence measured from zero-lift, all of which may be functions of  $r$ . When equation (16) is solved by well-known methods, it yields spanwise load distributions and rotor thrust coefficients which fall among the values estimated by more commonly used theoretical methods [9]. (Certain other quantities such

as induced inflow velocity do not compare so favorably, but the emphasis here is on airloads.)

The theory of the oscillating finite wing in incompressible flow which is a direct extension of lifting-line theory, and which reduces thereto when the frequency approaches zero, is REISSNER'S [12]. The authors have, in effect, modified REISSNER'S physical approximations and mathematical derivation to include the effect of a space-variable main stream  $V(r)$ . It is impossible to present the detailed steps here. Only the general outline is given, but the interested reader can find the full development in [13].

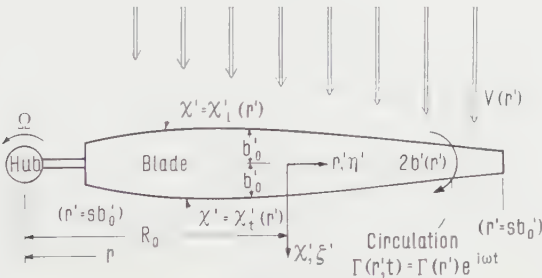


Figure 9

A rotor blade oscillating sinusoidally in a sheared flow, showing locations of coordinate systems. Definitions:

$$r' = r - R_0; \quad r^*, \eta^* = \frac{r'}{b'_0}, \quad \frac{\eta'}{b'_0}; \quad (Z, \xi) = \frac{\frac{1}{2} [\chi'_t + \chi'_l]}{\frac{1}{2} [\chi'_t - \chi'_l]}; \quad z_m = \frac{\chi'_t + \chi'_l}{2 b'_0}.$$

Figure 9 illustrates the rotor blade in a sheared flow and defines the dimensional and dimensionless coordinates used in the development. The motion of the blade is specified in terms of the normal velocity component of fluid particles in contact with it (upwash)

$$v_a(\chi', r', t) = \bar{v}_a(\chi', r') e^{i\omega t}, \quad (17)$$

which is assumed to be a known quantity. The flow over the blade and its wake is approximated by a vortex sheet in the  $(x' - r')$ -plane with circulation components (velocity discontinuities)  $\gamma$  spanwise and  $\delta$  chordwise. The amplitude of total circulation  $\bar{\Gamma}(r')$  bound to the blade is replaced by a modified circulation function  $\bar{\Gamma}'$  defined, following REISSNER [12], as

$$\bar{\Gamma}'(r') = \frac{\Gamma(r')}{b'_0} e^{i\omega x'_t/V}. \quad (18)$$

Application of the Biot-Savart law, the Kutta condition of smooth flow-off from the trailing edge and the requirement of zero pressure discontinuity

through the wake vortex sheet leads to the lifting-surface integral equation (factor  $e^{i\omega t}$  has been cancelled)

$$\bar{v}_a(x', r') = - \frac{1}{4\pi} \oint_{-sb'_0}^{sb'_0} \oint_{x_t}^{x_t^-} \frac{\bar{\gamma}_a(\xi', \eta') [x' - \xi'] + \bar{\delta}_a(\xi', \eta') [r' - \eta']}{\{[x' - \xi']^2 + [r' - \eta']^2\}^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ - \frac{b'_0}{4\pi} \int_{-sb'_0}^{sb'_0} \int_{x_t}^{\infty} \frac{\frac{d}{d\eta'} [\bar{\Gamma}'(\eta') e^{-i\omega \xi'/V(\eta')}] [r' - \eta'] - i \frac{\omega}{V(\eta')} \bar{\Gamma}'(\eta') e^{-i\omega \xi'/V(\eta')} [x' - \xi']}{\{[x' - \xi']^2 + [r' - \eta']^2\}^{3/2}} d\xi' d\eta'.$$

Equation (19) involves only the approximations of ordinary lifting-surface theory and is the counterpart of equation (18), Part I, of REISSNER [12].

Reduction of equation (19) to a form suitable for convenient mathematical manipulation requires several modifications of the physical model, two of which have direct parallels in the development of lifting-line theory. These may be stated in words as follows:

- (1) The bound vortices are treated as if the blade were replaced by an airfoil in two-dimensional flow, having the same chordwise load distribution as the section at station  $r'$  [i.e.,  $\bar{\delta}_n \cong 0$  and  $\bar{\gamma}_a(\xi', \eta') \cong \bar{\gamma}_a(\xi_o, r')$  in the first integral].
- (2) The trailing vortex pattern in the wake is projected forward from the trailing edge  $x_t(\eta')$  to a spanwise line passing through point  $(x', r')$ , where the vertical velocity is to be determined.
- (3) In the pattern of shed  $\gamma_w$ -vortices, those portions which represent deviations from two-dimensional flow at any spanwise station are also projected up to a spanwise line through  $(x', r')$ . In this same pattern the wavelength factor  $e^{-i\omega \xi'/V(\eta')}$  is approximated by  $e^{-i\omega \xi'/V(r')}$ .

When the foregoing steps are carried out and the dimensionless notation of Figure 9 is introduced into equation (19), one obtains

$$\bar{v}_a(z, r^*) = - \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\xi, r^*)}{z - \xi} d\xi + \frac{ik_0}{2\pi} \bar{\Gamma}'(r^*) e^{-ik_0 z_m} \int_1^{\infty} \frac{e^{-ik\xi}}{z - \xi} d\xi \\ - \frac{1}{4\pi} \oint_{-s}^s \frac{d\bar{\Gamma}'}{d\eta^*} k_0(\eta^*) \left\{ e^{-i[k_0 z_m + k z] V(r^*)/V(\eta^*)} N_B(k_0(\eta^*) [r^* - \eta^*]) \right. \\ \left. + i e^{-i[k_0 z_m + k z]} N_c(k_0(r^*) [r^* - \eta^*]) \right\} d\eta^* \\ + \frac{ik_0}{4\pi} \oint_{-s}^s \bar{\Gamma}'(\eta^*) \frac{d}{d\eta^*} \left[ \frac{V(r^*)}{V(\eta^*)} \right] \left\{ e^{-i[k_0 z_m + k z] V(r^*)/V(\eta^*)} \right. \\ \cdot \left\langle N_A(k_0(\eta^*) [r^* - \eta^*]) + [k z + k_0 z_m] \frac{\bar{\Gamma}'(\eta^*)}{\bar{\Gamma}'(\eta^*)} N_B(k_0(\eta^*) [r^* - \eta^*]) \right\rangle \\ \left. - e^{-i[k_0 z_m + k z]} N_c(k_0(r^*) [r^* - \eta^*]) \right\} d\eta^*.$$

Here the reduced frequency appears in four forms

$$\left. \begin{aligned} k(r^*) &= \frac{\omega \, b'(r^*)}{V(r^*)}, & k(\eta^*) &= \frac{\omega \, b'(\eta^*)}{V(\eta^*)}, \\ k_0(r^*) &= \frac{\omega \, b'_0}{V(r^*)}, & k_0(\eta^*) &= \frac{\omega \, b'_0}{V(\eta^*)}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

the argument  $r^*$  being implied wherever it is not indicated.

Three special functions arise in this development which are related to the so-called Cicala function of unsteady wing theory [12]. Unlike the latter, two of them can be evaluated in terms of integral representations of tabulated functions, as given by WATSON [14]. The definitions and evaluations are listed below:

$$N_A(q) = q \int_0^\infty \frac{\lambda \, e^{-i\lambda} \, d\lambda}{[\lambda^2 + q^2]^{3/2}} = \frac{|q|}{q} [1 - i \, q \, K_0(|q|)] + \frac{\pi \, q}{2} [L_0(q) - I_0(q)], \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} N_B(q) &= q \int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda} \, d\lambda}{[\lambda^2 + q^2]^{3/2}} = \frac{1}{q} + \Delta N_B(q) \\ &= \frac{1}{q} - i \frac{|q|}{q} + i \frac{\pi}{2} [I_1(q) - L_1(q)] + \left[ \frac{|q|}{q} K_1(|q|) - \frac{1}{q} \right], \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} N_C(q) &= \int_0^\infty \left[ \frac{q}{\sqrt{\lambda^2 + q^2}} - \frac{|q|}{q} \frac{e^{-i\lambda}}{\lambda} \right] d\lambda \\ &= \frac{|q|}{q} \left\{ \ln |2 \, q| + \frac{\pi}{2} \int_0^{|q|} [L_0(x) - I_0(x)] \, dx - i \int_0^{|q|} K_0(x) \, dx \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Here  $I_n$  and  $K_n$  are modified Bessel functions, while  $L_n$  is the modified Struve function [14] of the first kind and order  $n$ . The pole singularity of  $N_B$  at  $q \rightarrow 0$ , which is just the steady-state singularity of lifting-line theory, has been separated for computational convenience, leaving a remainder  $\Delta N_B$  which is everywhere finite.  $N_A$  and  $N_C$  have no singularities for real, finite arguments excepting an integrable, logarithmic singularity of  $N_C$  at the origin. No particular difficulty was encountered when constructing tables of these functions over the ranges needed, one convenience being that they are all odd.

The integral equation (20) is readily solved for  $\bar{\gamma}_a$  by well-known methods of thin airfoil theory (cf. SCHWARZ [15]). The result can be cast as the sum of two-dimensional theory plus a three-dimensional correction containing  $\bar{I}'$  and the  $N$ -functions. In view of the relation

$$\int_{x_l}^{x_t} \bar{\gamma}_a(x', r') \, dx' = b' \int_{-1}^1 \bar{\gamma}_a(z, r^*) \, dz = b'_0 \, e^{-i[k + k_0 z_m]} \bar{I}'(r^*) \quad (25)$$

the expression for  $\bar{\gamma}_a$  can be integrated chordwise to produce an integrodifferential equation for  $\bar{\Gamma}'$ , which is the principal unknown

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}'^{(2)} = \bar{\Gamma}' + \frac{e^{i k_0 z_m}}{\pi i [H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)]} & \left\{ \oint_{\gamma} e^{-i k_0 z_m (V(r^*)/(V(\eta^*))} \left[ - \frac{d\bar{\Gamma}'}{d\eta^*} \cdot \frac{V(r^*)}{V(\eta^*)} \right. \right. \\ & N_B(k_0(\eta^*) [r^* - \eta^*]) + i \bar{\Gamma}'(\eta^*) \frac{d}{d\eta^*} \left( \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \right) N_A(k_0(\eta^*) [r^* - \eta^*]) \Big] \\ & \times \left[ J_0 \left( k \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \right) - i J_1 \left( k \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \right) \right] d\eta^* \\ & - i [J_0(k) - i J_1(k)] e^{-i k_0 z_m} \oint_{\gamma} \frac{d}{d\eta^*} \left[ \bar{\Gamma}'(\eta^*) \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \right] N_C(k_0(r^*) [r^* - \eta^*]) d\eta^* \\ & + i k_0 \oint_{-\gamma} \bar{\Gamma}'(\eta^*) \frac{V(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \cdot \frac{d}{d\eta^*} \left[ \frac{V(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \right] N_B(k_0(\eta^*) [r^* - \eta^*]) e^{-i k_0 z_m} \frac{V(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \\ & \cdot \left\langle z_m \left[ J_0 \left( k \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \right) - i J_1 \left( k \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{b'}{b'_0} \left[ J_0 \left( k \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \right) - \left( \frac{1}{k} \cdot \frac{\Gamma'(\eta^*)}{V(r^*)} + i \right) J_1 \left( k \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma'(\eta^*)} \right) \right] \right\rangle d\eta^* \Big\}. \end{aligned}$$

Here  $\bar{\Gamma}'^{(2)}$  denotes the circulation function as given by two-dimensional methods [2],

$$\bar{\Gamma}'^{(2)} = 4 \frac{b'}{b'_0} e^{i k_0 z_m} \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{v}_a(\xi, r^*) d\xi}{\pi i k [H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)]}. \quad (27)$$

REISSNER's linearized relation [12],

$$- \frac{\Delta \bar{p}_a(z, r^*)}{\varrho V} = \bar{\gamma}_a(z, r^*) + i k \int_{-1}^z \bar{\gamma}_a(\xi, r^*) d\xi, \quad (28)$$

between  $\bar{\gamma}_a$  and the complex amplitude of pressure difference between the upper and lower surfaces of the rotor blade can be carried over into the present theory. When equation (28) is applied to the inverted form of equation (20), one obtains after considerable manipulation

$$\begin{aligned} - \frac{\Delta \bar{p}_a(z, r^*)}{\varrho V} = & \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} [1 - C(k)] \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{v}_a(\xi, r^*) d\xi \\ & + \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left[ \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \cdot \frac{1}{(z-\xi)} - \frac{i k}{2} \ln \left( \frac{1-z\xi + \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-z^2}}{1-z\xi - \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-z^2}} \right) \right] \\ & \times \bar{v}_a(\xi, r^*) d\xi - \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} [F_0(r^*) + z F_1(r^*) + z^2 F_2(r^*)]. \end{aligned} \quad (29)$$



Here the first two lines are the strip-theory result, and  $F_0, F_1, F_2$  represent rather elaborate integrals across the rotor span, containing  $\bar{I}'$  and the  $N$ -functions but independent of the chordwise coordinate. Suitable chordwise integrations of  $1\bar{p}_u$  give the complex amplitudes of lift force (positive upward) per unit span and pitching moment (positive nose-up about a midchord axis) per unit span:

$$\frac{\bar{L}}{\varrho V^2 b'} = \frac{\bar{L}^{(2)}}{\varrho v^2 b'} + \pi \left[ -\frac{F_0(r^*)}{V} + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1(r^*)}{V} - \frac{1}{2} \cdot \frac{F_2(r^*)}{V} \right], \quad (30)$$

$$\frac{\bar{M}}{\varrho V^2 b'^2} = \frac{\bar{M}^{(2)}}{\varrho V^2 b'^2} + \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{F_0(r^*)}{V} + \frac{F_1(r^*)}{V} - \frac{3}{4} \cdot \frac{F_2(r^*)}{V} \right]. \quad (31)$$

The practical application of the foregoing theory is carried out in two steps. First, the circulation integral equation is solved by introducing the angle variables

$$r^* = s \cos \varphi, \quad \eta^* = s \cos \theta, \quad (32)$$

approximating the circulation function by the Fourier series

$$\bar{I}'(r^*) = \sum_n K_n \frac{\sin n \varphi}{n} \quad (33)$$

and requiring equation (26) to be satisfied at as many spanwise stations (tips excluded) as there are constants  $K_n$  to be determined. Second, the loadings are calculated by substituting equation (33) into the expressions for  $F_0, F_1, F_2$ , then applying equations (30) and (31). This process resembles closely that devised by REISSNER and STEVENS [2], Part II. In the first examples, however, it was found convenient to use series expansions of  $J_0, J_1$  and the complex exponentials; these were carried up to terms of orders  $k^2$  and  $k_0^2$ , which appears adequate for the majority of helicopter applications. It proved necessary to evaluate numerically several hundred integrals containing the  $N$ -functions,  $\sin n \theta$ ,  $\cos n \theta$  and various powers of

$$\frac{V(r^*)}{V(\eta^*)} = \frac{R_0^* + r^*}{R_0^* + \eta^*} = \frac{R_0^*/s + \cos \varphi}{R_0^*/s + \cos \theta} \quad (34)$$

as factors in their integrands. Although the first examples were laborious, the formulation is now systematized and well adapted to high-speed digital computation.

To obtain some idea of the importance of three-dimensional effects on vibrating rotors, the theory has been used to compute the loads due to pitching and flapping of a constant-chord blade with aspect ratio 8. The frequency is given by  $\omega/\Omega = 1$ . (Since the relative wind is everywhere proportional to rotor speed  $\Omega$ , it is unnecessary to specify a reference value of reduced frequency  $k$ ; all dimensionless quantities are fixed by  $\omega/\Omega$ . Five spanwise stations were chosen, spaced equally in the variable  $\varphi$ .) Figure 10 plots, vs. radial distance,

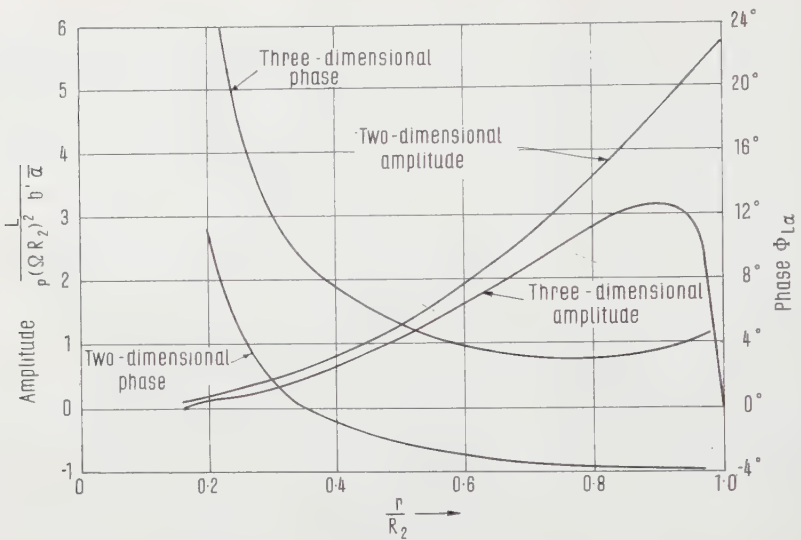


Figure 10

Dimensionless amplitude and phase angle of lift due to pitching oscillation, about the quarter-chord axis for a constant-chord rotor with  $R_1 = 8$  in.,  $R_2 = 40$  in.,  $2b = 5$  in. Circular frequency  $\omega = \Omega$ .

the dimensionless amplitude and phase angle of lift per unit span due to nose-up pitching oscillation

$$\alpha = \bar{\alpha} e^{i\omega t} \quad (35)$$

about an axis along the quarter-chord line. Dimensions of the blade planform are listed in the caption.  $\varphi_{L\alpha}$  is the phase angle by which the force leads the angular displacement; on a quasi-steady basis it would equal zero. The curves marked 'two-dimensional' represent the unsteady strip theory of THEODORSEN [2], which is discussed in previous sections. Other airloads due to pitching and flapping show the same general behavior as Figure 10, for the particular rotor and value of  $\omega/\Omega$  chosen here.

It can be concluded that in this example the phase shift produced by three-dimensionality of the flow is small enough to be negligible when one is analyzing forced motion. The reduction of amplitude is more significant, particularly in the tip region. The total lift drops roughly 25%, while the moment about the flapping hinge of the blade is reduced by well over 30%. Further remarks on the implications of this calculation are made in the next section.

The three-dimensional theory can be modified in an approximate way to account either for the returning shed vortices in the helical wake during vertical flight, or for the small fluctuations of relative wind due to forward flight at low tip-speed ratios. It is unlikely that both of these effects would have to be introduced simultaneously.

Without going into detail, the shed-vortex modification is made on a two-dimensional basis by analogy with LOEWY's work [3]. The two-dimensional circulation function of equations (27) and (26) must be replaced by (midechord sweep  $z_m$  is set equal to zero here for simplicity)

$$\Gamma'^{(2)} = \frac{\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1-z}{1+z} c_a(z, r^*) dz \right]}{\pi i k \left\{ \frac{1}{2} [H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)] + [J_1(k) + i J_0(k)] W \right\}}. \quad (36)$$

Here  $W$  is a wake-correction function [3], which approaches zero as the spacing between successive helical vortex sheets becomes large. The circulation integral equation is then solved as before, but in the two-dimensional parts of the final pressure, force and moment formulas the function  $C(k)$  must everywhere be replaced with the function  $C'(k, m, h')$  tabulated by LOEWY. This procedure omits the potentially large influence of the strong helical vortices trailing from the neighborhood of the blade tips, something which certainly merits further study but will lead to serious analytical complications.

Forward speed can be accounted for two-dimensionally by reference to the work of GREENBERG [16], who studies an airfoil operating in a stream whose speed is given by the real part of

$$V = V_0 [1 + \sigma e^{i\omega_v t}]. \quad (37)$$

Some care must be observed when handling terms containing the combined factors  $e^{i\omega t}$  and  $e^{i\omega_v t}$ , but for a particular motion like flapping or pitching, the principal changes come in the function  $\bar{\Gamma}'^{(2)}$  and the two-dimensional parts of the loading expressions. It is important to realize that GREENBERG's theory contains the implicit restriction that  $\sigma/k_r$  is small compared with unity, where  $k_v = \omega_v b'/V_0$ . This may limit its applicability to typical rotor problems rather severely.

No numerical examples involving forward speed or shed vortices have been worked out as yet. From the general formulation, however, there is good reason to believe that three-dimensional loadings incorporating the latter will exhibit the same drops in magnitude and losses of aerodynamic damping near integral values of  $m$  that were discovered in LOEWY's original investigation.

## 5. Conclusions

Although much remains to be done in the way of practical application of the theories described in sections 3 and 4, some tentative conclusions can now be drawn concerning rotor vibrations and unsteady flow. When calculating forced vibratory response during hovering or vertical flight, unsteady effects

must be accounted for, with particular reference to the shed vortices in the helical wake. If this is not done, potentially dangerous resonances near frequency ratios which are integral multiples of the number of blades will be overlooked. It can be inferred that aeroelastic stability is subject to the same influences, and that rotor flutter speeds much lower than those computed without regard for the returning wake may occur whenever the flutter frequency is close to any critical multiple of  $\Omega$ .

In the presence of the ground, the dangers of resonant vibration and flutter are reduced, since the ground plane provides additional aerodynamic damping for all modes of blade motion. Single-degree-of-freedom flutter can still occur in an unfavorable combination of circumstances. When the rotor plane is more than two diameters above the surface, ground effects become negligible.

For values of the reduced oscillation frequency typical of helicopter practice, the three-dimensionality of the flow does not cause significant changes in the phase angle between a given motion and the airloads produced thereby. There will be a large amplitude reduction, however, especially near the rotor tip. This suggests, incidentally, that finite-span effects can perhaps be estimated on a steady-state basis. It cannot be concluded that forced vibratory responses calculated by strip theory will always be larger than those actually encountered, because three-dimensional effects reduce both the forcing functions and the aerodynamic 'springs' and 'dampers' opposing them. Since these reductions are not the same for all terms in the equations of motion, further study is needed to discover the conditions under which strip-theory predictions are unacceptable. Three-dimensional flow is likely to be more significant for flutter analyses, since flutter occurs at a stability boundary, whose location may be sensitive to small changes in the aerodynamic properties of the system.

The present investigation concentrates on the case of vertical flight. It is possible, however, to adjust both conventional strip theory and the three-dimensional approach of section 4 to account for forward motion at small tip-speed ratios. This can be done along the lines proposed by GREENBERG [16]. Since the most severe forced vibrations are often encountered on helicopters in this transitional range, further study of the problem is very desirable.

## REFERENCES

- [1] J. ZVARA, N. D. HAM und H. H. MOSER, *Effects of Unsteady Aerodynamics on Helicopter Rotors*, Part I, to be issued as a W.A.D.C. Technical Report (1958).
- [2] T. THEODORSEN, *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, Report 496, National Advisory Committee for Aeronautics (1935).
- [3] R. G. LOEWY, *A Two-Dimensional Approximation to the Unsteady Aerodynamics of Rotary Wings*, Report 75, Cornell Aeronautical Laboratory (1955).

- [4] H. DAUGHADAY, F. DUWALDT, and C. GATES, *Investigation of Helicopter Blade Flutter and Load Amplification Problems*, Institute of the Aeronautical Sciences, Preprint 705 (1957).
- [5] R. TIMMAN and A. I. VAN DE VOOREN, *Flutter of a Helicopter Rotor Rotating in Its Own Wake*, J. aeron. Sci. 24, No. 9 (1957).
- [6] H. SÖHNGEN, *Die Lösungen der Integralgleichung*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^x \frac{f(\xi)}{x-\xi} d\xi$$
*und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie*, Math. Z. 45, 245–264 (1939).
- [7] H. L. RUNYAN, *Single-Degree-of-Freedom Flutter Calculations for a Wing in Subsonic Potential Flow and Comparison with an Experiment*, Technical Note 2396, National Advisory Committee for Aeronautics (1951).
- [8] S. GOLDSTEIN, *On the Vortex Theory of Screw Propellers*, Proc. roy. Soc. [A] 123, 440–465 (1929).
- [9] A. A. NIKOLSKY, *Helicopter Analysis* (John Wiley & Sons, New York 1951).
- [10] A. A. NIKOLSKY and R. B. GRAY, *On the Motion of the Helical Vortex Shed from a Single-Bladed Hovering Model Helicopter Rotor and Its Application to the Calculation of the Spanwise Aerodynamic Loading*, Princeton University Aeronautical Engineering Dept. Rept. No. 313 (Sept. 1955).
- [11] H. GLAUERT, *Aerofoil and Airscrew Theory*, American edition (The Macmillan Co., New York 1943).
- [12] E. REISSNER, *Effect of Finite Span on the Airload Distributions for Oscillating Wings*, Parts I and II, Technical Notes 1194 and 1195, National Advisory Committee for Aeronautics (1947).
- [13] H. ASHLEY, J. DUGUNDJI, and H. H. MOSER, *Effects of Unsteady Aerodynamics on Helicopter Rotors*, Part III, to be issued as a W.A.D.C. Technical Report (1958).
- [14] G. N. WATSON, *Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second edition (The MacMillan Co., New York 1945).
- [15] L. SCHWARZ, *Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung*, Luftfahrtforschung (17. Dez. 1940), p. 379–386.
- [16] J. M. GREENBERG, *Airfoil in Sinusoidal Motion in a Pulsating Stream*, Technical Note 1326, National Advisory Committee for Aeronautics (1947).

### Zusammenfassung

Es wird ein Beitrag geliefert zur Stützung der schon früher geäußerten Überzeugung, dass nichtstationäre Strömungsanteile das Schwingungsverhalten und die aeroelastische Stabilität von Helikopter-Drehflügeln wesentlich beeinflussen können. Die Untersuchung betont besonders den Dämpfungsverlust, welcher sich aus den entlang der Spannweite eines schwebenden Drehflügels schraubenförmig abgehenden Wirbeln ergibt.

Gemäß dem Bedürfnis für verbesserte Mittel zur Behandlung nichtstationärer aerodynamischer Vorgänge werden zwei neue theoretische Entwicklungen beschrieben und zum Berechnen von Luftkräften auf typische schwingende Drehflügel angewendet.

Die erste dieser Arbeiten erfasst auf zweidimensionaler Basis das Vorhandensein einer Bodenebene. Es wird angenommen, dass die Wirbel im Abwinde des schwe-



benden Drehflügels durch die Bodenebene nicht zurückgeworfen, sondern schnell zerstreut werden. Als Resultat zeigt sich, dass die einer spezifischen Schwingungsform entsprechende aerodynamische Dämpfung durch den Einfluss des Bodens, der praktisch etwa zwei Drehflügel-Durchmesser hinaufreicht, im allgemeinen vergrößert wird.

Die zweite der vorgelegten Theorien betrifft die dreidimensionale Strömung über ein schwingendes Flügelblatt, welches als tragende Linie und unter Vernachlässigung der Krümmung seines Abwindes untersucht wird. Numerische Rechnungen sind ziemlich mühsam, aber mittels Rechenmaschinen ohne weiteres durchführbar. In einem herausgegriffenen typischen Beispiele zeigte sich, dass die Luftkräfte bedeutend kleiner sind als die von der Streifentheorie angezeigten, dass aber die Phasendifferenz zwischen Anstellwinkel und Luftkräften fast unverändert bleibt.

(Received: October 3, 1957.)



# Compressible Laminar Boundary Layer Behavior Studied by a Finite Difference Method<sup>1)</sup>

By DONALD C. BAXTER, Ottawa, Canada<sup>2)</sup>  
and IRMGARD FLÜGGE-LOTZ, Stanford, California, USA<sup>3)</sup>

## 1. Introduction

The computation of skin friction and heat transfer in laminar compressible flow along curved surfaces is a problem which still attracts considerable attention. The flow in the thin layer near the surface in which rapid temperature and velocity changes occur is described by a system of nonlinear partial differential equations which resist any attempt at obtaining a general analytical solution. With the advent of automatic computing machines, the solution of this system of equations by finite difference methods has become attractive. In an article presented in *50 Jahre Grenzschichtforschung* [6]<sup>4)</sup> the second author has reported on a promising difference solution of the problem using Crocco's form of the partial differential equations [5, 16]. Since that time the procedure has been considerably improved, its stability investigated and its convergence checked. It has been programmed for solution on an IBM 650 digital computer, and a series of some sixty examples has been computed. These examples were chosen to bring out trends which might be expected of boundary layer behavior with variable surface temperature and pressure gradient, and also to aid the practising engineer by showing comparisons with approximate methods of solution which may be used.

## 2. The Boundary Layer Equations

In the Crocco boundary layer equations the independent variables are  $x$ , the co-ordinate measured parallel to the surface, and  $u$ , the velocity component in the  $x$ -direction. The shear stress  $\tau$  and the enthalpy  $i$  (equal to  $c_p T$ ) are the dependent variables. Since the shear stress is related to the velocity gradient by

$$\tau = \mu u_y \quad (1)$$

<sup>1)</sup> This research was supported by the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command under Contract AF 18(600)-1488.

<sup>2)</sup> National Research Council of Canada, formerly Stanford University.

<sup>3)</sup> Stanford University.

<sup>4)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 95.

in which  $\mu$  is the viscosity coefficient, the co-ordinate  $y$  normal to the surface is in turn related to  $u$  by

$$y(x, u) = \int_0^u \frac{\tau(x, \eta)}{\mu(x, \eta)} d\eta. \quad (2)$$

It is evident that solutions  $\tau(x, u)$  and  $i(x, u)$  of Crocco's equations will allow description of the flow in the more usual terms of  $u(x, y)$  and  $i(x, y)$ .

The steady, two-dimensional flow of a compressible perfect gas with variable density and viscosity but constant Prandtl number,  $Pr = c_p \mu / k$ , and specific heat,  $c_p$ , is described by the momentum and energy equations

$$\tau^2 \tau_{uu} + \mu p'_e \tau_u + [u (\rho \mu)_x - \mu_u p'_e] \tau = u \rho \mu \tau_x, \quad (3)$$

$$\tau^2 i_{uu} + [(1 - Pr) \tau \tau_u + Pr \mu p'_e] i_u + Pr (u \mu p'_e + \tau^2) = Pr u \rho \mu i_x. \quad (4)$$

The density and viscosity are related to the enthalpy by the equation of state

$$p_e = \rho R T = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \rho i \quad (5)$$

and the Sutherland law

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{i}{i_0} \right)^{1.5} \frac{i_0 + c_p S}{i + c_p S}. \quad (6)$$

Here  $p$  is pressure,  $S$  is a constant, subscript  $e$  denotes values at the outer edge of the boundary layer, and subscript 0 denotes values at isentropic stagnation conditions for the outer edge flow.  $R$  is the gas constant and  $\gamma$  the ratio of specific heats. (5) and (6) can be substituted into (3) and (4) leading to a pair of coupled nonlinear parabolic differential equations for  $\tau(x, u)$  and  $i(x, u)$ . These are the equations solved by the present finite difference method.

Boundary conditions must be specified at the edges of the semi-infinite strip shown in Figure 1. At  $x = L$  values of shear stress and enthalpy must be given across the boundary layer. The finite difference solution cannot start at a stagnation point or the leading edge of a flat plate since both are singular points. At the outer edge, where  $u = u_e(x)$ , the shear stress is zero and the enthalpy

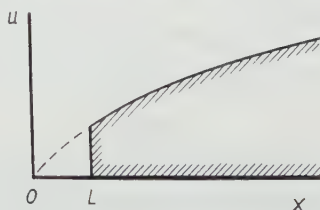


Figure 1

Boundary layer region in  $(x, u)$ -plane.

given by the isentropic relation

$$i_e(x) = i_0 - \frac{1}{2} u_e^2(x) . \tag{7}$$

At the surface of the body, where  $u = 0$ , the shear stress must satisfy

$$\tau_w \tau_{uw} = \mu_w \dot{p}_e' , \tag{8}$$

where the subscript  $w$  refers to conditions at the wall. Also either the wall temperature or the heat transfer rate is specified, i.e., either

$$i(x, 0) = i_w(x) \tag{9}$$

or

$$q(x) = - \frac{k_{uw} \tau_w}{Pr} . \tag{10}$$

The advantages of using the Crocco form of the boundary layer equations for a finite difference solution are that the range of the non-streamwise independent variable is limited, in fact to  $0 \leq u \leq u_e$ , and that the transverse velocity  $v$  has been eliminated without the introduction of an integral.

In the exact solutions of [2] for zero Mach number flow over wedges, there appeared under certain circumstances velocities within the boundary layer which were locally greater than the outer edge value. In such 'overshoot' cases the enthalpy and shear stress become double-valued functions of  $u$ . As a result the Crocco equations lead to ambiguity in describing the problem and such cases are excluded from consideration.

Previous authors [3] have treated boundary-layer problems by using instead of (6) the linear law

$$\frac{\mu}{\mu_e} = C \frac{T}{T_e} \tag{11}$$

with the constant  $C$  chosen so that the average viscosity at the wall is correct using (6). For flow over an isothermal flat plate with temperature  $T_{w,1}$  its value is thus

$$C = \left( \frac{T_{w,1}}{T_e} \right)^{0.5} \frac{T_e + S}{T_{w,1} + S} . \tag{12}$$

In the calculation of the examples to be presented later (6) was used, but (12) will be utilized in presenting the results.

**3. Setting up the Finite Difference Problem**

The conversion of the differential equations into difference equations is described in [6]. The procedure is straightforward, central difference quotients

being used for derivatives with respect to  $u$ , and forward differences for  $x$ -derivatives. Using a net of grid points as indicated by Figure 2 algebraic equations for  $\tau_{m+1,n}$  and  $i_{m+1,n}$  of the following form are obtained:

$$\tau_{m+1,n} = f_1(\tau_{m,n+1}, \tau_{m,n}, \tau_{m,n-1}, i_{m,n+1}, i_{m,n}, i_{m,n-1}, i_{m-1,n}, p'_e, n, \Delta x, \Delta u), \quad (13)$$

$$i_{m+1,n} = f_2(\tau_{m,n+1}, \tau_{m,n}, \tau_{m,n-1}, i_{m,n+1}, i_{m,n}, i_{m,n-1}, p'_e, Pr, n, \Delta x, \Delta u). \quad (14)$$

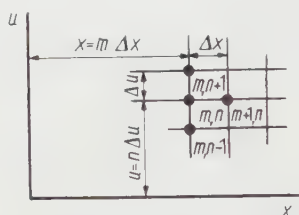


Figure 2

Division of boundary layer region for finite difference solution.

Provided  $n \neq 0$  these can be solved one at a time, and quantities at station  $(m+1)\Delta x$  found from upstream values at  $m\Delta x$ . It is necessary only to treat (14) first, since  $i_{m+1,n}$  appears in (13). If conditions at  $n = 0$  are treated as discussed in the next paragraph, it is possible to progress from the starting profiles to the next downstream position, and by a repeated application of this same process to cover the whole field of interest.

Special attention is required for the grid points along the wall. Difference quotients could not be formed in the same way as for interior points, and more important the very form of (3) and (4) precludes establishing a direct difference procedure at all because the  $x$ -derivatives of  $\tau$  and  $i$  are indeterminate there. (They occur as products with  $u$ .) What is done to allow calculation of wall quantities is as follows. Interior points, i.e.,  $n > 0$ , are treated using (13) and (14). Conditions at the wall are then determined using extrapolation from these points to the surface. In the extrapolation power series in  $u$  are used, with some of the coefficients determined from the differential equations. This use of series expansions was first discussed in [6].

The series which are used in the extrapolation are the following. For determination of the shear stress

$$\tau^2 = \sum_0^{\infty} d_j u^j \quad (15)$$

with the coefficients  $d_j$  being functions of  $x^5$ ). This is the same as was used in [6]. However the series for the temperature field have been modified. For the

<sup>5)</sup> The coefficients  $d_j$  here are greater by  $j!$  than those of [6].

calculation of  $i_{uw}$  in specified wall temperature cases an expansion of

$$i_u \tau = \sum_0^{\infty} b_j u^j \quad (16)$$

has proven superior to the expansion for  $i$  which was used in [6]. However when the heat transfer rate is specified and the wall temperature is unknown, such an expansion has been retained, namely

$$i = \sum_0^{\infty} a_j u^j. \quad (17)$$

Some of the coefficients in each of these expansions can be related to quantities at the wall through substitution into (3) and (4) and the additional equations formed by differentiating them with respect to  $u$ . In fact it can be found that

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= 2\mu_w \dot{p}'_e, & d_2 &= \mu_{uw} \dot{p}'_e, \\ b_1 &= -Pr \tau_w, & b_2 &= \frac{Pr}{2\tau_w} (\rho_w \mu_w i_{xw} - 2\mu_w \dot{p}'_e), \\ a_1 &= \frac{q Pr}{\tau_w}, & a_2 &= \frac{Pr}{2} \left( \frac{q \mu_w \dot{p}'_e}{\tau_w^3} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

To perform the extrapolation, (15) is passed through the first two interior points and (16) and (17) through three points. Making use of the known coefficients of (18) four terms of the first series and five terms of the last two are retained. The following formulae for the determination of quantities at the wall are thus obtained.

$$\tau_w = \frac{1}{\sqrt{7}} [8 \tau_{m,1}^2 - \tau_{m,2}^2 - 12 \mu_w \dot{p}'_e \Delta u - 4 \mu_{uw} \dot{p}'_e (\Delta u)^2]^{0.5}, \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{uw} = \frac{1}{85 \tau_w} [108 (i_u \tau)_{m,1} - 27 (i_u \tau)_{m,2} + 4 (i_u \tau)_{m,3} + 66 Pr \tau_w \Delta u \\ - 18 \frac{Pr (\Delta u)^2}{\tau_w} (\rho_w \mu_w i_{xw} - 2\mu_w \dot{p}'_e)], \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} i_w = \frac{1}{85 \tau_w} [108 i_{m,1} - 27 i_{m,2} + 4 i_{m,3} + 66 Pr q \frac{\Delta u}{\tau_w} \\ + 18 Pr (\Delta u)^2 \left( 1 - \frac{q \mu_w \dot{p}'_e}{\tau_w^3} \right)]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(19) is solved first and then (20) or (21) as required. One of  $\mu_w$  or  $\mu_{uw}$  will be initially unknown (depending on whether heat transfer rate or wall temperature is specified). It is replaced by its preceding upstream value. This approximation could be improved by iteration but so far this has not proven necessary.

#### 4. Discussion of the Finite Difference Problem

In the application of finite difference methods to the solution of partial differential equations there are two problems of fundamental concern—stability and convergence. Stability relates to the ability of the actual numerical solution of the difference equations to represent the exact solution of those equations. This aspect is discussed in such papers as [13] and for the particular equations at hand in [7]. Convergence is related to the ability of the exact solution of the difference equations to represent the solution of the differential equations from which they were derived. For the present system this aspect has not been investigated analytically, rather it has been tested using the empirical approach. That is to say, several of the more extreme examples have been re-calculated using a finer mesh spacing. The results obtained have differed by an insignificant amount from those of the coarser mesh, indicating that the solutions obtained have been reasonably accurate from this point of view.

The requirement of stability has been found analytically and practically to place an upper limit on the magnitude of  $\Delta x$ . From the study made in [7] several criteria emerge. However the only significant one has so far been found to be

$$\frac{2 \tau^2 \Delta x}{Pr u_0 \mu (\Delta u)^2} < 1. \quad (22)$$

That (22) be satisfied at each mesh point appears to be a sufficient condition for stability. It shows, among other things, that any finite difference solution would be unstable at the surface where  $u = 0$ . When the wall points are treated as discussed above, the critical mesh points become the first ones from the wall. For these (22) can be written approximately and more conveniently as

$$\frac{\Delta x}{x} < \frac{2 Pr (\Delta u/u_e)^3}{(c_f \sqrt{Re_x/C})^2}. \quad (23)$$

The skin friction parameter  $c_f \sqrt{Re_x/C}$  is defined in (24) below.

It appears from (23) that a smaller mesh width must be used nearer the nose of the body. In fact at the nose itself the only permissible value is zero. It can also be seen that the maximum downstream mesh width is proportional to the cube of the transverse mesh spacing.

To give some idea of the relative magnitude of  $\Delta x$  which must be used, it can be estimated that  $c_f \sqrt{Re_x/C}$  will be on the order of unity. [See (26) below.] With twenty divisions across the boundary layer (23) then gives  $\Delta x/x = 0.0002$  as the maximum which may be used for a stable solution. Thus it may take five thousand steps to travel a downstream distance equal to that from the nose to the starting position.

With the exception of flows which involve overshoot, the finite difference solution of the Crocco equations will allow determination of laminar boundary



layer behavior under any combination of pressure gradient and wall temperature or heat transfer rate variation. It is limited only in that (a) starting profiles must be provided at some distance downstream of the nose, or leading edge, and (b) the time required to compute a particular flow of interest may be long.

Because of the considerable amount of repetition involved in the solution of the finite difference problem, the procedure was programmed for solution on an International Business Machines Type 650 digital computer. This computer is of the stored program, two address type and utilizes a rotating magnetic drum memory having a capacity of two thousand ten decimal digit words, for which the average access time is 2.4 ms. With this computer the time required to treat a problem using the present finite difference solution is about one second per mesh point.

## 5. Examples Computed Using the Finite Difference Method

The aim of the present investigation was to use the finite difference solution of the Crocco boundary layer equations to obtain some insight into compressible flows with variable pressure gradients and surface temperatures. To accomplish this some sixty examples were computed which illustrate certain trends which can be expected and which allow comparison with various approximate methods of solution which have been proposed in the past. Ten of those examples will be considered here. The remainder may be found in [8].

When the flow upstream of  $x = L$  is that over an isothermal flat plate with zero pressure gradient the starting profiles can be taken from the 'exact' solution of CHAPMAN and RUBESIN [3]. Tables of the necessary functions can be found in [11]. Profiles were obtained in this way for Mach numbers of 0.5 and 3 and wall temperatures equal to one half and twice the adiabatic or insulated wall temperature,  $T_{ad}$ . Only flow downstream of these profiles will be considered here.

Certain assumptions were made in the calculation of the examples. The assumption of constant Prandtl number and specific heat in (3) and (4) is not essential to the finite difference method; it is only made for the purposes of the present study. The Prandtl number employed was 0.72.  $\gamma$  was taken to be 1.4. In (6) the ratio  $S/T_{e,1}$  was chosen to be 0.543, or alternatively if  $S = 216 \text{ deg } R$  the value of the temperature far from the plate must be 390 deg  $R$ , the temperature of the stratosphere. The subscript 1 denotes values at  $x = L$ . The boundary layer at  $x = L$  was divided into twenty divisions, i.e.,  $\Delta u/u_{e,1} = 0.05$ . If the outer edge velocity varies downstream, the outermost interior point calculation was modified to incorporate the fact that the interval from it to the outer edge was not equal to that between other mesh points. The downstream step width used was  $\Delta x/L = 0.0004$ .

The parameters used in the presentation of the results are the following.

For skin friction:

$$c_f \sqrt{R e_x / C} = \frac{2 \tau_w}{\varrho_e u_e^2} \left( \frac{u_e x \varrho_e}{\mu_e C} \right)^{1/2}. \quad (24)$$

For heat transfer:

$$St Pr^{2/3} \sqrt{R e_x / C} = \frac{q}{\varrho_e u_e c_p (T_w - T_{ad})} \left( \frac{u_e x \varrho_e}{\mu_e C} \right)^{1/2}. \quad (25)$$

These parameters employ the skin friction coefficient,  $c_f$ , the Reynolds number,  $Re_x$ , and the Stanton number,  $St$ . The advantage of using them is that the results for any Mach number or wall temperature start at  $x = L$  with equal numerical values. In fact these starting values are [3]

$$c_f \sqrt{R e_x / C} = 0.664, \quad St Pr^{2/3} \sqrt{R e_x / C} = 0.330. \quad (26)$$

### A. Ramp Wall Temperature

The first set of examples deals with flow over flat plates with zero pressure gradient but at different Mach numbers and with varying wall temperatures. In particular the Mach numbers are 0.5 and 3 and the wall temperatures, constant up to  $x/L = 1$  at one half and twice the adiabatic value, vary downstream of that in accordance with

$$\frac{T_w - T_{ad}}{T_{w,1} - T_{ad}} = 1 + 4 \left( \frac{x}{L} - 1 \right). \quad (27)$$

For the examples with the hot walls at either Mach number the wall temperature increases, while for those with cold walls it decreases.

The computed heat transfer results are shown in Figure 3b, and for the first part of the run the results for all four cases are seen to practically coincide. At  $x/L = 1.025$  they differ by only 4%. At either wall temperature level the results for the two Mach numbers are indistinguishable.

Also shown in Figure 3b is the prediction obtained in [8] based on the solution of LIGHTHILL [10]<sup>6</sup>, namely

$$St Pr^{2/3} \sqrt{R e_x / C} = 0.332 \frac{1 + \frac{16}{3} B_z \left( \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)}{1 + 4 \left( \frac{x}{L} - 1 \right)}, \quad (28)$$

<sup>6</sup>) [10] contains an exact solution of the zero Mach number, constant density and viscosity energy equation under the assumption of a velocity profile linear in  $y$ . The heat transfer rate is found there to be

$$q(x) = \frac{k}{(1/3)!} \left( -\frac{Pr \varrho}{9 \mu^2} \right)^{1/3} \sqrt{\tau_w(x)} \int_0^x \left[ \int_{\xi}^x \sqrt{\tau_w(z)} dz \right]^{-1/3} dT_w(\xi).$$

Extensions and specializations of this result are considered in [8] and [15] for example.

where  $B_Z(2/3, 4/3)$  is the incomplete beta-function of argument

$$Z = 1 - \left(\frac{L}{x}\right)^{3/4}. \quad (29)$$

It can be observed that (28) is indistinguishable from the calculated values for the hot wall cases. (28) predicts a limiting value for the heat transfer parameter at large  $x$  of 0.536.

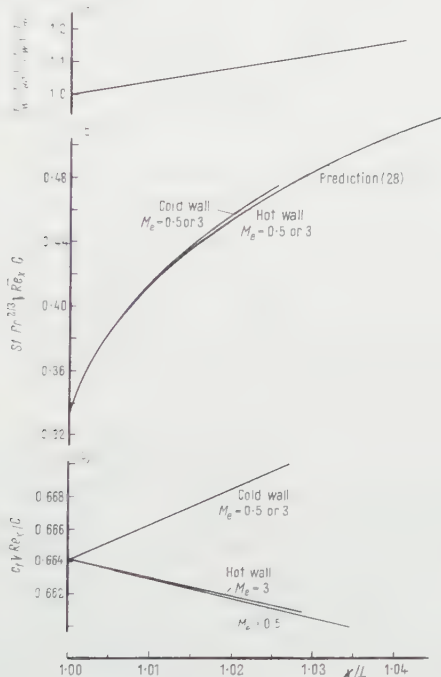


Figure 3

Ramp wall temperature, zero pressure gradient examples:  
*a* wall temperature; *b* heat transfer; *c* skin friction.

The skin friction parameter variations for the four ramp wall temperature examples are shown in Figure 3c. They are seen to change linearly with distance, just as the temperature is changing. For the cold wall cases, where the temperature is decreasing, the skin friction is seen to increase. Conversely for the hot wall cases, where the temperature is increasing, skin friction decreases.

### B. 'Hot Spot' Wall Temperature

The next example is concerned with flow over a flat plate again, but now with a surface temperature which is constant everywhere except in the region

$1.00 \leq x/L \leq 1.0256$ . There its variation is shown in Figure 4a as the solid curve<sup>7)</sup>. Outside of that interval it is constant at twice the adiabatic value. The Mach number is 0.5.

The heat transfer parameter is shown as the solid curve in Figure 4b. Its overall change is about 30%. Note the decided asymmetry even though the temperature itself is symmetrical. Also that the heat transfer rate should reach a value below its isothermal value is explicable when the heating of the air near the wall during the interval up to  $x/L = 1.01$  is considered. This points out that 'history' has an important influence on boundary-layer development.

The skin friction is not plotted since it follows closely the shape of the wall temperature, decreasing only 0.15% at  $x/L = 1.0128$  and then returning to its initial value.

The heat transfer rate for this example was predicted using three types of approximate method. First the wall temperature was replaced by the pyramid-shaped curve shown dotted in Figure 4a, and the heat transfer rate calculated using the results for ramp wall temperatures derived in [8] on the basis of the result of [10]. Since that result assumes that the energy equation is linear in temperature it is permissible simply to superimpose the results for successive ramps. The result is shown dashed in Figure 4b, and is seen to show all the essential features of the finite difference result.

The heat transfer performance was also computed using the results of BECKWITH [1] and MORDUCHOW [12], integral methods which take into account dissipation and variable density and viscosity but assume equal thicknesses of the thermal and velocity boundary layers. The predictions here are found to depend strongly on the degree of the thermal polynomial assumed and the choice of boundary conditions which are satisfied. With one boundary condition applied at the wall the result is shown dotted in Figure 4b. It is seen to predict a change which is directly proportional to the surface temperature change, and thus shows none of the observed asymmetry. Moreover it underestimates the change by 50%. On the other hand if two boundary conditions at the wall are met, the predicted results depend strongly on the degree of the thermal polynomial used, the extremes being shown in Figure 4c. The changes predicted are now proportional to the wall temperature gradient, and are larger than the actual changes by factors of from five to sixteen.

The correlation method of COHEN and RESHOTKO [4] was also applied to this example. Such a method assumes that there exists a unique relationship among all pertinent boundary layer quantities independent of previous development, and which can be found from results for compressible flow over isothermal wedges. For the present example this method predicts essentially no change in the heat transfer rate as the flow passes over the 'hot spot', compared to the

<sup>7)</sup> Note that this change is by no means rapid enough to invalidate the boundary layer approximations.

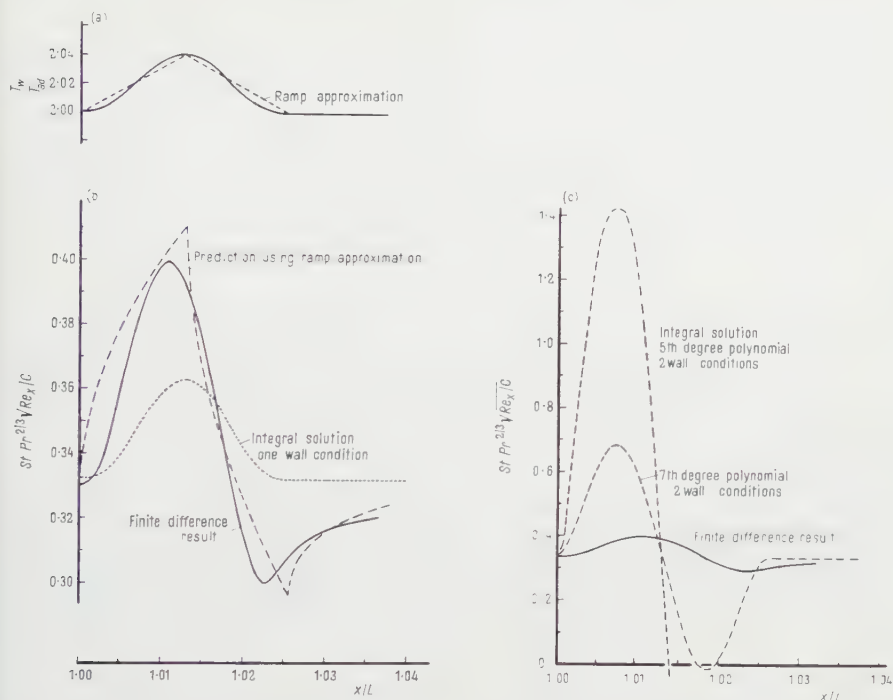


Figure 4

Hot spot wall temperature, zero pressure gradient example,  $M_e = 0.5$ :  
 a wall temperature; b heat transfer; c heat transfer predictions.

30% change actually found. The reason is that, because of the rapid changes of wall temperature occurring, the equilibrium conditions upon which a correlation method is based are never attained.

### C. Ramp Pressure Gradient

The next examples illustrate flow with variable pressure gradient over isothermal surfaces. The Mach numbers considered are 0.5 and 3 at  $x = L$ . The surface temperatures are everywhere constant at one half and twice the adiabatic values of the starting flow ('cold' and 'hot' walls respectively). For  $x \geq L$  the pressure gradient varies according to

$$-\frac{p'_e L}{\rho_{e,1} u_{e,1}^2} = 5 \left( \frac{x}{L} - 1 \right). \quad (30)$$

The pressure gradient and outer edge velocity are shown in Figure 5a.

Such a flow as considered here might represent that along one wall of a diffuser. Up to  $x = L$  the walls are essentially straight, while downstream they

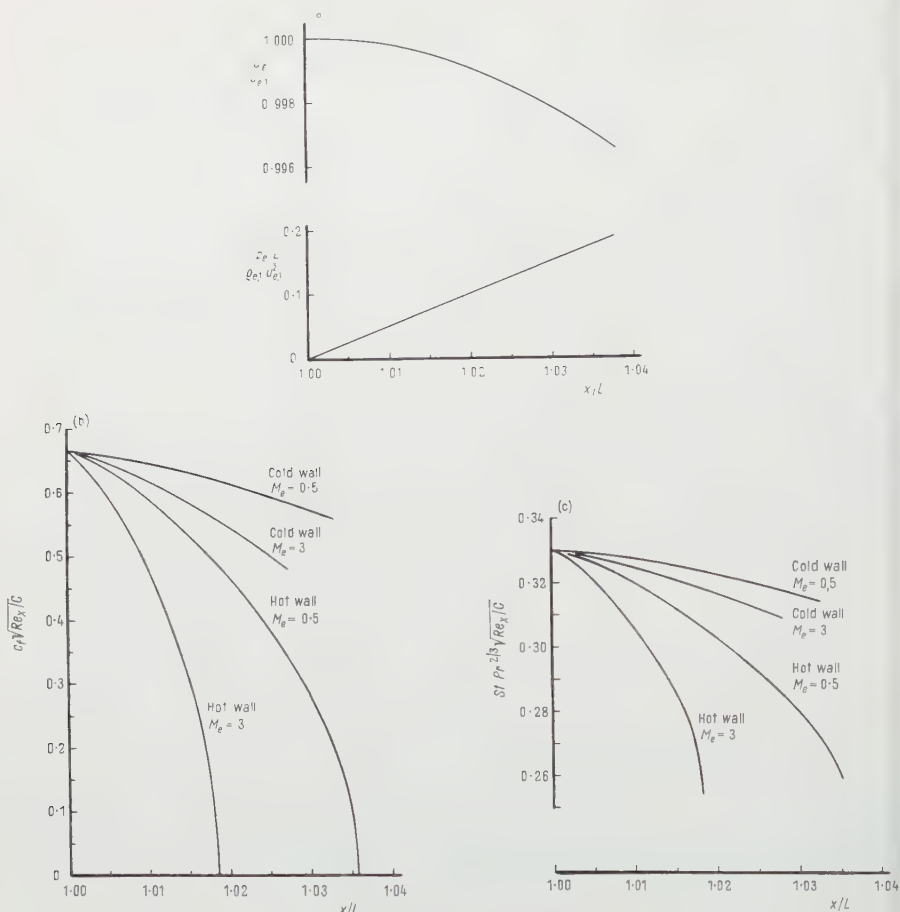


Figure 5

Ramp pressure gradient, constant wall temperature examples:  
*a* outer edge velocity and pressure gradient; *b* skin friction; *c* heat transfer.

are continually curving to force the pressure gradient to become larger and larger. To give some idea of the inclination of the walls, it can be found that for one-dimensional, zero Mach number flow (30) would imply that the inclination is changing approximately linearly with distance, and at  $x/L = 1.01$  the angle between the wall and the center line is about one degree.

The computed skin friction variations for the four examples are shown in Figure 5*b*. The tendency towards separation is most pronounced on the hot walls and at the higher Mach numbers. Indeed separation is reached at  $x/L = 1.018$  in the case of the hot wall at Mach number 3, whereas for the cold wall at



Mach number 0.5 the skin friction parameter has decreased only 6% by this same position.

The corresponding results for heat transfer are shown in Figure 5c. The heat transfer rate decreases with distance in all cases with the hot wall, high Mach number examples again being most severely affected. However the magnitude of the change produced is smaller than that for skin friction. In fact, away from separation, the change is about one third as great.

#### D. Flow Over a Bump

Something which is typical of flow over a bump on an isothermal flat plate will be considered. The pressure gradient and outer edge velocity are shown in Figure 6a. Outside of the region  $1.0 \leq x/L \leq 1.0256$  the Mach number is 0.5, and everywhere the wall temperature is twice the adiabatic value. Flow over an insulated surface with this same pressure gradient was also considered. It was found that the adiabatic wall temperature changed at most 0.003% from its flat plate value. On superimposing a layer of vortices on the surface it can be shown that the height of the 'bump' is on the order of 1% of its 'length', 0.0256L.

The computed skin friction parameter is plotted as the solid curve in Figure 6b. A maximum value 50% above the flat plate value is reached at  $x/L = 1.009$ .

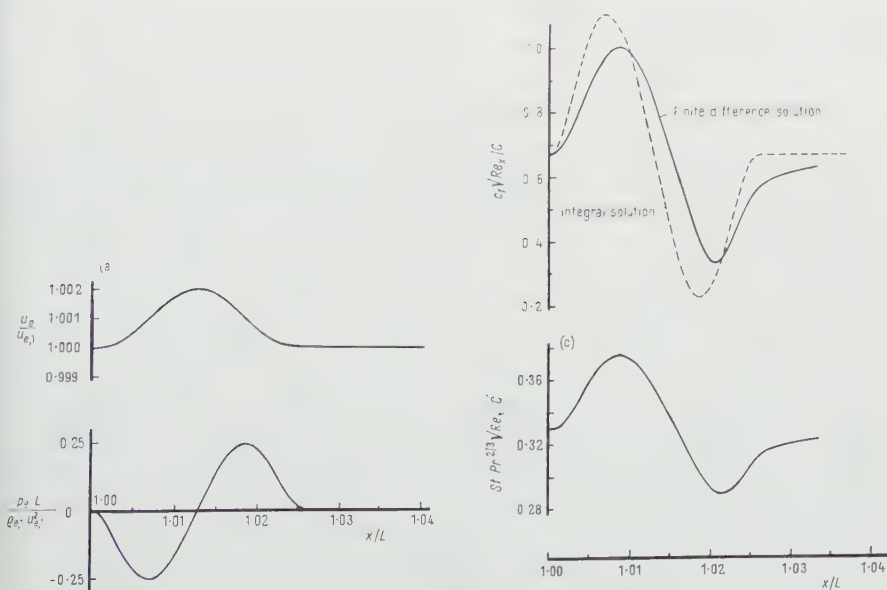


Figure 6

Flow over a bump, constant wall temperature,  $M_e = 0.5$ :

*a* outer edge velocity and pressure gradient; *b* skin friction; *c* heat transfer.

It is apparent that a 'bump' somewhat less than twice as large will cause separation on the downstream side, as indeed was found in another example which was calculated. Noticeable in Figure 6*b* is that the skin friction lags behind the pressure gradient but has roughly the same shape.

The heat transfer characteristics of this example are shown in Figure 6*c*. It shows the same trends evidenced by the skin friction; however, as with the ramp pressure gradient cases, the change is smaller.

The skin friction variation for this example was predicted using the one-parameter integral method of HOLSTEIN-BOHLEN [14, p. 209]. Though this is strictly applicable only to constant density and viscosity, zero Mach number flow, it will indicate trends to be expected of the more sophisticated, but much more complex methods, e.g. [1, 12]. The computed prediction is shown as the dotted curve in Figure 6*c*. It is found first of all to be in phase with the pressure gradient, and so does not indicate the lag actually found by the finite difference method. It is of the correct order of magnitude, overestimating the change by only 30%.

The skin friction variation was also examined using the correlation method of COHEN and RESHOTKO [4]. Here again the predicted change is in phase with the pressure gradient, but now the change is overestimated by a factor of five. As with the 'hot spot' wall temperature, the present case involves gradients too rapidly changing for the equilibrium conditions upon which a correlation method is based to be reached.

## 6. Discussion

The number of examples presented here is necessarily limited. In particular none are shown which combine simultaneous variations of pressure gradient and wall temperature. Also no cases of specified heat input are discussed. Such are available in [8], but they bring out no essentially new points. In addition the downstream distance traversed in any of the examples was limited by the computing time available.

The examples show that in general the effects of pressure gradient are intensified at higher wall temperatures and higher Mach numbers. Raising the surface temperature has the effect of reducing skin friction, while lowering it tends to increase skin friction. However surface temperature has much less effect on skin friction than it has on heat transfer. On the other hand pressure gradient does have an appreciable effect on heat transfer, although not as great as on skin friction.

For flow over non-isothermal flat plates the specializations and extensions of LIGHTHILL's result [10] obtained in [8] give very good agreement with the finite difference results for heat transfer. It follows that equally good agreement would be obtained with integral methods which assume *unequal* thicknes-

ses for the velocity and thermal boundary layers, since Lighthill's result can be reproduced by such methods [8, 15]. However it is shown by the present examples that integral methods which make the assumption of *equal* thicknesses, e.g. [1, 12], lead to inaccurate predictions of heat transfer performance when the wall temperature gradients are as high as those considered here (on the order of hundreds of degrees per foot). The same is true of COHEN and RESHOTKO's correlation method [4]. Thus these approximate methods must be used with caution when temperature gradients are high.

It appears that integral methods will give not unreasonable estimates for the skin friction even when that quantity is changing rapidly. This is not true of the correlation method, since the changes occurring in the present examples are too rapid to be related by the equilibrium conditions such a method assumes.

### REFERENCES

- [1] BECKWITH, I. E., *Heat Transfer and Skin Friction by an Integral Method in the Compressible Laminar Boundary Layer With a Streamwise Pressure Gradient*, NACA TN 3005 (September 1953).
- [2] BROWN, W. B., and DONOUGHE, P. L., *Tables of Exact Laminar-Boundary-Layer Solutions When the Wall is Porous and Fluid Properties are Variable*, NACA TN 2479 (September 1951).
- [3] CHAPMAN, D. R., and RUBESIN, M. W., *Temperature and Velocity Profiles in the Compressible Laminar Boundary Layer With Arbitrary Distribution of Surface Temperature*, J. aero Sci., 16, 547 (1949).
- [4] COHEN, C. B., and RESHOTKO, E., *Similar Solutions for the Compressible Laminar Boundary Layer With Heat Transfer and Pressure Gradient*, NACA TN 3325 (February 1955), Rep. 1293 (1956).
- [5] CROCCO, L., *Lo strato limite laminare nei gas*, Monogr. sci. Aero., Roma, No. 3, Associazione Culturale Aeronautica, Roma, Dic. 1946. (Translation in North American Aviation Aerophysics Lab. Rep. AL-684, July 1948.)
- [6] FLÜGGE-LOTZ, I., *The Computation of the Laminar Compressible Boundary Layer*, ARDC contract AF 18 (600)-586, Project No. R-352-30-7, Dept. of Mech. Eng., Stanford Univ., June 1954. Abbreviated version appeared as *A Difference Method for the Computation of the Laminar Compressible Boundary Layer*, in: *50 Jahre Grenzschichtforschung* (Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1955), p. 393.
- [7] FLÜGGE-LOTZ, I., and BAXTER, D. C., *The Solution of Compressible Laminar Boundary Layer Problems by a Finite Difference Method. Part I: Description of the Method*. Tech. Rep. No. 103, Div. of Engng. Mechanics, Stanford Univ., Stanford, Calif. (September 1956). Prepared under the Air Research and Development Command Contract AF 18 (600)-1488, AFOSR-TN-56-544.
- [8] BAXTER, D. C., and FLÜGGE-LOTZ, I., *The Solution of Compressible Laminar Boundary Layer Problems by a Finite Difference Method. Part. 2: Further Discussion of the Method and Computation of Examples*. Tech. Rep. No. 110, Div. of Engng. Mechanics, Stanford Univ., Stanford, Calif. (October 1957). Prepared under the Air Research and Development Command Contract AF 18 (600)-1488, to be published.

- [9] FLÜGGE-LOTZ, I., and EICHELBRENNER, E. A., *La couche limite laminaire dans l'écoulement compressible le long d'une surface courbe*, O. N. E. R. A., Rapport 1/694 A (August 1948). See also: EICHELBRENNER, *Méthodes de calcul de la couche limite laminaire bidimensionnelle en régime compressible*, Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, Publication No 83, 1956, p. 39.
- [10] LIGHTHILL, M. J., *Contributions to the Theory of Heat Transfer Through a Laminar Boundary Layer*, Proc. roy. Soc., Lond. [A] 202, 359 (1950).
- [11] LOW, G. M., *The Compressible Laminar Boundary Layer With Heat Transfer and Small Pressure Gradient*, NACA TN 3028 (October 1953).
- [12] MORDUCHOW, M., *Analysis and Calculation by Integral Methods of Laminar Compressible Boundary Layer With Heat Transfer and With and Without Pressure Gradient*, NACA Rep. 1245 (1955).
- [13] O'BRIEN, G. G., HYMAN, M. A., and KAPLAN, S., *A Study of the Numerical Solution of Partial Differential Equations*, J. Math. Phys. 29, 223 (1950).
- [14] SCHLICHTING, H., *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill Book Co., New York 1955).
- [15] TRIBUS, M., and KLEIN, J., *Forced Convection Through a Laminar Boundary Layer Over an Arbitrary Surface With an Arbitrary Temperature Variation*, J. aero. Sci. 22, 62 (1955).
- [16] VAN DRIEST, E. R., *Investigation of Laminar Boundary Layer in Compressible Fluids Using the Crocco Method*, NACA TN 2597 (January 1952).

### Zusammenfassung

Die Lösung des Systems der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen der laminaren kompressiblen Grenzschicht bereitet erhebliche mathematische Schwierigkeiten. In dieser Arbeit wird ein Differenzenverfahren benutzt, um die Strömung entlang einer gekrümmten Wand zu untersuchen. Analytische Bedingungen für seine Stabilität sind angegeben, und die Konvergenz der Lösung gegen die Lösung des Differentialgleichungssystems ist durch Vergleichsrechnungen mit verschiedener Schrittweite erprobt.

Der Einfluss von beliebigen Druck- und Temperaturverteilungen ist an einer Reihe von Beispielen untersucht. Da das Verfahren Energiedissipation und Veränderlichkeit der Dichte und der Zähigkeit vollständig berücksichtigt, sind seine Ergebnisse benutzt, um die Vereinfachungen kritisch zu diskutieren, die so oft angewendet werden, um die analytische Lösung des Problems zu erleichtern.

(Received: September 24, 1957.)

# On the Visualization of Laminar Boundary Layer Oscillations and the Transition to Turbulent Flow

By HENDRIKUS BERGH and BERNARD VAN DEN BERG, Amsterdam, Holland<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

In spite of the extensive research on boundary layer transition of many investigators, the transition itself is still an unsolved problem. The experimental verification by SCHUBAUER and SKRAMSTAD [1]<sup>2)</sup> of the stability theory of TOLLMIEEN [2] and SCHLICHTING [3] has revealed many details of the boundary layer behaviour preceding the transition. On the other hand, experimental investigations by EMMONS [4] and by SCHUBAUER and KLEBANOFF [5] have provided information about the propagation of the turbulent spots, which occur just after the breakdown of the laminar flow. The unknown stage is the development from the growing oscillations in the laminar boundary layer into the turbulent spots.

The experimental data have been obtained by different techniques. In general it can be said that for experiments in air the hot wire technique is used, giving the velocity components parallel to the surface, while for experiments in water the information is obtained by a visualization technique. However, an investigation, combining both flow visualization and velocity measurements, has not been performed yet, due to the difficulties with either the visualization of rapid flow fluctuations in air or the measurement of velocity fluctuations in water.

At the National Aeronautical Research Institute (NLL) a method has been developed which enables the visualization in air of periodic boundary layer phenomena. The common visualization technique of introducing smoke seems to be useless for the study of flow fluctuations, because normally the fluctuations are too fast. In the case of periodic phenomena, this difficulty can be eliminated by means of stroboscopic illumination with the appropriate flash frequency. Then the periodic motion seems to come at rest and can be observed in detail easily. Since the occurrence of growing oscillations in the laminar boundary layer is known to be the primary cause of transition, the method can be applied to investigate these oscillations and their final breakdown into turbulence.

<sup>1)</sup> National Aeronautical Research Institute (NLL).

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 104.



The present article describes such an application to the visualization of the transition process on a two-dimensional wing.

## 2. The Test Set-Up

The two-dimensional wing with aerofoil section NACA 0012 was mounted horizontally between the glass side walls of the test section (1.10 m high, 0.80 m wide) of a normal low speed wind tunnel, having a turbulence degree of 0.1%. In the wing, with a chord of 0.30 m, a small smoke generator was installed, consisting of an electrically heated wire, embedded in asbestos fibres, to which an adjustable amount of kerosene was supplied. The smoke was introduced into the boundary layer through a slit in the surface, located at 10% of the chord and at 0.25 m from the glass frontwall. The slit was 10 mm wide and 3 mm long. The smoke, being evaporated oil, was illuminated by a stroboscopic light source opposite the observer and a little above the plane of the wing (Figure 1). This way of illuminating was found to give optimum results, the oil vapour looking like a fine white smoke. The stroboscope used (type Früngel) has a very high light intensity, combined with an extremely short flash duration of 1  $\mu$ s.

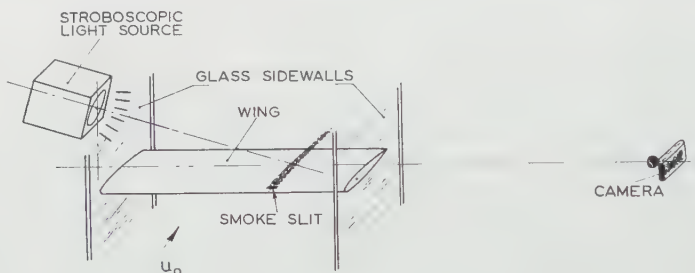


Figure 1  
Test set-up.

The smoke pictures are taken with a normal small picture camera, using a sensitive film (Ilford HP3).

In order to have the possibility of generating artificial disturbances, a normal loud-speaker was placed at the top of the test section over the wing. With the aid of an audio generator, the loud-speaker could produce sound disturbances with a frequency higher than 40 c/s.

## 3. Observations

The first observations were performed at a low air speed (4–6 m/s) and with the wing at zero incidence. In steady light, the smoke layer seemed undisturbed,



except for a small region near the trailing edge, where some diffusion occurred. The stroboscopic light revealed, however, that travelling waves, apparently representing the laminar boundary layer oscillations predicted by the stability theory, were present in the seemingly undisturbed part ahead of the diffusion region. Since the waves, having a discrete frequency, were quite well periodical, it was easy to study their behaviour by adjusting the frequency of the light flashes to that of the travelling waves.

In Figure 2, a general smoke picture is shown in diagram. Over the first part of the wing, an undisturbed laminar layer exists, followed by a region,

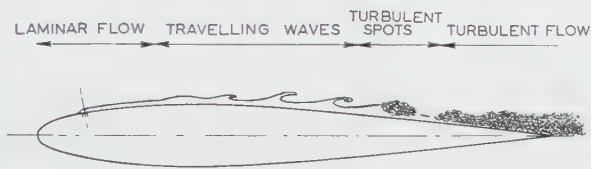


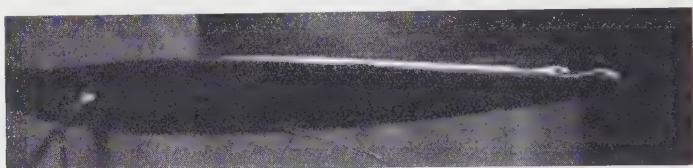
Figure 2  
Diagram of a smoke-picture.

where waves originate. The amplitude of such a wave increases during its downstream motion and moreover the wave seems to curl up to a discrete vortex, rotating in clockwise direction. At a certain chordwise location, which is nearly fixed for given test conditions, the smooth smoke curl is diffused very suddenly as happens in a turbulent boundary layer. If turbulence has set in locally, it spreads out rapidly in all directions in the ambient laminar fluid, until at a certain downstream position it grows together with a preceding one, thus giving a fully developed turbulent boundary layer.

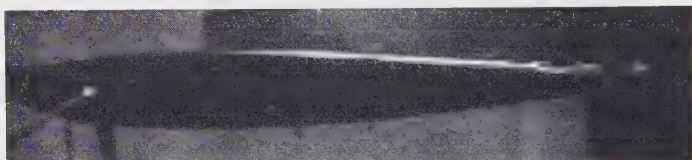
It must be emphasized here, that the smoke pattern should not be confused with the streamlines, but that it shows successive development stages of the deformation of an originally undisturbed smoke layer. Since it may be assumed that the smoke particles behave like air, it can be derived from the smoke pictures that an appreciable air transport exists across the boundary layer. Due to the amplified disturbance velocities parallel and normal to the surface, air near the surface is lifted towards the outer edge of the boundary layer, while air from outside penetrates towards the surface.

The features of the process mentioned may be illustrated by the flow pictures, taken under different test conditions. If the wind tunnel was running at a constant speed, it appeared that without any artificial excitation, waves of a discrete frequency were present in the smoke at the rear part of the wing. The frequency of the waves was related to the wind tunnel velocity in such a way that it increased with increasing air speed. It is possible that the waves are generated by an unknown excitation, present in the flow, though it does not

correspond with the revolutions of the fan. Figure 3 shows two examples of these boundary layer oscillations. In Figure 3a the waves lead to transition very near to the trailing edge, while in Figure 3b transition occurs more upstream, due to the increased speed.



(a) Air speed 4 m/s, wave frequency 63 c/s.

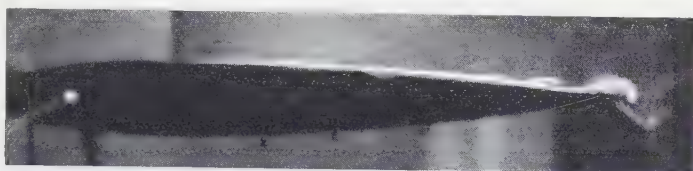


(b) Air speed 4.9 m/s, wave frequency 90 c/s.

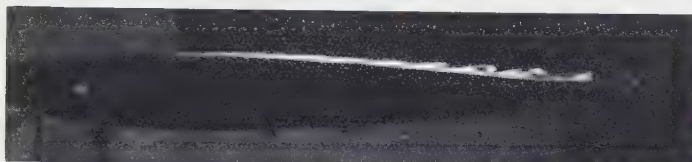
Figure 3

Smoke patterns, obtained without generating artificial disturbances. Wing at zero incidence.

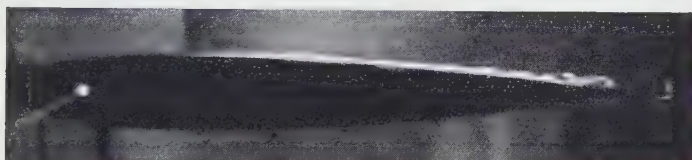
In order to vary frequency of the waves and air speed independently, artificial disturbances were created by the sound of a loud-speaker, placed at the test section. In this way, it was possible to produce the same type of waves in the boundary layer at chordwise locations, where without sound an undisturbed laminar layer existed. The amplitude of the waves could be varied by the intensity of the sound. With appropriate intensity of the sound, the oscillations present without sound excitation could be suppressed easily and replaced by waves of the forced frequency. The lowest frequency, which could be generated by the loud-speaker was about 40 c/s, and at this frequency still amplified waves were present. Therefore it was not possible to investigate whether or not a lower frequency limit exists. On the other hand, if the frequency is higher than about 175 c/s, the sound disturbances are amplified only within a certain region of the chord, followed by a region where they remain constant or die out. At the rear part of the wing the boundary layer behaves just as in the case without sound excitation and the waves originally present (Figure 3) are generated again. Examples of laminar boundary layer oscillations and transition, produced by sound disturbances of different frequencies, are given in Figure 4. The picture with a sound frequency of 170 c/s (Figure 4f) shows just a limit case, where the transition seems more the consequence of the waves of 63 c/s originally present than of the sound excitation of 170 c/s.



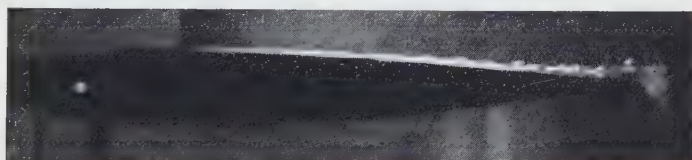
(a) Wave frequency 52 c/s.



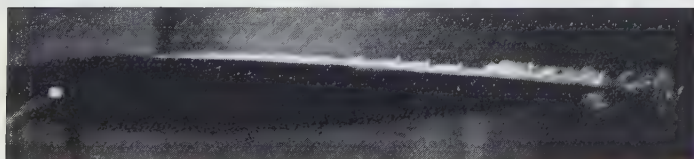
(b) Wave frequency 76 c/s.



(c) Wave frequency 89 c/s.



(d) Wave frequency 127 c/s.



(e) Wave frequency 143 c/s.

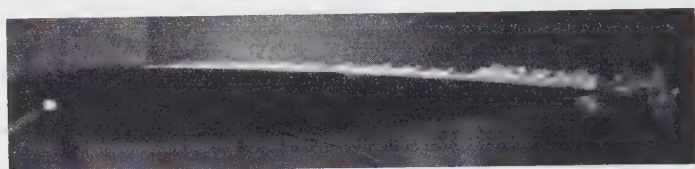


(f) Wave frequency 170 c/s.

Figure 4

Smoke patterns, obtained with disturbances generated by a loud-speaker. Wing at zero incidence, air speed 4 m/s.

Important changes in the smoke pattern occur if the wing has a certain angle of incidence (Figure 5). Then the smoke is lifted appreciably from the surface and its residuals remain visible at the edge of the turbulent boundary layer.



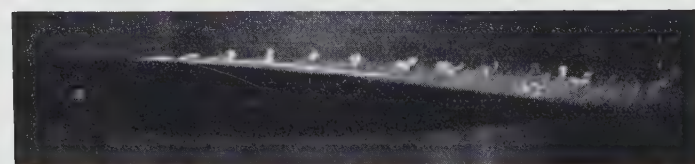
(a) Angle of incidence zero.



(b) Angle of incidence  $1^\circ$ .



(c) Angle of incidence  $2^\circ$ .



(d) Angle of incidence  $4^\circ$ .

Figure 5

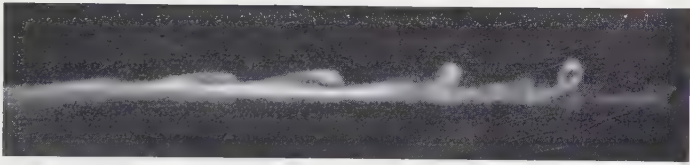
Smoke patterns, obtained with disturbances generated by a loud-speaker. Air speed 4 m/s, wave frequency 143 c/s.

In this case, observations by eye have shown that the smoke pattern of a wave develops into a horseshoe-like loop in the transition region. This may be illustrated by Figure 6, showing for equal test conditions details of a side view and of a three-quarter view (taken oblique in downstream direction). These loops may be originated by the slit, which interrupts the surface and thus may act like a finite tripwire.





(a) Side-view.



(b) Three-quarter view.

Figure 6  
Details of the smoke pattern of Figure 5c.

Recently, TIMMAN, ZAAT, and BURGERHOUT [6] have calculated the neutral curves of the stability diagrams for boundary layers with different velocity profiles. Since the velocity profile over the wing used varies due to the pressure gradient in the flow, it would be very difficult to calculate the curve of neutral

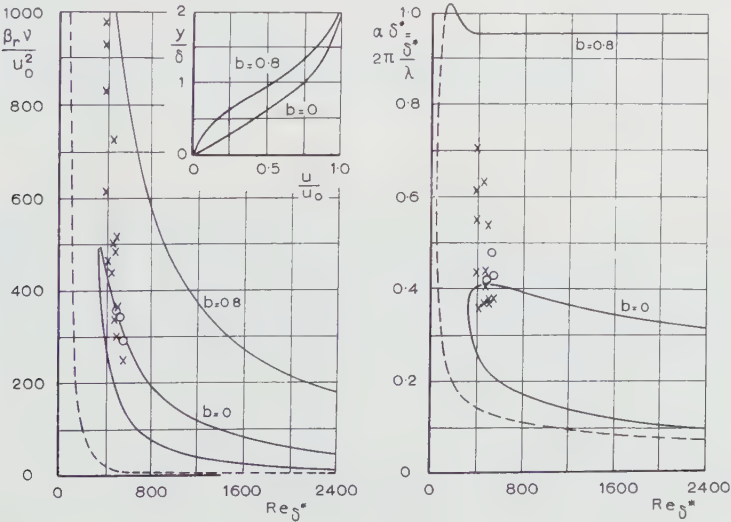


Figure 7  
Curves of neutral stability for the frequency  $\beta_r$  and the wavelength  $\lambda$  at the velocity profile with zero pressure gradient ( $b = 0$ ) and with positive pressure gradient ( $b = 0.8$ ) according to TIMMAN, ZAAT and BURGERHOUT. The points indicate the measured frequencies and wavelengths.

stability for the boundary layer of the wing. To avoid this, the experimental data have been compared with neutral curves, belonging to a velocity profile parameter  $b = 0.8$ , which corresponds to a velocity profile a little ahead of separation. Figure 7 shows that all the experimental points lie within the amplified regions of the stability diagrams for  $b = 0.8$ , confirming also that the observed waves indeed represent the laminar boundary layer oscillations.

#### 4. Final Remarks

In the opinion of the authors, this preliminary investigation has shown that the visualization technique used can provide valuable information about the transition from laminar to turbulent flow. An important advantage of the method is given by the possibility to use it in combination with the hot-wire technique.

#### REFERENCES

- [1] SCHUBAUER, G. B., and H. K. SKRAMSTAD, *Laminar Boundary Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate*, NACA. Rep. 1948, 909.
- [2] TOLLMIE, W., *Über die Entstehung der Turbulenz*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse 1929, 21.
- [3] SCHLICHTING, H., *Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse 1933, 182.
- [4] EMMONS, H. W., *The Laminar-Turbulent Transition in a Boundary-Layer*, Part I, J. aero. Sci. 18, No. 7 (July 1951).
- [5] SCHUBAUER, G. B., and P. S. KLEBANOFF, *Contributions on the Mechanics of Boundary-Layer Transition*, NACA. TN. 3489 (1955).
- [6] TIMMAN, R., J. A. ZAAT, and TH. J. BURGERHOUT, *Stability Diagrams for Laminar Boundary Layer Flow*, Nat. aero. Res. Inst. TN. F. 193 (1956).

#### Zusammenfassung

Eine Methode für die Sichtbarmachung periodischer Grenzschichtphänomene ist beschrieben und angewandt auf die Beobachtung des Umschlages Laminar-Turbulent an einem zweidimensionalen Flügel mit NACA-0012-Profil. Strömungsbilder, die die verschiedenen Stadien der laminaren Grenzschichtschwingungen und ihren endgültigen Zusammenbruch in Turbulenz zeigen, sind hinzugefügt.

(Received: September 28, 1957.)



## Theoretical Aspects of the Calibration of Transonic Test Sections

By SUNE B. BERNDT, Stockholm, Sweden<sup>1)</sup>

### 1. Introduction

Wind tunnels for transonic tests, using slotted test sections or other similar devices for minimizing the wall interference, have to be calibrated experimentally in order to establish the proper slot configuration and model size to be used. This is so, because the non-linear equation for the flow field cannot be solved in a simple manner to give the wall interference, and also because the flow at the wall is too complicated for a simple analysis to be reliable.

Theory, however, still may provide a useful guide in planning the calibration work so as to minimize the number of parameters to be varied during the tests. In the present investigation this is demonstrated by applying the transonic similarity rule together with the 'area rule' to the flow in a transonic test section, and also by using GUDERLEY's and YOSHIHARA's basic solution of the transonic equation [1<sup>2)</sup>] to estimate the proper slot setting. The analysis is a straight-forward extension of the one performed in [2] for evaluating the influence of wall boundary layers in closed transonic test sections. A recent paper by MURASAKI [3] seems to be similar to the present one in certain respects.

### 2. A Philosophy of Calibration

It is not to be assumed, a priori, that one single slot configuration will eliminate the wall interference for all Mach numbers and all models at all angles of attack. However, the advantage of not having to change the slot width during a test is so great that, in practice, those errors will be accepted which may arise when the proper slot setting for Mach number one and zero lift is used at other Mach numbers and at other angles of attack. Since the errors due to lift at Mach number one are not excessive, and since errors at low transonic Mach numbers are small and can be computed by linearized theory (see, e.g. [4]), the errors in the intermediate Mach number range are likely to be small. At supersonic Mach numbers, however, errors are known to be present when reflected shocks enter the picture.

<sup>1)</sup> Flygtekniska försöksanstalten (FFA).

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 123.

In what follows it is assumed that the largest model permitted, and the proper slot setting, are to be determined by calibration at Mach number one and at zero lift. It is stressed that there is no reason to expect that the slot setting so obtained is the same as that computed by linearized theory as eliminating interference at low transonic speeds (see 5.4, however).

Some kind of measure of the wall interference is needed for finding the correct slot setting and for deciding when a model is too large. The distortion of the pressure distribution on the model due to wall interference will of course do, and certainly is a practical measure in cases where it can be assumed to be restricted to a particular part of the model, e.g., the rear end. It is still simpler to use the drag, which would constitute a sensitive measure for models having a large streamwise slope in the region where the pressure distribution is distorted.

For determination of the free-stream Mach number some convenient pressure has to be measured in the upstream part of the test section where the influence of the model is not felt. Alternatively the pressure in the plenum chamber behind the slots can be used. In any case the pressure chosen is to be calibrated against the Mach number in the empty test section after the walls have been adjusted to give uniform flow. Consequently there is a restriction on the modifications of the wall to be introduced for eliminating the wall interference: they must maintain uniform flow in the empty test section<sup>3</sup>. This means, e.g., that the wall slope in the streamwise direction should be such as to compensate for the increase in the displacement thickness of the wall boundary layers, and also for the outflow through the slots in case the pressure in the plenum chamber is kept below the pressure in the empty test section.

It is important to realize that the Mach number  $M_0$  measured far upstream should not a priori be assumed to be equal to the free-stream Mach number  $M_\infty$  of the corresponding unbounded flow. In general a correction  $\Delta M_0$  will have to be admitted ( $M_\infty = M_0 + \Delta M_0$ ). An important task of a calibration, according to the present philosophy, is to determine  $\Delta M_0$  for that slot setting which is found to reproduce most closely the pressure distribution on the body in sonic flight. This, in the words of [2], is an application of 'the principle of minimizing interference rather than corrections'.

### 3. Features of Sonic Wall Interference

#### 3.1 Consequences of the Area Rule

In considering the influence of the shape of the model on the wall interference one obvious simplification can be introduced by applying the area

<sup>3</sup>) This is not a necessary restriction, of course, since one obvious way of cancelling the wall interference is to shape the wall according to the streamlines of unbounded flow. See also [5].

rule ('the principle of equivalence'), according to which slender models of small aspect ratio produce the same far-away flow field at sonic speed if they have the same distribution of cross-sectional area along a longitudinal axis. Since most present-day aircraft and missiles satisfy the conditions for the area rule to be at least approximately applicable, the calibration can be restricted to bodies of revolution. It might even be possible to consider only one or a few typical shapes for the area distribution since in applying the area rule designers of transonic aircraft may arrive at the same conclusion as to what constitutes an optimum area distribution.

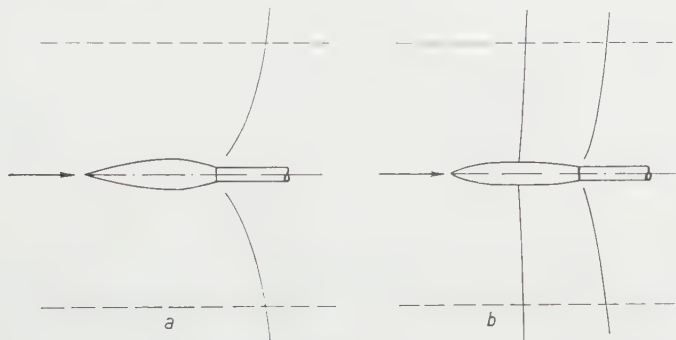


Figure 1  
Shock patterns at sonic speed.

Figures 1*a* and *b* suggest that the form of the area distribution is of decisive importance to the wall interference at sonic speed. The area distribution curve of the body in Figure 1*a* has a slowly and smoothly varying curvature whereas the leading portion of the body in Figure 1*b* proceeds to an almost cylindrical intermediate portion, giving the area distribution curve a sudden change in curvature. As a consequence the latter body carries a shock behind its leading portion in addition to the one at the trailing end, which appears in both cases.

It might be expected that the wall interference is a much more complicated phenomenon in case *b* than in case *a*, since the 'reflection' of the leading shock at the wall (indicated by dotted lines) is not likely to be negligible, whereas the 'reflection' of the trailing shock takes place completely outside the region of dependence of the body. Still more complicated situations, with three or more shocks, are possible, but probably do not occur very often in actual practice.

### 3.2 Single-Shock Wall Interference

In order to appreciate the inherent simplicity of the single-shock type of flow the interference picture of Figure 2 may be contemplated. There is seen the limiting Mach wave *L* leading from the body to the point *S* where the

sonic line reaches the wall, and also the reflection  $R$  of  $L$ , i.e. the Mach wave leading from  $S$  back towards the body (the case of rotational symmetry is considered, but the conclusions to be drawn will apply with a fair approximation also to a rectangular test section with the slots uniformly distributed). By definition a small perturbation of the flow in the region downstream of  $L$  will not reach the upstream region. Now, assume that the slots have been so adjusted that no wall interference results at the sonic line and at the body in front of it. Then the entire region between the sonic line and  $R$  automatically

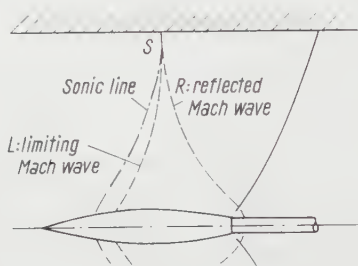


Figure 2

Wall interference in the case of a single shock.

will be free from interference, which in the case of Figure 2 means that, irrespective of the slot setting downstream of  $S$ , the body is free from wall interference throughout its length. For a longer afterbody<sup>4</sup>), or for a smaller test section, however, the rear portion of the body would be subject to interference unless the slots downstream of  $S$ , where the flow is supersonic, be so adjusted as to give zero interference, a task which, if at all possible, will appear, in the light of section 5, to require a careful selection of the slot width.

In reality, of course, it might not be possible to adjust the upstream part of the wall to give zero interference along the entire length of the sonic line (as was assumed above). Then only a limited neighbourhood of the forebody will be free from interference<sup>5</sup>), and the afterbody will have to be situated in front of some inwardgoing Mach wave starting from a point closer to the body than  $S$ .

The single-shock type of flow permits still other important simplifications. Evidently an arbitrary change of the shape of the body behind the limiting Mach wave  $L$  will not introduce any wall interference as long as new shocks do not appear, and as long as the modified afterbody (in practice the tail planes)

<sup>4</sup>) Not only will the rear end be situated farther downstream, but in addition the Mach wave  $R$  will become steeper and move upstream.

<sup>5</sup>) This restricted freedom from interference is possible only in the elliptic part of the field. In the hyperbolic part perturbations propagate along Mach lines without being smoothed out. In case of rotational symmetry the latter effect is accentuated by the focusing of the perturbations towards the axis.

stays upstream of the ingoing Mach wave limiting the region of zero interference. First of all this means, when using the area rule for extending the calibration of a test section for a body of revolution to other models, that the area distributions will be required to coincide only in front of the limiting Mach wave. The validity of the calibration thus is largely extended.

Furthermore, if the wing and tail-planes of a model can be considered to have been produced by such a modification of a body of revolution behind its limiting Mach wave as is considered here, there will be practically no lift interference as long as the lift is small. This is so, since the forebody, still being a body of revolution, will carry a very small part of the lift due to an angle of attack (and no lift at all when a control surface is deflected)<sup>6)</sup>. It should be noted that the conclusion of zero lift interference is still valid if the angle-of-attack is a function of time. Thus the resonant type of wall interference on oscillating models as predicted by linearized theory would seem to be largely eliminated.

### 3.3 Influence of the Thickness Ratio

Now, given the form of the distribution of the cross-sectional area, we have to consider how the maximum length of the model as compared to the tunnel height depends upon the thickness ratio  $\tau$  of the model. A typical picture of the influence of  $\tau$  on the flow pattern in the absence of tunnel walls is provided by Figure 3. For the more slender body the flow pattern is seen to extend much farther away in the cross-flow direction than for the thicker body. In particular, this is true for the point  $P$  on the sonic line, from where starts the last Mach wave to reach the body. These features are of course related to the fact that the Mach waves in the supersonic region are made steeper when reducing the perturbation of the sonic flow. A quantitatively correct description is

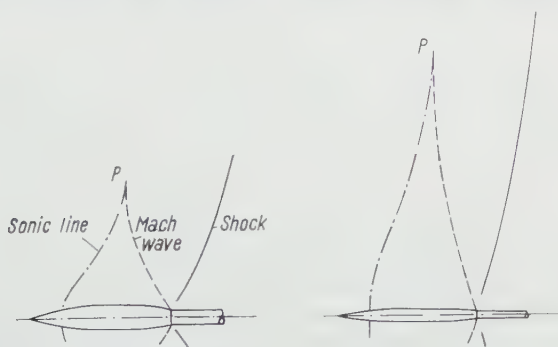


Figure 3

Influence of thickness ratio on the flow pattern at sonic speed.

<sup>6)</sup> As estimated by 'slender-body theory' the relative lift carried by the forebody is equal to the square of the ratio of the maximum diameter to the span of the wing.



supplied by the transonic similarity rule [6], by which the flow fields of bodies of revolution, similar except for a difference in thickness ratio, are brought to coincidence by stretching the crossflow coordinates in inverse proportion to the thickness ratio. In fact, by applying the similarity rule to the flow in a slotted test section it will be shown that when reducing the thickness ratio of a model of maximum size its length will have to be reduced as well, the implication being that the point  $P$  of Figure 3 must not be moved with respect to the test section wall<sup>7</sup>). Thus the ratio of maximum model cross-sectional area to test section cross-sectional area is not a useful measure of the level of wall interference except within a family of bodies having equal thickness ratios.

As a consequence of the transonic similarity the calibration can be restricted to a single thickness ratio (for each area distribution studied). By testing a series of geometrically similar bodies of increasing size, the greatest model length permitted can be determined together with the proper slot setting and the Mach number correction  $\Delta M_0$ . The corresponding data for other values of the thickness ratio then can be calculated by the similarity transformation. However, in doing so a certain attention must be paid to the influence of the wall boundary layers, which do not permit similarity if their thickness is kept constant in the transformation [2]. The similarity can also be upset by flow separation at the model, but in most cases the separation will be located at the rear end, and therefore will not produce any wall interference at the model.

## 4. Application of the Transonic Similarity Rule

### 4.1 The Transonic Approximation

Let the  $x$ -axis of a cylindrical coordinate system  $x, r, \theta$  coincide with the axis of the body of revolution to be considered. The undisturbed flow is uniform with the Mach number  $M_\infty$  and the velocity  $U_\infty$  along the  $x$ -axis far upstream and in the absence of the walls.

The perturbation velocity, with components  $u, v$  and  $w$  in the  $x$ -,  $r$ - and  $\theta$ -directions respectively, is expressed by means of a perturbation potential  $\varphi(x, r, \theta)$  as follows:

$$u = U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad w = U_\infty \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \quad (1)$$

Then, in the usual transonic approximation,  $\varphi$  can be taken to satisfy the following non-linear differential equation:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = M_\infty^2 (\gamma + 1) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (2)$$

where  $\gamma$  is the specific heat ratio.

<sup>7</sup>) It is an open question, to be settled by experiments, whether or not  $P$  will have to be located inside the test section.



The velocity jump through shock waves will have to satisfy the shock equations. In the transonic approximation considered this condition takes the form [7]:

$$\left. \begin{aligned} (1 - M_\infty^2) (\varphi_{x2} - \varphi_{x1})^2 + (\varphi_{r2} - \varphi_{r1})^2 + \left( \frac{\varphi_{\theta 2} - \varphi_{\theta 1}}{r} \right)^2 \\ = M_\infty^2 (\gamma + 1) \frac{\varphi_{x1} + \varphi_{x2}}{2} (\varphi_{x2} - \varphi_{x1})^2, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

where  $\varphi_{x2} - \varphi_{x1}$  is the jump of  $\partial\varphi/\partial x$ , etc. The formal similarity between equations (2) and (3) should be noted.

The boundary condition to be satisfied far upstream is  $M_\infty = M_0 + \Delta M_0$ , or

$$x \rightarrow -\infty: \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{\Delta M_0}{M_\infty}. \quad (4)$$

It is assumed that the shape of the test section and the location of the slots are sufficiently symmetric with respect to the  $x$ -axis for the flow field in the neighbourhood of the model to be axisymmetric. The boundary condition to be satisfied at the body then is

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dx} S(x), \quad (5)$$

where  $S(x)$  is the cross-sectional area of the model at the station  $x$ .  $S(x)$  needs only be defined upstream of the limiting Mach wave. For the boundary condition (4) for a body of revolution to be strictly valid in the limit  $\tau \rightarrow 0$ , it is required that  $S(x)$  be twice continuously differentiable; then  $S''(x)$  is zero for some  $x - x_0$  between the leading point and the point of maximum thickness.

Similar bodies having different lengths and thickness ratios will have to be considered, and therefore it is convenient to introduce a non-dimensional area distribution function  $s(\cdot)$  defined by

$$S(x) = \pi (\tau l)^2 s\left(\frac{x}{l}\right), \quad (6)$$

where  $l$  is the length up to the point  $x = x_0$ <sup>8)</sup>, and the thickness ratio  $\tau$  is defined by  $\tau^2 = S(x_0)/\pi l^2$ . It is seen that

$$s(1) = 1, \quad s''(1) = 0. \quad (7)$$

#### 4.2 Boundary Conditions at the Walls

The walls of the test section are assumed to form a cylinder  $\Gamma$  from upstream to downstream infinity. This is not a very serious idealization, since

<sup>8)</sup> It is suggested in [13] that the sonic line should start at  $x = x_0$ . This is not substantiated by experiments [14], however, although the error is not very large. In fact, the argument put forward in [13] is not conclusive since it neglects the contribution from the cross-flow to the pressure at the body.

three-dimensional perturbations of a near-sonic flow do not readily propagate in the upstream direction, thus concentrating the wall interference to those parts of the walls which are close to the model. Neglecting viscosity, the linearized boundary conditions to be satisfied at the walls are

$$\text{on } \Gamma_c: \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \Gamma_o: \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{\Delta M_0}{M_\infty}, \quad (8)$$

where  $\Gamma_c$  is the closed and  $\Gamma_o$  is the open part of  $\Gamma$ , and where  $\partial/\partial n$  denotes differentiation along the outward normal of  $\Gamma$ . In addition a Kutta condition has to be satisfied at the leading edges of  $\Gamma_o$  [4]. In the case of longitudinal slots of constant width this is without consequence, however.

Now, it is known that the wall boundary layers may have a considerable influence on the wall interference at sonic speed. The results of [2] are directly applicable to turbulent boundary layers if their thickness  $\delta$  is small compared to the smallest dimensions of both  $\Gamma_c$  and  $\Gamma_o$  (i.e., small compared to the slot distance  $d$  and the slot width  $a$  in the case of longitudinal slots). Then the first of the conditions (8) is to be replaced by

$$\text{on } \Gamma_c: \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varepsilon_1 \delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (9)$$

neglecting the variation of  $\delta$  with  $x$ <sup>9)</sup> and the influence of cross-flow parallel to the wall<sup>10)</sup>. The coefficient  $\varepsilon_1$  depends upon the Mach number distribution of the boundary layer. For a typical turbulent boundary layer it takes the approximate value of  $\varepsilon_1 = 0.5$ .

The second one of the conditions (8) can be left unchanged although the result of [2] indicates that it should not be applied close to the wall but at a surface within the boundary layer situated approximately  $\delta/4$  from the wall. This refinement, however, would introduce a very small correction, which furthermore would be quite unreliable since the flow through the openings can change the unperturbed Mach number profile of the boundary layer materially. In the case of longitudinal slots of the type shown in Figure 4, through which a steady outflow is maintained, it seems to be definitely correct, however, to put

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{\Delta M_0}{M_\infty}$$

<sup>9)</sup> The obvious generalization of (9) for varying  $\delta$  is

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \delta(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right].$$

To consider  $\delta$  a constant, however, is consistent with the reasons for treating the test section as an infinite cylinder.

<sup>10)</sup> Since the model has no angle-of-attack and since it is symmetrically situated with respect to the test section, the influence of the cross-flow cannot be substantial (it is exactly zero for a circular test section). See also paragraph 2.5 of [2].

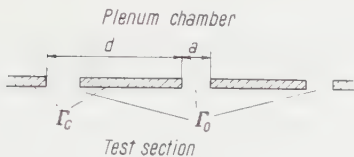


Figure 4  
Slot geometry.

on  $\Gamma_o$ . This might be true even if the boundary layer thickness at  $\Gamma_c$  is not small compared to the slot width  $a$ .

It seems that perforated walls, as different from those having longitudinal slots, are used primarily for eliminating the bow wave reflection at low supersonic Mach numbers, and it has been found that this elimination does not take place efficiently unless the wall boundary layers are kept very thin [8]. Thus the wall boundary layers constitute a wall interference problem only for test sections having longitudinal slots (and for completely closed test sections).

For the sake of completeness it should be mentioned that the boundary condition to be imposed at a porous wall with a boundary layer of negligible thickness is

$$\text{on } \Gamma: \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -P \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{\Delta M_o}{M_\infty} \right), \tag{10}$$

where  $P$  depends upon the ‘porosity’ of the wall and possibly upon  $M_\infty$ . This linear condition is valid only if there is maintained such a high outflow through the wall that it predominates over the outflow caused by the perturbation due to the model [9]. For applications associated with shock reflection this outflow is required also for removing the wall boundary layers.

It has been suggested [10] that a pressure loss condition of the form (10) should be included in the boundary condition at the open parts of a transonic test section. It seems that there might be good reasons for this when a slotted test section has many deep, narrow slots, since then the ratio between the slot area and the closed area is smaller than otherwise. There is, however, no information available as to the order of magnitude of the porosity coefficient  $P$  for longitudinal slots. Not even the hypothesis of linearity underlying  $P$  is well established.

4.3 The Similarity Transformation

The similarity property of the transonic approximation for the flow about a body of revolution [6, 11] is brought out by the following transformation:

$$\varphi(x, r, \theta) = \frac{M_\infty \tau^3 R}{\gamma + 1} \Phi(\xi, \eta, \theta), \quad x = M_\infty \tau \xi R, \quad r = \eta R, \tag{11}$$

where  $R$  is a typical length of the test section in the cross-flow direction, e.g. the radius in the case of a circular test section. Its application to the differential

equation (2) and the boundary condition (5) leads to

$$\frac{1 - M_\infty^2}{M_\infty^2 \tau^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}, \quad (12a)$$

$$0 < \xi < \frac{l}{M_\infty \tau R}: \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{l}{M_\infty \tau R} s' \left( \frac{M_\infty \tau R}{l} \xi \right). \quad (12b)$$

The transformed shock condition (3), of course, becomes formally similar to equation (12a). At upstream infinity the condition (4) yields

$$\xi \rightarrow -\infty: \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{2}{\tau^2} \cdot \frac{\Delta M_0}{M_\infty}. \quad (13)$$

Disregarding for a while the boundary conditions at the wall it is seen that for similarity under a change of the thickness ratio  $\tau$ , the length of the body, the free-stream Mach number, and the Mach number correction  $\Delta M_0$  will have to be changed so as to leave the parameters

$$I = \frac{1 - M_\infty^2}{M_\infty^2 \tau^2}, \quad B = \frac{l}{M_\infty \tau R}, \quad D = \frac{\Delta M_0}{M_\infty \tau^2} \quad (14)$$

invariant. In the neighbourhood of  $M_\infty = 1$  this means that the length of the body is to be kept proportional to  $\tau$ , and that the Mach number deficiency  $1 - M_\infty$  and the Mach number correction  $\Delta M_0$  are to be kept proportional to  $\tau^2$  (the Mach number  $M_\infty$  remaining constant for  $M_\infty = 1$ !). It is obvious that the sonic line and the shocks are transformed into themselves under the similarity transformation, and the same can easily be shown to be true for the Mach waves<sup>11</sup>). Thus the point  $P$  shown in Figure 3, being the intersection between the sonic line and the Mach wave running to the rear end of the body, remains approximately at a fixed distance from the axis of the body (for  $R = \text{const}$ ).

The boundary  $\Gamma$ , being an infinite cylinder, is invariant under the transformation (11). However, the open and the closed parts of  $\Gamma$ ,  $\Gamma_o$  and  $\Gamma_c$  respectively, do not remain unchanged under the transformation, except in the case of longitudinal slots having a constant width. Circular openings, for example, will have to be changed into ellipses<sup>12</sup>), and tapered longitudinal slots will have to be given different taper.

<sup>11</sup>) Except in the immediate neighbourhood of the body where the square of the cross flow velocity must be included when calculating the pressure perturbation. Also, the shock condition is not a good approximation at the body, but this effect usually will be located far enough back not to be subject to any wall interference.

<sup>12</sup>) It could happen, of course, that an approximate uniform boundary condition of the type considered in 5.2 would permit similarity with a fixed perforated wall. However, this possibility is ruled out in cases where the shapes of  $\Gamma_o$  and  $\Gamma_c$  are such as to permit the application of 'slender-wing theory' for computing the lift on  $\Gamma_c$  due to outflow at  $\Gamma_o$  (see also [4]). This approach leads to a condition of the form (10), where  $P$  under an affine coordinate transformation of the type considered in (11) varies in inverse proportion to the 'aspect ratio' of the 'lift'-carrying parts of  $\Gamma_c$ . Consequently  $P$  is a constant when the wall is kept fixed, and the boundary condition (17) will not be invariant.

The boundary conditions (8), of course, are invariant under the similarity transformation (for  $D = \text{const}$ ), and so is the Kutta condition. However, when taking the wall boundary layers on  $\Gamma_c$  into account, the boundary layer thickness will have to be changed to maintain similarity. This is seen from the transformed boundary condition corresponding to (9), namely

$$\text{on } \Gamma_c: \frac{\partial \Phi}{\partial (n/R)} = \frac{\varepsilon_1 \delta}{M_\infty^2 \tau^2 R} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}. \quad (15)$$

The parameter to be kept constant during the transformation evidently is

$$L = \frac{\varepsilon_1 \delta}{M_\infty^2 \tau^2 R}, \quad (16)$$

meaning that the boundary layer thickness will have to be varied essentially in proportion to the nominal radius of the body ( $= \tau l = B M_\infty \tau^2 R$ ).

Finally, in the case of porous walls without boundary layers, the transformed boundary condition corresponding to (10) is

$$\text{on } \Gamma: \frac{\partial \Phi}{\partial (n/R)} = -\frac{P}{M_\infty \tau} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + 2D \right). \quad (17)$$

Thus, to preserve similarity, the porosity coefficient  $P$  will have to vary in proportion to the thickness ratio.

#### 4.4 Discussion

In accordance with the philosophy initially adopted, the discussion of the consequences of the transonic similarity considerations with respect to the calibration of transonic test sections will be restricted to the case  $M_\infty = 1$ .

As pointed out already in 3.3, similarity will make the calibration obtained for one specific body shape valid for any slender body having the same non-dimensional distribution of cross-sectional area but an arbitrary thickness ratio  $\tau$ . As an essential result of the calibration is obtained the greatest value for the length of the body, say  $l_{max}$ , which will keep the wall interference sufficiently small. It will here be assumed that 'sufficiently' means that some perturbation velocity due to wall interference shall not be greater than a specified fraction of some given perturbation velocity due to the body, thus ignoring the fact that it might not be realistic to require the same relative accuracy from pressure measurements on very slender bodies as compared to less slender ones<sup>13)</sup>. The calibration gives a greatest permitted value for the parameter  $B$ ,

<sup>13)</sup> In the case of a body of revolution this criterion is open to another objection, since the pressure of the body contains a term proportional to  $\tau^2 \log \tau$ , while on the other hand the pressure perturbation due to the walls varies as  $\tau^2$  under the similarity transformation. However, this term is also proportional to  $S''(x)$ , and consequently it disappears at the location of the maximum area slope, where a pressure distortion gives a maximum contribution to the drag. So this objection may not be very serious, after all.



$B_{max}$  say, which is valid for all bodies considered. It follows from (14) that for an arbitrary value of  $\tau$

$$l_{max} = B_{max} \tau R. \quad (18)$$

This means that the more slender a body is, the shorter must be the model in order to avoid wall interference. To put the case even stronger: the greatest value permitted for the maximum cross-sectional area of the model, as obtained from equation (18), is given by

$$[\max S]_{max} = \pi (l_{max} \tau)^2 = \pi R^2 B_{max}^2 \tau^4, \quad (19)$$

and so is proportional to the 4th power of the thickness ratio. Thus, the ratio of the maximum model cross-sectional area to the cross-sectional area of the test section is most certainly not a figure by which the level of wall interference can be judged (except, of course, within a family of bodies having equal thickness ratios).

It was seen that the only type of a transonic test section which need not be changed with  $\tau$ , is the one having longitudinal slots of constant width, provided the influence of the wall boundary layers is negligible. This seems to be a good reason in favour of this type of test section.

For obvious reasons it is highly desirable not to have to change the boundary layer thickness from one test to another. If, on the other hand, the boundary layer thickness is kept fixed, the similarity parameter  $L$  defined by equation (16) shows that the boundary layer influence will be felt much more strongly for small values of  $\tau$  than for large values. Since in most cases the power available for boundary layer reduction is not sufficient for a complete removal, it seems that there will be a lower limit to  $\tau$  below which a 'universal' calibration is no longer valid. There are, however, no data available to show where this limit will be found in practice (see, however, 5.4).

## 5. The Slot Width for a Small Model

### 5.1 The Basic Solution

There are reasons to believe that at a large lateral distance the unbounded sonic flow field of a slender body is asymptotically given by GUDERLEY's and YOSHIHARA's basic solution of the transonic equation [1, 12]. Using the same notations as in Chapter 4 of [2], the following estimate of the perturbation potential is obtained:

$$\varphi(x, r, \theta) \simeq \varphi_R(x, r; C) \equiv C^{-3} r^{-2/7} f_R(\zeta), \quad \zeta = C (\gamma + 1)^{-1/3} x r^{-4/7}. \quad (20)$$

Here  $f_R(\ )$  is a known function, and  $C$  is a similarity parameter determined in an unknown way by the shape and size of the body. As shown in [2] it seems



reasonable, however, that  $C$  can be estimated by

$$C \simeq l^{-3/7} \tau^{-4/7} \tag{21}$$

for  $\gamma = 1.4$ .

Figures 5 and 6 have been included to demonstrate the structure of the asymptotic field (20). For a constant radius  $r$  the longitudinal velocity perturbation  $\partial\varphi/\partial x$  is seen to vary as  $f'_R(\xi)$  with the streamwise coordinate. The

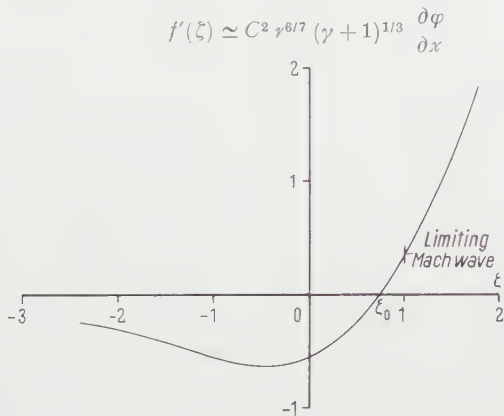


Figure 5  
Longitudinal velocity component of the basic solution.

shape of this variation is evident from Figure 5. The sonic speed is reached at  $\xi = \xi_0 = 0.751$  and the limiting Mach wave at  $\xi = 1$ . In the case of single-shock flow the shock is located at  $\xi = 2.24$ . The perturbation of the streamline starting with radius  $r = R$  at upstream infinity is shown in Figure 6, the radial

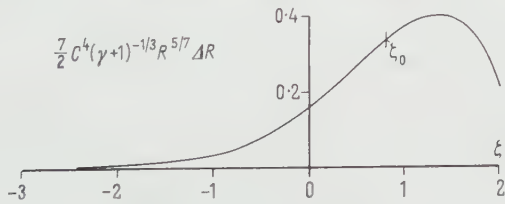


Figure 6  
Streamline shape of the basic solution at  $r = R$ .

distance of the streamline from the axis being  $R + \Delta R$  (a function of the streamwise coordinate). It is noteworthy that the longitudinal velocity perturbation still has a considerable magnitude at an upstream position where the streamline perturbation is very small (at  $\xi = -2$ , say). This, of course, means

that for  $\zeta < -2$  the flow within the cylinder  $r < R$  is approximately 'one-dimensional' with  $\varphi_x$  independent of  $r$ .

### 5.2 An Approximate Boundary Condition

In order to arrive at an estimate of the slot width required for eliminating the wall interference, a simpler boundary condition than (8) is desirable. Now it has been shown [15, 10] that the following simplified boundary condition can be derived by using the 'slender-approximation' in the vicinity of the walls:

$$\text{on } \Gamma: \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi + K \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = -\frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{\Delta M_0}{M_\infty}. \quad (22)$$

Assuming that the slots are uniformly distributed and of equal width the parameter  $K$  is given by

$$K = \frac{d}{\pi} \ln \left( \frac{1}{\sin \frac{\pi a}{2d}} \right). \quad (23)$$

It depends upon the slot geometry only (Figure 4). Thus, in this approximation slotted test sections having the same shape  $\Gamma$  and giving the same functions  $K(x)$  should be completely equivalent from the point of view of wall interference<sup>14</sup>). For later reference the relation between  $K$  and the slot geometry of a circular test section is shown in Figure 7.

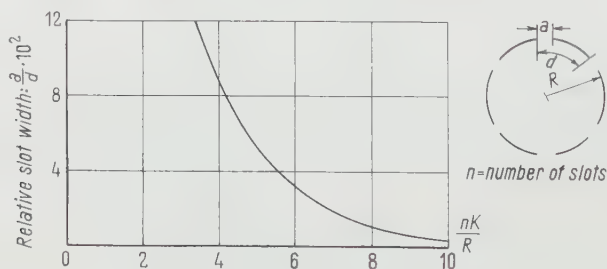


Figure 7

Relation between the parameter  $K$  and the geometry of a slotted circular test section.

### 5.3 Solution for the Slot Width

Now, consider a slotted circular test section of radius  $R$ . It is required to choose slots of constant width so as to eliminate the wall interference for  $M_\infty = 1$ . Taking the model (or, rather, the similarity parameter  $B$ ) sufficiently

<sup>14</sup>) For very small values of  $a/d$  the approximate boundary condition will not be accurate, nor for a small number of slots. There also remains some doubt as to its applicability in cases where  $\partial a / \partial x > 0$  (since it seems possible that a Kutta condition should be imposed at the edges [15]).

small for the approximation (20) to be valid at the wall<sup>15</sup>), the simplified boundary condition (22) gives the following equation, from which  $K(x)$  for zero interference can be obtained:

$$r = R: \frac{\partial}{\partial x} \left\{ f_R(\xi) - \frac{2}{7} \cdot \frac{K}{R} [f_R(\xi) + 2 \xi f'_R(\xi)] \right\} = -2 C^3 R^{2/7} \frac{1}{\gamma + 1} \Delta M_0.$$

Hence, as a function of  $\xi$ ,

$$\frac{K}{R} = \frac{7}{2} \left[ \frac{f_R(\xi) + f + g \xi}{f_R(\xi) + 2 \xi f'_R(\xi)} \right]_{r=R}, \quad (24)$$

where  $f$  is a constant of integration, and where

$$g = 2 C^3 R^{6/7} (\gamma + 1)^{-2/3} \Delta M_0. \quad (25)$$

The wall interference at the model originates from that region of the wall which is situated immediately upstream of the sonic line. Therefore, the parameters  $f$  and  $g$  in equation (24) should be so chosen as to make  $K$  practically constant at least in the range  $0 < \xi < \xi_0$ . Preferred for its simplicity, the choice for  $f$  will be the one making  $dK/d\xi = 0$  for  $\xi = 0$ . Then

$$\frac{K}{R} = \frac{7}{2} \frac{f_R(\xi) - \frac{2}{3} f_R(0) + g \left( \frac{f_R(0)}{3 f'_R(0)} + \xi \right)}{f_R(\xi) + 2 \xi f'_R(\xi)}. \quad (26)$$

Furthermore, the denominator becomes zero for  $\xi = \bar{\xi} \simeq 1.337$ , so for the region of zero interference to extend into the supersonic part of the flow field, it is required that also the nominator be zero for  $\xi = \bar{\xi}$ . This happens for  $g = \bar{g} \simeq 0.292$ , which will be the choice for  $g$ <sup>16</sup>).

Figure 8 shows  $K/R$  as a function of  $\xi$  according to equation (26), for different values of  $g$ , including  $\bar{g}$ . It is seen that a practically constant value of  $K/R$  in the neighbourhood of  $\xi = 0$  is realized for a fairly wide range of values of  $g$ . The limit for constant  $K/R$  on the upstream side is located at  $\xi \simeq -0.4$ <sup>17</sup>), fairly independently of  $g$ , whereas the limit on the downstream side depends strongly upon  $g$ , and is pushed as far down as possible, well into the supersonic

<sup>15</sup>) However, there is no evidence available, neither theoretical nor experimental, to permit an estimate of how small  $B$  will have to be.

<sup>16</sup>) It seems possible that the asymptotic solution requires a much larger value for  $R/l$  to give a good approximation aft of the limiting Mach wave (i. e., for  $\xi > 1$ ) than in front of it [12]. It might therefore be that the criterion for choosing  $g = \bar{g}$  is not a valid one. However, choosing  $g$  to make  $K/R$  as constant as possible in the restricted range  $0 < \xi < 1$ , gives  $g = 0.281$ , which is very close to  $\bar{g}$ .

<sup>17</sup>) Note that the point  $\bar{\xi} = -0.4$  is not situated sufficiently far upstream for the basic flow to be approximately one-dimensional (see 5.2). Therefore the perturbation potential due to the walls for  $\xi < -0.4$  cannot be computed by a one-dimensional approximation, as would otherwise be possible in simple terms by integrating equation (2) with respect to  $r$ , taking  $\partial\varphi/\partial x$  to be a function of  $x$  only and applying the boundary condition (22) at  $r = R$ .

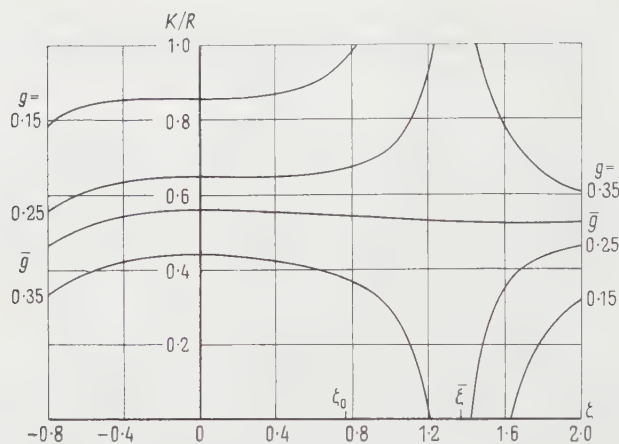


Figure 8

The distribution of the slot width parameter  $K/R$  over the streamwise coordinate  $\zeta$  for different values of the Mach number correction parameter  $g$ .

region, for  $\zeta \rightarrow \bar{\zeta}$ , as would be expected. Therefore, it is concluded that by choosing  $g = \bar{g}$ , the flow at the model will be free from wall interference. The corresponding value for  $K/R$  is  $K/R = 0.56$ . It cannot be excluded, however, that the interference will be negligible also for other values of  $g$ , giving quite different values for  $K/R$  (Figure 9 shows  $K/R$  at  $\zeta = 0$  as a function of  $g$ ).

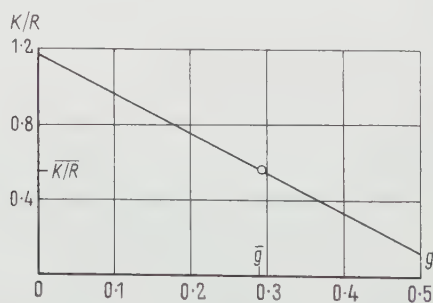


Figure 9

The slot width parameter  $K/R$  (at  $\zeta = 0$ ) as a function of the Mach number correction parameter  $g$ .

The analysis could be extended to tapered slots by choosing another value for the parameter  $f$  in equation (24). The taper for zero interference would then come out as a function of  $C$  (since  $\zeta$  contains  $C$ ), i.e., of the size and form of the model, and this, of course, is in accordance with the general similarity considerations of 4.4.

## 5.4 Discussion

To fix our ideas as to the magnitude of the slot width required for cancelling the wall interference at sonic speed, let us consider a circular test section having 8 uniformly distributed longitudinal slots of constant width. Then, as is seen from Figure 7, there corresponds to the optimum choice  $g = g$  with  $K/R = 0.56$ , a relative slot width of 6.6%. Similarly, for  $g = 0.15$  and  $g = 0.35$  (see Figure 8) the slot width becomes 2.2% and 11%, respectively. Those figures, indicating that the slot width can vary within fairly wide limits without causing unduly strong interference, seem to cover the range of slot widths used in practice for similar test sections. In fact, the linear theory [10], upon which much experimental work has been based, indicates that the value of  $K/R$  which will reduce the Mach number correction  $\Delta M_0$  to zero at subsonic speeds is  $K/R = 0.59$ . It is, of course, purely coincidental that this value is very close to  $\overline{K/R}$ , a coincidence which might prove quite useful in practice, however.

The value of  $\overline{K/R}$ , as obtained from the analysis of the preceding paragraph, does not depend upon the size and form of the model (i.e., upon  $C$ ). Since, in addition, the value of  $K/R$  must not necessarily be  $\overline{K/R}$  for the wall interference to be cancelled, it seems likely that the slot width could be kept independent of the model even for larger models than those to which the preceding analysis is strictly applicable. However, while making the model (i.e., the similarity parameter  $B$ ) as large as possible, the decisive factor will be, how far into the supersonic region the slots can be adjusted to give zero interference, and it was seen, in the case of a small model, that this adjustment is quite critical, leading to one specific value for  $K/R$ , namely  $\overline{K/R}$ . Therefore, it might well be that for models of maximum size (i.e., for  $B = B_{max}$ ) the slot width will have to be determined by a special calibration as discussed in the preceding sections.

Now, using slots of constant width with  $\overline{K/R}$  or some other value for  $K/R$ , there is a Mach number correction  $\Delta M_0$  at sonic speed, meaning that the Mach number far upstream will have to be  $M_0 - 1 = \Delta M_0$ . This correction is determined by the value of  $g$  according to equation (25) which, when estimating  $C$  by equation (21), yields

$$\Delta M_0 = 0.9 g \left( \frac{\tau l}{R} \right)^{6/7} \tau^{2/7} \quad (27)$$

for  $\gamma = 1.4$ , or, using the similarity parameters of equation (14)

$$D = 0.9 g B^{6/7}. \quad (28)$$

Such small models as required by the analysis are likely to give corrections which are negligibly small. The formal application of equation (27) to models

of large size gives quite appreciable corrections, however. Consider, for example, a body having  $\tau = 0.25$  and  $\tau l/R = 0.05$  (giving  $B = 0.8$ ). Then  $\Delta M_0 = 0.014$  for  $g = \dot{g}$ , and this correction is much greater than the Mach number error ordinarily accepted. Therefore, when calibrating a test section for models of maximum size, an important task might be to determine  $\Delta M_0$ , or, rather, to determine the relationship between the similarity parameters  $D$  and  $B$  to a better approximation than offered by equation (27) for  $B \simeq B_{max}$ .

So far the influence of the wall boundary layers has been neglected. Now, according to [2], the boundary layer thickness  $\delta$  required for cancelling the wall interference in a closed circular test section at  $M_\infty = 1$  for a small model can be estimated to be

$$\frac{\epsilon_1 \delta}{R} \simeq C^{-2} R^{-6/7} \simeq \left(\frac{\tau l}{R}\right)^{6/7} \tau^{2/7}, \quad (29)$$

or, in similarity form,

$$L \simeq B^{6/7}. \quad (30)$$

When nothing is done to modify the boundary layers,  $\epsilon_1 \delta/R$  is likely to take a value between 0.02 and 0.05, say 0.04 for the sake of argument. Then the value of  $B$  at which interference cancellation occurs can be calculated as a function of the thickness ratio  $\tau$  from equation (30). The result is represented by the curve in Figure 10. It is concluded that for the boundary layer influence

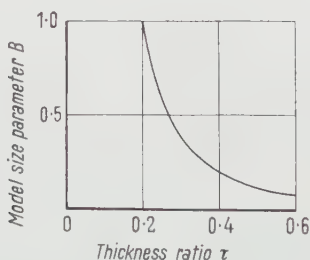


Figure 10

Model size for interference cancellation by the wall boundary layers ( $\epsilon_1 \delta/R = 0.04$ ).

to be negligible in the case of a slotted test section, the model must be large enough to correspond to a point in Figure 10 situated well above the curve. This condition might not be fulfilled for slender models at such small values of  $B$  as required for the analysis to be valid. For models of maximum size ( $\simeq B_{max}$ ), on the other hand, the boundary layer influence might still be negligible for all thickness ratios of practical interest, experimental evidence being needed to settle this question.



## 6. Conclusions

Starting from the basic assumption that the calibration of a transonic test section should be so performed as to accommodate the largest model possible at sonic speed, it has been demonstrated that the application of the transonic similarity rule and the area rule might considerably simplify the calibration work. In particular, for longitudinal slots of constant width, it has been shown that the proper slot setting will be the same for all models having similar flow fields in the sense of the transonic similarity rule. A consequence of this is that the maximum length of a slender model will be shorter than that of a less slender model. In general, the upstream Mach number in the test section, corresponding to sonic free-stream velocity, will not be exactly unity but somewhat smaller, the difference depending upon the size of the model.

In actual practice the model size, of course, might not be determined by interference at sonic speed, as has been assumed, but by interference at low supersonic speeds where the shock reflexion at the wall might seriously restrict the model size. However, the transonic similarity rule, in its general form as presented in 4.3, and the area rule are still applicable and might prove useful in organizing the calibration work even in this case. Another problem to be considered in the light of the general similarity rule is the estimation of the free-stream Mach number corrections at transonic Mach numbers smaller than one.

## REFERENCES

- [1] G. GUDERLEY and H. YOSHIHARA, *Axial-Symmetric Flow Patterns*, US Air Force Techn. Rep. 5797 (1949).
- [2] S. B. BERNDT, *On the Influence of Wall Boundary Layers in Closed Transonic Test Sections*, The Aeronautical Research Institute of Sweden (FFA), Report 71 (1957).
- [3] T. MURASAKI, *Linearized Theory of Wind Tunnel Interference at Transonic Speed* (in Japanese), J. Japan Soc. Aero. Eng. 4, Nos. 25 and 26 (February-March 1956).
- [4] P. E. MAEDER and A. D. WOOD, *Transonic Wind Tunnel Test Sections*, Z. angew. Math. Phys. 7, No. 3, 177 (1956).
- [5] D. T. BARISH, *Interim Report on a Study of Mach One Wind Tunnels*, Wright Air Development Center, WADC TR 52-88 (1952).
- [6] T. VON KÁRMÁN, *The Similarity Law of Transonic Flow*, J. Math. Phys. 26, No. 3, 182 (October 1947).
- [7] J. R. SPREITER, *On the Application of Transonic Similarity Rules*, NACA TN 2726 (1952).
- [8] B. H. GOETHERT, *Flow Establishment and Wall Interference in Rectangular Slotted Test Sections*, Arnold Engineering Development Center, Report AEDC TR 54-44 (1954).
- [9] J. M. SPIEGEL and P. J. TUNNELL, *An Analysis of Shock-Wave Cancellation and Reflection for Porous Walls Which Obey an Exponential Mass-Flow Pressure-Difference Relation*, NACA TN 3223 (1954).

- [10] B. S. BALDWIN Jr. and others, *Wall Interference in Wind Tunnels with Slotted and Porous Boundaries at Subsonic Speeds*, NACA TN 3176 (1954).
- [11] K. OSWATITSCH and S. B. BERNDT, *Aerodynamic Similarity at Axisymmetric Transonic Flow Around Slender Bodies*, The Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Division of Aeronautics, TN 15 (1950).
- [12] D. T. BARISH and G. GUDERLEY, *Asymptotic Forms of Shock Waves in Flows Over Symmetrical Bodies at Mach 1*, J. aeron. Sci. 20, No. 7, 491 (July 1953).
- [13] J. W. MILES, *On the Sonic Drag of a Slender Body*, J. aeron. Sci. 23, No. 2, 146 (February 1956).
- [14] G. DROUGGE, *Some Measurements on Bodies of Revolution at Transonic Speeds*, Paper read at the 9th International Congress of Applied Mechanics (Brussels; 1956).
- [15] G. GUDERLEY, *Simplifications of the Boundary Conditions at a Wind-Tunnel Wall with Longitudinal Slots*, Wright Air Development Center, WADC TR. 53-110 (1953).

### Zusammenfassung

Es werden einige theoretische Betrachtungen zum Problem der Kalibrierung einer Windkanalmeßstrecke im Schallgeschwindigkeitsbereich angestellt. Zunächst wird angenommen, die Ausbildung der Wände der Meßstrecke sollte so vorgenommen werden, dass das grösstmögliche Modell bei Schallgeschwindigkeit darin untergebracht werden kann. Durch Anwendung des Ähnlichkeitsgesetzes für schallnahe Strömung und der Flächenregel auf die Strömung im Messquerschnitt scheint eine beträchtliche Verminderung des Arbeitsaufwandes, die eine solche Kalibrierung der Meßstrecke für schlanke Modelle erfordern würde, möglich zu sein. Dies ist besonders zutreffend für Messquerschnitte mit Längsschlitzten konstanter Breite, wo die für den Wandeffluss gleich Null bei Schallgeschwindigkeit erforderliche Anordnung der Schlitzte sich auch brauchbar erweist für eine grosse Gruppe von Modellen verschiedener Grösse und Form (vorausgesetzt, dass der Einfluss der Wandgrenzschicht vernachlässigt werden kann).

Die Ableitung ergibt, dass das Verhältnis des Modellquerschnittes zum Messquerschnitt kein brauchbares Mass für die Grösse des Wandefflusses darstellt. Vielmehr scheint das grösste zulässige Flächenverhältnis, das zu einer vorgegebenen relativen Grösse des Wandefflusses gehört, stark vom Dickenverhältnis des Modells abhängig zu sein, so dass ein schlankeres Modell auch kürzer sein müsste.

Die asymptotische Grundlösung der Potentialgleichung für achsensymmetrische Schallströmung nach GUDERLEY und YOSHIHARA wurde zur Abschätzung der genauen Spaltbreite für sehr kleine Modelle verwendet, und es ergibt sich, dass in diesem Falle die genaue Einstellung der Spaltbreite nicht besonders kritisch ist. Der Haupteffekt einer Veränderung der Spaltbreite besteht in einer Änderung der Mach-Zahl-Korrektur stromaufwärts vor der Meßstrecke.

(Received: November 5, 1957.)

# Die Begriffe Auftrieb, Widerstand und Zirkulation bei Schaufeln von Strömungsgittern

VON ALBERT BETZ, Göttingen, Deutschland

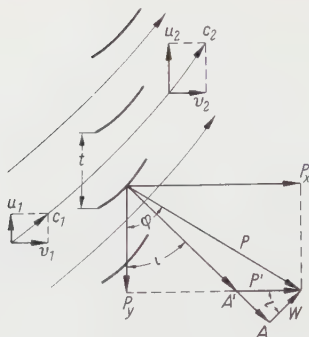
## 1. Fragestellung

Bei einem einzelnen Flügel hat es sich als zweckmässig erwiesen, die Kraft, welche er bei Bewegung in einer ruhenden Flüssigkeit erfährt, in eine Komponente senkrecht zur Bewegungsrichtung, den Auftrieb, und in eine Komponente entgegen der Bewegungsrichtung, den Widerstand, zu zerlegen. Zur Überwindung des Widerstandes muss man bei der Bewegung Arbeit leisten, während der Auftrieb keine Arbeit erfordert. Wählt man ein Koordinatensystem, in dem der Flügel ruht, so sind Auftrieb und Widerstand senkrecht und parallel zur Anströmrichtung im Unendlichen. Der Widerstand verursacht einen Energieverlust der Strömung, der Auftrieb keinen. Bei einem Strömungsgitter ist die Strömungsrichtung vor und hinter dem Gitter im allgemeinen verschieden. Der vordere Teil der Schaufeln befindet sich in einem Gebiet mit anderer Strömungsrichtung als der hintere. Man kann daher für die auf eine Gitterschaukel wirkende Kraft die Regel, dass der Auftrieb senkrecht zur Strömungsrichtung steht, nicht ohne weiteres übernehmen. Andererseits findet aber beim Durchströmen des Gitters ein Energieverlust statt, und man kann sich fragen, ob man eine mittlere Strömungsrichtung so angeben kann, dass die dazu senkrechte Komponente der Kraft nichts zum Energieverlust beiträgt, sondern nur die in diese Richtung fallende Komponente. Diese beiden Komponenten kann man dann sinngemäss als Auftrieb und Widerstand bezeichnen.

## 2. Richtung und Grösse des Auftriebes

Der Einfachheit halber betrachten wir nur Gitter, deren Schaufeln auf einer Geraden liegen, sogenannte gerade Gitter. Die Teilung, das ist der Abstand entsprechender Punkte der Schaufeln sei  $t$ . Die Zuströmung habe die Geschwindigkeit  $c_1$  mit den Komponenten  $u_1$  in Gitterrichtung und  $v_1$  senkrecht dazu. Hinter dem Gitter sei die Geschwindigkeit  $c_2$  mit den entsprechenden Komponenten  $u_2$  und  $v_2$  (Figur 1). Aus Gründen der Kontinuität ist

$$v_2 = v_1 = v. \quad (1)$$



Figur 1  
Beschleunigungsgitter.

Die Drücke vor und hinter dem Gitter seien  $p_1$  und  $p_2$ . Die auf eine Schaufel wirkende Kraft sei  $P$ . Ihre Richtung ist um den Winkel  $\varphi$  und die ihrer Auftriebskomponente um den Winkel  $\iota$  zur Gitterrichtung geneigt. Für die Komponenten dieser Kraft in Gitterrichtung und senkrecht dazu ergibt sich aus dem Impulssatz, wenn  $\varrho$  die Dichte der Flüssigkeit ist,

$$P_y = P \cos \varphi = \varrho v t (u_2 - u_1), \quad (2)$$

$$P_x = P \sin \varphi = (p_1 - p_2) t. \quad (3)$$

Bei verlustloser Strömung ergeben sich sehr einfache Verhältnisse, die auch seit langem bekannt sind. Hierbei ist die Kraft  $P$  identisch mit dem Auftrieb  $A$  und daher  $\varphi = \iota$ . Nach BERNOULLI ist

$$p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2} (u_2^2 - u_1^2), \quad (4)$$

und es wird daher

$$\frac{P_x}{P_y} = \operatorname{tg} \iota = \operatorname{tg} \varphi = \frac{u_2 + u_1}{2v} = \frac{\hat{u}}{v}. \quad (5)$$

Dabei ist

$$\hat{u} = \frac{u_2 + u_1}{2}. \quad (6)$$

Die Kraft auf die Schaufel ist demnach wie bei einem einzelnen Flügel, der mit einer Geschwindigkeit  $\hat{c}$  mit der Komponente  $\hat{u}$  in Gitterrichtung und  $v$  senkrecht dazu angeströmt wird. Es ist

$$\hat{c} = \sqrt{\hat{u}^2 + v^2} = \frac{v}{\cos \iota}. \quad (7)$$

Ist die Schaufel sehr klein gegenüber der Teilung, so herrscht in ihrer näheren Umgebung eine Parallelströmung mit den Komponenten  $\hat{u}$  und  $v$ . Sie verhält sich daher auch in ihrer ganzen Druckverteilung wie ein einzelner Flügel in einer solchen Strömung. Im allgemeinen ist aber die Schaufel grösser, so dass ihre verschiedenen Teile in Gebieten mit verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten und -richtungen liegen. Dann gilt obige Beziehung (5) nur für die resultierende Kraft.

Erheblich unübersichtlicher werden die Verhältnisse, wenn ausser dem Auftrieb  $A$  auch noch eine Widerstandskomponente

$$W = \varepsilon A \quad (8)$$

und damit ein Energieverlust vorliegen. Man kann aber die gleichen Überlegungen wie beim verlustlosen Vorgang anstellen und kommt dabei zu einem ganz ähnlichen Ergebnis.

Bezeichnet man die gesuchte mittlere Strömungskomponente in Gitterrichtung mit  $u'$ , so ist, da der Auftrieb senkrecht auf der mittleren Strömungsrichtung stehen soll,

$$\frac{u'}{v} = \operatorname{tg} \iota. \quad (9)$$

Entsprechend den Gleichungen (2) und (3) erhält man jetzt für die in Figur 1 skizzierte Anordnung eines Beschleunigungsgitters ( $c_2 > c_1$ )

$$P_x = A \sin \iota + W \cos \iota = (p_1 - p_2) t, \quad (10)$$

$$P_y = A \cos \iota - W \sin \iota = \varrho v t (u_2 - u_1). \quad (11)$$

Infolge des Widerstandes  $W$  tritt in dem in der Zeiteinheit durchströmenden Volumen

$$\dot{V} = v t \quad (12)$$

ein Energieverlust

$$\dot{E} = v W \cos \iota + u' W \sin \iota = \frac{W v}{\cos \iota} \quad (13)$$

ein. Je Volumeneinheit ist der Energieverlust, das heisst die Verminderung des Gesamtdruckes  $g = p + (\varrho/2) (u^2 + v^2)$

$$p' = g_1 - g_2 = \frac{\dot{E}}{v t} = \frac{W}{t \cos \iota}. \quad (14)$$

Damit wird aus der Bernoullischen Gleichung (4)

$$p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2} (u_2^2 - u_1^2) + p'. \quad (15)$$

Setzt man dies in (10) und (11) ein, so erhält man

$$A \sin \iota = \frac{\varrho}{2} (u_2^2 - u_1^2) t + \frac{W}{\cos \iota} - W \cos \iota, \quad (16)$$

$$A \cos \iota = \varrho v t (u_2 - u_1) + W \sin \iota. \quad (17)$$

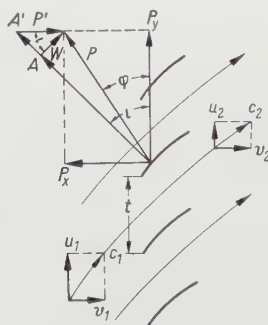
Durch Elimination von  $A$  wird hieraus

$$\frac{\varrho}{2} (u_2^2 - u_1^2) t \cos \iota = \varrho v t (u_2 - u_1) \sin \iota \quad (18)$$

und somit

$$\operatorname{tg} \iota = \frac{u_2 + u_1}{2 v} = \frac{\hat{u}}{v}. \quad (19)$$

Es ergibt sich demnach bei gegebenen Geschwindigkeiten  $v$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  vor und hinter dem Gitter auch bei Schaufeln mit Widerstand die gleiche Richtung für die Auftriebskomponente  $A$  und die massgebende mittlere Strömungsrichtung  $\iota$ . Für ein Verzögerungsgitter ( $c_2 < c_1$ ) sind die Verhältnisse in Figur 2 dargestellt. Durch eine ganz entsprechende Rechnung erhält man das gleiche Ergebnis (19).



Figur 2  
Verzögerungsgitter.

Mit diesem Ergebnis kann man nun auch die Grösse des Auftriebes angeben, die zur Ablenkung von  $u_1$  auf  $u_2$  gehört. Für ein Beschleunigungsgitter kann man aus Figur 1 unmittelbar ablesen:

$$A = \frac{P_y}{\cos \iota} + W \operatorname{tg} \iota. \quad (20)$$

Führen wir die durch (8) definierte Gleitzahl  $\varepsilon = W/A$  oder den Energieverlust je Volumeneinheit  $p' = \dot{E}/v t$  nach (14) ein, so ergibt sich unter Verwendung von (7), (11) und (19)

$$A = \frac{u_2 - u_1}{1 - \varepsilon \hat{u}/v} \varrho \hat{c} t = (u_2 - u_1) \varrho \hat{c} t + p' t \frac{\hat{u}}{\hat{c}}. \quad (21)$$



Für ein Verzögerungsgitter nach Figur 2 ergibt sich entsprechend

$$A = \frac{u_1 - u_2}{1 + \varepsilon \hat{u}/v} \varrho \hat{c} t = (u_1 - u_2) \varrho c t - p' t \frac{\hat{u}}{\hat{c}}. \quad (22)$$

Dabei sind in (21) und (22) der Auftrieb  $A$ , die Gleitzahl  $\varepsilon$  und die Geschwindigkeit  $\hat{u}$  stets positiv zu rechnen.

### 3. Die Zirkulation

Unter der Zirkulation  $\Gamma$  um einen Flügel versteht man das Linienintegral der Geschwindigkeiten um den Flügel herum. Bei verlustloser Strömung (Potentialströmung) ist dieses Linienintegral vom Integrationsweg unabhängig. Die Zirkulation ist daher eine eindeutig feststellbare Grösse. Bei einer Gitterschaukel ergibt sie sich zu

$$\Gamma = (u_2 - u_1) t. \quad (23)$$

Nach einem Satz von KUTTA und JOUKOWSKY besteht bei einem Einzelflügel, der mit der Geschwindigkeit  $c$  angeströmt wird, zwischen Auftrieb und Zirkulation die Beziehung

$$A = \varrho c \Gamma. \quad (24)$$

Dasselbe gilt bei verlustloser Gitterströmung auch für den Auftrieb der Schaufel eines Gitters, wenn man als Anströmung den massgebenden Mittelwert der Strömung  $\hat{c}$  nach (7) einsetzt, wie man sich leicht durch Vergleich von (21) oder (22) mit (24) unter Verwendung von (23) überzeugt, wenn man in (21) oder (22)  $\varepsilon = 0$  oder  $p' = 0$  setzt.

Bei einer Strömung mit Energieverlust ist die Zirkulation  $\Gamma$  nicht mehr eindeutig festgelegt, da das Linienintegral je nach dem gewählten Weg verschiedene Werte ergibt. Wenn man aber bei einem Flügel den Weg so wählt, dass er im Totwasser hinter dem Flügel die Stromlinien senkrecht schneidet, so trägt das von der Potentialströmung abweichende Totwasser nichts zum Linienintegral bei. Die so gebildete Zirkulation  $\Gamma$  ist also unabhängig von der Geschwindigkeitsverteilung im Totwasser. Für diese spezielle Zirkulation gilt dann ebenfalls die Kutta-Joukowskysche Beziehung (24). Man erhält daher bei einer Gitterschaukel mit einer durch (8) definierten Gleitzahl  $\varepsilon$  oder den durch (14) definierten Gesamtdruckverlust  $p'$  für diese Zirkulation bei einem Beschleunigungsgitter (Figur 1) aus (21)

$$\Gamma = \frac{A}{\varrho \hat{c}} = \frac{u_2 - u_1}{1 - \varepsilon \hat{u}/v} t = \left( u_2 - u_1 + p' \frac{\hat{u}}{\varrho \hat{c}^2} \right) t \quad (25)$$

und bei einem Verzögerungsgitter (Figur 2) aus (22)

$$\Gamma = - \frac{A}{\varrho \hat{c}} = \frac{u_2 - u_1}{1 + \varepsilon \hat{u}/v} t = \left( u_2 - u_1 - p' \frac{\hat{u}}{\varrho \hat{c}^2} \right) t. \quad (26)$$

Der Auftrieb  $A$  nach (21) bzw. (22) oder die Zirkulation  $\Gamma$  nach (25) bzw. (26) sind für die zur Erzielung dieser Werte nötige Grösse der Schaufeln massgebend. Für die genauere Formgebung der Schaufeln braucht man aber den Verlauf des Übergangs von der Strömung vor dem Gitter in die hinter dem Gitter. Man benützt zweckmässig die Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit und -richtung, die an den Stellen einer fortgelassenen Schaufel durch den Einfluss der Nachbarschaufeln entsteht, und passt die Schaufelform dieser gekrümmten Strömung an<sup>1)</sup>. Bei verlustloser Strömung kann man diese Übergangsströmung dadurch berechnen, dass man die Nachbarflügel durch Einzelwirbel (oder durch Wirbelsysteme) von gleicher Zirkulation  $\Gamma$  ersetzt, deren Strömungsfeld bekannt ist<sup>1)</sup>. Bei Strömungen mit Energieverlust ergibt sich aber die Schwierigkeit, dass ausser dem Auftrieb auch die in Gitterrichtung fallende Komponente des Widerstandes zur Ablenkung  $u_2 - u_1$  beiträgt. Für den Verlauf dieses Widerstandseinflusses besitzen wir aber kein Berechnungsverfahren. Für diese Aufgabe ist es deshalb zweckmässiger, die Schaufelkraft  $P$  nicht in Auftrieb und Widerstand zu zerlegen, sondern in einen in die Auftriebsrichtung fallenden Auftriebsanteil  $A'$  und eine senkrecht zur Gitterrichtung stehende Kraft

$$P' = p' t = \left[ p_1 - p_2 - \frac{\rho}{2} (u_2^2 - u_1^2) \right] t. \quad (27)$$

$p'$  ist hierbei wieder die nach (14) durch den Energieverlust bedingte Verminderung des Gesamtdruckes. Diese Kräfte  $P'$  üben auf die Strömung im ganzen keine ablenkende Wirkung aus, da sie ja keine Komponente in Gitterrichtung enthalten. Die gesamte Ablenkung wird also ausschliesslich durch die Kräfte

$$A' = \rho v t \frac{u_2 - u_1}{\cos \epsilon} \quad (28)$$

bewirkt. Da diese senkrecht zur massgebenden mittleren Strömung  $\hat{c}$  stehen, so gilt für sie ebenfalls der Kutta-Joukowskysche Satz. Man kann ihnen daher die Zirkulation

$$\Gamma' = t (u_2 - u_1) \quad (29)$$

zuordnen und ihren Einfluss durch das Feld von Wirbeln mit dieser Zirkulation darstellen. Dies ist allerdings nur näherungsweise richtig. Zwar beeinflussen nämlich die Kräfte  $P'$  senkrecht zur Gitterrichtung den Unterschied zwischen Zu- und Abflussrichtung nicht, sie können aber doch im Übergangsgebiet zwischen Zu- und Abfluss Richtungsänderungen bewirken. Man kann aber annehmen, dass diese Richtungsänderungen nur gering sind, wenn die Gesamtablenkung Null ist. Man wird daher keinen grossen Fehler begehen, wenn man ihre Wirkung im Zwischengebiet vernachlässigt und annimmt, dass

<sup>1)</sup> A. BETZ, *Diagramme zur Berechnung von Flügelreihen*, Ing.-Arch. 2, 359–371 (1931).

die Kräfte  $P'$  im ganzen Übergangsgebiet keine zusätzliche Ablenkung verursachen.

Als Ergebnis dieser Überlegungen kann man demnach zusammenfassen: Für die Berechnung des Störfeldes der Nachbarschaufeln ist nicht die wahre Zirkulation  $\Gamma$  nach (25) oder (26) zugrunde zu legen, sondern die Ersatzzirkulation  $\Gamma'$ , die sich aus der Ablenkung  $u_2 - u_1$  gemäss (29) in gleicher Grösse ergibt wie bei verlustloser Strömung. Die Schaufel selbst ist aber so zu formen und zu bemessen, dass sie in dieser durch die Nachbarschaufeln gestörten Strömung den durch (21) oder (22) gegebenen Auftrieb bzw. die durch (25) oder (26) gegebene Zirkulation  $\Gamma$  liefert.

### *Summary*

The force on a wing of a cascade can be divided in the two components lift and drag like the force on a single wing. The magnitude and direction of the lift component are calculated. The change of the flow direction is caused not only by the lift but also by the drag. Approximately the flow can be calculated as the field of vortices with a circulation corresponding to cascade wings without drag.

(Eingegangen: 21. Mai 1957.)

# Die anisentrope Überschalldurchströmung des Streckengitters<sup>1)2)</sup>

VON KURT BRIEDEN, Stuttgart, Deutschland

## 1. Einleitung

1.1 In den Jahren nach dem Kriege haben sich als Flugzeugantrieb Strahltriebwerke mit Axialkompressoren gegenüber denjenigen mit Radialverdichtern durchgesetzt. Ursachen hierfür sind die grössere Schluckfähigkeit und die kleinere, auf den Schub des Triebwerks bezogene spezifische Stirnfläche des Axialkompressors. Diesen Vorteilen steht das grössere, auf den Schub bezogene spezifische Einheitsgewicht des Axialkompressors nachteilig gegenüber. Dieses ergibt sich aus einer hohen Stufenzahl, die notwendig ist, um bei einer gegenüber dem Radialverdichter niedrigen Stufenförderhöhe die erforderliche Gesamtförderhöhe zu erreichen. Man muss daher bestrebt sein, die Stufenförderhöhe des Axialkompressors so weit zu steigern, dass sie etwa ebenso gross wie die vergleichbarer Radialverdichter ist. Zu diesem Zweck hat A. WEISE [1]<sup>3)</sup> die Möglichkeit des Überschallaxialverdichters systematisch untersucht. Bei einem der von A. WEISE entwickelten und gebauten Verdichtertypen wird die Strömung zunächst auf Überschallgeschwindigkeit beschleunigt und dann durch einen Verdichtungsstoss un stetig verzögert und komprimiert. Zur Steigerung der Stufenförderhöhe trägt neben einer hohen Umfangsgeschwindigkeit des Laufrads eine starke Dralländerung der Strömung bei. Infolge der hohen Umfangsgeschwindigkeit des Laufrads gelangt man zu grossen Strömungsgeschwindigkeiten, die in Schallnähe und auch weit im Überschallbereich liegen können und bei der Durchströmung einer Verdichterstufe Verdichtungsstösse verursachen. Diese von den Einzelprofilen des durchströmten Gitters ausgehenden Verdichtungsstösse führen im allgemeinen nicht zu einer dauernden Verzögerung der Strömung zu Unterschallgeschwindigkeiten, da die mit diesen «Profilstössen» verbundenen Drucksteigerungen durch die Wirkung der von den Profilen ausgehenden Verdünnungswellen kompensiert werden. Die Verzöge-

<sup>1)</sup> Mitteilung aus dem Institut für Aerodynamik und Gasdynamik der Technischen Hochschule Stuttgart. Erweiterung des Abschlußberichts vom 1. 8. 1955 einer mit Hilfe der Deutschen Forschungsgemeinschaft durchgeführten Arbeit.

<sup>2)</sup> Die Anregung zur vorliegenden Arbeit hat Herr Prof. Dr.-Ing. A. WEISE gegeben. Der Verfasser ist ihm auch für zahlreiche Hinweise bei der Durchführung der Arbeit sehr dankbar.

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 160.

rung der Strömung muss vielmehr durch einen Verdichtungsstoss erfolgen, der durch die stromab liegenden Strömungswiderstände und die damit verbundene Erhöhung des Gegendrucks verursacht wird. In beiden Stossarten, den « Profil- » und den « Staustössen », tritt eine Entropieerhöhung des strömenden Mediums ein; daher wurden sie als so schädlich für den Wirkungsgrad der Strömungsmaschinen angesehen, dass man nach Möglichkeit Strömungsgeschwindigkeiten in der Nähe und oberhalb der Schallgrenze zu vermeiden suchte. A. WEISE [1] wies zuerst darauf hin, dass die Stossverluste nicht so hoch sind, dass sie die Erzielung einer grossen Stufenförderhöhe verhindern könnten. Stärker ins Gewicht fallen die Verluste, die bei der Grenzschichtablösung infolge der Gabelbildung von Verdichtungsstössen auftreten. Diese können jedoch durch Absaugung der Grenzschicht meistens vermieden werden. Weiterhin sind die Verluste bei schallnaher Durchströmung von Gittern besonders gross. Hier können die auftretenden Kopfwellen und lokale Überschallgebiete mit nachfolgenden Verdichtungsstössen den Wirkungsgrad der Verdichterstufe sehr stark herabsetzen.

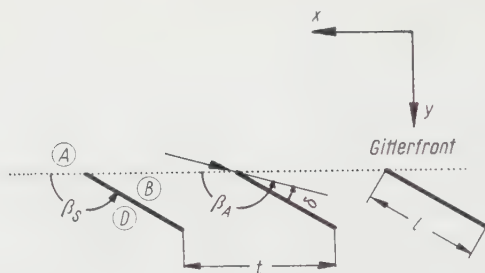
1.2 In der vorliegenden Arbeit soll auf die Schwierigkeiten, die durch Grenzschichtablösungen insbesondere an der Nabe des Verdichters und durch die Aufschaukelung von Schwingungen zwischen zwei aneinander vorbeilaufenden Gittern verursacht werden, nicht eingegangen werden. Es wird hier vielmehr versucht, die Überschalldurchströmung eines Profilhitters theoretisch unter Vernachlässigung der Grenzschichteinflüsse zu untersuchen und aus gegebenen Anfangsbedingungen vorauszuberechnen. Die Ergebnisse liefern einen vertieften Einblick in die Strömungsverhältnisse und zeigen ihre wesentlichen Unterschiede gegenüber den Unterschalldurchströmungen von Gittern.

Um einen Überblick über die verschiedenartigen Strömungsformen der Gitterdurchströmung im Überschallbereich zu gewinnen, ist es zweckmässig, bestimmte Vereinfachungen über die Gitterkonfiguration und Vernachlässigungen bezüglich der Art des strömenden Mediums und der physikalischen Eigenschaften der Strömung einzuführen:

a) Anstelle des dreidimensionalen Profilhitters, dessen Einzelprofile in gleichen Abständen auf einem Radkranz angeordnet sind, wird ein unendliches, ebenes Gitter betrachtet, das durch die Abwicklung eines Kreiszyinderschnittes (Zylinderachse -- Nabenachse) durch das Profilhitter in die Ebene entsteht. Es wird angenommen, dass die Profile dieses Gitters ebene, unendlich dünne Platten sind, die in der Projektion als Strecken erscheinen. Dadurch wird es ermöglicht, die Konfiguration des Gitters allein durch das Teilungsverhältnis  $t/l$  und den Staffelwinkel  $\beta_s$ , den die Platten mit der Gitterfront einschliessen, zu beschreiben (Figur 1).

b) Es wird vorausgesetzt, dass das strömende Medium ein ideales Gas ist. Die Strömung soll als reibungsfrei angesehen werden. Das Auftreten von Grenz-





Figur 1  
Kenngrößen eines Streckengitters.

schichten an den umströmten Platten und deren Auswirkungen auf die Strömung bleiben unberücksichtigt.

c) Die Betrachtungen werden auf reine Überschallströmungen beschränkt. Strömungen, bei denen lokale Unterschallfelder auftreten, wie zum Beispiel bei Profilmströmungen hinter abgehobenen Kopfwellen, bleiben von der Betrachtung ausgeschlossen.

1.3 Verschiedene Autoren haben in den letzten Jahren die Aufgabe, Überschallströmungen durch Profilstreckgitter zu berechnen, angegriffen und Teilprobleme gelöst. Erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang vor allem die grundlegenden Arbeiten von A. WEISE [1], 1943; E. STRAUSS [2], 1946; A. BETZ [3], 1947; J. ACKERET und N. ROTT [4], 1949; A. KANTROWITZ [5], 1950. Auch die späteren Untersuchungen von R. M. EL BADRAWY [6], 1952; H. SÖHNGEN [7], 1955; M. LUDEWIG [8], 1956, stellen wertvolle Beiträge zur Lösung der gestellten Aufgabe dar. Die vorliegende Arbeit versucht, einen Überblick des gesamten Problemkreises zu geben; einzelne Ergebnisse der genannten Veröffentlichungen werden dort besonders erwähnt, wo sie sich am besten einordnen lassen.

## 2. Strömungstypen und Möglichkeiten des Typenwechsels

2.1 Ein besonders kennzeichnendes Merkmal der Überschallströmungen durch Profilstreckgitter ist die Tatsache, dass sich verschiedene Erscheinungsformen dieser Strömungen erkennen und scharf gegeneinander abgrenzen lassen. Zur qualitativen Erfassung dieser Strömungstypen genügt es, zur Konstruktion der Wellenbilder des Strömungsfeldes das Charakteristikenverfahren der Gasdynamik heranzuziehen, obwohl dieses Verfahren in seiner von STEICHEN in die Gasdynamik eingeführten Form auf isentrope Überschallfelder beschränkt ist. Es wird später gezeigt, dass die Ergebnisse des Verfahrens hinsichtlich der Typeneinteilung der Gitterströmungen auch für anisentrope Felder Gültigkeit behalten.



2.2 Die reibungsfreie, isentrope, ebene Überschallströmung durch ein gegebenes Streckengitter ( $t/l, \beta_s$ ) ist durch die Vorgabe der Mach-Zahl  $M_A$  der relativen Anströmung der Platten und der Strömungsrichtung im Strömungsgebiet  $A$  unmittelbar vor der Gitterfront eindeutig festgelegt. Die Strömungsrichtung  $\beta_A$  in  $A$  kann durch den Ablenkwinkel  $\delta = \beta_A - \beta_s$ , den sie mit der umströmten Platte einschliesst, beschrieben werden (Figur 1); anstelle der Mach-Zahl  $M_A$  kann auch der Winkel  $\vartheta_A = \vartheta(M_A)$  gegeben sein, der mit  $M_A$  durch die bekannte Beziehung der Prandtl-Meyer-Strömung verknüpft ist:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \left( \sqrt{k} \sqrt{M^2 - 1} \right) - \arctan \sqrt{M^2 - 1}, \\ k &= \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \quad (\kappa = \text{Adiabatenexponent}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Benutzung von  $\vartheta(M)$  ist für die numerische Berechnung des Strömungsfeldes zweckmässig.

Für  $\delta < 0^\circ$  und  $0^\circ < \beta_s < 90^\circ$  bzw. für  $\delta > 0^\circ$  und  $90^\circ < \beta_s < 180^\circ$  ist die Unterseite jeder Einzelplatte Druckseite; der Druck in grosser Entfernung hinter dem Gitter ist grösser als der Druck weit vor dem Gitter:  $p_H > p_V$ . Für  $\delta > 0^\circ$  und  $0^\circ < \beta_s < 90^\circ$  bzw. für  $\delta < 0^\circ$  und  $90^\circ < \beta_s < 180^\circ$  ist  $p_H < p_V$ ; die Oberseite jeder Platte ist Druckseite. Zur Vereinfachung wird bei den folgenden Betrachtungen  $90^\circ < \beta_s < 180^\circ$  gesetzt; für  $0^\circ < \beta_s < 90^\circ$  ergeben sich ganz ähnliche Ergebnisse.

Durch die Forderung, dass in allen Strömungsgebieten stets  $M \geq 1$  sein soll, sind der Wahl von  $\delta$  Grenzen gesetzt, die von der gegebenen Anströmgeschwindigkeit  $M_A$  bzw. von  $\vartheta_A$  abhängig sind. Die Kurven  $\delta(\vartheta_A)_{M_D=1}$  und  $\delta(\vartheta_A)_{M_B=1}$  begrenzen in der  $(\delta, \vartheta_A)$ -Ebene (Figur 2) das Gebiet  $V$ , das von der Untersuchung ausgeschlossen wird, da bei den zugehörigen Anströmbedingungen die Schallgeschwindigkeit  $c$  im Feld unterschritten wird.

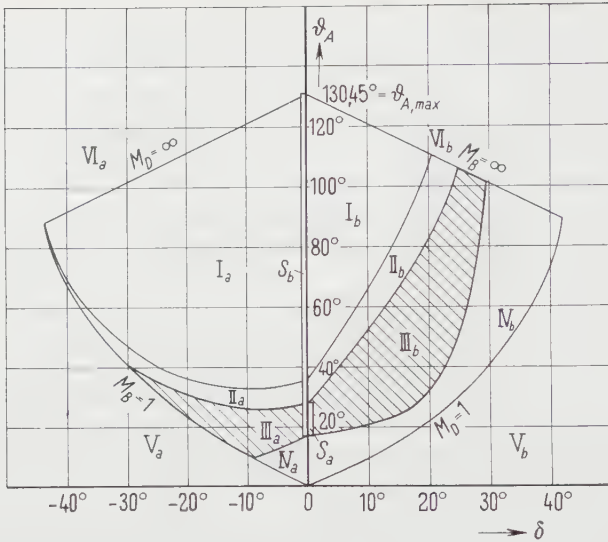
Für sehr grosse Mach-Zahlen  $M_A$  kann der Fall eintreten, dass

$$\vartheta_B = \vartheta_A + \delta = \vartheta_{\max}, \quad M_B = \infty \quad (\delta > 0^\circ)$$

bzw.

$$\vartheta_D = \vartheta_A - (-\delta) = \vartheta_{\max}, \quad M_D = \infty \quad (\delta < 0^\circ)$$

ist; dann ist  $p_B = 0$  bzw.  $p_D = 0$ . Die Kurven  $\delta(\vartheta_A)_{M_B=\infty}$  bzw.  $\delta(\vartheta_A)_{M_D=\infty}$  begrenzen in der  $(\delta, \vartheta_A)$ -Ebene das Gebiet VI. Liegt der Anströmzustand  $(\delta, \vartheta_A)$  des Gitters in diesem Gebiet, so kann die Strömung auf der Saugseite nicht mehr an der Platte anliegen. Infolge der hohen Anströmgeschwindigkeiten ( $\vartheta_A > 88^\circ, M_A > 6,4$ ) kommt diesen Gitterströmungen vorwiegend nur theoretisches Interesse zu; aus diesem Grunde sollen sie hier von der Betrachtung ausgeschlossen werden.

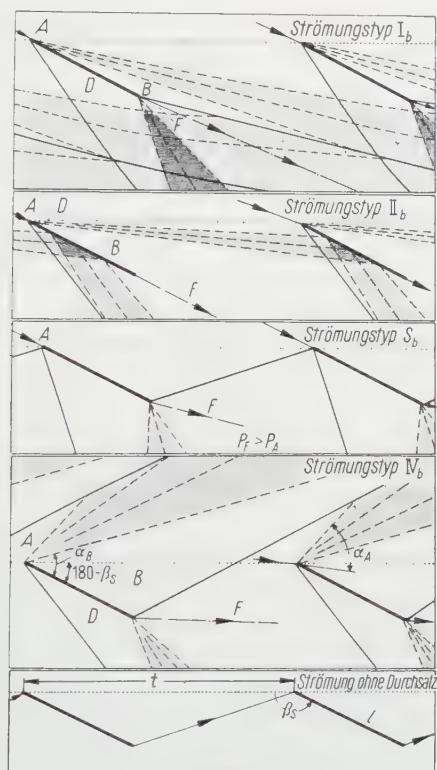


Figur 2

Bereichseinteilung für die Strömungstypen I, II, III, IV und S in der  $(\delta, \vartheta_A)$ -Ebene; Kenngrößen des Streckengitters:  $t/l = 5$ ,  $\beta_S = 150^\circ$ .

Damit sind die Grenzen, innerhalb derer  $\delta$  und  $\vartheta_A$  variiert werden können, abgesteckt. Es zeigt sich, dass man in diesem  $(\delta, \vartheta_A)$ -Bereich vier verschiedene Strömungstypen unterscheiden kann. Diese sollen für  $\delta > 0^\circ$  ausführlich beschrieben werden; für  $\delta < 0^\circ$  gelten ganz analoge Typenunterscheidungen.

Der Strömungstyp I ist dadurch gekennzeichnet, dass sämtliche Wellen und Verdichtungsstöße, die von den umströmten Platten ausgehen, nach hinten aus dem Gitter herauslaufen, ohne eine Nachbarschaukel zu treffen. Die Normalkomponente des Machschen Vektors (normal zur Gitterfront) im Gebiet A ist grösser als 1:  $M_{y,A} > 1$ . Der Anströmzustand der Platten im Gebiet A ist gleich dem Zustand in unendlicher Entfernung vor der Gitterfront:  $\{V\} = \{A\}$ . Die Platten im Gitterverband beeinflussen sich gegenseitig nicht, und ihr Auftrieb und Widerstand sind die gleichen wie bei der Umströmung einer Einzelplatte. Im Strömungsgebiet F dicht hinter dem Plattenende ist – bei isentroper Strömung – der Strömungszustand gleich dem im Anströmgebiet A. Weiter stromab durchsetzen die Stromlinien die Störungswellen, die von den Platten des Gitters ausgehen. Dadurch wird die Strömung abgelenkt, und der Strömungszustand  $\{H\}$  in unendlicher Entfernung hinter dem Gitter ist von dem Strömungszustand im Gebiet F verschieden:  $\{H\} \neq \{F\}$ . Der Verdichtungsstoss BF, der die Gebiete B und F trennt, wird sowohl von einem Teil des Wellenfächers AB, der von derselben Platte ausgeht wie der Stoss, als auch von einem Teil des Wellenfächers AB der linken Nachbarplatte abgebaut.



Figur 3

Strömungstypen I, II, IV und S und die Strömung ohne Durchsatz bei Gitterströmungen mit positivem Anstellwinkel ( $\delta > 0^\circ$ ) der Platten.

Ebenso interferiert der Verdichtungsstoss  $AD$  mit Teilen der Wellenfächer  $DF$  zweier benachbarter Platten. Die Verdichtungsstösse  $BF$  und  $AD$  entarten im Gebiet  $H$  zu Machschen Linien, deren zugehöriger Machscher Winkel  $\alpha_H$  den Strömungszustand in  $H$  bestimmt.

Die Grenzlage zwischen den Strömungstypen I und II ist dann erreicht, wenn die Machsche Linie der Neigung  $\alpha_A$  auf das Plattenende der Nachbarplatte trifft.

Beim Strömungstyp II verlaufen wie bei I alle Störungswellen hinter der Gitterfront;  $M_{y,A}$  ist grösser als 1. Dagegen beeinflussen sich die Platten hier gegenseitig; der Wellenfächer  $AB$  wird an der Nachbarplatte reflektiert und interferiert hinter dem Gitter mit dem Verdichtungsstoss  $AD$  der eigenen und dem der Nachbarplatte. Vom Plattenende gehen keine Störungswellen aus. Wie bei dem Strömungstyp I ist  $\{V\} = \{A\}$  und  $\{H\} \neq \{F\}$ . Die Strömungsrichtung in  $F$  ist gleich der Plattenrichtung, die Strömung wird also von  $A$  nach  $F$

um den Winkel  $\delta$  abgelenkt. Die auf die Platte wirkende resultierende Kraft muss durch Integration des längs der Unterseite veränderlichen Drucks und des konstanten Drucks an der Oberseite der Platte bestimmt werden<sup>4)</sup>. Die Kraft greift im allgemeinen nicht im Plattenzentrum an, so dass sich in bezug auf dieses ein Moment ergibt.

Die Grenzlage zwischen den Strömungstypen II und III ist dadurch gekennzeichnet, dass die Machsche Linie mit der Neigung  $\alpha_A$  mit der Gitterfront zusammenfällt:  $M_{y,A} = 1$ . Steilen sich die von der Plattenoberseite ausgehenden Wellenfronten noch weiter auf, so wird schliesslich auch der Verdichtungsstoss  $BF$  nach vorn aus dem Gitterverband herauslaufen können. Das ist dann erreicht, wenn dieser Stoss die Spitze der Nachbarplatte berührt; diese Konfiguration ist die Grenzlage der Strömungstypen III und IV.

Symmetrische Überschallströmungen durch ein Streckengitter des Strömungstyps III sind nicht existent. Nimmt man einmal an, dass der Wellenfächer  $AB$  einer Platte vor der Gitterfront, der Verdichtungsstoss  $BF$  dagegen hinter dieser liegt, so liegen die Spitzen aller rechten Nachbarplatten im Gebiet  $B$ , deren Strömungsrichtung mit der Plattenrichtung übereinstimmt; die nachfolgenden Platten beeinflussen die Strömung also dann nicht mehr.

Es ist daher erforderlich, dass bei Überschallströmungen durch ein Streckengitter, bei denen Störungswellen vor der Gitterfront liegen, *sämtliche* von der Oberseite der Platte ausgehenden Wellen nach vorn aus dem Gitterverband herauslaufen<sup>5)</sup>. Diese Konfiguration kennzeichnet den Strömungstyp IV, bei dem  $M_{y,A} < 1$  ist. Der Strömungszustand in  $A$  ist von dem in unendlicher Entfernung vor dem Gitter verschieden:  $\{V\} \neq \{A\}$ ; ebenso ist  $\{H\} \neq \{F\}$ . Die Verdichtungsstösse  $BF$  bzw.  $AD$  interferieren mit Teilen der Wellenfächer  $AB$  bzw.  $DF$ , die von zwei benachbarten Platten ausgehen, und entarten weit vor bzw. hinter dem Gitter zu Machschen Linien mit der Neigung  $\alpha_V$  bzw.  $\alpha_H$ . Die Umlenkung der Strömung erfolgt also zum Teil vor und zum Teil hinter dem Gitter.

Die Grenzlagen zwischen den einzelnen Strömungstypen sind bei gegebenem Gitter ( $t/l, \beta_S$ ) von dem Strömungszustand im Gebiet  $A$  abhängig, der durch die Angabe von  $\vartheta_A$  und  $\delta$  festgelegt wird. Für ein Streckengitter mit dem Teilungsverhältnis  $t/l = 5$  und dem Staffelwinkel  $\beta_S = 150^\circ$  wurden diese Grenzlagen berechnet; die Ergebnisse sind in Figur 2 graphisch dargestellt. Man erkennt, dass das Gebiet III, in dem die Strömung nicht existent ist, die Gebiete II und IV vollständig trennt, so dass der Übergang von II nach IV oder umgekehrt nur dann stetig erfolgen kann, wenn  $\delta = 0^\circ$  ist.

<sup>4)</sup> Diese Aufgabe wurde für einen speziellen Fall von EL BADRAWY [6] gelöst.

<sup>5)</sup> Dieses Ergebnis hat A. KANTROWITZ [5] in allgemeinerer Form auch für profilierte Schaufelverbände endlicher Dicke gefunden: Er bezeichnet den Profiltail, von dem Wellen nach vorn aus dem Gitterverband herauslaufen, als «Eintrittsgebiet». Der Anströmzustand vor den Profiltailen und damit auch der Zustand  $\{V\}$  weit vor dem Gitter stellt sich immer so ein, dass die zugehörigen Kompressions- und Expansionswellen des Eintrittsgebiets sich vollständig gegeneinander aufheben können.



E. STRAUSS [9] hat gezeigt, dass unter der Voraussetzung der Isentropie der Strömung auch beim Anstellwinkel  $\delta = 0^\circ$  Überschallströmungen eines Sonder-typs S durch ein Streckengitter möglich sind, bei denen von den Plattenenden Störungswellen ausgehen, die die Strömung umlenken; das Gitter arbeitet je nach dem weit hinter der Gitterfront aufgeprägten Gegendruck expandierend oder komprimierend. Bei den beiden von E. STRAUSS angegebenen Strömungs-typen gehen nur von der Hinterkante der Platten Störwellen aus, und zwar jeweils ein Verdünnungsfächer und ein Verdichtungsstoss verschiedener Schar, die eine gleich grosse Umlenkung der Strömung verursachen<sup>6)</sup>. Beim Typ  $S_a$  wird der Wellenfächer, beim Typ  $S_b$  der Verdichtungsstoss an der Nachbar-platte reflektiert. Diese reflektierenden Störwellen laufen hinter der Gitterfront mit den anderen Wellen mit entgegengesetztem Vorzeichen zusammen. Dabei wird der Verdichtungsstoss mit wachsender Entfernung von der Gitterfront immer schwächer, und die Stärke der Störwellen verschwindet unendlich weit hinter der Gitterfront vollständig.

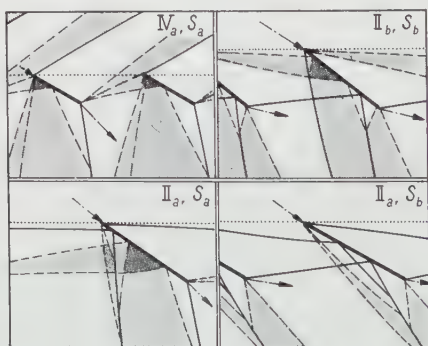
2.3 Die Möglichkeit, jede Überschalldurchströmung des Gitters durch einen bestimmten Strömungstyp zu kennzeichnen, und die Tatsache, dass die einzel-nen Strömungstypen I–IV wesentlich voneinander verschieden sind, bilden einen grundsätzlichen Unterschied zu den Gitterströmungen im Unterschall-bereich. Für die Gitterströmungen mit Überschallgeschwindigkeit erhebt sich sofort die Frage nach den Übergangsmöglichkeiten zwischen den einzelnen Strömungstypen, und insbesondere müssen die Fragen geklärt werden, die mit der Nichtexistenz des Strömungstyps III zusammenhängen.

Der Übergang zwischen den Strömungstypen I und II, bei denen die Axial-geschwindigkeit grösser als die Schallgeschwindigkeit ist ( $M_y > 1$ ), bereitet keine Schwierigkeiten und kann durchaus mit Änderung des Anströmzustandes  $\{A\}$  stetig erfolgen. Die Frage nach der Übergangsmöglichkeit zwischen Gitter-strömungen mit axialer Unterschall- zu solchen mit axialer Überschallge-schwindigkeit und umgekehrt, also zwischen den Strömungstypen II und IV, lässt sich dagegen nicht so einfach beantworten. Ein stetiger Übergang ist sicherlich dann möglich, wenn sich stationäre Strömungsbilder angeben lassen, die kontinuierlich aneinandergesetzt von dem einen zum andern Strömungstyp führen. Als erste Bedingung für den Übergang zwischen den Typen II und IV wurde bereits gefunden, dass im Übergangsbereich der Anstellwinkel der Platten gegen die Strömungsrichtung an der Plattenspitze verschwinden muss

<sup>6)</sup> H. SÖHNGEN [7] hat diesen Strömungstyp, bei dem die vom Plattenende ausgehenden Störwellen einseitig von der Nachbarschaufel abgefangen und am Eintritt in das Gebiet vor der Gitterfront gehindert werden, näher untersucht und übereinstimmend mit den oben angeführten Ergebnissen festgestellt, dass in diesem Fall das Gebiet vor der Gitterfront störungsfrei sein muss. Nach H. SÖHNGEN gilt diese Feststellung auch dann, wenn die Einlaufstrecke vor dem Laufrad endlich ist. Unter der Voraussetzung schwach gestörter, isentroper Strömung zeigt H. SÖHNGEN, dass in diesem Fall die von den Plattenspitzen ausgehenden, gegen die Strömungsrichtung laufenden Störungen am Einlauf reflektiert werden und dass sich beide Anteile gerade gegenseitig auslöschen.

( $\delta = 0^\circ$ ), da der Strömungstyp III mit  $\delta \neq 0^\circ$  nicht existent ist. Ferner muss gefordert werden, dass die auf die Platten ausgeübte Kraft  $K$  nicht unstetig verschwindet, wenn nach stetiger Änderung des Anströmzustandes  $\{A\}$  die Strömungsrichtung in  $A$  gleich der Plattenrichtung ( $\beta_A = \beta_S$ ,  $\delta = 0^\circ$ ) geworden ist. Beide Forderungen werden von den von E. STRAUSS angegebenen Strömungstypen erfüllt. Es liegt daher nahe, anzunehmen, dass gerade die Typen  $S_a$  und  $S_b$  geeignet sind, den Übergang zwischen den Typen IV und II zu ermöglichen. Diese Annahme wird noch dadurch gestützt, dass in der  $(\delta, \vartheta_A)$ -Ebene (Figur 2) der Ordinatenabschnitt ( $\delta = 0^\circ$ ) im Gebiet  $(\delta, \vartheta_A)_{III}$  von den zu den Typen  $S_a$  und  $S_b$  gehörenden Abschnitten überdeckt wird.

Die Wellenbilder der Strömungstypen IV und II einerseits und die der Typen  $S_a$  bzw.  $S_b$  andererseits sind aber so sehr voneinander verschieden, dass ein kontinuierlicher Übergang von IV über  $S$  nach II nur möglich ist, wenn man andere Übergangstypen zwischen IV und  $S$  bzw.  $S$  und II einschaltet. Diese Typen kann man sich aus den angrenzenden Typen IV und  $S$  bzw.  $S$  und II zusammengesetzt denken; sie sollen daher als «Komplextypen» (IV,  $S$ ) bzw. ( $S$ , II) bezeichnet werden. Von den diese Komplextypen bildenden Zweierkombinationen der Elemente  $IV_a$ ,  $IV_b$ ,  $II_a$ ,  $II_b$  und  $S_a$ ,  $S_b$  der beiden Gruppen ergeben nur vier Kombinationen mögliche Strömungen. Wie man leicht erkennen kann, sind die vier anderen Komplextypen nicht existent, da sich ihre Wellenbilder nicht widerspruchsfrei konstruieren lassen (Figur 4).

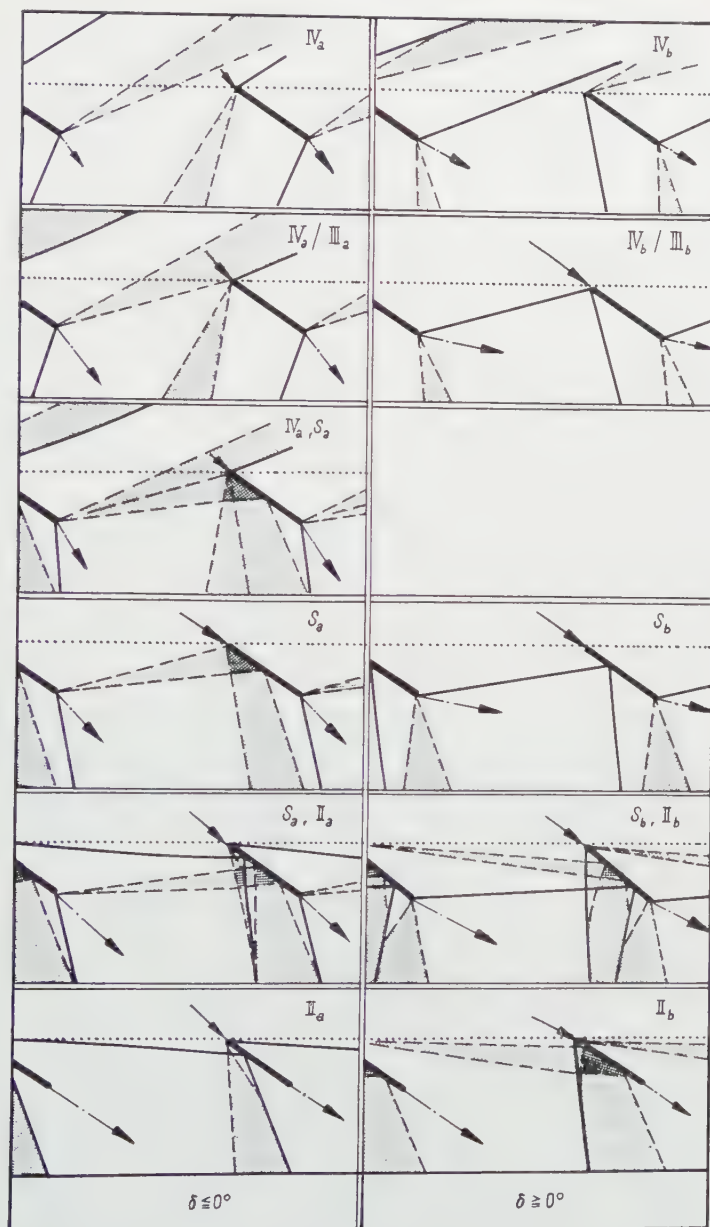


Figur 4

Komplex-Strömungstypen (IV,  $S$ ) und ( $S$ , II).

Mit Hilfe dieser Komplextypen lassen sich nun tatsächlich Wellenbilder stationärer Strömungen angeben, die als Zwischenstationen beim Übergang vom Typ IV zum Typ II und umgekehrt angesehen werden können (Figur 5). Die Wellenbilder lassen sich in der Reihenfolge  $IV \rightarrow \text{Grenzlage IV/III} \rightarrow (IV, S) \rightarrow (S, II) \rightarrow II$  und umgekehrt mit einer Ausnahme stetig ineinander überführen. Diese Ausnahme bildet der Übergang  $S_a \rightarrow (S_a, II_a)$ , bei dem die





Figur 5

Zum Übergang zwischen Gitterströmungen mit axialer Überschall- und Unterschallgeschwindigkeit bei Strömungen mit negativem ( $\delta < 0^\circ$ ) und positivem Anstellwinkel ( $\delta > 0^\circ$ ) der Platten.

Axialgeschwindigkeit  $w_{y,A}$  die Schallgeschwindigkeit überschreitet; beim Typ  $S_a$  ist  $M_{y,A} < 1$ , beim Typ  $(S_a, II_a)$  ist  $M_{y,A} > 1$ . Dieser unstetige Übergang  $S_a \rightarrow (S_a, II_a)$  findet eine einfache Erklärung, wenn man bedenkt, dass bei den Typen  $IV_a$  und  $(IV_a, S_a)$  weit vor dem Gitter ein zur Gitterfront paralleler « Staustoss » existieren kann (siehe Abschnitt 3.3), der bei Erreichung des Typs  $S_a$  bis zur Gitterfront stromabwärts wandern kann, da der Strömungszustand dann im gesamten Gebiet vor der Gitterfront wellenfrei ist. Von dieser Lage aus kann der Staustoss stetig in den beim Typ  $(S_a, II_a)$  von der Plattenspitze ausgehenden schrägen Stoss übergehen.

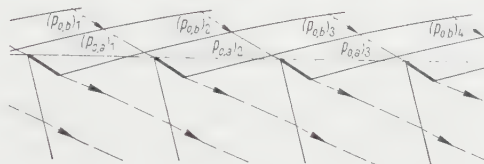
Zusammenfassend kann die gestellte Frage folgendermassen beantwortet werden: Der Übergang von Gitterströmungen mit axialer Unterschall- zu solchen mit axialer Überschallgeschwindigkeit ist möglich. Bei Strömungen mit positivem Anstellwinkel  $\delta > 0^\circ$  kann der Übergang stetig erfolgen; bei Strömungen mit negativem Anstellwinkel  $\delta < 0^\circ$  läuft ein zur Gitterfront paralleler Verdichtungsstoss stromab bis ins Laufrad, ohne jedoch hierbei den quasistationären Charakter der Strömung zu beeinträchtigen.

Diese Feststellung sagt noch nichts darüber aus, wie der Strömungsübergang tatsächlich durch äussere Massnahmen herbeizuführen ist. Bei Strömungsmaschinen kann die Strömung durch die Veränderung der Umfangsgeschwindigkeit  $u$  des Laufrads bzw. der Leistungszu- oder -abführung und der Veränderung des Gegendrucks  $p'_{0,H}$  und damit des Verdichtungsverhältnisses beeinflusst werden. Beide Massnahmen sind jedoch nicht geeignet, eine Überschallaxialgeschwindigkeit der Strömung zu verändern, da die durch die Veränderung von  $u$  und  $p'_{0,H}$  verursachten Störungen sich gegen die Richtung der bestehenden Überschallaxialgeschwindigkeit nicht fortpflanzen können. Zur Beeinflussung einer bestehenden Überschallaxialgeschwindigkeit muss man daher andere Massnahmen anwenden; so kann man zum Beispiel den Querschnitt einer weit vor dem Gitter befindlichen Laval-Düse verändern.

Die Frage der Erzeugung von Gitterströmungen mit Überschallaxialgeschwindigkeit muss noch eingehend untersucht werden. Es ist zu erwarten, dass die Berechnung des Kennfeldes eines gegebenen Gitters wertvolle Hinweise zur Beantwortung dieser Frage liefert (siehe dazu Abschnitt 4).

2.4. Die gewonnenen Ergebnisse über Strömungstypen und Möglichkeiten des Typenwechsels sind zunächst auf isentrope Überschalldurchströmungen von Streckengittern beschränkt. Zur Erweiterung der Aussagen auf anisentrope Strömungen muss geprüft werden, ob Gitterdurchströmungen überhaupt existieren können, wenn die mit den auftretenden Verdichtungsstössen verbundene Drosselung der Strömung berücksichtigt wird. Diese Existenzfrage stellt sich sofort, wenn man bedenkt, dass alle Stromlinien der Strömung eine unendlich grosse Anzahl von Verdichtungsstössen kreuzen. Diese Stösse führen zu einer starken Rotation, mit der das Feld der Gitterströmung behaftet ist.

Um diese Tatsache zu erkennen, soll hier als Beispiel eine Gitterströmung des Typs IV betrachtet werden. In der Figur 6 sind die Strömungsverhältnisse vereinfacht dargestellt. Die Figur zeigt ausser den Platten des Gitters nur die von ihnen ausgehenden Verdichtungsstösse und die Stromlinien, die jeweils die Plattenspitzen treffen und an den Platten entlanglaufen. Man muss für die



Figur 6

Vereinfachte Darstellung der anisotropen Gitterströmung des Strömungstyps IV.

Existenz einer solchen Strömung verlangen, dass das Gitter symmetrisch durchströmt wird, das heisst, dass die Strömungszustände sich auf allen Geraden parallel zur Gitterfront periodisch (Periode  $t$ ) ändern. Dann müssen die Ruhedrucke auf sich entsprechenden Stromlinienstücken gleich sein:

$$(p_{0,a})_1 = (p_{0,a})_2 = (p_{0,a})_3 = \dots,$$

$$(p_{0,b})_1 = (p_{0,b})_2 = (p_{0,b})_3 = \dots,$$

und man erkennt, dass die Ruhedrucke von Stromlinie zu Stromlinie quer zur Strömungsrichtung verschieden sind, und zwar ist das Ruhedruckverhältnis zweier benachbarter Plattenstromlinien von der gleichen Grössenordnung wie dasjenige, das durch einen der auftretenden Verdichtungsstösse verursacht wird:

$$\frac{(p_{0,a})_1}{(p_{0,b})_2} = \frac{(p_{0,a})_2}{(p_{0,b})_3}, \quad \frac{(p_{0,a})_3}{(p_{0,b})_4} = \frac{(p_{0,a})_4}{(p_{0,b})_5}, \quad \dots$$

Die dadurch hervorgerufene Rotation der Strömung ist in der Nähe der Gitterfront besonders stark; mit zunehmender Entfernung von der Gitterfront nimmt sie mit der schwindenden Stärke der Verdichtungsstösse ab.

Besonders deutlich wird der Einfluss der Anisotropie des Strömungsfeldes bei der Betrachtung der Gitterströmung ohne Durchsatz (siehe Figur 3). Bei dieser Strömung des Typs IV verlaufen die Stromlinien, die die Platten berühren, vom Plattenende zur Spitze der Nachbarplatte usw. Diese Strömung, bei der die in Figur 6 gezeichneten Plattenstromlinien in einer einzigen Stromlinie zusammenfallen, ist nicht existent, da diese Stromlinie eine unendlich grosse Zahl von Verdichtungsstössen konstanter Stärke kreuzen und die Drosselung auf dieser Stromlinie über alle Grenzen ansteigen würde. Bei «isentroper» Betrachtung dagegen kann gegen die Existenz dieser Strömung nichts eingewen-

det werden. In diesem Fall der Strömung ohne Durchsatz liefern die beiden Betrachtungsweisen also nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ wesentlich verschiedene Resultate.

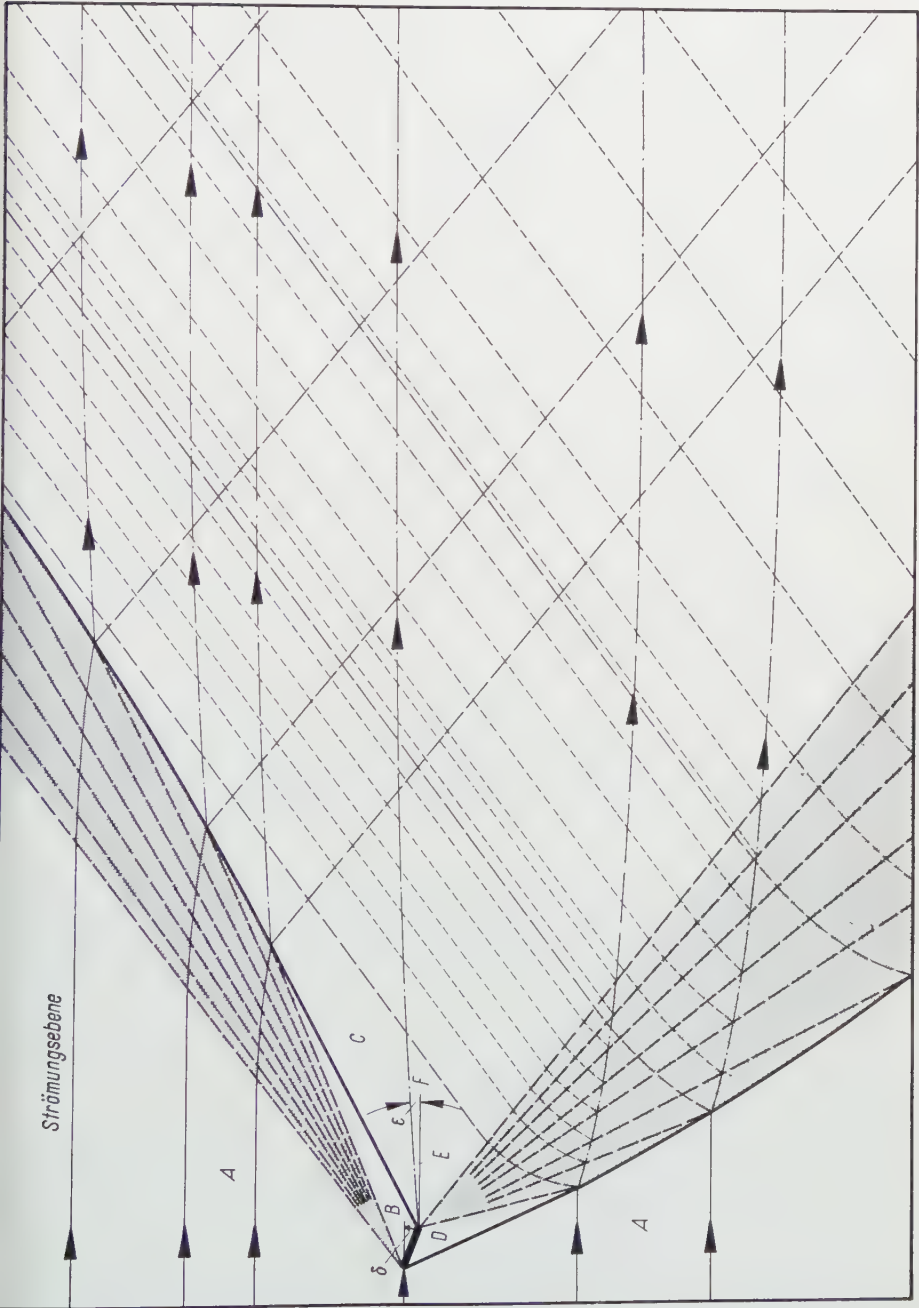
2.5 Aus den angeführten Beispielen ergibt sich die Notwendigkeit, die Entropieänderungen im Strömungsfeld zu berücksichtigen<sup>7)</sup>.

Zur eindeutigen Beschreibung eines anisotropen Überschallfeldes ist es erforderlich, in jedem Punkt des Feldes die Strömungsrichtung und den Machschen Winkel anzugeben. Dieser ist jedoch nicht wie im isentropen Feld durch den Druck  $p$  allein festgelegt; vielmehr muss zu seiner Bestimmung auch der von Punkt zu Punkt veränderliche Ruhedruck  $p_0$  bekannt sein. Zur Berechnung der beschreibenden Feldgrößen  $\beta$ ,  $p$  und  $p_0$  sind von A. BUSEMANN [11], G. GUDERLEY [12] und R. COURANT und K. O. FRIEDRICHS [13] Näherungsverfahren entwickelt worden. Der Verfasser hat in seiner Dissertation [14] diese Verfahren beschrieben und darauf hingewiesen, dass sie zur Behandlung *allgemeiner* anisotroper Überschallfelder nicht geeignet sind, da das Auftreten von Verdichtungsstößen oder von Trennungslinien mit physikalisch realem Entropiesprung nicht zugelassen wird. Beide Einschränkungen werden bei der *Herzkurvenmethode* von A. WEISE [15] nicht gemacht. Vielmehr ist diese Methode gerade mit dem Ziel entwickelt worden, Aufgaben, die mit dem Auftreten solcher Unstetigkeiten in der Strömung verbunden sind, zu lösen.

Die mit der Herzkurvenmethode erzielten Ergebnisse bei der Berechnung des anisotropen Umströmungsfeldes der angestellten Platte [14] bilden die Grundlage zur Beantwortung der Frage nach der Existenz anisotroper Gitterströmungen. Bekanntlich erhält man mit dem Charakteristikenverfahren das Ergebnis, dass der Strömungszustand im ganzen Bereich hinter einer umströmten Platte konstant gleich dem Anströmungszustand ist. Dagegen zeigt die Herzkurvenmethode, dass der Strömungszustand unmittelbar hinter der Platte vom Anströmungszustand etwas verschieden ist und dass das gesamte Gebiet hinter der Platte von Wellen höherer Ordnung überdeckt wird, die beim Zusammenwirken von Machschen Wellen mit Verdichtungsstößen und Trennungslinien entstehen (Figur 7). Der vom Anströmungszustand  $\{A\}$  verschiedene Zustand  $\{F\}$  unmittelbar hinter der Platte wird weiter stromab durch diese Wellen verändert, und zwar gerade so, dass im Unendlichen hinter der Platte auf allen Stromlinien in bezug auf Druck und Strömungsrichtung wieder der Anströmungszustand erreicht wird.

2.6 Das Ziel der folgenden Überlegungen soll nun sein, die bei der Umströmung der Einzelplatte gewonnenen Ergebnisse auf die Durchströmung des unendlichen, ebenen Gitters zu übertragen. Zu diesem Zweck ist es nützlich

<sup>7)</sup> Der Verfasser hat auf diese Tatsache in seinem Diskussionsbeitrag bei der Strömungstagung in Zürich, Juni 1955, hingewiesen; siehe [10], Seite 114.



Figur 7 Anisentrope Umströmung der angestellten, ebenen Platte.

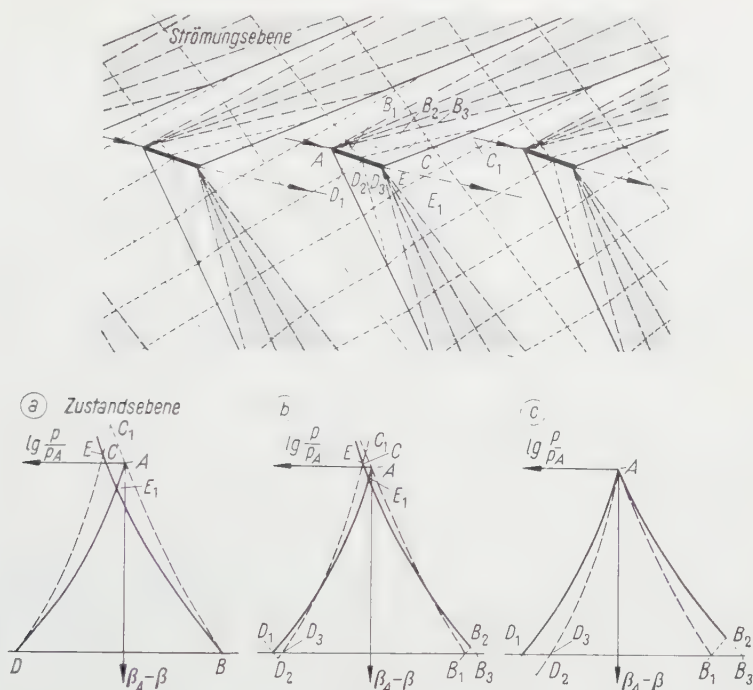


zuvor eine Zwischenbetrachtung über die Durchströmung eines Gitters einzuschalten, das aus einer *endlichen* Zahl von Platten besteht. Bei dieser anisotropen Umströmung mehrerer hintereinanderliegender Platten – man denke bei den folgenden Überlegungen an den Strömungstyp IV, da sie für diesen Typ besonders wichtig sind – erzeugen die Machschen Wellen jeder einzelnen Platte beim Zusammenlaufen mit Verdichtungsstössen und beim Kreuzen von Trennungslinien einen «Satz» von Wellen höherer Ordnung, dessen Gesamtintensität ausreichen würde, den am Plattenende herrschenden Zustand weiter stromab gerade so zu verändern, dass im Unendlichen der Anströmozustand der Platte in bezug auf Druck und Strömungsrichtung erreicht wird, wenn in dem stromab vom Plattenende liegenden Gebiet keine weiteren Platten als Störungsquellen der Strömung auftreten. Da jeder dieser Platten ein solcher «Wellensatz» zugeordnet ist und da eine additive Überlagerung der mit diesen «Wellensätzen» verbundenen Änderungen der Strömungsrichtung zu einer Gesamtwirkung zulässig ist, kommt man zu der Aussage, dass infolge dieser Gesamtwirkung der «Wellensätze» der Strömungszustand in unendlicher Entfernung hinter endlich vielen Platten in bezug auf Druck und Richtung gleich dem Anströmozustand der ersten Platte ist. Man muss jedoch beachten, dass die Durchströmung dieses endlichen Gitters – im Sinne der oben angegebenen Definition (siehe Abschnitt 2.4) – nicht symmetrisch ist, denn die Anströmozustände der Platten sind untereinander alle verschieden.

Die Durchströmung eines *unendlichen* Gitters dagegen muss grundsätzlich *symmetrisch* sein. Diese Symmetriebedingung ist auch bei *anisentroper* Durchströmung des unendlichen Gitters erfüllt. Der Beweis für diese Behauptung ist nach den Zwischenbetrachtungen über das endliche Gitter nunmehr einfach zu führen (Figur 8). In jeden Zwischenraum von Platte zu Platte fällt ein «Wellenstreifen», der aus einer bestimmten Anzahl von Wellen höherer Ordnung besteht. Diese Wellen gehören den unendlich vielen «Wellensätzen» der Einzelplatten an. Bei einer unendlich grossen Anzahl von Platten und von zugehörigen «Wellensätzen» und einer gleich grossen Anzahl von «Wellenstreifen» kann es nun nicht anders sein, als dass die Gesamtintensität eines «Wellenstreifens», der in den Zwischenraum von Platte zu Platte fällt, gleich der eines «Wellensatzes» einer Einzelplatte ist. Ein solcher «Wellenstreifen» muss bewirken, dass die Strömungsrichtung  $\beta_F$  und der Druck  $p_F$  am Plattenende in diesem Zwischenraum so geändert werden, dass an der Spitze der nächsten Platte wieder der Strömungszustand ( $\beta_A, p_A$ ) herrscht.

An der Tatsache der Symmetrie der anisotropen Durchströmung des unendlichen Gitters ändert auch der Einwand nichts, dass die Wellen eines «Wellenstreifens» nicht nur in den Zwischenraum von Platte zu Platte fallen, sondern dass auch ein Teil der Wellen des «Wellenstreifens» auf die Platte selbst trifft und dort reflektiert wird (Figur 8). Aus der Skizze der Strömung in der Zustandsebene kann man erkennen, dass selbst in dem Falle, dass *alle* Wellen



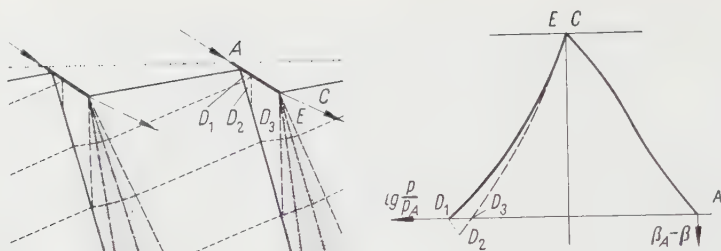


Figur 8

Anisotrope Gitterströmung des Strömungstyps IV. Darstellung in der Strömungsebene mit Wellen zweiter Ordnung und in der Zustandsebene der Herzkurvenmethode für die drei möglichen Fälle: Wellen höherer Ordnung treffen *a* nicht, *b* zum Teil, *c* alle auf die Platten des Gitters.

der «Wellenstreifen» auf die Platten treffen, die Strömung symmetrisch ist. In diesem Extremfall, der bei sehr eng gestellten Gittern möglich ist, sind die Strömungszustände an der Spitze  $\{A\}$  und am Ende  $\{F\}$  jeder Platte einander gleich. Zusammenfassend kommt man zu der Aussage, dass die Existenz der Gitterdurchströmung des Typs IV durch die Berücksichtigung der Anisotropie des Feldes nicht gefährdet wird.

Diese Aussage wird durch die folgende, gleichartige Betrachtung auf die von E. STRAUSS angegebenen Strömungstypen  $S_a$  und  $S_b$  ausgedehnt. Legt man an diese Strömungen das zwar nicht hinreichende, aber notwendige Kriterium für ihre Existenz, dass sich ihre Wellenbilder widerspruchsfrei mit der Herzkurvenmethode konstruieren lassen müssen, so kommt man zu dem Ergebnis, dass beide Strömungstypen existent sind. Zum Beweis ist in der Figur 9 die Strömung des Typs  $S_b$  unter Berücksichtigung der Anisotropie in der Strömungsebene und in der Zustandsebene dargestellt. Für ihre Existenz ist es entscheidend, ob die Forderung erfüllt ist, dass der Abströmzustand unmittelbar



Figur 9

Anisotrope Gitterströmung des Strömungstyps  $S_b$  ( $\delta = 0^\circ$ ). Darstellung in der Strömungsebene mit Wellen zweiter Ordnung und in der Zustandsebene der Herzkurvenmethode.

hinter dem Plattenende mit der Herzkurvenmethode eindeutig bestimmt werden kann. Das ist dann möglich, wenn die Strömungszustände  $\{C\}$  und  $\{E\}$  beiderseits der vom Plattenende ausgehenden Trennungslinie in bezug auf Druck und Richtung gleich sind. Wie die Figur 9 zeigt, wird bei der Strömung des Typs  $S_b$  diese Bedingung durch die Wirkung der auftretenden Wellen höherer Ordnung erfüllt, die an den Platten reflektiert werden.

Bei den Strömungstypen I und II mit axialer Überschallgeschwindigkeit lässt sich der Existenzbeweis ganz ähnlich wie bei den Typen IV und S führen. Zusammenfassend kann ausgesagt werden: Auch unter Berücksichtigung der Drosselung von Überschallströmungen durch Streckengitter infolge Entropieerhöhung in den auftretenden Verdichtungsstößen sind die beschriebenen Strömungstypen existent und die Übergänge zwischen den einzelnen Typen in der beschriebenen Form möglich. Die Grenzlinien zwischen den Bereichen der Strömungstypen in der  $(\delta, \vartheta_A)$ -Ebene erfahren bei Berücksichtigung der Anisotropie nur geringfügige Verschiebungen, da die Wellenbilder der anisotropen von denen entsprechender isentroper Strömungen in Plattennähe im allgemeinen nur wenig abweichen. Ausnahmen bilden nur die Strömungen in der Nachbarschaft der Strömung ohne Durchsatz.

### 3. Berechnung anisentroper Überschalldurchströmungen des Streckengitters

3.1 Für die Berechnung des gesamten Strömungsfeldes ist bei Vernachlässigung der Anisotropie des Feldes das Charakteristikenverfahren ein tragfähiges Hilfsmittel; bei Berücksichtigung der Anisotropie tritt an seine Stelle die Herzkurvenmethode. Mit diesen Verfahren kann der Strömungszustand in jedem Feldpunkt durch die Konstruktion der durch diesen Punkt gehenden Machschen Linien und der Stromlinie bestimmt werden. Der Arbeitsaufwand ist jedoch verhältnismässig gross, und die Genauigkeit der Ergebnisse ist durch die unvermeidbaren Zeichenfehler eingeschränkt. Besonders zur Ermittlung

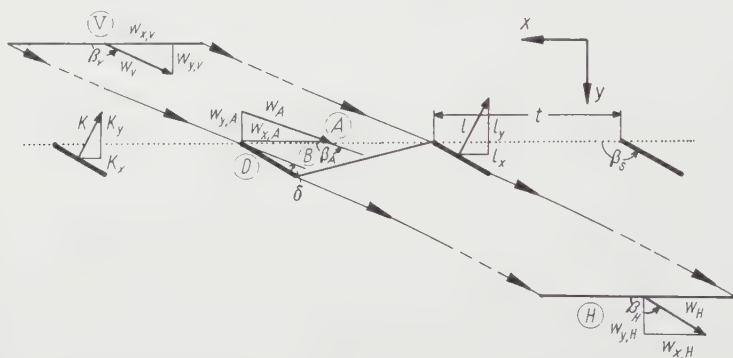
der Strömungszustände im Unendlichen weit vor bzw. weit hinter der Gitterfront kann man das graphische Verfahren wegen der grossen räumlichen Ausdehnung der Strömungsfelder nicht benutzen. E. STRAUSS [2] hat aus diesem Grunde zur Berechnung dieser Strömungszustände das graphische Verfahren durch ein analytisches ersetzt, welches gestattet, die Lage der Machschen Linien und der Stromlinien weit vor bzw. weit hinter dem Gitter näherungsweise zu bestimmen. Diese Näherungslösung gelingt dadurch, dass bei der Wellenkonstruktion durch Wahl eines bestimmten Sprungwinkels des Charakteristikenverfahrens wellenfreier Zustand in endlicher Entfernung vor bzw. hinter der Gitterfront erreicht werden kann. Auf diesem Wege erhält man für die Machschen Winkel  $\alpha_V$  bzw.  $\alpha_H$  und für die Richtung der Stromlinien  $\beta_V$  bzw.  $\beta_H$  die Näherungslösungen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{V,H} &= \alpha_A \pm \left( \frac{(\kappa+1)/2}{\cos^2 \alpha_A} - 1 \right) \frac{l/l}{\cos \beta_S \mp \operatorname{ctg} \alpha_A \sin \beta_S} \delta, \\ \beta_{V,H} &= \beta_A + \frac{l/l}{\cos \beta_S \pm \operatorname{ctg} \alpha_A \sin \beta_S} \delta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Diese gestatten es, die Strömungszustände  $\{V\}$  und  $\{H\}$  aus dem Zustand  $\{A\}$  unmittelbar vor den Plattenspitzen zu bestimmen. Ihre Gültigkeit ist jedoch auf isentrope Strömungen des Typs IV beschränkt; die Genauigkeit der Ergebnisse ist nicht abschätzbar.

3.2 Zur Bestimmung der Zustände weit vor bzw. weit hinter dem Gitter ist eine andere Methode, die Anwendung der Integralsätze der Strömungslehre, geeigneter als das Charakteristikenverfahren. Unter dem Namen « Integralsätze der Strömungslehre » sollen hier der Impulssatz, die Kontinuitätsgleichung und der Energiesatz in ihren integralen Formen verstanden werden. Mit Hilfe dieser Sätze ist es zwar nicht möglich, das Strömungsfeld punktweise zu bestimmen, jedoch ist es möglich, die parallel zur Gitterfront konstanten Zustände  $\{V\}$  und  $\{H\}$  mit beliebig grosser Genauigkeit numerisch zu berechnen, und zwar für alle Typen der Gitterströmung. Zuerst hat A. BETZ [3] diese Methode auf die kompressible Gitterströmung angewandt. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, des Energiesatzes und unter Verwendung der bei isentroper Strömung gültigen Adiabatangleichung gewinnt er Beziehungen zwischen den Zustandsgrössen  $p$  und  $q$  und den Geschwindigkeitsvektoren  $w$  (Betrag  $w$ , Richtung  $\beta$ ) für die Zustände  $\{V\}$  und  $\{H\}$ . Diese Beziehungen gestatten es, bei Vorgabe eines Anfangszustandes  $\{V\}$  und einer der den Endzustand beschreibenden Grössen, zum Beispiel des Drucks  $p_H$  oder der Geschwindigkeitsrichtung  $\beta_H$ , den Endzustand  $\{H\}$  vollständig zu bestimmen. Dabei braucht über die Form des Gitters und über die Zustände am Gitter nichts ausgesagt zu werden. Hier soll dagegen der Zustand  $\{H\}$  vollständig bei Vorgabe des Zustandes  $\{V\}$  und der Gitterkonfiguration bestimmt werden.

Gegeben seien die Kenngrößen des Plattengitters  $t/l$  und  $\beta_S$ . Dieses Gitter werde von einem idealen Gas mit konstantem Adiabatenexponenten  $\kappa$  symmetrisch durchströmt, so dass sich die Strömungszustände auf allen Geraden parallel zur Gitterfront periodisch (Periode  $t$ ) ändern. Es soll zunächst der Zusammenhang zwischen den Zuständen  $\{V\}$  und  $\{H\}$  und den an den Platten angreifenden Kräften  $K$  bestimmt werden. Die Strömung wird vom Standpunkt



Figur 10

Kontrollfläche zur Anwendung der Integralsätze der Strömungslehre auf anisotrope Gitterströmungen.

des relativ zu den Platten ruhenden Beobachters betrachtet. In diesem Bezugssystem, dem Relativsystem, ist die Strömung stationär. Die Orientierung des rechtshändigen, kartesischen Koordinatensystems wird so gewählt, dass die  $x$ -Achse mit der im Strömungsfeld ausgezeichneten Richtung der Gitterfront zusammenfällt. In Komponentendarstellung lauten die Integralsätze, angewandt auf die in Figur 10 gezeichnete Kontrollfläche:

$$\varrho_H w_{x,H} w_{y,H} = \varrho_V w_{x,V} w_{y,V} - k_x p_A, \quad (3)$$

$$\dot{p}_H + \varrho_H w_{y,H}^2 = \dot{p}_V + \varrho_V w_{y,V}^2 - k_y p_A, \quad (\text{Impulssatz})^8 \quad (4)$$

<sup>8)</sup> M. LUDEWIG hat bei Anwendung der Integralsätze auf Überschallströmungen durch Streckengitter [8], S. 182, das Koordinatensystem so orientiert, dass eine Achse in Richtung der Strecken des Gitters fällt; in der Gleichung für die Impulskomponenten dieser Richtung tritt dann die Plattenkraft  $K$  nicht auf. Die Benützung der Gleichung für die orthogonalen Impulskomponenten, die  $K$  enthalten muss, wird dadurch umgangen, dass mit der Voraussetzung, das Gas trete in Schaufelrichtung aus dem Gitter aus, die Abströmrichtung  $\beta_H$  vorgegeben wird. Diese Voraussetzung ist jedoch auch bei als sehr lang angenommenen Schaufelkanälen unzulässig. Legt man nämlich die Kontrollfläche, wie es M. LUDEWIG tut, in den Schaufelkanal, so sind dort die Strömungszustände auf der Kontrollfläche keineswegs konstant; liegt die Kontrollfläche dagegen weit hinter dem Gitter, wo der Strömungszustand konstant ist, so stimmt die Strömungsrichtung dort nicht mit der Schaufelrichtung überein. Vermutlich werden die zum Teil widerspruchsvollen Ergebnisse von M. LUDEWIG – Strömungen mit negativen Verlusten und solche mit negativem Druck – durch die unzulässige Vorgabe der Abströmungsrichtung verursacht.

$$\varrho_H w_{y,H} = \varrho_V w_{y,V}, \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}) \quad (5)$$

$$\frac{p_H}{\varrho_H} + \frac{\kappa-1}{2\kappa} (w_{x,H}^2 + w_{y,H}^2) = \frac{p_V}{\varrho_V} + \frac{\kappa-1}{2\kappa} (w_{x,V}^2 + w_{y,V}^2), \quad (\text{Energiesatz}) \quad (6)$$

mit

$$k = \frac{1}{p_A} \cdot \frac{K}{l} \cdot \frac{l}{t} = \frac{1}{p_A l} \left( \int_i^j p_D dl - \int_i^j p_E dl \right) \frac{l}{t},$$

$$K_x = K \sin \beta_S, \quad K_y = K \cos \beta_S.$$

Es erweist sich als zweckmässig, in die Gleichungen (3) bis (6) die dimensionslosen Grössen  $M = w/c$ ,  $\Pi = p_H/p_V$ ,  $R = \varrho_H/\varrho_V$  mit Hilfe der Beziehung  $c^2 = \kappa p/\varrho$  einzuführen. Man erhält dann das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \Pi \kappa M_{x,H} M_{y,H} &= \kappa M_{x,V} M_{y,V} - k_x, \\ \Pi (1 - \kappa M_{x,H}^2) &= 1 - \kappa M_{x,V}^2 - k_y, \\ \Pi R M_{x,H}^2 &= M_{x,V}^2, \\ \frac{\Pi}{R} \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{2} (M_{x,H}^2 + M_{y,H}^2) \right] &= 1 + \frac{\kappa-1}{2} (M_{x,V}^2 + M_{y,V}^2). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Mit Hilfe dieses Gleichungssystems ist es möglich, bei Vorgabe der Gitterkonfiguration ( $t/l$  und  $\beta_S$ ) und des Strömungszustandes unmittelbar vor den Plattenspitzen  $\{M_x, M_y, p, \varrho\}_A$  die gesuchten Zustände  $\{M_x, M_y, p, \varrho\}_V$  und  $\{M_x, M_y, p, \varrho\}_H$  unendlich weit vor und hinter der Gitterfront zu berechnen.

Vernachlässigt man die Wellen höherer Ordnung, so kann die Plattenkraft  $K$  mit der Herzkurvenmethode unter Berücksichtigung der durch die Verdichtungsstösse verursachten Drosselung der Strömung einfach berechnet werden. Die Kraftberechnung ist für die Strömungstypen I und IV, bei denen die Umströmung der Platten im Gitterverband gleich der der Einzelplatte ist, besonders einfach. Numerische Angaben über die Beträge der an der Einzelplatte angreifenden Kraft in Abhängigkeit von der Mach-Zahl der Anströmung und dem Anstellwinkel werden in [6] von EL BADRAWY gemacht. Die zur Kraftberechnung notwendigen Drücke an der Plattenober- und -unterseite kann man auch dem gasdynamischen Tabellenwerk von KEENAN und KAYE [16] entnehmen. Bei hohen Genauigkeitsansprüchen muss man jedoch ausserdem noch die Wirkung der Wellen höherer Ordnung berücksichtigen, die durch ihre Reflexion an den Platten die Plattenkraft  $K$  geringfügig verändern. Bei den Strömungstypen II, S und den Komplextypen ist der Aufwand für die Berechnung der Plattenkraft grösser. Aus dem Wellenbild der Strömung (Figuren 3 und 4) muss der längs der Platte veränderliche Druck berechnet und daraus durch Integration die Kraft  $K$  bestimmt werden. Die Aufgabe wurde für ein Einzelbeispiel des Strömungstyps II von EL BADRAWY [6] numerisch gelöst.



Bei der Berechnung von Gitterströmungen der Typen I, II und S können die Grössen  $M_{x,V}$  und  $M_{y,V}$  auf der rechten Seite des Gleichungssystems (7) direkt durch die bekannten Grössen  $M_{x,A}$  und  $M_{y,A}$  ersetzt werden, da bei diesen Strömungen das Anströmgebiet störungsfrei ist. Beim Strömungstyp IV dagegen muss das Verfahren etwas geändert werden. Die Kontrollfläche wird durch die Verbindungslinie des Plattenendes mit der Spitze der benachbarten Platten in zwei Kontrollflächen geteilt (siehe Figur 10). Auf dieser Verbindungslinie ist – bei isentroper Strömung – der Strömungszustand gleich dem Anströmzustand  $\{A\}$ . Wendet man nun die Integralsätze auf diese beiden neuen Kontrollflächen an, so erhält man die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_V &\approx M_{x,V} M_{y,V} = \approx M_{x,A} \left[ M_{x,A} \frac{l_x}{t} + M_{y,A} \left( 1 - \frac{l_y}{t} \right) \right] + \left( 1 - \frac{p_B}{p_A} \right) \frac{l_x}{t}, \\ \Pi_V (1 + \approx M_{y,V}^2) &= 1 + \approx M_{y,A} \left[ M_{x,A} \frac{l_x}{t} + M_{y,A} \left( 1 - \frac{l_y}{t} \right) \right] - \left( 1 - \frac{p_B}{p_A} \right) \frac{l_y}{t}, \\ \Pi_V R_V M_{y,V}^2 &= \left[ M_{x,A} \frac{l_x}{t} + M_{y,A} \left( 1 - \frac{l_y}{t} \right) \right]^2, \\ \frac{\Pi_V}{R_V} \left[ 1 + \frac{\approx - 1}{2} (M_{x,V}^2 + M_{y,V}^2) \right] &= 1 + \frac{\approx - 1}{2} (M_{x,A}^2 + M_{y,A}^2), \\ \text{mit } \Pi_V = \frac{p_V}{p_A}, \quad R_V = \frac{\varrho_V}{\varrho_A} \quad \text{und} \quad l_x = -l \cos \beta_S, \quad l_y = l \sin \beta_S. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Der Strömungszustand in  $(H)$  ist mit dem in  $(A)$  durch ganz analoge Beziehungen verknüpft; diese erhält man, wenn man in dem Gleichungssystem den Index  $V$  durch den Index  $H$  und den Druck  $p_B$  durch  $p_D$  ersetzt. Dabei bedeutet  $p_B$  den Druck auf der Oberseite und  $p_D$  denjenigen auf der Unterseite der umströmten Platte; beide Drücke können aus den gegebenen Grössen  $M_{x,A}$  und  $M_{y,A}$  leicht ermittelt werden. — Bei anisentroper Strömung dagegen ist der Zustand auf der Verbindungslinie veränderlich (siehe Figur 8), und zwar ändert er sich vom Zustand  $\{C\}$  bzw.  $\{E\}$  – je nachdem, ob sich die Verbindungslinie im Gebiet  $C$  oder  $E$  befindet – auf den Zustand  $\{A\}$ . Zur Erfassung dieser Tatsache kann man in dem Gleichungssystem (8) die Grössen  $M_{x,A}$ ,  $M_{y,A}$ ,  $M_A$  durch die aus den Grössen  $M_{x,A}$  und  $M_{x,C}$  (bzw.  $M_{x,E}$ ),  $M_{y,A}$  und  $M_{y,C}$  (bzw.  $M_{y,E}$ ),  $M_A$  und  $M_C$  (bzw.  $M_E$ ) gebildeten Mittelwerte ersetzen. Dieser Näherungsansatz entspricht der Vorstellung, dass die MACHschen Wellen höherer Ordnung und die Trennungslinien, die die Verbindungslinie kreuzen, auf dieser gleichmässig dicht verteilt sind.

3.3 Bei Vorgabe der Gitterkenngrössen  $t/l$  und  $\beta_S$  und des Strömungszustandes unmittelbar vor den Plattenspitzen können damit die Zustände  $\{V\}$



und  $\{H\}$  für alle Strömungstypen mit Hilfe des Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned} \Pi \kappa M_x M_y &= A, \quad \Pi (1 + \kappa M_y^2) = B, \quad \Pi R M_y^2 = C, \\ \frac{\Pi}{R} \left[ 1 - \frac{\kappa - 1}{2} (M_x^2 + M_y^2) \right] &= D \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

bestimmt werden.

Die Konstanten  $A, B, C, D$  werden je nach dem Typ, dem die Strömung angehört, auf verschiedene Art berechnet. Sie sind nur von den An- und Abströmzuständen an der Plattenspitze bzw. am Plattenende und von der Plattenkraft  $K$  abhängig.

Eliminiert man aus dem Gleichungssystem die Unbekannten  $M_x, \Pi$  und  $R$ , so erhält man für  $M_y^2$  eine quadratische Gleichung mit den Lösungen

$$\left. \begin{aligned} (M_y^2)_{1,2} &= \frac{(1 - 2\kappa E) \pm \sqrt{1 - 2(\kappa + 1)E}}{2\kappa^2 E - (\kappa - 1)} \\ \text{mit } E &= \frac{1}{B^2} \left[ C D - \frac{\kappa - 1}{2} \left( \frac{A}{\kappa} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$(M_y^2)_1$  ist nur im Bereich

$$\frac{\kappa - 1}{2\kappa^2} < E \leq \frac{1}{2(\kappa + 1)},$$

$(M_y^2)_2$  im Bereich

$$0 \leq E \leq \frac{1}{2(\kappa + 1)}$$

positiv reell. Für

$$E = \frac{1}{2(\kappa - 1)}$$

ist  $(M_y^2)_1 = (M_y^2)_2 = 1$ .

Ist  $M_y^2$  bestimmt, so können auch die drei weiteren Unbekannten  $M_x, \Pi$  und  $R$  berechnet werden; es ist:

$$M_x^2 = \frac{(A/\kappa)^2}{B^2 E} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_y^2 \right), \quad (11)$$

$$\Pi = \frac{B}{1 + \kappa M_y^2}, \quad (12)$$

$$R = \frac{C}{B} \cdot \frac{1 + \kappa M_y^2}{M_y^2}. \quad (13)$$

Damit ist der gesuchte Zustand  $\{V\}$  (bzw.  $\{H\}$ ) bestimmt. Weitere diesen Zustand kennzeichnende Größen können mit den gefundenen Werten für  $M_x, M_y, R, \Pi$  berechnet werden. Das Temperaturverhältnis  $\tau_{V,H} = (T/T_A)_{V,H}$

und das Drosselverhältnis  $D_{I',H} = (p_0/p_{0,A})_{I',H}$  erhält man aus den Beziehungen:

$$\tau = \frac{\Pi}{R}, \quad (14)$$

$$D = \Pi \left( \frac{R}{\Pi} \right)^{\kappa/(\kappa-1)}. \quad (15)$$

Ferner interessiert noch die Richtungsänderung der Strömung

$$(\Delta\beta)_{V,H} = \beta_{V,H} - \beta_A,$$

die man aus

$$(\operatorname{tg} \beta)_{V,H} = \left( \frac{M_y}{M_x} \right)_{V,H} \quad (16)$$

erhält.

3.4 Die physikalische Bedeutung der Tatsache, dass das Gleichungssystem zwei mathematisch gleichberechtigte Lösungen und damit zwei Resultate für den gesuchten Strömungszustand liefert, erkennt man, wenn man aus den Beziehungen  $(M_y^2)_1 = f_1(E)$  und  $(M_y^2)_2 = f_2(E)$  die Grösse  $E$  eliminiert; man erhält dann die Beziehung

$$(M_y^2)_2 = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} (M_y^2)_1}{\kappa (M_y^2)_1 - \frac{\kappa-1}{2}}. \quad (17)$$

Dies ist aber der gleiche Zusammenhang, der bei einem schrägen Verdichtungsstoss zwischen den zur Stossfront normalen Komponenten der Machschen Vektoren  $\vec{M}_1 = w_1/c_1$  und  $\vec{M}_2 = w_2/c_2$  vor und nach dem Stoss besteht. Die beiden Lösungen des Gleichungssystems gehen also auseinander hervor, wenn man zwischen die erste und zweite Lösung einen zur  $x$ -Achse normalen, also zur Gitterfront parallelen Verdichtungsstoss einschaltet<sup>9)</sup>. Diese Möglichkeit ist jedoch auf den Bereich

$$\frac{\kappa-1}{2\kappa^2} < E \leq \frac{1}{2(\kappa+1)}$$

beschränkt, in dem beide Werte für  $M_y^2$  positiv reell sind.

Welche dieser beiden Lösungen stimmt nun mit der Lösung der Herzkurvenmethode überein? Die Antwort ergibt sich aus der Tatsache, dass bei Gitterströmungen mit axialer Überschallgeschwindigkeit «Staustösse» nur weit hinter der Gitterfront und bei Strömungen mit axialer Unterschallgeschwindigkeit nur weit vor dieser auftreten können. Berücksichtigt man ferner, dass Verdünnungsstösse physikalisch nicht realisierbar sind, so folgt das Ergebnis: die sich aus der Konstruktion des Wellenbildes ergebende Lösung stimmt bei Strömungen mit  $M_y > 1$  mit der ersten, bei solchen mit  $M_y < 1$  mit der zweiten Lösung der quadratischen Gleichung für  $M_y^2$  überein.

<sup>9)</sup> Dieses Ergebnis wurde auch von M. LUDWIG [8] gewonnen.

#### 4. Berechnung der Kennfeldgrößen der anisentropen Gitterdurchströmung

4.1 Das Kennfeld einer Strömungsmaschine dient zur Beurteilung ihres Verhaltens im gesamten Arbeitsbereich. Die Kennfeldkoordinaten sind der Durchsatz  $I'$  und das Verdichtungsverhältnis  $D' = (p_{0,H}/p_{0,I})'$  bzw. die adiabatische Förderhöhe  $H_{ad}$  der Strömung; in diesem Koordinatensystem werden Kurven konstanter Umfangsgeschwindigkeit  $u$  des Laufrads und Kurven konstanten adiabatischen Wirkungsgrads  $\eta_{ad}$  eingezeichnet. Für die kompressible, anisentrope Gitterströmung verwendet man zweckmässig die von H. KÜHL [17] angegebenen dimensionslosen Kenngrößen, da dann das Kennfeld auch beim Auftreten von Verdichtungsstößen unabhängig von der Eintrittstemperatur ist.

Das Verdichtungsverhältnis  $D'$  ist mit der adiabatischen Förderhöhe  $H_{ad}$  durch die Beziehung:

$$\frac{H_{ad}}{\kappa R T_V} = \frac{1}{(\kappa - 1) \frac{T_V}{T_{0,V}}} [(D')^{(\kappa-1)/\kappa} - 1] \quad (R = \text{Gaskonstante}) \quad (18)$$

verknüpft.

Unter dem adiabatischen Wirkungsgrad eines Verdichters versteht man das Verhältnis der adiabatischen Förderhöhe zur tatsächlich erforderlichen Verdichtungsarbeit  $H$  für das gleiche Verdichtungsverhältnis  $D'$  und den gleichen Durchsatz:

$$\eta_{ad} = \frac{H_{ad}}{H} = \frac{(D')^{(\kappa-1)/\kappa} - 1}{(D'/D)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1} = \frac{D^{(\kappa-1)/\kappa} \tau'_0 - 1}{\tau'_0 - 1} \quad (D' > 1). \quad (19)$$

Sinngemäß wird der adiabatische Wirkungsgrad einer Turbine definiert:

$$\eta_{ad} = \frac{H}{H_{ad}} = \frac{1 - \tau'_0}{1 - D^{(\kappa-1)/\kappa} \tau'_0} \quad (D' < 1). \quad (20)$$

Die dimensionslose Kenngrösse des Durchsatzes bei der ebenen Gitterströmung ist:

$$v = \frac{V_V}{b t c_V} = M_{y,V} \quad \text{mit} \quad V_V = w_{y,V} b t \quad (b = \text{Plattenbreite}). \quad (21)$$

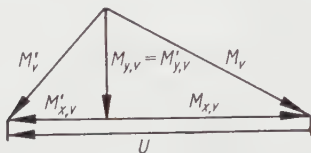
Die Umfangsgeschwindigkeit  $u$  wird auf die Schallgeschwindigkeit  $c_V$  bezogen:

$$U = \frac{u}{c_V}. \quad (22)$$

4.2 Zur Berechnung der Kennfeldgrößen  $D'$  und  $\eta_{ad}$  ist es notwendig, vom Relativsystem  $(x, y)$  zum Absolutsystem  $(x', y')$ , in welchem sich die Platten des Gitters in  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $u$  bewegen, überzugehen.

Dieser Übergang wird durch die Transformation beschrieben (Figur 11):

$$\left. \begin{aligned} M'_{x,V} &= M_{x,V} + U, & M'_{x,H} &= M_{x,H} + \frac{U}{\sqrt{\tau}}, & M'_{y,V} &= M_{y,V}, \\ M'_{y,H} &= M_{y,H} & \text{mit} & \frac{U}{\sqrt{\tau}} = U \sqrt{\frac{T_V}{T_H}} = \frac{u}{c_H}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$



Figur 11

Zum Übergang vom Relativ- $(x, y)$ - zum Absolut- $(x', y')$ -Koordinatensystem der Gitterströmung.

Mit diesen Transformationsgleichungen erhält man für das Ruhetemperaturverhältnis im  $(x', y')$ -System:

$$\tau'_0 \equiv \frac{T'_{0,H}}{T'_{0,V}} = \frac{T_H}{T_V} \cdot \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_H^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_V^2} = 1 - 2 \frac{(M_{x,V} - \sqrt{\tau} M_{x,H}) U}{\frac{2}{\kappa - 1} + M_V^2 + U^2 + 2 M_{x,V} U}, \quad (24)$$

oder mit Hilfe des Impulssatzes, Gleichungen (3) und (4):

$$\left. \begin{aligned} \tau'_0 &= 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{U}{v \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} v^2 + \frac{\kappa - 1}{2} (M_{x,V} + U)^2 \right]} k_x \phi_A \\ &\quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\phi_A} \cdot \frac{K}{l} \cdot \frac{l}{t}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

und für das gesuchte Verdichtungsverhältnis:

$$D' = D \cdot (\tau'_0)^{\kappa/(\kappa-1)}. \quad (26)$$

Demnach steigt das Verdichtungsverhältnis mit der Kraft  $K$ , die auf die Platten ausgeübt wird, und mit der Geschwindigkeit  $u$ , mit der sich die Platten in  $x$ -Richtung bewegen, wenn  $k_x$  und  $u$  verschiedenes Vorzeichen haben, also entgegengesetzt gerichtet sind; das Verdichtungsverhältnis sinkt mit steigendem Durchsatz  $V$ , mit wachsender Gitterteilung  $t/l$  und mit zunehmender Drosselung  $1/D$  der Strömung.

Die Frage nach dem extremen Verdichtungsverhältnis, das bei gegebener stationärer Strömung im  $(x, y)$ -System nur von der Plattengeschwindigkeit  $v$  abhängt, kann durch partielle Differentiation von Gleichung (24) nach  $U$  beant-

wortet werden. Es ergibt sich, dass

$$D'_{extr} = D \cdot (\tau'_{0,extr})^{\kappa/(\kappa-1)} \quad \text{mit} \quad \tau'_{0,extr} = 1 - \frac{1}{\kappa v (\pm \bar{U} + M_{x,V})} \tag{27}$$

für  $\bar{U}^2 = 2/(\kappa - 1) + M_{\mathcal{V}}^2 = U_{max}^2$  erreicht wird.

Für  $U = \pm \sqrt{\bar{U}^2}$  erhält man das maximale bzw. minimale Verdichtungsverhältnis.

Für die Gitterströmung ohne Vordrall ( $M'_{I,V} = M'_{A,V}, M'_{x,V} = 0$ ) erhält man für das Verdichtungsverhältnis:

$$D'_{ohne\ Drall} = D \cdot (\tau'_{0,ohne\ Drall})^{\kappa/(\kappa-1)}$$

mit

$$\tau'_{0,ohne\ Drall} = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{U}{v \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot v^2 \right)} k_x p_A \tag{28}$$

**5. Ergebnisse von Kennfeldberechnungen**

Die angegebenen Beziehungen ermöglichen es, Kennfelder beliebig vorgegebener Streckengitter bei Überschalldurchströmung zu berechnen und damit die Gittergüte zu beurteilen. Ziel der Kennfeldbestimmung ist es einmal, Anhaltspunkte zur Auslegung von Axialkompressoren zu erhalten; zum andern sollen die Ergebnisse zur Klärung der Frage nach den Übergangsmöglichkeiten von Gitterströmungen mit axialer Unterschall- zu solchen mit axialer Überschallgeschwindigkeit beitragen. Die Darstellung der sehr umfangreichen numerischen Ergebnisse, die bisher gewonnen wurden, muss einer späteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben, da die Berechnungen noch nicht abgeschlossen sind. Einige wichtige Ergebnisse sollen jedoch bereits an dieser Stelle in qualitativer Form mitgeteilt werden.

Zunächst kann ganz allgemein festgestellt werden, dass die Berechnungsergebnisse mit den Resultaten einer qualitativen Betrachtung des Wellenbildes der Strömung harmonieren. Auch die erkannte Nichtexistenz der Strömung ohne Durchsatz wird durch die Rechnung bestätigt; sie liefert für die zu dieser Strömung gehörigen Zustandsgrößen weit vor und hinter dem Gitter wesentlich unbestimmte Werte.

Die Notwendigkeit, bei Überschallströmungen durch Gitter die Anisotropie des Strömungsfeldes berücksichtigen zu müssen, wird durch die Rechnung erhärtet; Vergleichsrechnungen mit dem «anisentropen» Verfahren und der «isentropen» Methode von E. STRAUSS zeigen unzulässig grosse Abweichungen. Dagegen ist eine Vereinfachung des «anisentropen» Verfahrens ohne grosse Genauigkeitseinbusse möglich. Bei diesem vereinfachten Verfahren wird der Zustand  $\{F\}$  am Plattenende dem Zustand  $\{A\}$  an der Plattenspitze gleichgesetzt. Dadurch entfällt der grosse Arbeitsaufwand, den die Berechnung des



Zustandes  $\{F\}$  mit Hilfe der Herzkurvenmethode beansprucht. Die Plattenkraft  $K$  jedoch muss mit Berücksichtigung der durch die Profilstöße verursachten Drosselung der Strömung bestimmt werden, wenn grobe Fehler vermieden werden sollen.

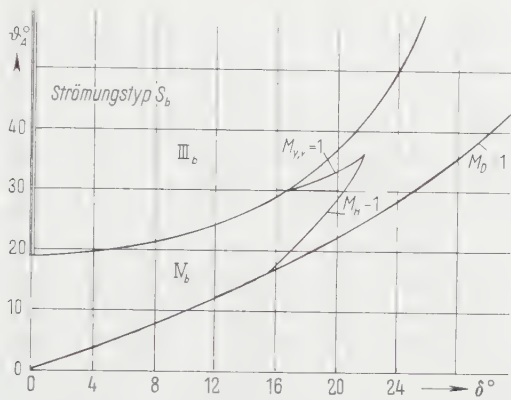
Beim Übergang zwischen den Strömungstypen I und II mit axialer Überschallgeschwindigkeit liefert die Berechnung einen stetigen Verlauf der den Zustand  $\{H\}$  kennzeichnenden Grösse. Wie erwartet ist dagegen ein stetiger direkter Übergang zwischen den Typen II und IV nicht möglich. Die Einschaltung von Komplextypen bei diesem Übergang wurde numerisch noch nicht untersucht.

Die praktischen Forderungen nach grossem Durchsatz  $I'$  und hohem Verdichtungsverhältnis  $D'$  bei gutem Wirkungsgrad  $\eta_{ad}$  werden am besten von den Gitterströmungen des Typs IV mit axialer Unterschallgeschwindigkeit erfüllt, und zwar um so besser, je mehr sich die Strömung der Grenzlage IV/III nähert, je weiter sie also von der Strömung ohne Durchsatz mit unendlich grosser Drosselung entfernt ist. Gitterströmungen mit axialer Überschallgeschwindigkeit sind im allgemeinen mit einer sehr starken Gesamtdrosselung verbunden, die das erzielbare Verdichtungsverhältnis stark beeinflusst. Beim Strömungstyp II wird  $D'$  weiterhin durch die Verminderung der Plattenkraft  $K$  infolge der Reflexion von Wellen und Stössen an den Nachbarplatten herabgesetzt.

Eine Steigerung des Verdichtungsverhältnisses  $D'$  kann durch Verkleinerung des Teilungsverhältnisses  $t/l$  und durch Vergrösserung der Plattenkraft  $K$  erzielt werden. Beiden Massnahmen sind jedoch Grenzen gesetzt. Eine Verkleinerung von  $t/l$  engt den Bereich des Strömungstyps IV in der  $(\delta, \vartheta_A)$ -Ebene zugunsten des Typs II stark ein. Eine Vergrösserung von  $K$  ist mit einem Absinken des Drosselverhältnisses  $D$  verbunden; dadurch wird ein unbegrenztes Ansteigen von  $D'$  mit wachsendem  $K$  verhindert.

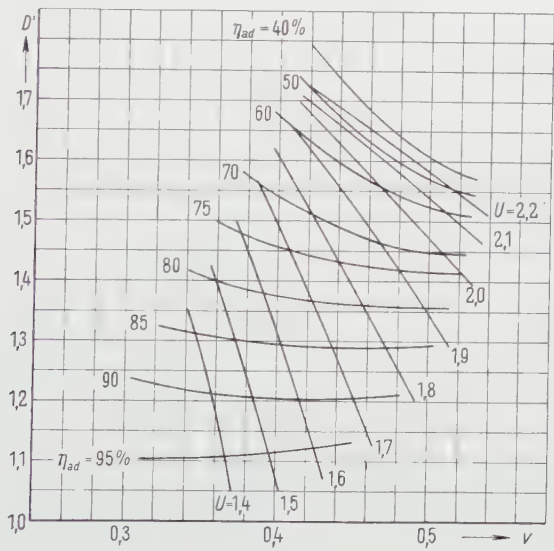
Ein besonders wichtiges, mit der Wellenbildbetrachtung nicht ohne weiteres vorhersehbares Ergebnis liefert die Rechnung hinsichtlich der Bereichseinteilung der Strömungstypen in der  $(\delta, \vartheta_A)$ -Ebene. Der durch die Grenzlinie  $M_D = 1$  und der Linie der Grenzlage IV/III begrenzte Bereich des Strömungstyps IV kann durch neu hinzukommende Grenzlinien  $M_H = 1$  und  $M_{y,v} = 1$  stark verkleinert werden (siehe Figur 12). Das Auftreten dieser Grenzlinien lässt sich nur aus der Anisentropie der Strömung erklären. Bei isentroper Strömung ist wegen des beschriebenen Abbaus der von den Platten ausgehenden Wellenfächer und Verdichtungsstöße stets  $M_A < M_{V,is} < M_B$  und  $M_D < M_{H,is} < M_F = M_A$ ; die Richtung der Machschen Linien weit vor bzw. weit hinter der Gitterfront können nur dem Wertevorrat der Linienrichtungen des Wellenfächers zwischen  $A$  und  $B$  bzw. zwischen  $D$  und  $F$  entstammen. Durch die Drosselung der Strömung wird diese Relation verschoben; bei festgehaltener Mach-Zahl  $M_A$  vor den Plattenspitzen muss  $M_{V,anis} > M_{V,is}$  und  $M_{H,anis} < M_{H,is}$  sein. Dadurch können bei starker Drosselung  $(M_{y,v})_{anis}$





Figur 12

Grenzlinien  $M_{y,r} = 1$  und  $M_H = 1$  im  $(\delta, \vartheta_4)$ -Bereich des Strömungstyps  $IV_b$  ( $\delta > 0^\circ$ ) anisentroper Gitterströmungen; Kenngrößen des Streckengitters:  $t/l = 5/3$ ,  $\beta_S = 165^\circ$ .



Figur 13

Kennfeld des Streckengitters mit den Kenngrößen:  $t/l = 5/3$ ,  $\beta_S = 165^\circ$  für anisentrope Gitterströmungen des Strömungstyps IV (axiale Unterschallgeschwindigkeit) mit positivem Anstellwinkel ( $\delta > 0^\circ$ ).

bereits vor Erreichen der Grenzlage IV/III und  $M_{H,anis}$  bereits dann gleich 1 werden, wenn  $M_D$  noch grösser als 1 ist. Ein Überschreiten der neuen Grenzlinien verletzt die Forderungen, die an die Existenz des Strömungstyps IV

gestellt werden müssen: Überschallgeschwindigkeit im gesamten Strömungsfeld ( $M > 1$ ) und überall axiale Unterschallgeschwindigkeit ( $M_y < 1$ ). Gitterströmungen des Typs IV sind daher nur in einem verhältnismässig kleinen Bereich der  $(\delta, \vartheta_A)$ -Ebene existent.

Für diesen Bereich sollen für ein Gitter mit dem Staffelwinkel  $\beta_s = 165^\circ$  und der Teilung  $t/l = 5/3$  die Ergebnisse der Kennfeldberechnung mitgeteilt werden (Figur 13); die angegebenen Werte gelten für Gitterströmungen ohne Vordrall ( $M'_{x,r} = 0$ ). Man kann dem Kennfeld entnehmen, dass die Erreichung eines hohen Verdichtungsverhältnisses immer mit einer Wirkungsgradverminderung verbunden ist. Dabei ist zu bedenken, dass der berechnete Wirkungsgrad noch durch den hier vernachlässigten Grenzschichtinfluss vermindert wird. Andererseits zeigt aber die Rechnung, dass Überschalldurchströmungen von Streckengittern auch bei Berücksichtigung des Wellenwiderstandes der einzelnen Schaufeln bei richtiger Auslegung wesentlich höhere Verdichtungsverhältnisse liefern können als vergleichbare einstufige Unterschallströmungen.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. WEISE, *Überschallaxialverdichter*, Bericht 171 der Lilienthalgesellschaft (1943), S. 92–107.
- [2] E. STRAUSS, *Die Zu- und Abströmverhältnisse bei Überschallströmungen durch Streckenprofilgitter*, unveröffentlichte Arbeit am Institut für Gasdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V. (1946).
- [3] A. BETZ, *Einfluss der Elastizität bei Gasen auf die Wirkung von Schaufelgittern*, Ing.-Archiv 16, 249–254 (1947/48).
- [4] J. ACKERET und N. ROTT, *Über die Strömung von Gasen durch ungestaffelte Profilvergitter*, Schweiz. Bauztg. 67, 40/41, 58–61 (1949).
- [5] A. KANTROWITZ, *The Supersonic Axial-Flow Compressor*, NACA-Report Nr. 974 (1950).
- [6] R. M. EL BADRAWY, *Ebene Plattengitter bei Überschallgeschwindigkeit*, Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH Zürich, Nr. 19 (1952).
- [7] H. SÖHNGEN, *Strömung vor einem Überschall-Laufrad*, Bericht Nr. 11 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V. (1955).
- [8] M. LUDEWIG, *Über das Verhalten kompressibler Medien bei der Strömung durch gerade Schaufelgitter*, Forsch. Ing.-Wes. 22, 181–191 (1956).
- [9] E. STRAUSS, *Schaufelgitter für Überschallgeschwindigkeit ohne Wellenwiderstand*, Bericht des Instituts für Gasdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V. (1943).
- [10] O. SCHIELE, *Bericht über die Strömungstagung in Zürich*, VDI-Ber. 3, 107–123 (1955).
- [11] A. BUSEMANN, *Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit*, Volta-Kongress (Rom 1935).
- [12] G. GUDERLEY, *Die Charakteristikenmethode für ebene und achsensymmetrische Überschallströmungen*, Jb. dtsh. Luftfahrtf. 1940.
- [13] R. COURANT und K. O. FRIEDRICH, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience Publishers, New York 1948).

- [14] K. BRIEDEN, *Anwendung der Herzkurvenmethode von A. Weise auf anisentrope Überschallströmungen, insbesondere die Umströmung der angestellten ebenen Platte*, Dissertation (Stuttgart 1955). Kurze Zusammenfassung: Z. angew. Math. Mech. 36, 297/298 (1956).
- [15] A. WEISE, *Die Herzkurvenmethode zur Behandlung von Verdichtungsstößen*, Festschrift der Lilienthalgesellschaft zum 70. Geburtstag von L. PRANDTL (1945).
- [16] J. H. KEENAN und I. KAYE, *Gas Tables* (I. Wiley and Sons, Inc., New York 1945).
- [17] H. KÜHL, *Ähnlichkeitsbetrachtungen an Kreiselverdichtern*, Forsch. Ing.-Wes. 13, 235-245 (1942).

### Summary

Using detailed investigations of anisentropic supersonic wave patterns in cascades of flat plates it is shown that four sharply distinguishable types of flow are possible in these flow configurations. The existence of these types is proved and possibilities of transition from one type to the other are mentioned. To determine the characteristic diagram of a given cascade configuration the Herzkurven method is employed for the computation of anisentropic supersonic flow regions and the fundamental equations of gas dynamics. Some numerical results are disclosed.

(Eingegangen: 12. September 1957.)

# Total-Head Measurements in Fluctuating Flows

By LAMBERTUS J. F. BROER and RITZO E. DE HAAN, Delft, Holland<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

Pressure measurement in a fluctuating flow and especially in a turbulent flow is an important problem; nearly all technical flows are turbulent to some extent.

It is not strange for this reason that this problem more than once attracted the attention of investigators, both theoretically and experimentally.

The investigation which will now be described is therefore perhaps only in so far a novelty that numerical results were obtained which could be checked with the results of the classical hot-wire method and that it showed a possibility of using a total-head tube with appropriate apparatus as a supplementary means of measuring turbulence.

The main problem is to determine as accurately as possible the pressure in the orifice of a small total head tube. Furthermore it remains to be investigated what the relation between this pressure and the flow characteristics actually is. In this paper a preliminary report on this work is given; a more extensive account of our results will be given elsewhere.

### *List of Symbols*

$c$	velocity of sound;
$d$	diameter total-head tube;
$l$	scale of turbulence;
$\Delta P_t$	turbulent stagnation pressure fluctuations;
$\Delta p_t$	turbulent pressure fluctuations;
$\Delta p_a$	acoustic pressure fluctuations;
$q$	resulting velocity;
$s$	coordinate along stream line;
$\Delta u_t$	turbulent velocity fluctuations in $x$ -direction;
$\Delta u_a$	acoustic velocity fluctuations;
$U$	mean velocity of flow not disturbed by total-head tube;
$ \bar{u} $	time-mean of absolute values of longitudinal velocity fluctuations;
$x$	coordinate in direction of mean flow;

<sup>1)</sup> Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica van de Technische Hogeschool te Delft (Mededeling no. 87).

$\lambda$	wave-length of sound;
$\rho$	density;
$\nu$	frequency of sound components;
$\omega$	frequency of turbulence components.

## 2. Fluctuating Flow

We consider a steady uniform flow with a speed  $U$  in the direction of the  $x$ -axis perturbed by small fluctuations. Only first-order effects are taken into account.  $U$  be small compared with the velocity of sound  $c$ . Viscosity be neglected.

The velocity perturbation can be split up into a turbulent part, which has a vector potential and an acoustic part, which has a scalar potential. It is well known that, in the approximation introduced here, the turbulence is steady with respect to the main flow. The turbulent pressure fluctuations are of the second order and can therefore be neglected. Thus

$$\Delta p_t = 0.$$

The fluctuations in total pressure are therefore

$$\Delta P_t = \Delta p_t + \frac{1}{2} \rho q^2 - \frac{1}{2} \rho U^2 = \rho U \Delta u_t. \quad (1)$$

The acoustic fluctuations on the other hand propagate with the velocity of sound  $c$  with respect to the main flow. They cause a first order pressure fluctuation:

$$\Delta p_a = \rho c \Delta u_a. \quad (2)$$

As  $c \gg U$  it is not necessary to consider the total pressure  $P$  separately for acoustic fluctuations.

It might be of interest to remark that a hot-wire anemometer at low subsonic speeds responds in the same way to  $\Delta u_t$  and  $\Delta u_a$ . Therefore in principle a combined measurement with hot-wire and pressure-probe would, according to (1) and (2), allow to separate both types of fluctuation.

We now consider a total-head tube of diameter  $d$ , directed in the direction of the main flow. At the upstream side there is a pressure hole, the forward stagnation point is in the centre of this hole. The average speed in the  $x$ -direction falls from  $U$  to zero over a distance of the order  $d$  (see Figure 1).

It can be shown that the pressure fluctuation in this hole in presence of turbulence fluctuations will be  $\Delta P_t$  according to (1) as long as

$$d \ll l \quad \text{or} \quad \frac{\omega d}{U} \ll 1, \quad (3)$$

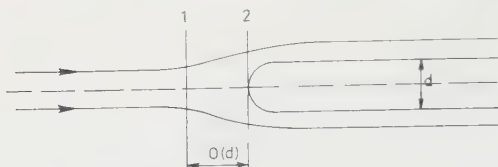


Figure 1

Flow round total-head tube.

where  $l$  is the scale of the turbulence,  $\omega$  its frequency. Therefore, when  $d$  is smaller than the microscale of the turbulent field, a determination of  $\Delta u_t$  without distortion is possible.  $\omega d U$  is the reduced frequency or Strouhal number.

In the case of acoustic fluctuations one finds in the same way that the pressure in the hole fluctuates according to (2) as long as

$$d \ll \lambda \quad \text{or} \quad \frac{\nu d}{c} \ll 1, \quad (4)$$

where  $\lambda$  is the wave length,  $\nu$  the frequency of the field of sound.

These results can be found by integrating EULER's equation along the central stream line, yielding:

$$\rho \int_1^2 \frac{\partial q}{\partial t} ds + p + \frac{1}{2} \rho q^2 = C. \quad (5)$$

Using this equation first for turbulent flow, we then have:

$$\Delta p_1 = 0, \quad q_1^2 = U^2 + 2 U \Delta u_t, \quad q_2 = 0 \quad (\text{stagnation point}).$$

The integral in (5) is of the order  $\omega \Delta u_t d$ .

Hence:  $\Delta p_2 = \rho U^2/2 + \rho U \Delta u_t + \rho O(\omega d \Delta u_t)$ , which leads to (3).

For the acoustic fluctuations we have:

$$\Delta p_1 = \rho c \Delta u_a, \quad q_1^2 = U^2 + 2 U \Delta u_a, \quad q_2 = 0$$

and

$$\int_1^2 \frac{\partial q}{\partial t} ds = 0 \quad (\nu \Delta u_a d)$$

which entails (4) as  $U \ll c$ .

### 3. Construction of a Dynamic Pressure-Probe

The entrance of a total-head tube in a fluctuating flow is a point of transition from aerodynamics to acoustics, mean velocity and convective accelerations in the tube being zero. The design of the apparatus is therefore purely a problem of acoustics.



The complete instrument consists of a system of tubing and a transducer. Its function is to convert a given pressure fluctuation  $\Delta p$  at the entrance of the tube linearly into a voltage fluctuation  $\Delta e$ . The response  $\Delta e / \Delta p$  must be independent of the frequency in a range of perhaps 5–1000 Hz.

For practical application a minimum length of the tube of 20 cm is wanted, and the diameter of the entrance-tube must not exceed 1 mm. The transducer must be coupled to a small membrane, this asks for a small membrane-chamber of about 10 mm diameter at the end of the tubing system.

The whole apparatus is to be considered as a coupled linear system consisting of acoustic, mechanic and electric elements with as many resonance-frequencies as it has degrees of freedom, in practice only the lowest frequencies are important.

The response of such a system as a function of frequency is sketched in Figure 2. It is well known that for frequencies below the first resonance the system is stiffness-controlled and then gives the desired flat characteristic.

Now it is feasible and even desirable to design the lowest resonance originating from the mechanic and electric components well above 1000 Hz but for the acoustic elements this is not possible:

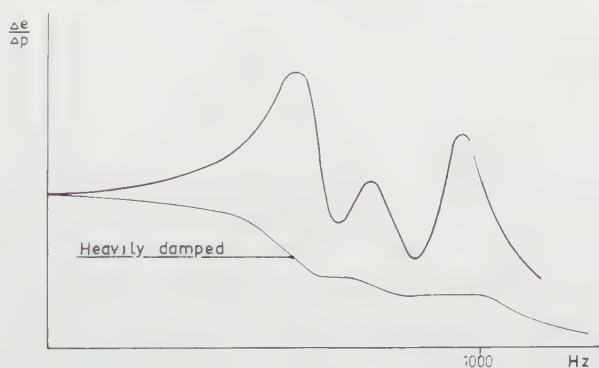


Figure 2  
Frequency-characteristics.

The first fundamental of an organpipe of constant cross-section, open at one end, closed at the other and with a length of 20 cm, is about 400 Hz and it is known that a system of the same length and consisting of elements of different cross-sections has always a lower first fundamental.

Therefore we resorted to damping away the lowest resonances by means of short resistive constrictions in the tubing. Of course this gives a loss in sensitivity but the response can now be smoothed to a more or less monotone characteristic (Figure 2). By using an electric RC-filter of inverse characteristic it is possible, within certain limits, to obtain an over-all response which is more or less 'flat'.

For the transducer many systems are possible. We used a piezo-electric crystal of Rochelle salt which is very sensitive and gives a relatively simple electric circuit. The drawbacks are: dependence on temperature and humidity, mediocre low-frequency response and nonlinear effects. With some care in design and handling, these effects can be held under control.

In respect to the over-all characteristic of the system we remark that theoretical computation is not practical; it is very cumbersome and gives no reliable results, e.g., because the damping effects of the constrictions are not accurately known.

The only practical way is therefore to perform only rough computations and to determine the real characteristics by experiment.

This asks for a dynamic pressure-generator in which a sinusoidal variation of pressure in a small chamber can be generated with a known and variable amplitude and with a frequency-range up to 1000 Hz or more.

This calibrating apparatus, the 'pistonphone', will be described in the next section.

#### 4. Pistonphone

The pistonphone (Figure 3) is extensively used in the field of acoustics for the absolute calibration of microphones of high input-impedance in the lower frequency range.

In its essentials a pistonphone consists of a rigid-walled chamber terminated on one side by the microphone, in our case the dynamic pressure-probe, and on the other side connected to a small cylinder. In this cylinder a piston moves to and fro with a sinusoidal motion and with variable and known amplitude.

If we assume adiabatic compression and expansion it is an elementary problem to compute the pressure fluctuations when the geometric dimensions are known.

Three corrections must be applied:

- (1) effective volume aequivalent to the finite entrance impedance of the probe;
- (2) heat transmission to the walls of the enclosure;
- (3) leakage between piston and cylinder.

The entrance impedance of the probe can approximately be computed. The result is that with the heavily damped systems used this influence is of the order of a few percent.

The heat transmission is only of some importance at the lowest frequencies and is well known in acoustics.

The leakage can always be measured by applying a small pressure to the chamber; with a small clearance and good lubrication of the piston the influence on the calibration is negligible.

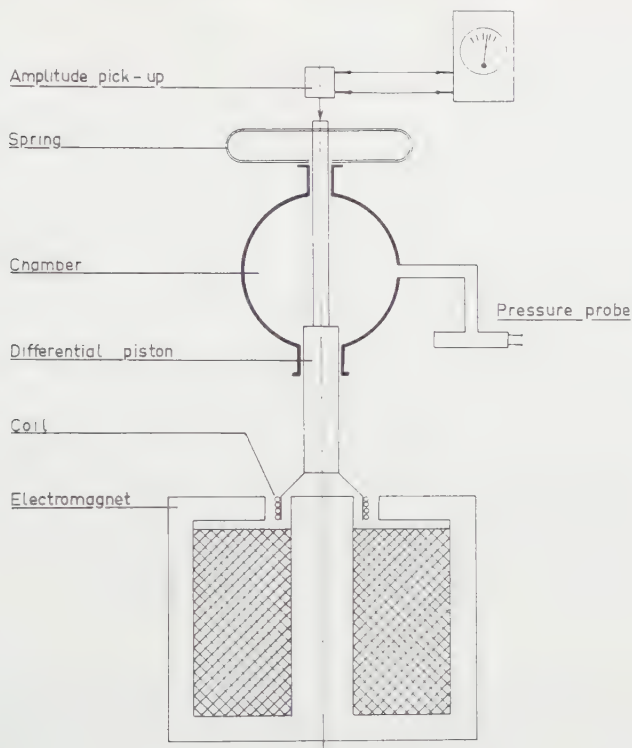


Figure 3  
Pistonphone.

The driving force is delivered by a coil in a radial magnetic field exactly as in a large electrodynamic loudspeaker. This coil is supplied with alternating current from a frequency oscillator by means of a special amplifier consisting of 12 parallel power tubes. In this way a current of 0,5 A can easily be maintained in the coil.

The power needed for feeding this amplifier and the electromagnet is supplied by the large 220 V storage battery of the laboratory.

For two reasons the piston is designed as a differential piston:

Firstly the upper end can then easily be brought into contact with a calibrated electrodynamic amplitude-pickup designed to measure amplitudes from  $1\ \mu$  to 1 mm.

Secondly it is possible to mount an interchangeable spring by means of which the system pistonmass-spring has a resonance frequency of about 500 Hz. This is the only practical way to get sufficient amplitudes at the higher frequencies combined with a good sinusoidal wave form.

### *Some Numerical Constants*

Volume of chamber  $15 \text{ cm}^3$ ;

area of piston  $1 \text{ cm}^2$ ;

pressure variations of 0,1–5 mm water are obtainable, depending on the frequency;

maximum frequency range is from 3 Hz to 1000 Hz.

### **5. Comparative Measurements of Turbulence by Hot-Wire and by Dynamic Pressure-Probe**

The intensity-decay curves of the longitudinal turbulence-component were measured by both methods behind 3 different grids:

Coarse: diameter rod 5 mm, width opening 25 mm (mesh);

medium: diameter rod 1,7 mm, width opening 12,5 mm;

fine: diameter rod 0,8 mm, width opening 5 mm;

and at speeds 10 m/s and 20 m/s in a windtunnel  $0,4 \times 0,4 \text{ m}$ . The decay curves are measured to a distance of 60 cm behind the grids, first behind the centre of a rod and later behind the centre of an opening.

#### *Pressure-Probe Set-Up (Figure 4)*

The total-head tube 0,8/0,6 mm was followed by a tube, total length 25 cm, with damping constrictions. The end of this tube was connected by a short rubber tube to the membrane chamber, this chamber being enclosed in a seismically suspended heavy iron casing.

The output of the piezo-electric crystal is fed to a cathode-follower with a high input impedance ( $5 \text{ M}\Omega$ ) in order to improve the low-frequency response. Behind the cathode-follower comes a low-pass filter with cut-off at 800 Hz and a simple RC-circuit to compensate the negative slope of the heavily damped pressure probe.

The last instrument is a linear vacuumtube mV-meter which yields the time-mean of the absolute instantaneous values. With the available apparatus it was not possible to measure the *rms*-values with a thermocouple meter.

The characteristic of the complete apparatus was determined by means of the pistonphone (Figure 5). The scatter of the points, as a consequence of normal temperature variations, amounted to a few percent. The linearity of output versus pressure-amplitude was fair.

#### *Hot-Wire Set-Up*

The standard instrument consisted of a hot-wire in a Wheatstone-bridge arrangement followed by a push-pull amplifier with RC-compensation to

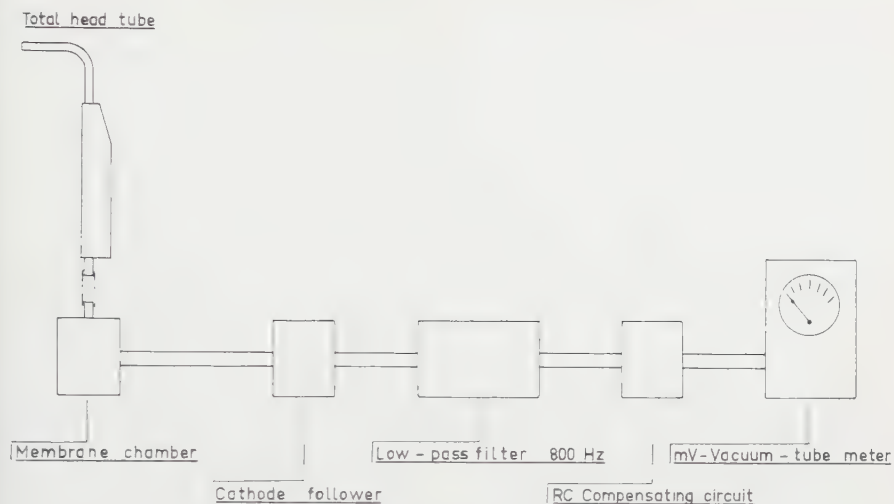


Figure 4  
Pressure-probe set-up.

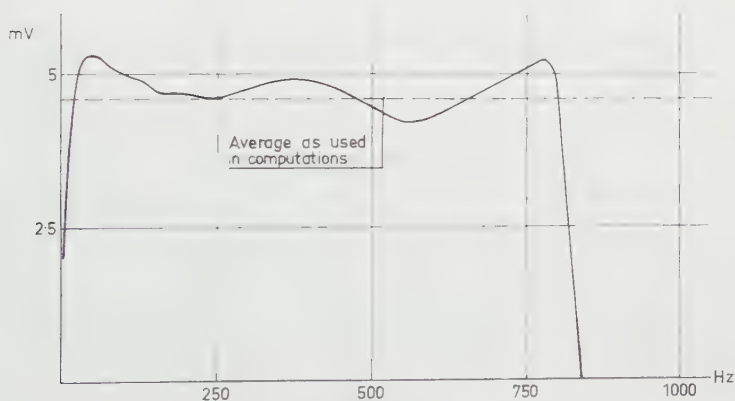


Figure 5

Over-all characteristic of pressure probe set-up as determined by pistonphone with  $|\Delta p| = 1$  mm water.

obtain a 'flat' over-all characteristic. Cut-off at 800 Hz by the same low-pass filter as used in the pressure-probe instrument.

Tungsten wires of a diameter of  $5\mu$  and a length of 0.8–1 mm were used. The length is equal to the diameter of the probe tube, this equality is important in order to exclude scale effects.

It was possible to use either a single hot-wire perpendicular to the flow or a cross-wire which gave among other things the opportunity of measuring the longitudinal component of the turbulence in two different ways.

The output of the set-up was measured by means of a thermocouple or by the same mV-meter as used in the pressure-probe set-up.

The readings of the mV-meter obtained by both methods were compared with each other.

The mean airspeed  $\bar{U}$ , needed for the numerical computations, was measured with a small Pitot tube, diameter 2 mm.

## 6. Numerical Results

Let  $|\bar{u}|$  and  $\tau_{|\bar{u}|} = |\bar{u}|/\bar{U}$  be the time-mean of the absolute instantaneous values of the longitudinal velocity fluctuations, and the ratio to  $\bar{U}$ , as read on the mV-meter, respectively.

The pressure fluctuations as measured are caused by turbulence and also, to a small extent, by the sound generated by the fan of the wind-tunnel. The latter has been taken into account as a correction to the final result by measuring the noise level in the tunnel without grids.

Furthermore there is some effect of noise and vibrations directly transmitted from the surrounding air and the tunnel-walls to the membrane. An estimation of these effects can be made by observing the meter-output with closed total-head tube.

The pressure fluctuations originating from turbulence can safely be put equal to  $\rho \bar{U} |\bar{u}|$  because condition (3) is well satisfied.

The corrected results are given in Figure 6. With the pressure-probe a great many measurements were made which showed good reproducibility and small scatter. For the sake of clearness all these points are not given separately, but are represented by a mean line. On the other hand the points as measured by both hot-wire methods are given separately. We remark that it was not possible to measure, with the hot-wire, closer to the grid than about 5 cm.

## 7. Discussion

The measurement of turbulence by the hot-wire has always been a difficult problem: the hot-wire is very vulnerable and the whole apparatus complicated and readily subjected to disturbances of many kinds. Reliable scientific measurements can only be made by skilled operators and under laboratory conditions.

Since for the calibration of the cross-wire we used a direct dynamic method which is quite different from the conventional method used for the single wire and because both methods yielded very nearly the same results, there is a good reason to believe that the hot-wire results are reliable.



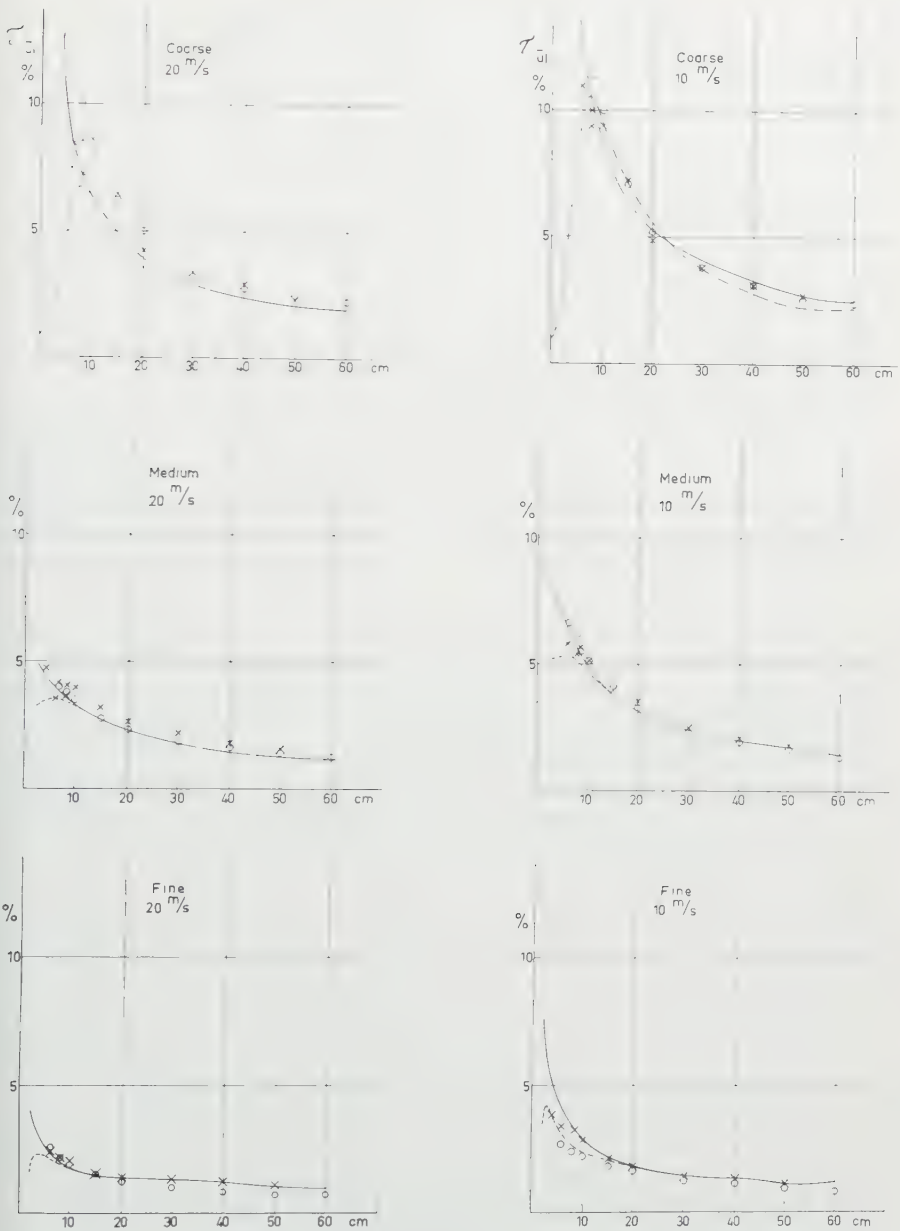


Figure 6

Intensity-decay curves behind grids.

○ Hot-wire, cross behind rod; × hot-wire, single behind rod; — pressure probe behind rod; - - - - pressure probe behind opening.

The agreement between the results obtained by hot-wire and by pressure probe is surprisingly good, better than could reasonably be expected in this preliminary investigation, and in our opinion there must be an element of coincidence in it. This will be clear if we are aware of the many approximations and corrections used and moreover of our lack of experience with the pressure-probe procedure.

In our opinion it is at the present not yet allowed to draw definite conclusions, but these first numerical results of turbulence-measurement by a dynamic pressure probe are promising.

In comparison with the results of the hot-wire the results of the pressure probe are less well-defined and must be interpreted with care. On the other hand the set-up of the latter is simpler, less vulnerable and needs no frequent recalibration.

The method suggested here seems to open up possibilities for turbulence-measurements on a technical scale. However much more detailed information needs to be collected by systematic experiments, not only with respect to the intensity but also with respect to parameters of turbulence such as integral scale, microscale and so on.

#### *Zusammenfassung*

Es ist eine Methode für die Messung eines schwankenden Staudruckes entwickelt worden. Das Gerät besteht aus Staurohr, Verbindungsrohr, piezo-elektrischem Druckaufnehmer und elektrischem Filter. Die aerodynamischen, mechanischen und elektrischen Eigenschaften des Systems werden besprochen und eine Eichmethode beschrieben.

Das ausgeführte Gerät besitzt eine nahezu geradlinige Eichkurve bis 800 Hz und eignet sich für die Turbulenzmessungen hinter verschiedenen Gittern. Die Ergebnisse stimmen befriedigend mit Hitzdrahtmessungen überein.

(Received: September 6, 1957.)

## Ein Charakteristikenverfahren für dreidimensionale instationäre Gasströmungen

Von GERHARD BRUHN und WOLFGANG HAACK, Berlin, Deutschland<sup>1)</sup>

In den Jahren seit 1945 wurde die *eindimensionale* instationäre Bewegung von Gasen sehr eingehend untersucht. Mathematisch handelt es sich dabei um Systeme von partiellen Differentialgleichungen in zwei unabhängigen Veränderlichen, der räumlichen Koordinate  $x$  und der Zeit  $t$ . Gesucht wurde die Lösung gewisser Anfangs-Randwertprobleme [4, 5, 9]<sup>2)</sup>.

Auch bei der mathematischen Behandlung stationärer Bewegungszustände von Gasen beschränken sich die Untersuchungen im wesentlichen auf solche Fälle, die sich auf zwei unabhängige Veränderliche zurückführen lassen [2, 3, 8, 10, 11].

Im folgenden wird gezeigt, dass sich die für zwei unabhängige Variable entwickelten Näherungsverfahren in gewissen Fällen auch auf die zwei- und dreidimensionale instationäre Bewegung von Gasen anwenden lassen. Es werden die Grundzüge eines Integrationsverfahrens zur Lösung des Anfangswertproblems angegeben, dabei können auch angemessene Randvorgaben berücksichtigt werden. Als Beispiel wird die beim Anlaufen einer Laval-Düse entstehende Strömung untersucht, und zwar einmal bei unstetigem Anfangsdruckgefälle und zum anderen bei stetigem Absaugvorgang.

Bei der Ableitung der erforderlichen Differentialgleichungen aus den vektoriellen Grundgleichungen wird in jedem Punkt der Strömung ein geeignetes invariables Bezugssystem benutzt<sup>3)</sup>. Dadurch treten die Zusammenhänge mit der Differentialgeometrie der Strömung klar zutage, was für das allgemeine Integrationsverfahren von Nutzen ist. Aus den sich ergebenden allgemeinen Differentialgleichungen können überdies die bekannten Spezialfälle für eindimensionale, zylinder- und kugelsymmetrische Strömungen usw. sofort durch einfache anschauliche Spezialisierungen gewonnen werden.

Die vorliegende Arbeit geht auf eine Charakteristikentheorie des zweiten Verfassers für zweidimensionale instationäre Strömungen zurück, über die er

<sup>1)</sup> Mathematisches Institut der Technischen Universität Berlin.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 190.

<sup>3)</sup> Während der Drucklegung erschien die Arbeit *Intrinsic Form of the Characteristic Relations in the Steady Supersonic Flow of a Compressible Fluid* von N. COBURN [Quart. appl. Math. **15**, 237–248 (1957)], in der für die stationäre Strömung eines Gases ähnliche Überlegungen angestellt werden. Für Flüssigkeiten hat S. S. BJUSGENS [Doklady. Akad. Nauk- Ser. **78**, 837–840; und **84**, 861–863 (1952) Russisch] in dieser Richtung gearbeitet.

1950 an der ETH Zürich und 1953 an der TH Stockholm vorgetragen hat. Die Erweiterung auf drei räumliche Dimensionen rührt vom ersten Verfasser her, der auch den grössten Teil des Manuskripts angefertigt hat. Ein erstes Beispiel, das wegen recht grober Interpolation nicht veröffentlicht werden soll, wurde von Herrn HEIDRICH in seiner Diplomarbeit (1956) durchgerechnet. Bei der Durchführung des vorliegenden Beispiels hat Herr GRÜNEWALD wertvolle Hilfe geleistet.

## 1. Die Grundgleichungen

Für die Strömung eines reibungsfreien idealen Gases konstanter spezifischer Wärme gelten unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen bekanntlich die Gleichungen<sup>4)</sup>

$$\text{Kontinuitätssatz:} \quad \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\text{Impulssatz:} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\varrho} \nabla p = \mathbf{R}, \quad (1.2)$$

$$\text{Energiesatz:} \quad \frac{dS}{dt} = 0. \quad (1.3)$$

Der Operator  $d/dt$  bedeutet Richtungsableitung in Richtung der Substanzlinien, das heisst

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

Zwischen den Grössen  $p$ ,  $\varrho$  und  $S$  besteht die Beziehung

$$\varrho = \varrho(p, S) = \varrho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa} e^{(S_0 - S)/c_p}, \quad (1.4)$$

wobei  $\varrho_0$ ,  $p_0$ ,  $S_0$  irgendein konstanter Bezugszustand ist. Neben  $p$ ,  $\varrho$  und  $S$  wird noch die Schallgeschwindigkeit

$$a = \left( \frac{\partial \varrho(p, S)}{\partial p} \right)^{-1/2} \quad (1.5)$$

benutzt.

Aus (1.3) folgt

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{dp}{dt},$$

damit geht die Kontinuitätsgleichung (1.1) über in

$$\frac{1}{\varrho a} \cdot \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.6)$$

<sup>4)</sup> Bezeichnungen:

$\mathbf{r}$  Ortsvektor;  $\mathbf{v}$  Vektor der Strömungsgeschwindigkeit;  $\mathbf{R}$  Vektor der äusseren Kraft pro Masseneinheit;  $p$  Druck;  $\varrho$  Massendichte;  $S$  Entropie pro Masseneinheit;  $t$  Zeit;  $c_p$  spezifische Wärme bei konstantem Druck;  $c_v$  spezifische Wärme bei konstantem Volumen;  $\kappa$  Verhältnis  $c_p/c_v$  der spezifischen Wärmen.

## 2. Einführung eines lokalen Bezugssystems

Zur invarianten Beschreibung der Strömung wird jedem Punkt  $r$  ein geeignetes Dreibein  $n_i = n_i(r, t)$  mit  $n_i \cdot n_k = \delta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) als lokales Bezugssystem zugeordnet. Der Vektor  $n_1$  möge die Richtung des Geschwindigkeitsvektors  $v$  haben,

$$n_1 \times v = 0, \quad (2.1)$$

derart, dass das Feld  $n_i(r, t)$  mit  $v$  stetig differenzierbar ist bis auf gewisse singuläre Punkte, in denen  $v = 0$  ist. Über die Vektoren  $n_2, n_3$ , die mit  $n_1$  ein Rechtssystem bilden sollen, wird später noch geeignet verfügt werden. Die Richtungsableitungen  $n_i \cdot \nabla$  bezeichnen wir durch einen fetten Index  $\mathbf{i}$ , also für

irgendeine Funktion  $\Phi$ :  $n_i \cdot \nabla \Phi = \Phi_{\mathbf{i}}$ . Ferner sei  $\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^3 K_i n_i$ .

Setzt man gemäss (2.1)

$$v = w n_1, \quad (2.2)$$

so gehen die Gleichungen (1.6) und (1.2) über in

$$\frac{1}{\varrho} a \cdot \frac{dp}{dt} + a w_1 + a w \nabla \cdot n_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$n_1 \cdot \frac{dw}{dt} + w \frac{dn_1}{dt} + \frac{1}{\varrho} \nabla p = \mathfrak{R}. \quad (2.4)$$

Um die vektorielle Gleichung (2.4) in drei skalare Gleichungen zu zerlegen, betrachten wir die Bahnkurve  $r = r(t)$  eines Teilchens<sup>5</sup>).  $n_1(r(t), t)$  ist ihr Tangentenvektor und  $ds_1 = w dt$  das Bogenelement. Die Ableitungsgleichungen des begleitenden Dreibeins  $n_1, n_2, n_3$  lauten

$$\frac{dn_i}{ds_1} = \frac{1}{w} \cdot \frac{dn_i}{dt} = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} n_k \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.5)$$

mit  $\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0$ . Damit kann die Gleichung (2.4) ersetzt werden durch die drei skalaren Gleichungen

$$\frac{dw}{dt} = K_1 - \frac{1}{\varrho} p_1, \quad (2.6)$$

$$w^2 \omega_{12} = K_2 - \frac{1}{\varrho} p_2, \quad (2.7)$$

$$w^2 \omega_{13} = K_3 - \frac{1}{\varrho} p_3. \quad (2.8)$$

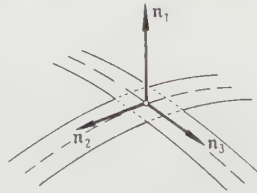
Diese Gleichungen lassen sich leicht kinematisch deuten. Auf das Teilchen wirkt die äussere Kraft  $\mathfrak{R}$  und die Druckkraft  $-\nabla p/\varrho$  (pro Masseneinheit). Gleichung

<sup>5</sup>) Die Bahnkurve eines Teilchens ist im instationären Fall wohl zu unterscheiden von einer momentanen Stromlinie.

(2.6) besagt dann, dass die Komponente der Resultierenden  $\mathfrak{R} = \nabla p/q$  in Richtung der Bahntangente  $\mathfrak{n}_1$  die Bahnbeschleunigung  $d\omega/dt$  bewirkt. Da  $\omega_{12}$  und  $\omega_{13}$  bekanntlich die Krümmungen der Bahn bezüglich der Normalenrichtungen  $\mathfrak{n}_2$  und  $\mathfrak{n}_3$  sind, lassen sich die Grössen  $-\omega^2 \omega_{1i}$  als Komponenten der Zentrifugalbeschleunigung deuten. Die Gleichungen (2.7) und (2.8) zeigen somit das Kräftegleichgewicht zwischen der Fliehkraft und der Normalkomponente der Kraft  $\mathfrak{R} = \nabla p/q$ . Wählt man speziell  $\mathfrak{n}_2$  als Hauptnormale  $\mathfrak{n}$  und  $\mathfrak{n}_3$  als Binormale  $\mathfrak{b}$  der Bahnkurve, so wird  $\omega_{13} = 0$  und man erhält das Ergebnis: *Die Kraft  $\mathfrak{R} = \nabla p/q$  liegt stets in der von  $\mathfrak{n}_1$  und  $\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}$  aufgespannten Schmiegebene der Bahnkurve.*

### 3. Geometrische Deutung der Invariante $\nabla \cdot \mathfrak{n}_1$

In der Kontinuitätsgleichung (2.3) tritt die Grösse  $\nabla \cdot \mathfrak{n}_1$  auf, die nur von der Geometrie des Feldes  $\mathfrak{n}_1$  abhängt. Besitzt das Feld  $\mathfrak{n}_1$  in einem Zeitpunkt  $t$  Orthogonalflächen, so ist nach einem bekannten Satz [6]  $\nabla \cdot \mathfrak{n}_1$  gleich der doppelten mittleren Krümmung der Orthogonalflächen des Feldes  $\mathfrak{n}_1$ . Im allgemeinen existieren aber keine Orthogonalflächen. Als Ersatz benutzen wir dann die Streifen längs der Integralkurven der Felder  $\mathfrak{n}_2$  und  $\mathfrak{n}_3$  mit  $\mathfrak{n}_1$  als Streifennormale.



Figur 1  
Lokales Dreibein und Streifen.

Der Operator  $\nabla$  besitzt bezüglich des normierten orthogonalen Dreibeins  $\mathfrak{n}_i$  die Zerlegung  $\nabla = \sum_{i=1}^3 \mathfrak{n}_i (\mathfrak{n}_i \cdot \nabla)$ . Wegen  $\mathfrak{n}_i \cdot \nabla \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_{1i}$  und  $\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_{11} = 0$  gilt daher

$$\nabla \cdot \mathfrak{n}_1 = \sum_{i=1}^3 \mathfrak{n}_i \cdot \mathfrak{n}_{1i} = \mathfrak{n}_2 \cdot \mathfrak{n}_{12} + \mathfrak{n}_3 \cdot \mathfrak{n}_{13} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}. \quad (3.1)$$

Dabei sind  $1/r_2 = \mathfrak{n}_2 \cdot \mathfrak{n}_{12}$  und  $1/r_3 = \mathfrak{n}_3 \cdot \mathfrak{n}_{13}$  die Normalkrümmungen der Streifen in dem betrachteten Punkt.  $\nabla \cdot \mathfrak{n}_1/2$  ist also gleich dem arithmetischen Mittel der Normalkrümmungen der orthogonalen Streifen.

### 4. Die natürlichen Gleichungen

Wählt man speziell  $\mathfrak{n}_2$  als Hauptnormale und  $\mathfrak{n}_3$  als Binormale der Bahnkurven, so wird  $\omega_{12} = 1/r_1$  gleich der Krümmung der Bahnkurven und  $\omega_{13} = 0$ .



Damit erhält man anstelle der Gleichungen (1.3), (2.3) und (2.6-8) das System

$$\frac{dS}{dt} = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{a} = -a w_1 - a w \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right), \tag{4.2}$$

$$\frac{dw}{dt} = K_1 - \frac{1}{\varrho} p_1, \tag{4.3}$$

$$\frac{w^2}{r_1} = K_2 - \frac{1}{\varrho} p_2, \tag{4.4}$$

$$0 = K_3 - \frac{1}{\varrho} p_3. \tag{4.5}$$

Diese fünf Gleichungen stellen Beziehungen zwischen den geometrischen und physikalischen Invarianten der Strömung dar. Sie werden deshalb die *natürlichen Gleichungen der Strömung* genannt. Dabei ist  $a$  nach (1.5) Funktion von  $p$  und  $S$ .

Die ersten drei Gleichungen beschreiben die zeitlichen Änderungen der Größen  $S$ ,  $p$  und  $w$  längs der Bahnkurven. Die vierte Gleichung liefert die Bahnkrümmung. Die letzte legt die Binormalenrichtung fest.

5. Einführung charakteristischer Richtungsableitungen

Wir wollen in Analogie zu dem Vorgehen bei eindimensionalen Strömungen durch Linearkombination der Gleichungen (4.2) und (4.3) neue Gleichungen erzeugen, in denen  $p$  und  $w$  jeweils derselben raumzeitlichen Richtungsableitung unterworfen werden.

Multipliziert man die Gleichung (4.3) mit  $\pm 1$  und addiert sie anschliessend zur Gleichung (4.2), so ergeben sich unter Verwendung der Abkürzungen

$$\Phi_\alpha = \frac{d\Phi}{dt} + a \Phi_1, \quad \Phi_\beta = \frac{d\Phi}{dt} - a \Phi_1$$

die zwei Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho} \frac{dp_\alpha}{a} + w_\alpha = -a w \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + K_1, \tag{5.1}$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{dp_\beta}{a} - w_\beta = -a w \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) - K_1. \tag{5.2}$$

Die entsprechenden Ableitungsrichtungen, die wir charakteristisch nennen wollen, sind im vierdimensionalen  $(\mathbf{r}, t)$ -Raum gegeben durch

$$\alpha: d\mathbf{r} = (w + a) \mathbf{n}_1 dt, \quad \beta: d\mathbf{r} = (w - a) \mathbf{n}_1 dt. \tag{5.3}$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen nennen wir *Hauptcharakteristiken*. Als Ergänzung der Gleichungen (5.1) und (5.2) zu einem vollständigen System hat man die Gleichungen (4.1), (4.4) und (4.5) hinzuzunehmen.

## 6. Die Reduktion der Anzahl der Differentiationsrichtungen<sup>6)</sup>

Um die Bedeutung der Differentiationsrichtungen (5.3) zu klären, schreiben wir die vier Grundgleichungen (2.3) und (2.6–8) als quasilineares System<sup>7)</sup> und untersuchen allgemein, welche Gleichungen sich durch Linearkombination gewinnen lassen, die weniger als vier Differentiationsrichtungen enthalten. Dazu drücken wir in den Gleichungen (2.3) und (2.6–8) den Vektor  $n_1$  durch skalare Funktionen aus.  $n_1$  lässt sich als Einheitsvektor im  $R_3$  durch Angabe zweier Parameter  $u, v$  festlegen, zum Beispiel durch Länge und Breite auf der Einheitskugel. Die Größen

$$\nabla \cdot n_1 = n_2 \cdot n_{12} + n_3 \cdot n_{13}, \quad w \omega_{12} = n_2 \cdot \frac{dn_1}{dt}, \quad w \omega_{13} = n_3 \cdot \frac{dn_1}{dt}$$

[vgl. (3.1) und (2.5)] lassen sich demnach durch Richtungsableitungen der Parameterfunktionen  $u$  und  $v$  darstellen. Mit den Abkürzungen

$$n_2 \cdot n_{1u} = A_u, \quad n_2 \cdot n_{1v} = A_v, \quad n_3 \cdot n_{1u} = B_u, \quad n_3 \cdot n_{1v} = B_v$$

gilt

$$\nabla \cdot n_1 = A_u u_2 + B_u u_3 + A_v v_2 + B_v v_3,$$

$$w \omega_{12} = A_u \frac{du}{dt} + A_v \frac{dv}{dt}, \quad w \omega_{13} = B_u \frac{du}{dt} + B_v \frac{dv}{dt}.$$

Damit erhält man das System

$$\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{a} \cdot \frac{dp}{dt} + a w_1 + a w (A_u u_2 + B_u u_3) + a w (A_v v_2 + B_v v_3) = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{\varrho} p_1 + \frac{dw}{dt} = K_1, \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{\varrho} p_2 + w A_u \frac{du}{dt} + w A_v \frac{dv}{dt} = K_2, \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{\varrho} p_3 + w B_u \frac{du}{dt} + w B_v \frac{dv}{dt} = K_3. \quad (6.4)$$

Wir multiplizieren diese vier Gleichungen der Reihe nach mit vier Funktionen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  und addieren. Dabei treten folgende Richtungsableitungen der

<sup>6)</sup> Beim ersten Lesen können die Abschnitte 6–8 übergangen werden.

<sup>7)</sup> Die Gleichung (1.3) kommt für die Linearkombination nicht in Frage, da sie allein eine Ableitung von  $S$  enthält.

Funktionen  $\phi, w, u, v$  auf:

$$\left. \begin{aligned} \phi: \quad & \lambda_1 \frac{d\Phi}{dt} + \lambda_2 a \Phi_1 + \lambda_3 a \Phi_2 + \lambda_4 a \Phi_3, \\ w: \quad & \lambda_2 \frac{d\Phi}{dt} + \lambda_1 a \Phi_1, \\ u: \quad & (\lambda_3 A_u + \lambda_4 B_u) \frac{d\Phi}{dt} + \lambda_1 a A_u \Phi_2 + \lambda_1 a B_u \Phi_3, \\ v: \quad & (\lambda_3 A_v + \lambda_4 B_v) \frac{d\Phi}{dt} + \lambda_1 a A_v \Phi_2 + \lambda_1 a B_v \Phi_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Die Bedingung für die lineare Abhängigkeit dieser vier Richtungsableitungen ist das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 a & \lambda_3 a & \lambda_4 a \\ \lambda_2 & \lambda_1 a & 0 & 0 \\ \lambda_3 A_u + \lambda_4 B_u & 0 & \lambda_1 a A_u & \lambda_1 a B_u \\ \lambda_3 A_v + \lambda_4 B_v & 0 & \lambda_1 a A_v & \lambda_1 a B_v \end{vmatrix} = 0.$$

Ausmultiplikation ergibt

$$a^3 (A_u B_v - A_v B_u) \lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2) = 0.$$

Da bis auf Ausnahmepunkte  $a^3 (A_u B_v - A_v B_u) \neq 0$  ist, folgen die beiden Gleichungen

$$\lambda_1 = 0 \quad (6.6)$$

oder

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2. \quad (6.7)$$

## 7. Das charakteristische Konoid

Der Fall  $\lambda_1 = 0$  führt auf beliebige Linearkombination der Gleichungen (6.2-4). Die dabei auftretenden Richtungsableitungen sind  $d/dt$  und eine beliebige Linearkombination der Ableitungen **1, 2, 3**. Die von diesen zwei Ableitungsrichtungen im vierdimensionalen  $(r, t)$ -Raum aufgespannten zweidimensionalen Unterräume umhüllen bei variablem  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  die Richtung der substantiellen Ableitung  $d/dt$ .

Als allgemeine Lösung der Gleichung (6.7) kann man mit willkürlichen Winkelgrößen  $\varphi$  und  $\psi$  ansetzen:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \cos \varphi, \quad \lambda_3 = \sin \varphi \cos \psi, \quad \lambda_4 = \sin \varphi \sin \psi. \quad (7.1)$$

Damit lassen sich die vier Richtungsableitungen (6.5) aus drei Richtungsab-

leitungen linear kombinieren. Wir benutzen dazu die Richtungsableitungen:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{|1} &= \frac{d\Phi}{dt} \cos \varphi + a \Phi_1, \\ \Phi_{|2} &= \frac{d\Phi}{dt} \sin \varphi \cos \psi + a \Phi_2, \\ \Phi_{|3} &= \frac{d\Phi}{dt} \sin \varphi \sin \psi + a \Phi_3. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Für jedes  $\varphi, \psi$  spannen die zugehörigen Differentiationsrichtungen einen dreidimensionalen Unterraum des vierdimensionalen  $(\mathbf{r}, t)$ -Raumes auf. Bei variablem  $\varphi$  und  $\psi$  umhüllen die entsprechenden Unterräume eine Hyperfläche. Ist deren Gleichung  $F(\mathbf{r}, t) = 0$ , so muss demnach gelten

$$F_{|1} = F_{|2} = F_{|3} = 0$$

oder

$$a F_1 = -\frac{dF}{dt} \cos \varphi, \quad a F_2 = -\frac{dF}{dt} \sin \varphi \cos \psi, \quad a F_3 = -\frac{dF}{dt} \sin \varphi \sin \psi.$$

Elimination von  $\varphi$  und  $\psi$  ergibt die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 - a^2 (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2) = 0. \quad (7.3)$$

Das ist die Differentialgleichung des sogenannten *charakteristischen Konoids*.

Schreibt man das totale Differential einer Funktion  $\Phi$  in der Form

$$d\Phi = \frac{d\Phi}{dt} dt + \sum_{i=1}^3 \Phi_i \alpha_i$$

mit Differentialformen  $\alpha_i$ , so ergibt sich durch Rändern der Determinante der Gleichung (7.3) für die Richtung  $dt: \alpha_1: \alpha_2: \alpha_3$  der Erzeugenden des charakteristischen Konoids, der Bicharakteristiken, die Beziehung

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & dt \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 & \alpha_3 \\ dt & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - a^2 dt^2 = 0, \quad (7.4)$$

es folgt, dass die erste der Ableitungen (6.5) bei Beachtung von (7.1) die Rich-

tung einer Bicharakteristik hat. Es gilt nämlich

$$dt: \alpha_1: \alpha_2: \alpha_3 = \lambda_1: a \lambda_2: a \lambda_3: a \lambda_4 = 1: a \cos \varphi: a \sin \varphi \cos \psi: a \sin \varphi \sin \psi.$$

Damit haben die Winkel  $\varphi, \psi$  am charakteristischen Konoid eine einfache geometrische Deutung gefunden.

### 8. Die charakteristischen Gleichungen

Die aus (6.1 +) durch Linearkombination mit den Grössen (7.1) entstehende Gleichung lautet

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho a} (\dot{p}_1 \cos \varphi + \dot{p}_2 \sin \varphi \cos \psi + \dot{p}_3 \sin \varphi \sin \psi) \\ + w_1 + a (A_u u_2 + B_u u_3) + a (A_v v_2 + B_v v_3) \\ = K_1 \cos \varphi + K_2 \sin \varphi \cos \psi + K_3 \sin \varphi \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Die physikalische Invariante  $p$  wird in dieser Gleichung in Richtung einer Bicharakteristik differenziert. Unter den Bicharakteristiken gibt es zwei ausgezeichnete, die wir *Hauptcharakteristiken* nennen wollen. In ihnen fallen die Differentiationsrichtungen der beiden physikalischen Invarianten  $p, w$  zusammen<sup>8)</sup>. Die Bedingung dafür ist offenbar nach (8.1)  $\sin \varphi = 0$  oder

$$\varphi = 0, \pi.$$

Wir setzen für  $\varphi = 0$

$$\Phi_1 = \frac{d\Phi}{dt} + a \Phi_1 = \Phi_\alpha$$

und für  $\varphi = \pi$

$$\Phi_{|1} = -\left(\frac{d\Phi}{dt} - a \Phi_1\right) = -\Phi_\beta.$$

Ersetzt man in (8.1) die Grössen  $u$  und  $v$  wieder durch die geometrischen Invarianten, so ergeben sich damit die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho a} \dot{p}_\alpha + w_\alpha &= -a w \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + K_1, \\ \frac{1}{\varrho a} \dot{p}_\beta - w_\beta &= -a w \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) - K_1. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Das sind die schon im Abschnitt 5 vorweggenommenen Gleichungen. Die Gleichungen (5.3) sind die Differentialgleichungen der Hauptcharakteristiken. Da die Gleichungen (8.2) durch alleinige Kombination der Gleichungen (6.1) und (6.2) entstanden sind, wird man im Falle  $\lambda_1 = 0$  auch  $\lambda_2 = 0$  setzen

<sup>8)</sup> Entsprechende Forderungen für die Ableitungen von  $u$  oder  $v$  sind offenbar sinnlos, da  $u$  und  $v$  keine Invarianten sind.

und entweder  $\lambda_3$  oder  $\lambda_4$  gleich 1 wählen, das heisst, man nimmt als weitere Gleichungen die Gleichungen (2.7) und (2.8) selbst. Hierzu kommt ferner noch die Energiegleichung (1.3) sowie die Beziehung (1.5) zwischen  $a$ ,  $p$  und  $S$ .

Zu bemerken ist noch, dass  $n_2$  und  $n_3$  noch nicht als Haupt- bzw. Binormale spezialisiert worden sind, um den quasilinearen Charakter des Systems (6.1–4) nicht zu zerstören. Für praktische Zwecke kann man nachträglich diese Spezialisierung vornehmen, wodurch die Gleichungen (4.4) und (4.5) an die Stelle der Gleichungen (2.7) und (2.8) treten.

Die im Abschnitt 5 vorweggenommenen Gleichungen (5.1–3) haben sich nunmehr in den Abschnitten 6–8 ganz zwangsläufig bei der Reduktion der Anzahl der Differentiationsrichtungen ergeben<sup>9)</sup>. Die Ableitungsrichtungen  $\alpha$ ,  $\beta$  sind durch die Invarianz der Hauptcharakteristiken gegenüber Transformationen der unabhängigen Variablen ausgezeichnet.

## 9. Grundzüge eines dreidimensionalen Charakteristikenverfahrens

Die Gestalt der Gleichungen (5.1) und (5.2) legt den Versuch nahe, allgemein ein dreidimensionales Charakteristikenverfahren zu entwickeln, welches die Lösung des Anfangswertproblems gestattet. Es wird der Zustand des Gases zur Zeit  $t - t_0$  als gegeben angesehen. Mittels der Gleichungen (5.1), (5.2), (4.1), (4.4) und (4.5) soll dann der Zustand zur Zeit  $t - t_0 + \Delta t$  berechnet werden.

Da es zur Darstellung einer räumlichen Strömung keine hinreichend einfachen graphischen Methoden gibt, muss das Verfahren im wesentlichen rein rechnerisch durchgeführt werden. Wegen des grossen Umfanges der Rechnung, die hauptsächlich aus Interpolationsarbeit besteht, kommen hierfür nur geeignete programmgesteuerte elektronische Rechenautomaten in Betracht.

Wir beschränken uns auf die Angabe der Grundzüge des Rechenverfahrens für einen Punkt der Strömung: Vorausgesetzt wird die Kenntnis der Werte von  $p$ ,  $w$ ,  $S$  und  $n_1$  zur Zeit  $t_0$  in einem hinreichend dichten Punktraster im Raum.

1. Bestimmung von Haupt- und Binormalenvektor  $n_2$ ,  $n_3$  und  $K_2 - p_2/\varrho$ . Zunächst bestimmt man den Vektor  $\mathfrak{R} - Vp/\varrho$  durch Differenzenrechnung. Dann ist

$$K_1 - \frac{1}{\varrho} p_1 = n_1 \cdot \left( \mathfrak{R} - \frac{1}{\varrho} Vp \right)$$

und wegen (4.5) gilt

$$\left( K_2 - \frac{1}{\varrho} p_2 \right) n_2 = \left( \mathfrak{R} - \frac{1}{\varrho} Vp \right) - \left( K_1 - \frac{1}{\varrho} p_1 \right) n_1.$$

<sup>9)</sup> Dies steht in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der allgemeinen Theorie mehrdimensionaler hyperbolischer Differentialgleichungen in [7] und [12].



Damit kann man die gesuchten Grössen berechnen:

$$n_2 = \frac{\left(\mathfrak{K} - \frac{1}{\varrho} \nabla p\right) - \left(K_1 - \frac{1}{\varrho} p_1\right) n_1}{\left|\left(\mathfrak{K} - \frac{1}{\varrho} \nabla p\right) - \left(K_1 - \frac{1}{\varrho} p_1\right) n_1\right|} ,$$

$$n_3 = n_1 \times n_2 ,$$

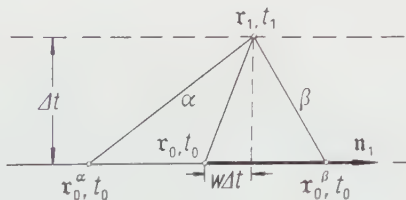
$$K_2 - \frac{1}{\varrho} p_2 = n_2 \cdot \left(\mathfrak{K} - \frac{1}{\varrho} \nabla p\right) .$$

2. Bestimmung der geometrischen Invarianten  $1/r_2 = 1/r_3$  durch Differenzenrechnung:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_3} = n_2 \cdot n_{12} = n_3 \cdot n_{13} .$$

3. Bestimmung der Ortsveränderung eines Teilchens: Ein Teilchen an der Stelle  $\mathbf{r}_0$  zur Zeit  $t_0$  befindet sich zur Zeit  $t_1 = t_0 + \Delta t$  an der Stelle  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + (w \mathbf{n}_1)_{m_1} \Delta t$ . Für  $(w \mathbf{n}_1)_{m_1}$  kann dabei in erster Näherung  $w \mathbf{n}_1$  an der Stelle  $(\mathbf{r}_0, t_0)$  eingesetzt werden.

4. Berechnung von  $p$  und  $w$  im Punkte  $(\mathbf{r}_1, t_1)$ : Die Hauptcharakteristiken  $\alpha, \beta$  durch den Punkt  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  mögen für  $t = t_0$  durch die Punkte  $\mathbf{r}_0^\alpha$  bzw.  $\mathbf{r}_0^\beta$  gehen.



Figur 2  
Zum Charakteristikenverfahren.

Dann kann man die Gleichungen (5.1) und (5.2) näherungsweise integrieren, es folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varrho a}\right)_{m_\alpha} (p(\mathbf{r}_1, t_1) - p(\mathbf{r}_0^\alpha, t_0)) + (w(\mathbf{r}_1, t_1) - w(\mathbf{r}_0^\alpha, t_0)) \\ = - \left(\frac{a w}{r_2} + \frac{a w}{r_3} - K_1\right)_{m_\alpha} \Delta t , \\ \left(\frac{1}{\varrho a}\right)_{m_\beta} (p(\mathbf{r}_1, t_1) - p(\mathbf{r}_0^\beta, t_0)) - (w(\mathbf{r}_1, t_1) - w(\mathbf{r}_0^\beta, t_0)) \\ = - \left(\frac{a w}{r_2} + \frac{a w}{r_3} + K_1\right)_{m_\beta} \Delta t . \end{aligned}$$

Hierin ist wegen  $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}_0 + w \mathbf{n}_1 \Delta t$  nach (5.3)

$$\mathbf{r}_0^\alpha \approx \mathbf{r}_0 - a \mathbf{n}_1 \Delta t, \quad \mathbf{r}_0^\beta \approx \mathbf{r}_0 + a \mathbf{n}_1 \Delta t,$$

und für die durch die Indizes  $m_\alpha$  bzw.  $m_\beta$  gekennzeichneten Mittelwerte längs der Hauptcharakteristiken setzt man näherungsweise deren Werte an den Stellen  $(\mathbf{r}_0^\alpha, t_0)$ ,  $(\mathbf{r}_0^\beta, t_0)$  ein. Zur Bestimmung der Werte  $p(\mathbf{r}_1, t_1)$  und  $w(\mathbf{r}_1, t_1)$  hat man dann in den obigen Gleichungen ein lineares System.

5. Berechnung von  $S(\mathbf{r}_1, t_1)$ :

Nach (4.1) gilt  $S(\mathbf{r}_1, t_1) = S(\mathbf{r}_0, t_0)$ .

6. Bestimmung von  $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_0, t_1)$ :

Es ist

$$\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_1, t_1) = \mathbf{n}_1(\mathbf{r}_0, t_0) + \left( \frac{d\mathbf{n}_1}{dt} \right)_m \Delta t.$$

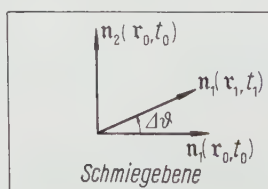
Dieser Vektor liegt näherungsweise in der von  $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_0, t_0)$  und dem Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}_2(\mathbf{r}_0, t_0)$  aufgespannten Schmiegeebene der Bahnkurve im Punkte  $(\mathbf{r}_0, t_0)$ . Der Winkel zwischen  $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_0, t_0)$  und  $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_1, t_1)$  ist daher nach (2.5) und (2.7) gegeben durch

$$\Delta\vartheta = \left( \mathbf{n}_2 \cdot \frac{d\mathbf{n}_1}{dt} \right)_m \Delta t = \frac{1}{w_m} \left( K_2 - \frac{1}{\varrho} p_2 \right)_m \Delta t.$$

Dabei setzt man vor allem bei kleinen Geschwindigkeiten für den Mittelwert  $w_m$

$$w_m = \frac{1}{2} (w(\mathbf{r}_0, t_0) + w(\mathbf{r}_1, t_1))$$

und für  $(K_2 - p_2/\varrho)_m$  in erster Näherung den Wert an der Stelle  $\mathbf{r}_0, t_0$ , wofür man am besten einen Mittelwert über das gesamte Einflussgebiet des Punktes  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  (das ist eine dreidimensionale Kugel um den Punkt  $\mathbf{r}_0$  mit dem Radius  $a \Delta t$ ) benutzt.



Figur 3

Die Drehung des Vektors  $\mathbf{n}_1$  in der Schmiegeebene.

Damit ist der Zustand in Punkt  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  vollständig bekannt. Das Verfahren kann durch Verkleinerung der Schrittweite  $\Delta t$  oder noch wirksamer durch Iteration verbessert werden.

Mit dem beschriebenen Verfahren können auch Randbedingungen befriedigt werden. Soll das Gas zum Beispiel an einer festen Wand entlangströmen, so wählt man zweckmässigerweise in den Randpunkten  $\mathbf{n}_2$  als Flächennormale der Wand. Die Gleichung (2.7) liefert dann nach Punkt 6 die Drehung des Vektors  $\mathbf{n}_1$  in der Tangentialebene. Die Gleichung (2.8), die die Drehung des Vektors  $\mathbf{n}_1$  aus der Tangentialebene heraus beschreibt, wird dagegen ersetzt durch die Randbedingung, dass der Vektor  $\mathbf{n}_1$  stets in der Tangentialebene der Wandfläche liegen muss. Bei bewegten Wänden kann man ähnlich vorgehen.

## 10. Zweidimensionales Charakteristikenverfahren

Bei Beschränkung auf zweidimensionale Strömungen wird das Charakteristikenverfahren in einfachen Fällen auch ohne elektronische Rechenautomaten durchführbar, da einerseits die Anzahl von Gitterpunkten geringer ist, andererseits die Strömung jetzt zu jeder Zeit  $t$  in der Ebene durch das Stromlinienbild graphisch dargestellt werden kann. Grosse Mühe bereiten jedoch nach wie vor die erforderlichen Interpolationen.

Wir wollen die Bedeutung der einzelnen Strömungsgrössen im zweidimensionalen Fall untersuchen. Der Binormalenvektor  $\mathbf{n}_3$  wird konstant und steht senkrecht auf der Strömungsebene. Daher entfällt im Rechenverfahren Punkt 1. Wegen

$$\frac{1}{r_3} = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_{13} = -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_{33}$$

verschwindet die Normalkrümmung  $1/r_3$ , und  $1/r_2$  wird zur Krümmung der Orthogonaltrajektorien des Feldes  $\mathbf{n}_1$ . Da die Schmiegebenen der Bahnkurven mit der Strömungsebene zusammenfallen, werden die Winkeländerungen  $\theta$  des Vektors  $\mathbf{n}_1$  integrabel<sup>10)</sup>.  $\theta$  kann als Winkel zwischen  $\mathbf{n}_1$  und einer festen Richtung in der Strömungsebene angesehen werden. Die Ableitung **2** ist jetzt Ableitung in Richtung der Orthogonaltrajektorien der Stromlinien.

Die Differentialgleichungen der zweidimensionalen Strömung lauten in charakteristischer Form

$$\frac{1}{\varrho} \frac{1}{a} \dot{p}_\alpha + w_\alpha = -\frac{a}{r_2} \frac{w}{r_2} + K_1, \quad (10.1)$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{1}{a} \dot{p}_\beta - w_\beta = -\frac{a}{r_2} \frac{w}{r_2} - K_1, \quad (10.2)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (10.3)$$

$$w \frac{d\theta}{dt} = K_2 - \frac{1}{\varrho} \dot{p}_2. \quad (10.4)$$

<sup>10)</sup> Das heisst  $\mathbf{n}_2 \cdot d\mathbf{n}_1$  ist ein vollständiges Differential.

Die Gleichungen (10.1-3) stimmen formal mit den Gleichungen einer zylindersymmetrischen Strömung mit dem Abstand  $r_2$  vom Zentrum überein. Hinzu kommt die Gleichung (10.4), die beschreibt, wie die Strömung auf Kräfte durch Drehung der Bahntangente reagiert und insbesondere auftretende Druckgefälle auszugleichen sucht.

### 11. Beispiele einer ebenen instationären Strömung

Wir betrachten als Beispiel die Anlaufströmung durch eine Laval-Düse bei Vernachlässigung äusserer Kräfte ( $R=0$ ). An die Düse schliesst sich ein Kanal mit parallelen Wänden an, von dieser jedoch für  $t < 0$  durch eine Wand getrennt, die zur Zeit  $t = 0$  plötzlich entfernt wird (Figur 4). Beiderseits der Wand befindet sich für  $t \leq 0$  Gas der gleichen Art ( $\kappa = 1,4$ ) mit

$$u_0 = 0, \quad S_0 = 0.$$



Figur 4  
Laval-Düse.

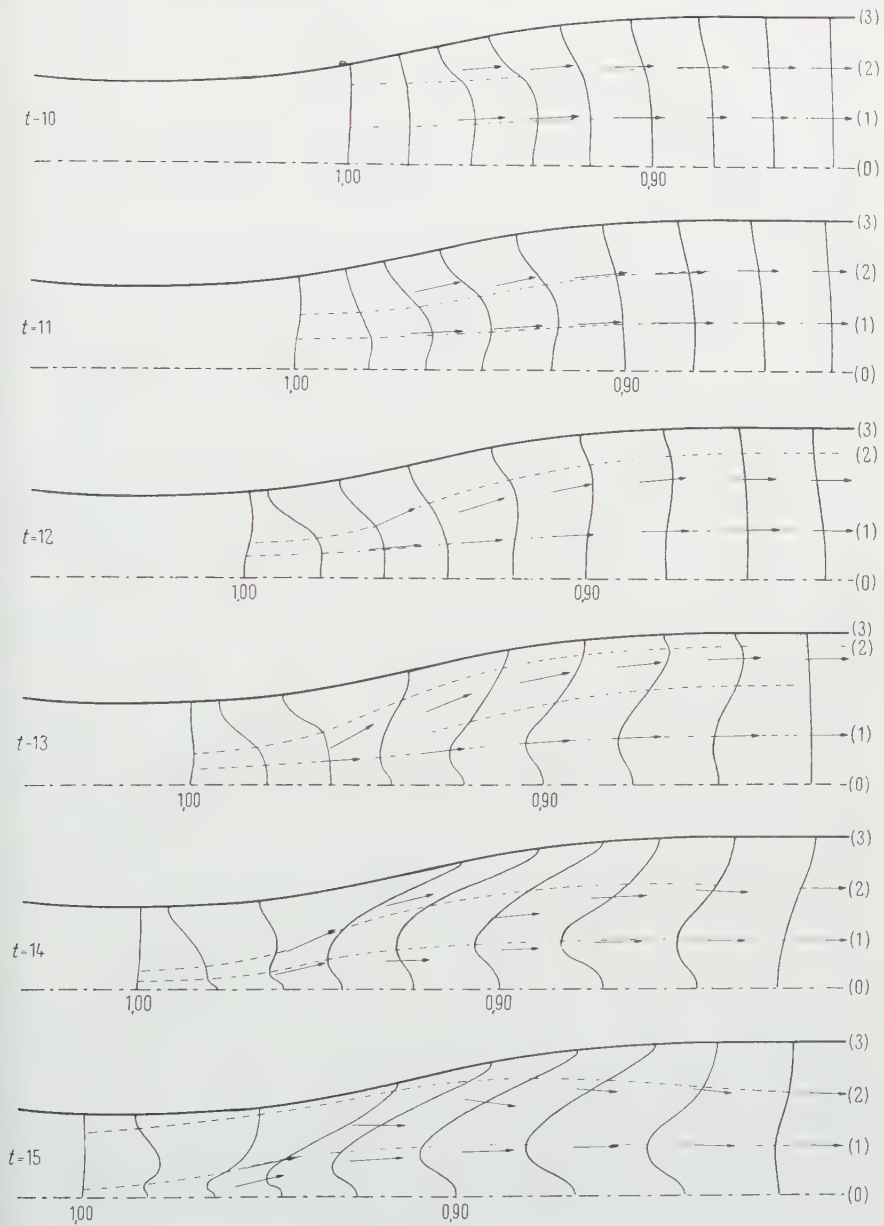
Durch adiabatisches Auspumpen ist der Druck  $p_1$  im Kanal gegenüber dem Druck  $p_0$  in der Düse auf  $p_1 = p_0/119$  herabgesetzt, so dass bei Entfernung der Trennwand ein Verdünnungsfächer in die Düse hineinläuft. Das Druckverhältnis  $p_0/p_1$  ist so gross gewählt, dass an der Stelle der Trennwand für  $t > 0$  die Strömung sofort mit Überschallgeschwindigkeit einsetzt. Damit ist gewährleistet, dass die Strömung im Kanal nicht auf die Düse zurückwirken kann. Für die Berechnung der allein interessierenden Strömung in der Düse ist die Kenntnis der Kanalströmung daher nicht erforderlich.

Zur Bestimmung der entstehenden Gasströmung wird das in Abschnitt 9 beschriebene Verfahren mit einer Schrittweite von  $\Delta t = 1$  benutzt. Ausser den in Abschnitt 10 angegebenen Vereinfachungen sind dabei wegen der Besonderheit des Beispiels einige Modifikationen zweckmässig. Bekanntlich gilt bei isentropischen Strömungen

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{da} = \frac{2}{\kappa - 1} \frac{da}{da}.$$

Damit kann das System (10.1-4) ersetzt werden durch

$$\left( \frac{2}{\kappa - 1} a + w \right)_\alpha = - \frac{a}{r_2} \frac{w}{r_2}, \quad (11.1)$$



Figur 5

Beispiel 1: Geschwindigkeitsfeld  $\pi_1$  ( $\longrightarrow$ ) mit Stromlinien (— — —) und Linien gleicher Schallgeschwindigkeit (Isobaren) (—) für un stetiges Anfangsdruckgefälle. Die beigefügten Zahlen beziehen sich auf die Ruheschallgeschwindigkeit in der Düse.

$$\left( \frac{2}{\kappa - 1} a - w \right)_{\beta} = - \frac{a w}{r_2}, \quad (11.2)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = - \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \frac{a}{w} a_2. \quad (11.3)$$

Die Grundpunkte  $r_0$ ,  $r_0^z$  und  $r_0^\beta$  werden auf vier Stromlinien gewählt, und zwar auf den festen Wandlinien (0) und (3) sowie auf zwei weiteren dazwischenliegenden Linien, die sich zeitlich ändern (Figur 5). Es ergibt sich dadurch der zeichentechnische Vorteil, dass man in den einzelnen Bändern längs der Stromlinien jedes der üblichen eindimensionalen Charakteristikenverfahren zur Lösung der Gleichungen (11.1) und (11.2) anwenden kann (Figuren 6a und b).



Figur 6a

Beispiel 1: Charakteristikendiagramme in Einzelbändern längs der Stromlinien (nicht integrierbar), Substanzlinien (— — —).



Figur 6b

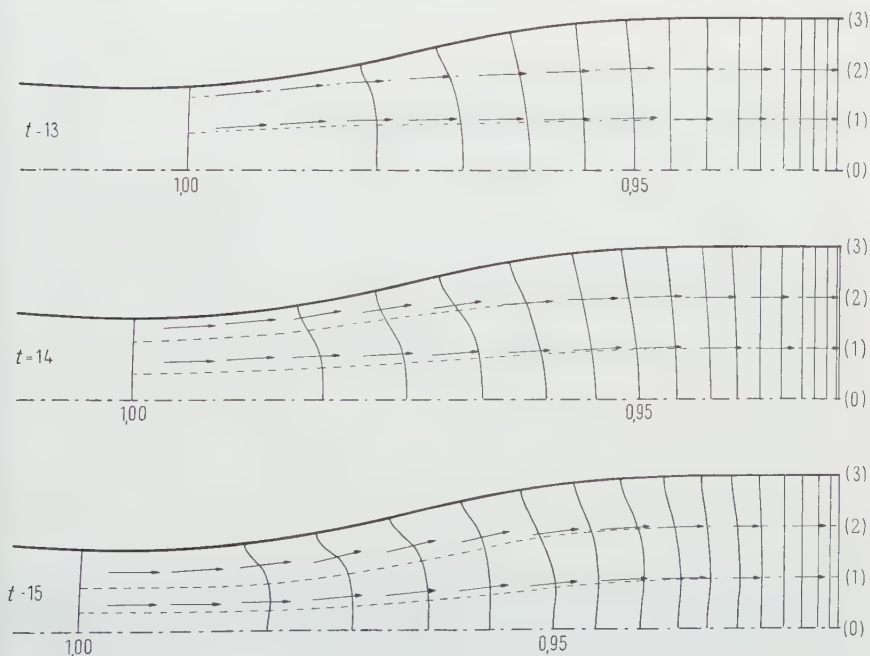
Beispiel 1: Charakteristikendiagramme längs der festen Wand (3).

Im Gegensatz zu den eindimensionalen Strömungen lassen sich diese Bänder aber für die instationären Stromlinien (1) und (2) nicht zu einer Fläche zusammenfügen. Man muss vielmehr, nachdem man sich nach (11.3) (vgl. Abschnitt 9, Punkt 6) die Änderungen des Vektors  $n_1$  längs der alten Stromlinien berechnet hat, in das sich ergebende Richtungsfeld die neuen Stromlinien einzeichnen, um die Basislinien der nächsten Bänder zu erhalten. In Figur 5 sind für die Zeiten 10...15 die berechneten Einheitsvektoren  $n_1$  in Richtung der Geschwindigkeit sowie die zugehörigen Stromlinien eingezeichnet. Figur 6a enthält die Bänder der jeweiligen Stromlinie (2) für die Zeiten 11...14 mit den zu den Gleichungen (11.1) und (11.2) gehörigen Charakteristi-



ken. Es handelt sich um drei einzelne Bänder, die lediglich aneinandergezeichnet sind. Im Gegensatz dazu zeigt Figur 6b die entsprechenden Stromlinienbänder für die Wand (3), die eine zusammenhängende Fläche bilden.

Die Schallgeschwindigkeitskurven der Zeit  $t = 10$  (Figur 5) zeigen, dass am gekrümmten Teil der Wand (3) ein Unterdruck gegenüber entsprechenden Punkten an der Wand (0) entstanden ist. Er ist darauf zurückzuführen, dass infolge der Wandkrümmung nicht genügend Gas nachströmen konnte. Da, kurz gesagt, das Gas die Neigung hat, vom Über- zum Unterdruck zu strömen, ergibt sich als Folge eine Drehung der Vektoren  $n_1$  zur Richtung des Druckgefälles hin ( $t = 11, 12$ ). Dadurch nähert sich die Stromlinie (2) der Wand (3). Für  $t = 11$  bis  $t = 14$  beobachtet man die Auffüllung des Unterdruckes längs der Stromlinie (3) zu einem Überdruckgebiet durch die gegen (3) konvergierenden Stromlinien. Infolge des Überdruckes setzt zur Zeit  $t = 15$  bereits wieder eine rückläufige Bewegung ein. In der Zwischenzeit ist in der Gegend der Stromlinie (1), in deren Nähe die Stromlinien am stärksten divergieren, ein neues Unterdruckgebiet entstanden. Offensichtlich handelt es sich hier um eine regelrechte Schwingung zwischen den Wänden (0) und (3). Es ist zu erwarten, dass die auftretenden Schwingungen sich infolge des Anwachsens der



Figur 7

Beispiel 2: Geschwindigkeitsfeld  $n_1$  (—→) mit Stromlinien (— — —) und Linien gleicher Schallgeschwindigkeit (Isobaren) (— — —) bei stetigem Absaugvorgang.

Strömungsgeschwindigkeit noch erheblich verstärken werden. Im Zusammenhang damit ist auch das Verhalten der Schallgeschwindigkeitskurven (Isobaren) 0,98-0,92 für  $t = 13, 14$  und  $15$  interessant, die bei Annäherung an die Wand (3) stark auseinanderlaufen, was auf eine Abnahme des Druckgefälles längs der Wand (3) hindeutet. Auf diese Weise können schliesslich isolierte Über- und Unterdruckgebiete entstehen, die erfahrungsgemäss zur Wirbelbildung Anlass geben.

Zum Abschluss sollen noch Stromlinienbilder und Linien gleicher Schallgeschwindigkeit (Isobaren) aus einem älteren Beispiel angegeben werden, in welchem an der rechten Düsenmündung stetig Gas abgesaugt wurde. Die entsprechende Randbedingung für  $a$  lautete  $a(t) = a_0 (1 - 10^{-3} t^2)$  (Figur 7).

Man sieht, dass grundsätzlich derselbe Anlaufeffekt eintritt, wenn auch, bedingt durch das relativ langsame Absaugen des Gases, wesentlich schwächer ausgebildet.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. 2 (Berlin 1937).
- [2] R. COURANT und K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves* (New York 1948).
- [3] K. R. DORFNER, *Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik* (Berlin 1957).
- [4] W. HAACK und G. HELLWIG, *Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen I und II*, Math. Z. 53, 244-266 und 340-356 (1950).
- [5] W. HAACK, *Vorlesungen über Strömungslehre 1953* (unveröffentlicht).
- [6] M. LAGALLY, *Vektorrechnung* (Leipzig 1945).
- [7] W. S. McCULLEY und E. W. TITT, *Integration Formulae and Boundary Conditions for the Hyperbolic Equation with Three Independent Variables and Regions Interior to the Cone*, J. rat. Mech. Anal. 2, 423-442 (1953).
- [8] K. OSWATITSCH, *Gasdynamik* (Wien 1952).
- [9] K. OSWATITSCH, *Über die Charakteristikenverfahren der Hydromechanik*, Z. angew. Math. Mech. 1947, Heft 7, 8, 9.
- [10] R. SAUER, *Einführung in die theoretische Gasdynamik* (Berlin 1951).
- [11] R. SAUER, *Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen* (Berlin 1952).
- [12] E. W. TITT, W. S. McCULLEY, FLETCHER, W. DONALDSON, ROGER OSBORN, L. G. WORTHINGTON und W. C. LONG, *Vector Algebras and Potentials*, J. rat. Mech. Anal. 2, 443-448 (1953).

### Summary

This paper deals with a general three-dimensional characteristic method for the inviscid flow of ideal gases using some simple facts from the differential geometry of vector fields. The fundamentals of a general numerical method are deduced from the system of the characteristic equations. They are applied to a special case of two-dimensional flow.

(Eingegangen: 21. Oktober 1957.)

# Aus- und Eintrittsstöße an Schaufelgittern

VON ADOLF BUSEMANN, Hampton, Va., USA<sup>1)</sup>

*Widmung.* Es macht mir eine besondere Freude, diesen Artikel für das Sonderheft zu schreiben. Nicht nur erinnern die Gedankengänge an die gemeinsame Zeit in Göttingen vor 30 Jahren, sondern es war auch gerade J. ACKERET, der damals die Charakteristikenmethode als erster auf Schaufelgitter anwandte, so wie A. STODOLA schon früher Lösungen mit der einfacheren Prandtl'schen Strömung um die Ecke heranzog.

## 1. Einleitung

Für freie oder durch Kanäle begrenzte Strömungen ist man die Dreiteilung gewohnt: Unterschall-, Überschall- und gemischte Strömungen. Bei axialen Turbinen und Kompressoren, die sich sonst wie ebene Strömungen behandeln lassen, gibt es jedoch einen Zustand, der wie beim Pfeilflügel Unterschallverhalten zeigen kann, obwohl die Geschwindigkeit selbst über der Schallgeschwindigkeit liegt. Man kann die Eigenart dieser Strömung darauf zurückführen, dass die auf einem Zylindermantel verlaufende Strömung durch den doppelten Zusammenhang die Unterscheidung zwischen Vor- und Nachkegel in Unordnung bringt. Natürlich liegt ein Punkt nur dann in seinem eigenen Nachkegel, wenn die axiale Geschwindigkeitskomponente der Strömung kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist (Figur 1). In der Geschwindigkeits- oder Hodo-



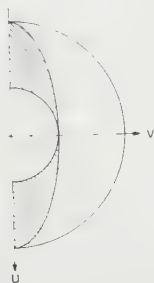
Figur 1

Punkt im eigenen Nachkegel.

graphenebene werden daher die «Ellipsen» konstanter Machscher Zahl für die axiale Strömungskomponente im Spalt zwischen zwei Schaufelrädern wichtig. Insbesondere stellt die «Hauptellipse» mit der axialen Machschen Zahl eins die obere Grenze jenes Zwittergebietes dar, in dem die totale Machsche Zahl über

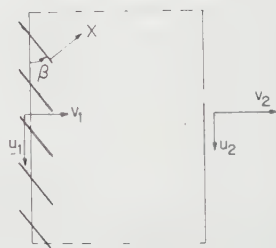
<sup>1)</sup> National Advisory Committee for Aeronautics.

eins, die axiale jedoch unter eins ist (Figur 2). Die untere Grenze ist natürlich der Kreis der Machschen Zahl eins, dessen Inneres reine Unterschallgeschwindigkeit bedeutet. Das eigenartige Verhalten dieser stationären Strömung soll hier ohne das Beiwerk endlicher Schaufelteilung und endlicher Schaufeldicke behandelt werden. Zu diesem Zwecke ist der Austrittsbereich oder Eintrittsbereich mit unendlich dünnen und geraden Schaufelenden versehen, und der Schaufelspalt zwischen zwei Rädern wird als unbegrenzt angesehen. So gelingt es, die Anpassungsfähigkeit im Ein- und Austritt mit eindimensionalen Mitteln



Figur 2

Überschall mit Unterschallverhalten.



Figur 3

Normalkraft auf Schaufelenden.

zu untersuchen, obwohl diese nur den Zustand im Schaufelkanal und den ausgeglichenen Zustand im Spalt getreu wiedergeben können.

Die Beziehungen zwischen Kanalgeschwindigkeit und Spaltgeschwindigkeit sind durch Kontinuität, Impuls- und Energiesätze festgelegt bis auf eine freie Variable, die von der Reaktion normal zur Schaufel oder vom Druck im Spalt abhängt. Die Entropiebilanz gibt dann Auskunft darüber, welche von den möglichen Anpassungen typisch für den Austritt oder typisch für den Eintritt eines Schaufelrades ist.

## 2. Kontinuität und Impuls

Umfangskomponenten der Geschwindigkeiten seien mit  $u$ , axiale Komponenten mit  $v$  bezeichnet. Der Schaufelwinkel  $\beta$  bestimme die «Hauptachse» des Geschwindigkeitsbildes. Mit Hilfe der Dichte  $\varrho$  und des Druckes  $p$  lassen sich die Beziehungen zwischen Kanal und Spalt im Massendurchfluss und im Impuls angeben, wenn nur die unbekannte Schaufelkraft  $X$  normal zur Schaufel als mögliche Störung berücksichtigt wird (Figur 3). Die Kontinuität besteht in axialer Komponente:

$$\varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2. \quad (1)$$

Der Impuls besitzt zwei Komponenten:

$$\dot{p}_1 + \varrho_1 v_1^2 + X \cos \beta = \dot{p}_2 + \varrho_2 v_2^2, \quad (2)$$

$$\varrho_1 v_1 u_1 - X \sin \beta = \varrho_2 v_2 u_2. \quad (3)$$

Eliminiert man jedoch die unbekannte Schaufelkraft, so ist nur noch eine Impulsbeziehung vorhanden:

$$\dot{p}_1 + \varrho_1 v_1 (v_1 + u_1 \cotg \beta) = \dot{p}_2 + \varrho_2 v_2 (v_2 + u_2 \cotg \beta). \quad (4)$$

Bei verlustfreier stationärer Strömung ist der Druck direkt mit der Geschwindigkeit gekoppelt. Im Falle von Stossverlusten muss man die Entropie  $s$  mit heranziehen. Isentropisch gilt für den Druck  $\dot{p}(s, u, v)$  jedoch eine Beziehung, die dem Bernoullischen Satz entspricht:

$$-\frac{\partial \dot{p}}{\partial v} = \varrho v. \quad (5)$$

Trägt man die Drücke für alle möglichen Entropiewerte in Abhängigkeit von den Geschwindigkeitskomponenten auf, so ergeben sich die bekannten «Druckberge», an denen vielfach Kontinuitäts- und Impulsbeziehungen zu linearen Aussagen auf Tangenten führen. Aus (5) ergibt sich für (1) und (4)

$$-\frac{\partial \dot{p}_1}{\partial v_1} = -\frac{\partial \dot{p}_2}{\partial v_2} \quad (6)$$

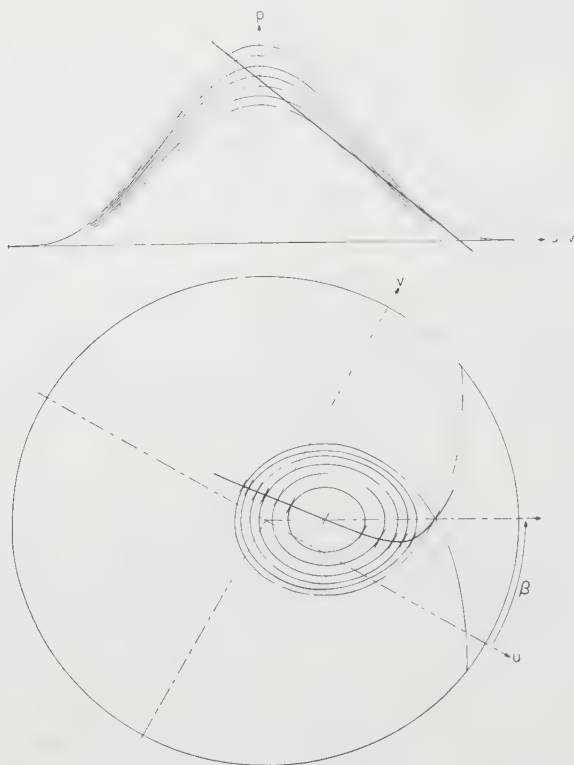
und

$$\dot{p}_1 - \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial v_1} (v_1 + u_1 \cotg \beta) = \dot{p}_2 - \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial v_2} (v_2 + u_2 \cotg \beta). \quad (7)$$

Gleichung (6) verlangt von zugeordneten Zuständen gleiche Neigung von Tangenten in parallelen Ebenen. Gleichung (7) setzt die Druckhöhe derjenigen Punkte gleich, die sich auf den angegebenen Tangenten über der Normalen zur Hauptachse

$$v_0 = -u \cotg \beta \quad (8)$$

befinden. Wenn nun aber alle möglichen parallelen Tangenten über einer gegebenen Geraden gleiche Höhe erreichen, so bildet ihre Gesamtheit eine Ebene. Da die gleiche Höhe normal zur Hauptachse der ursprünglichen Geschwindigkeit  $u_1$ ,  $v_1$  verläuft, ist diese Ebene nichts anderes als die Tangentialebene an den Druckberg des Ausgangszustandes im Kanal. Alle von der Anpassung im Spalt erreichbaren neuen Zustände haben Linienelemente gleicher Richtung an den Durchdringungskurven der verschiedenen Druckberge mit der gegebenen Tangentialebene, sind also «Isoklinen» für die Schar der Durchdringungskurven, oder Isoklinen im Grundriss dieser Kurven (Figur 4). Diese Beziehung gilt für alle Gase und Dämpfe.



Figur 4

Tangentialschnitt durch Druckberge (Aufriss und Grundriss).

Will man die neuen Zustände für vollkommene Gase analytisch bestimmen, so genügt dafür eine normierte Druckgleichung mit festem Wert eins für die Maximalgeschwindigkeit, mit einem variablen Wert  $P_0$  für den grössten Druck und mit dem Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\kappa$ :

$$p = P_0 (1 - u^2 - v^2)^{\kappa/(\kappa-1)}. \quad (9)$$

Aus diesem Druck und seiner Ableitung nach  $v$  lassen sich die rechten Seiten von (6) und (7) ohne den Index 2 anschreiben, während die linken Seiten feste Werte  $Q_1$  und  $I_1$  haben:

$$\frac{2\kappa}{\kappa-1} v P_0 (1 - u^2 - v^2)^{\kappa/(\kappa-1)-1} = Q_1, \quad (10)$$

$$P_0 (1 - u^2 - v^2)^{\kappa/(\kappa-1)} + \frac{2\kappa}{\kappa-1} v P_0 (1 - u^2 - v^2)^{\kappa/(\kappa-1)-1} (v + u \cotg \beta) = I_1. \quad (11)$$



Durch Division erzielt man eine von  $P_0$  freie Gleichung zweiten Grades in den Geschwindigkeitskomponenten, die mit der neuen Konstanten  $W = I_1/Q_1$  die Form

$$\frac{1 - u^2 - v^2}{\kappa - 1} + v + u \cotg \beta - \frac{I_1}{Q_1} = W$$

hat, sich aber leicht als Gleichung der Hyperbel schreiben lässt:

$$u^2 - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} v^2 - \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cotg \beta u v + \frac{2\kappa}{\kappa - 1} W v = 1. \quad (12)$$

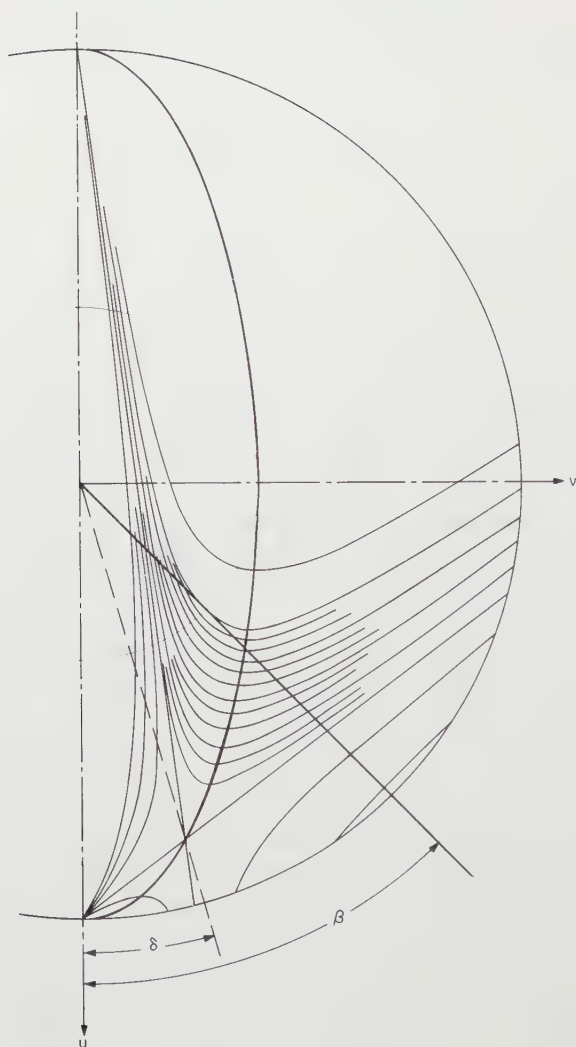
Beim Austritt aus einem Schaufelrad liegen der Schaufelwinkel  $\beta$  und die Konstante  $W$  fest. Beim Eintritt in ein Schaufelrad ist dagegen nur der Schaufelwinkel  $\beta$  eindeutig gegeben, während die Geschwindigkeit von der Lösung des Übergangsproblems selbst abhängt. Ein Diagramm der Polaren für Aus- und Eintrittsanpassungen soll daher zwar einen gegebenen Schaufelwinkel, aber einen offenen Wert  $W$  besitzen (Anwendungen im niedrigen Unterschallgebiet sind zu vermeiden, weil dort Saugkräfte auf der Eintrittskante möglich sind, die im Impulssatz nicht berücksichtigt wurden). Ein Teil der Hyperbeln schneidet die Hauptachse mit demselben Ast an zwei Punkten, ein anderer Teil mit jedem Ast in je einem Punkt. Den Übergang bildet eine Hyperbel, die in zwei Geraden entartet. Diese Geraden kreuzen sich auf der Hauptellipse und durchbrechen dort die Regel, dass die Hauptellipse von Hyperbeln nur in Richtung der  $v$ -Achse geschnitten wird. Zwei weitere singuläre Punkte sind die Endpunkte der grossen Achse der Hauptellipse  $u = \pm 1$ . Dort kreuzen alle Hyperbeln einander. Aus der zu einem Geradenpaar entarteten Hyperbel entnimmt man sowohl die beiden Asymptotenrichtungen, die alle Hyperbeln gemeinsam haben, als auch den Strahl vom Ursprung unter dem Winkel  $\delta$ , auf dem alle Hyperbelmittelpunkte liegen, mit

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \operatorname{tg} \beta.$$

Die Hyperbeln einer Isoklinenschar sind daher leicht zu konstruieren (Figur 5).

### 3. Entropiezuwachs

Die in bezug auf Kontinuität, Impuls und Energie gleichwertigen Zustände einer Isokline haben unterschiedliche Entropiewerte, da ihre Punkte durch Tangenten an verschiedene isentropische Druckberge bestimmt wurden. Statt nun aber sofort die Entropiedifferenzen gegenüber dem Anfangszustand einzutragen und damit eine Unterscheidung nahezulegen, «geeignet für Austritt, geeignet für Eintritt und geeignet für beide Fälle», sollen Mittel vorbereitet



Figur 5  
Schar der Spaltgeschwindigkeiten.

werden, die richtige Einteilung vorzunehmen: « Geeignet für Austritt, geeignet für Eintritt und ungeeignet. » Offenbar ist ein verschwindender Entropiezuwachs beim Übergang zu weit entfernten Zuständen nicht immer imstande, die tatsächlich eintretenden Verluste zu decken. Diese höhere Einsicht erhält man jedoch leicht, wenn man die Scharen der Isoklinen gemeinsam betrachtet und durch stetige Veränderung der Nachbarschaften von Anfangs- und Endzustän-

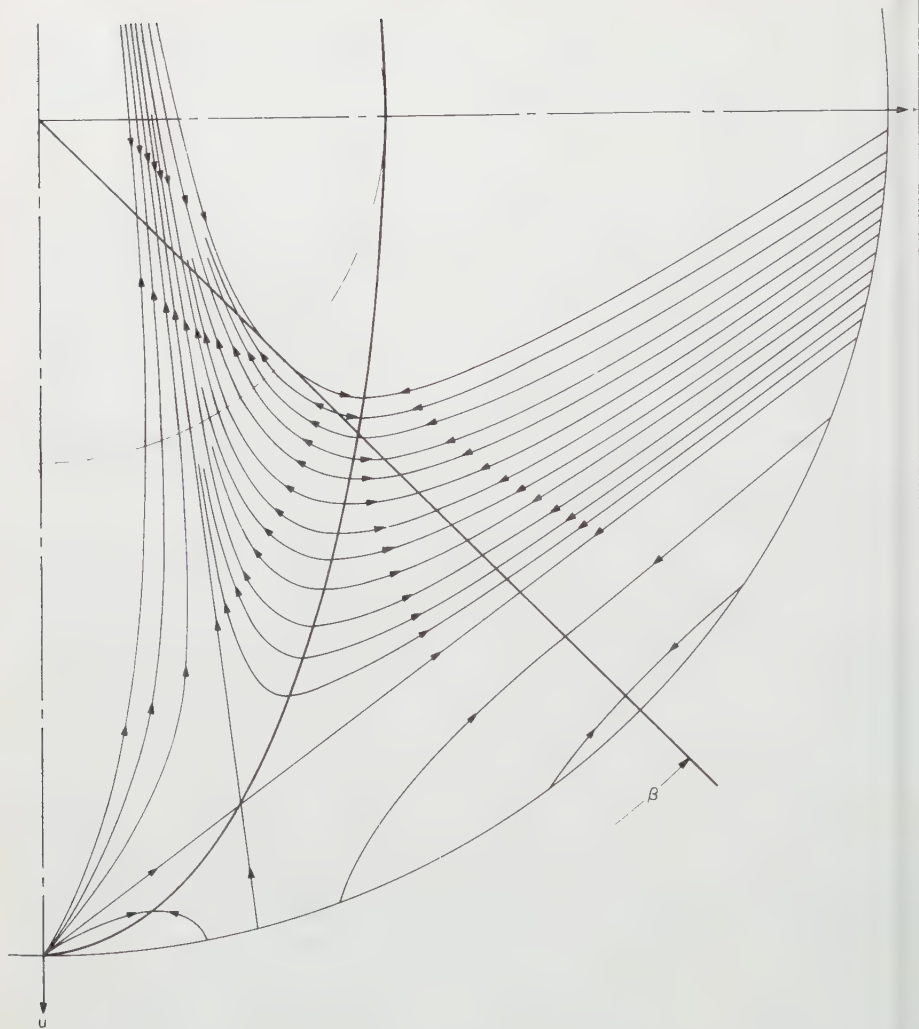
den die wahren Gründe für das Versagen blosslegt. Die irreführenden quantitativen Entropiewerte werden daher durch die qualitative Pfeilrichtung zunehmender Entropie auf jeder Isokline ersetzt. Umkehrpunkte der Pfeilrichtung bedeuten Extremwerte der Entropie und lassen sich leicht eindeutig und vollständig auffinden.

Die Tangenten an die Druckberge haben an ihren Berührungspunkten zwei Nachbarpunkte mit gleicher Entropie. Ihre Isoklinen kreuzen sie am Berührungspunkt und haben daher gewöhnlich nur den Kreuzungspunkt gemeinsam. Auf der Hauptellipse stimmen jedoch die Fortschrittsrichtungen der Isoklinen mit der Richtung der Tangenten überein, sie erreichen daher Extremwerte der Entropie. Auf der Hauptachse ist die Ebene jeder einzelnen Isokline Tangentialebene an den Ausgangspunkt und ist daher geometrischer Ort für Tangenten an die Druckberge, die in der Richtung normal zur Hauptachse verlaufen. Sobald eine Isokline anzeigt, dass eine weitere Richtung Tangente an einen Druckberg ist, so sind an diesem Punkt alle Richtungen tangential, und die Isokline besitzt wieder einen Extremwert der Entropie.

Die Hauptachse und die Hauptellipse sind nun die einzigen inneren Sitze von Entropieextremen, und zwar sind sie im wesentlichen Maxima der Entropie. An ihrem gemeinsamen Schnittpunkt tritt jedoch für beide ein Wechsel vom Maximum zum Minimum der Entropie ein. Das Minimum erstreckt sich für die Hauptachse bis zum Kreis der Machschen Zahl eins. Die Minimum-Eigenschaft auf der Hauptellipse reicht bis zu jenem mehrfach erwähnten singulären Punkt, an dem die Hyperbel zum Geradenpaar entartet. Mit diesen Erkenntnissen können Pfeilrichtungen in allen Gebieten der Isoklinen eingetragen werden (Figur 6).

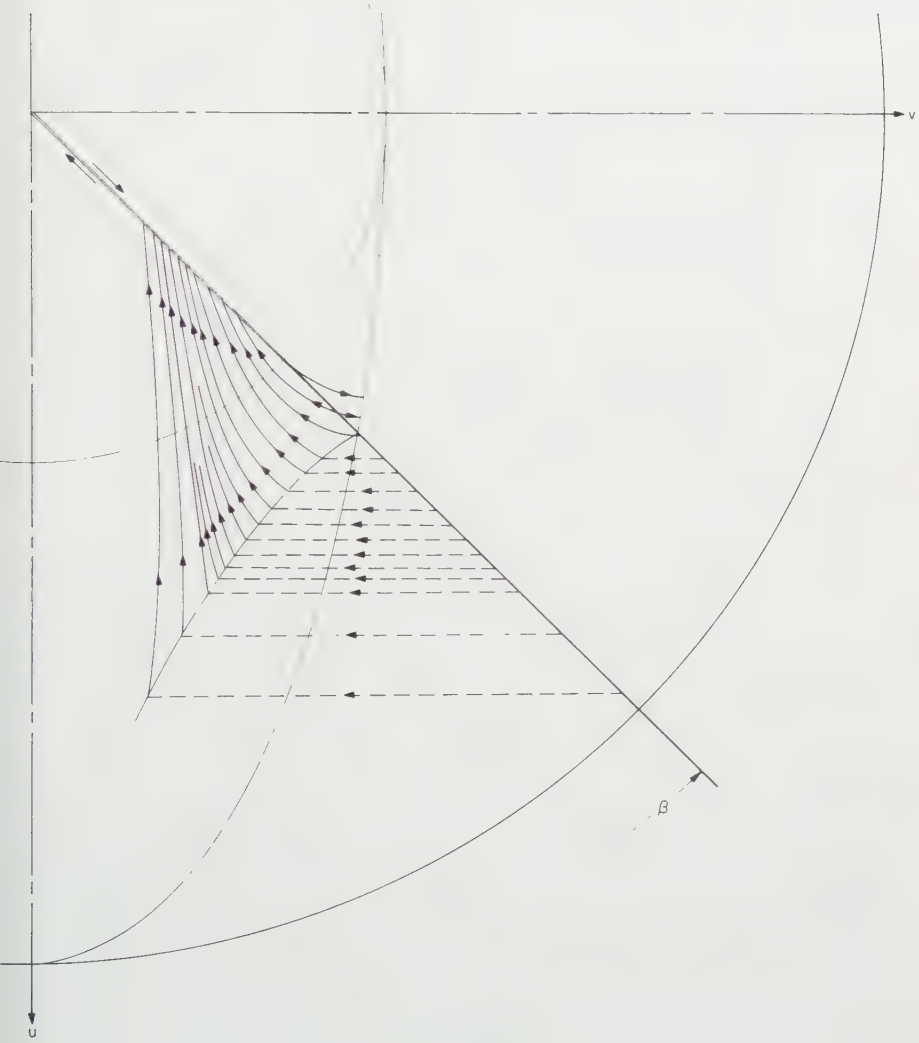
Durch die Pfeile wird die Sonderstellung jener Anfangspunkte mit Überschallgeschwindigkeit sichtbar, deren axiale Komponente noch Unterschallgeschwindigkeit besitzt. Die Pfeile zeigen eine Anpassungswilligkeit, die bei Unterdrücken im Spalt bis zur axialen Machschen Zahl eins geht und die bei Überdrücken im Spalt bis zum geraden Verdichtungsstoss im Kanal selbst führt. Dieses sind offenbar die natürlichen Grenzen des erforderlichen Anpassungsvermögens. Gleichzeitig erkennt man jedoch, dass die entsprechenden Eigenschaften bei Ausgangszuständen mit unzweideutiger Überschallgeschwindigkeit noch fehlen. Diese Strömungen sind zwar unbeeinflusst von Unterdrücken im Abstrom und von gewissen Überdrücken, sobald aber der Gegendruck so stark wird, dass sich ein Verdichtungsstoss gegen die axiale Überschallgeschwindigkeit stromaufwärts bewegen kann, ist die Stabilität dieser eindeutigen Überschallgeschwindigkeiten zu Ende, und eine Störung breitet sich im Austrittsgebiet der Schaufel aus, bis auch sie als gerader Verdichtungsstoss im Kanal in den Schaufelkanal selbst vordringt.

In Figur 6 fehlt daher noch eine Schar von Verdichtungsstößen, die ohne eine Schaufelreaktion  $X$  auskommt und daher frei im Spalt existiert. Diese



Figur 6  
Entropieanstieg.

ausgezeichneten Stöße sind sowohl ein Grenzzustand für die Eintrittsstörung als auch ein Grenzzustand für die Austrittsstörung, wenn man sie nicht als neutral ansprechen will, weil sie als homogen in der Umfangsrichtung mit keinem der Räder umzulaufen brauchen. Jedenfalls stellen sie Grenzfälle vor zweifelloser Existenz dar, die im Diagramm Isoklinenäste verbinden, die ohne den Stoss wegen des Entropiemaximums oder -minimums auf der Hauptellipse



Figur 7  
Austrittspolaren.

getrennt waren. Erkennt man aber einmal die Grenzstellung dieser ausgezeichneten Stöße, so ist leicht zu entscheiden, welcher Teil ihrer Nachbarschaft erlaubte und welcher verbotene Anpassungsmöglichkeiten darstellt.

Die endgültigen Polaren sind nun in den Figuren 7 und 8 nach Austritt und Eintritt unterschieden. Sie mögen den Namen Stosspolaren für Schaufelgitter verdienen, wobei die Austritts- und Eintrittsstöße als Stöße im Hugoniotischen



Figur 8  
Eintrittspolaren.

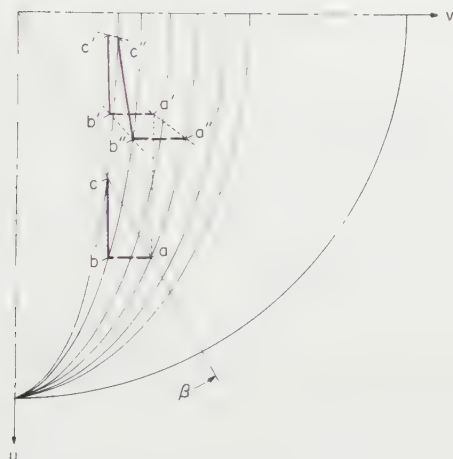
Sinne, wie bei Verdichtungsstößen, oder im Carnotschen Sinne, wie bei plötzlichen Rohrerweiterungen, aufgefasst werden können.

#### 4. Anwendung

Die übliche Behandlung von Übergängen zwischen Leit- und Laufschaufeln gründet sich auf Geschwindigkeitsdreiecke, die den Zuwachs der Energie durch



die Relativgeschwindigkeiten mit enthalten. Vorgegebene Diagramme mit festliegender Maximalgeschwindigkeit scheinen daher mehr den wirklich stationären Strömungen gerecht zu werden. Es ist jedoch leicht, die Anwendung für Schaufelräder durch einen gleitenden Geschwindigkeitsmaßstab zu ermöglichen. Die Winkel sind einerseits schon frei vom Maßstab, und die Machsche Zahl der axialen Komponente jedes Strömungszustandes hat denselben Wert für beide Räder. Die Ellipsen konstanter Machscher Zahl der axialen Strömungs-



Figur 9  
Relative Austrittspolare.

komponente sind demnach die zweite Koordinate zu den Strömungswinkeln. Sie besorgen die Änderung des Geschwindigkeitsmaßstabes automatisch. Für eine Schar von Spaltgeschwindigkeiten, wie sie nach Figur 7 durch Anpassung im Austritt zur Verfügung steht, sind in Figur 9 durch Abzug der gegebenen relativen Umfangsgeschwindigkeit der neue Winkel und dazu durch Gleiten auf den Ellipsen der neue Betrag dieser Spaltgeschwindigkeit bestimmt, wie sie der folgenden Schaufelung zuströmen (es ist dabei zu erkennen, dass ausgezeichnete Stöße  $a - b$  in ebensolche verwandelt werden  $a'' - b''$ ). In einem Eintrittsdiagramm gleicher Größe nach Figur 8, aber für den Schaufelwinkel des neuen Rades, ist die relative Austrittskurve von Figur 9 mit den Polen zum Schnitt zu bringen. Vielfach wird es nur eine Eintrittsanpassung oder eine Austrittsanpassung geben. Doch sind auch Fälle möglich, in denen der Übertritt die Ausnutzung beider Anpassungsmöglichkeiten bedingt.

Bei beliebigen Abweichungen vom idealen Übertritt können wegen der krummlinigen Polaren leicht mehrfache oder gar keine Schnittpunkte herauskommen. Die Behandlung solcher Einzelheiten geht über den Umfang dieses

Artikels hinaus. Doch ist es gerade der Zweck eines vollständigen Polarendiagramms, diese schwierigeren Fälle durch stetige Veränderungen auf eindeutige Fälle zurückzuführen. Vielfach wird dabei schon der Grund für die Schwierigkeit blossgelegt.

### *Summary*

Though the flow in the cylindrical surface of turbines or compressors may be treated as flow in a plane by development of the cylinder into a plane, the double connection once around the cylinder introduces difficulties in the law of forbidden signals for supersonic flow with a subsonic axial component. In cases of large gaps between the stages and blades of zero thickness and straight exit and entry zones, the methods of steady one-dimensional flow can shed light on the adaptability of the flow to the transient conditions by means of special kinds of shock polars for the exit and entry flow at given blade angles  $\beta$  (Figures 7 and 8). The shocks may sometimes be a combination of HUGONIOR's discontinuities and CARNOT's transient zones, but are in all cases governed by mass, impulse and energy balances with an increase in entropy.

(Eingegangen: 8. Oktober 1957.)

# Mesures et calculs relatifs au couple de pivotement agissant sur les aubes de turbines Kaplan

Par BERNARD CHAIX, Genève, Suisse<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

### 1.1 Généralités

L'étude des forces qui tendent à ouvrir ou fermer l'aubage d'une roue Kaplan est intéressante à trois points de vue:

1.11 Les phénomènes analysés sont communs à toutes les turbo-machines. Pour l'hélice marine à pas variable la similitude s'étend jusqu'au mécanisme de réglage lui-même, conditionné principalement par le couple d'origine *hydraulique*. Dans l'hélice d'avion c'est plus particulièrement l'autre élément du couple de pivotement, celui résultant des efforts *centrifuges*, qui détermine le travail de réglage. Seul le travail de réglage dû à la *gravitation* est l'apanage des turbines hydrauliques exclusivement – encore cet élément est-il pratiquement négligeable [voir note au sujet de l'équation (1)].

1.12 Pour les turbines hydrauliques en particulier, la connaissance des efforts de pivotement auxquels l'aube est exposée a une grande importance pour le constructeur. Dans des installations de 30000 ch, 50000 ch et plus, le mécanisme de réglage de la roue doit être construit de manière à pouvoir fermer la roue même à l'emballement. Le servo-moteur doit vaincre les couples de pivotement de toutes les aubes, couples dont la somme est alors supérieure au couple moteur maximum de la turbine. C'est ainsi que le mécanisme des pales peut coûter plus du quart du prix des parties tournantes livrées par le turbinier.

1.13 Les publications expérimentales et théoriques sur les grilles d'aubes ne livrent généralement pas *directement* le coefficient de couple aérodynamique – contrairement à ce qui est usuel pour les profils isolés. Un dépouillement dans ce sens apporte donc un complément utile.

### 1.2 Résumé

Dans la présente étude, nous donnons tout d'abord un aperçu des couples de pivotement tels qu'ils ressortent de mesures typiques sur différentes installa-

<sup>1)</sup> Ateliers des Charmilles S. A.

tions. Puis nous intercalons un complément pour le calcul du couple d'origine centrifuge. Le rapport entre ce couple et celui d'origine hydraulique est ensuite discuté, et illustré par les valeurs établies pour une gamme d'installations.

Des essais faits dans le laboratoire de mécanique des fluides des Ateliers des Charmilles sont présentés, en particulier la technique employée pour mesurer les couples de pivotement. Les résultats de mesures de couple sur une turbine dont on a varié le nombre de pales sont présentés sous la forme habituelle aux constructeurs. Le dépouillement est poursuivi pour permettre une comparaison avec les coefficients de l'aérodynamique.

Des calculs schématiques des deux cas limites du profil isolé et de la grille très serrée montrent les caractères des forces hydrauliques dans les cas extrêmes de la faible chute et de la haute chute, respectivement d'une vitesse spécifique élevée et faible. Entre ces limites, l'effet de grille sur le couple de pivotement est illustré par un dépouillement des diagrammes qu'a publiés le professeur SCHLICHTING. Un calcul typique de profil Kaplan, faisant aussi ressortir l'influence du pas relatif et de l'épaisseur sur le couple de pivotement, est effectué au moyen de la méthode du professeur ACKERET.

### 1.3 Liste des symboles

$C$	vitesse absolue (figure 3);
$C_m$	vitesse débitante;
$\Delta C_u$	variation de la composante périphérique au travers de la roue;
$D; D_2$	diamètre d'une coupe cylindrique; diamètre de la roue;
$F_\omega$	force de traction centrifuge agissant sur l'aube;
$g$	accélération terrestre;
$H_n$	chute nette;
$i$	rayon d'inertie d'un profil ou de toute l'aube;
$L$	corde d'un profil;
$\bar{L}$	corde moyenne définie par: (surface de l'aube)/(longueur radiale de l'aube);
$l_N$	position du centre de poussée (figure 3), mesurée à partir de l'arête d'entrée;
$M$	couple de pivotement agissant sur l'aube;
$M_{11}$	couple unitaire = $M/D_2^3 H_n$ ;
$M_r$	couple de référence pour coefficient de couple sans dimensions = $\frac{\rho}{2} U_2^2 \frac{\pi}{4} D_2^2 (1 - v^2) \frac{D_2}{2}$ , où $\{v \equiv 0\}$ pour les figures $\{1, 2\}$ ; $\{v \rightarrow 1\}$ pour les figures $\{5, 6\}$ ;
$M_p, M_\omega$	couple de pivotement résultant des pressions, des forces centrifuges;
$M_{moteur}$	couple moteur de la turbine;
$n$	régime de rotation, en tours à la minute;
$n_s$	vitesse spécifique, basée sur les unités ch, m;

$P_z$	poussée axiale – dans un écoulement idéal, pour une aube, selon figure 3;
$R$	rayon d'une coupe cylindrique. Comme indice: signifie que le coefficient est défini dans la coupe cylindrique;
$R$	rayon représentatif pour l'aube entière $R^2 = R_2^2(1 - \nu^2)/2$ ;
$R_{C.G.}$	distance de l'axe de la roue au centre de gravité de la pale;
$Res$	force résultant des pressions sur l'aube;
$S$	surface du profil;
$S_{aube}$	surface de l'aube, résultant de la somme des carrés des surfaces en plan et en élévation;
$T$	force tangentielle sur une aube (figure 3);
$t$	pas;
$U, U_2$	vitesse d'entraînement (figure 3), vitesse périphérique – cette dernière étant la vitesse de référence habituelle;
$W, W_\infty$	vitesse relative, moyenne vectorielle (figure 3);
$z_2$	nombre des aubes;
$1$	indice caractérisant l'entrée dans la roue;
$2$	indice caractérisant la sortie de la roue, ou sa périphérie;
$\alpha_1$	angle entre la vitesse absolue d'entrée et la direction périphérique;
$\beta_\infty$	angle entre le vecteur moyen $W_\infty$ et la direction périphérique;
$\beta_c$	angle de calage des aubes, mesuré entre la corde du profil et la direction périphérique – pour l'aube entière, au rayon représentatif $R$ ;
$\varepsilon$	excentricité: distance entre l'axe du tourillon et la ligne d'action de la résultante des pressions (figure 3). L'indice $1/4$ ou $1/2$ rappelle la position du tourillon.
$\delta_\infty$	angle d'incidence, mesuré entre le vecteur moyen $W_\infty$ et la corde du profil;
$\eta_h$	rendement hydraulique;
$\lambda = L/t$	recouvrement. La moyenne de $\lambda$ est définie par le rapport: (surface de toutes les aubes)/(section de passage entre le moyeu et le diamètre $D_2$ ).
$\mu = M/M_r$	coefficient de couple, défini d'une manière semblable à celui des hélices ( $K_d$ [6] <sup>2</sup> , p. 54);
$\nu$	rapport entre diamètres moyeu et roue;
$\varrho$	degré de réaction = (chute de pression au travers de la roue)/(chute nette);
$\varrho_{cin}$	degré de réaction cinématique ([19], p. 23) = $W_{u_\infty}/U$ ;

<sup>2</sup>) Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 223.

$\varrho_{aube}, \varrho_{fluide}$	densités;
$\varphi$	coefficient de débit = (vitesse débitante moyenne)/ $U_2$ ;
$\psi$	coefficient de chute = $\frac{g H_n}{U_2^2/2}$ ;
	s'ils portent l'indice $R$ , ces coefficients sont définis au moyen de la vitesse $U$ au rayon $R$ .
$\Omega = \sqrt{\frac{\varphi(1-\psi^2)}{\psi\sqrt{\psi}}}$	vitesse spécifique sans dimensions [4] = 0,001736 $n_s/\sqrt{\eta}$ , où $n_s$ est calculé avec les unités ch, m; = 0,00772 $n_s/\sqrt{\eta}$ , si $n_s$ est en unités britanniques;
$\zeta_M$	coefficient de couple aérodynamique, rapporté à la pression dynamique de $W_\infty$ , la surface de l'aube et sa corde.

## 2. Les facteurs déterminants pour le couple de pivotement

### 2.1 Les forces en jeu

Le couple de pivotement que doit vaincre le servo-moteur de roue se distingue du couple agissant sur la pale par le *frottement*. Ce frottement, proportionnel aux réactions aux appuis, peut majorer de 30% le couple qui fait l'objet de notre étude. Ce dernier résulte:

- 1° des pressions exercées par l'eau à la surface de l'aube;
- 2° des forces centrifuges;
- 3° du poids de l'aube, dont le centre de gravité n'est généralement pas sur l'axe du tourillon.

Les diagrammes de la figure 1 ne tiennent pas compte du frottement. En dépouillant les enregistrements du travail de réglage, on a éliminé l'effet du frottement en admettant qu'entre la manœuvre d'ouverture et de fermeture celui-ci changeait de signe, mais pas d'amplitude. Cette hypothèse est suffisante pour établir des diagrammes plutôt qualitatifs comme ceux de la figure 1.

### 2.2 Quelques exemples de l'allure du couple en fonction de l'ouverture de la roue

Dans la figure 1, le couple de pivotement agissant sur la feuille de la pale est rapporté à la chute et à la 3<sup>e</sup> puissance du diamètre extérieur de la roue. Ce couple unitaire a la dimension d'un poids spécifique en  $\text{kg/m}^3$  — sa définition se justifie si on le considère comme le couple mesuré en  $\text{kgm}$  sur un modèle réduit de 1 m de diamètre tournant sous un mètre de chute. Pour le coefficient sans dimensions, défini au paragraphe 1.3, l'échelle des ordonnées est également indiquée.

A titre de comparaison, le couple moteur unitaire maximum, divisé par le nombre des aubes, figure également (le point à droite de chaque diagramme). Tous ces couples ont été relevés à vitesse de rotation normale et, sauf men-



tion spéciale, en conjugaison optimum, c'est-à-dire avec une ouverture du distributeur garantissant le meilleur rendement de la turbine pour l'ouverture de roue donnée.

Pour l'allure des courbes, le coefficient de chute  $\psi$  ou la vitesse spécifique sont déterminants. Voir pour illustration la figure 1*d* et pour explication le chapitre 5.

Suivant que l'axe du tourillon est placé plus ou moins loin de l'arête d'entrée, la roue a une tendance prédominante à l'ouverture ou à la fermeture, figures 1*a* et 1*b*. Ce principe a d'ailleurs été utilisé pour construire des roues dont les aubes s'orientent spontanément sans servo-moteur [17]. C'est pour se libérer de ce paramètre que nous avons exprimé une partie de nos résultats par la position du centre de poussée plutôt que par le coefficient de couple (figure 7).

L'ouverture du distributeur joue aussi un rôle: figure 1*b* et paragraphe 5.13. On élimine le paramètre «ouverture du distributeur» en reportant les

	1 <i>a</i>	1 <i>b</i>	1 <i>c</i>	1 <i>d</i>
$H_n m$	2,3	2,5	17,4	43
$z_2$	3	4	5	8
$n_s$	890	800	620	390
$\Omega$	1,67	1,5	1,14	0,72
$\lambda$ moyen	0,5	0,7	1,0	1,5
Distance de l'axe de pivotement à l'arête d'entrée en % de la corde	50%	40%	valeurs intermédiaires	

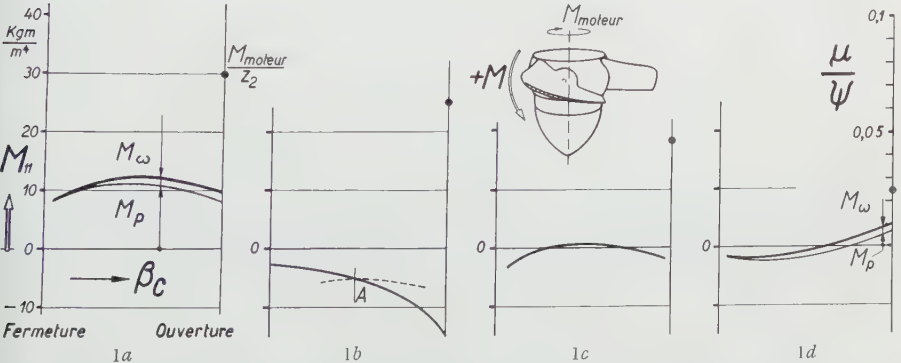


Figure 1

Allure du couple de pivotement agissant sur les aubes en fonction de leur ouverture

Parmi les 4 installations, les roues *a* et *c* figurent également au tableau 1.

— distributeur en conjugaison optimum; - - - - distributeur fixe.

Relevés à vitesse normale.

résultats de mesures sous forme de coefficient aérodynamique en fonction de l'incidence de l'écoulement relatif, paragraphe 4.5. Il n'est cependant pas possible de ramener exactement tous les points sur une même courbe à cause des écoulements dans la troisième dimension [20]. Aux déplacements radiaux correspondent en effet d'importants changements dans la répartition du débit sur l'envergure de la pale et aussi entre l'entrée et la sortie de la roue [12, 18]. C'est une des raisons pour lesquelles le couple de pivotement à l'emballement doit être déterminé au laboratoire: figure 2.

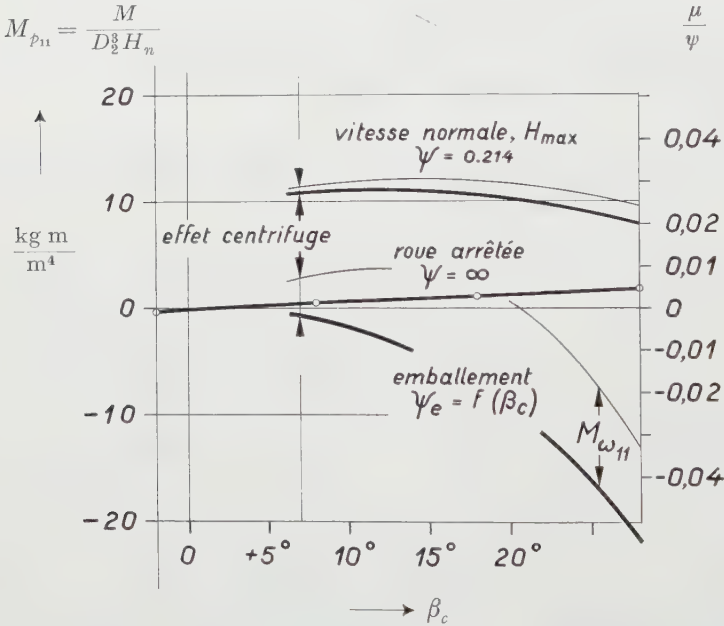


Figure 2

Couples de pivotement d'après les mesures sur modèle réduit  
(chapitre 4)

Les courbes dans ce diagramme résultent d'essais sur la roue tripale. La proportion entre le couple centrifuge et hydraulique correspond à l'exécution. Les grandeurs reportées sont *directement* proportionnelles au couple agissant sur la roue sous chute constante. Le sommet de la courbe du couple à l'emballement correspond à peu près au maximum de la vitesse d'emballement en fonction de l'ouverture de la roue.

### 3. Le couple de pivotement d'origine centrifuge

L'effort de torsion qu'exercent les forces centrifuges sur une pale en rotation a été plus particulièrement étudié en aéronautique [2, 3, 8, 11]. Pour les turbines hydrauliques, les exposés publiés sont plutôt qualitatifs. Pour rendre compte numériquement de l'effet centrifuge, nous avons fait une étude suc-

cincte [5]. Nous en rappelons ci-dessous la formule principale, légèrement modifiée pour les besoins de la pratique.

### 3.1 Formule générale

Il est commode, pour exprimer le couple de pivotement d'origine centrifuge, d'introduire la force de traction centrifuge  $F_\omega$ , force que le constructeur calcule de toute façon:

$$M_\omega = F_\omega \frac{i_{\max}^2 - i_{\min}^2}{R_{C.G.}} \cdot \frac{\sin 2 \beta_0}{2}. \quad (1)$$

Dans cette expression,  $F_\omega$  est la force de traction centrifuge agissant sur la feuille de l'aube (à l'exclusion du moyeu: celui-ci, étant centri-symétrique par rapport à l'axe de pivotement, ne participe pas au couple);  $R_{C.G.}$  est la distance entre l'axe de rotation de la roue et le centre de gravité de la feuille. Les rayons d'inertie principaux de la feuille et sa direction principale  $\beta_0$  (paragraphe 1.3), sont définis à partir de l'axe de pivotement.

On compare aisément l'expression ci-dessus avec celle du couple de pivotement causé par le *poids de l'aube*. Ce dernier couple pourra atteindre quelques pourcents de l'amplitude de  $M_\omega$  dans des roues d'un diamètre supérieur à 6 m, le rapport entre l'accélération terrestre et l'accélération centrifuge  $\omega^2 R_{C.G.}$  croissant avec les dimensions de la roue.

Le couple unitaire centrifuge peut s'écrire

$$M_{\omega_{11}} = \frac{F_\omega}{R_{C.G.} D_2 H_n} \left( \frac{\bar{L}}{D_2} \right)^2 \left[ \left( \frac{i_{\max}}{\bar{L}} \right)^2 - \left( \frac{i_{\min}}{\bar{L}} \right)^2 \right] \frac{\sin 2 \beta_0}{2}. \quad (1')$$

Le rapport entre la corde moyenne  $\bar{L}$  et le diamètre extérieur  $D_2$  met en évidence le fait que le couple est d'autant plus grand que l'aube s'étend sur une plus grande partie de la périphérie de la roue. C'est ainsi que parmi les turbines haute chute, celles qui ont relativement peu d'aubes subissent les plus grands moments de torsion centrifuge: tableau I, avant-dernière colonne.

### 3.2 Remarques au sujet des moments d'inertie

On calcule les moments d'inertie le plus commodément en partant des coupes cylindriques. Le moment d'inertie maximum, calculé dans le plan du cylindre développé, est alors à multiplier par le facteur correctif

$$1 - \frac{1}{7} \left( \frac{L \cos \beta_0}{D} \right)^2.$$

De toutes les coupes cylindriques résulte le rayon d'inertie maximum de l'aube  $i_{\max}$ . Si le système d'axes utilisé a son origine au centre de gravité des profils, le rapport  $i_{\max}/\bar{L}$  varie remarquablement peu d'une aube à l'autre. Le rayon d'inertie

tie minimum qui, lui, dépend de l'épaisseur relative des profils est assez petit pour être négligé.

Il est donc aisé d'estimer rapidement le couple centrifuge en admettant pour  $i_{max}/L$  une valeur moyenne d'environ 0,23. Quant à la direction principale  $\beta_0$ , il suffit de l'identifier à l'angle de calage  $\beta_c$  défini au paragraphe 1.3.

La position des centres de gravité des profils par rapport à l'axe du tourillon a une influence pratiquement négligeable sur le moment d'inertie de l'aube. En effet, la distance entre le centre de gravité et l'axe de pivotement ne dépasse guère 5% de la corde (l'écart dans le plan perpendiculaire à la feuille doit susciter, avec la force centrifuge  $F_\omega$ , un couple de flexion contrebalançant celui de la poussée hydraulique). En regard des 23% admis pour le rayon d'inertie, ces 5% sont effectivement négligeables puisque le rayon d'inertie par rapport au tourillon résulte de la somme des carrés de ces deux valeurs.

### 3.3 *Le rapport entre le couple d'origine centrifuge et celui résultant des pressions à la surface de l'aube*

Considérons les couples agissant entre deux coupes cylindriques de l'aubage. Le rapport entre les deux catégories d'efforts peut s'exprimer, tant que le rendement hydraulique est proche de 1, par

$$\frac{\Delta M_\omega}{\Delta M_p} = \frac{\varrho_{aube}}{\varrho_{fluide}} \cdot \frac{4}{\psi} \cdot \frac{\left[ \left( \frac{i_{max}}{L} \right)^2 - \left( \frac{i_{min}}{L} \right)^2 \right] \sin 2 \beta_0}{\varepsilon \eta_h \frac{W_\infty}{U}} \cdot \frac{S}{D_z^2} \lambda. \quad (2)$$

On incorpore couramment le couple de pivotement centrifuge au couple hydraulique, admettant que leur rapport est constant pour un aubage donné. L'expression (2) permet de corriger cette hypothèse lorsque c'est nécessaire. Tel est le cas des essais à l'air: le premier facteur du terme de droite varie entre l'exécution et son modèle aérodynamique, tous les autres facteurs restant inchangés. Pour l'exemple auquel se rapporte la figure 1a, le rapport des densités vaut 8,1, tandis que lors des essais aérodynamiques de cette même installation ce facteur s'élevait à 780. La position du tourillon affecte aussi le rapport des couples (2) par le facteur  $\varepsilon$ , qui est l'excentricité de la résultante des pressions. Si l'on veut utiliser cette notion d'excentricité à l'emballlement lorsque  $\eta_h = 0 \ll 1$ , il faut remplacer dans l'équation (2)  $\eta_h W_\infty/U$  par le degré de réaction  $\varrho$ , paragraphe 1.3. En se basant sur des mesures, sur des calculs selon l'équation (1') et sur quelques estimations comme en permet l'équation (2), on a établi le tableau 1. Les valeurs indiquées sont les couples maxima des quatre installations choisies, les valeurs extrêmes étant celles qui intéressent davantage le constructeur. Le rapport des deux moments de torsion montre que c'est le premier aubage, le plus rapide, qui se prête le mieux aux

essais aérodynamiques. L'effet centrifuge ne risque pas d'y prendre des proportions prohibitives pour la détermination du couple résultant des pressions. Sans vouloir généraliser sur la base des quelques valeurs du tableau 1, on peut relever l'influence de la chute et du nombre d'aubes, influence qui est concrétisée dans l'équation (2) par  $S/D_2^2$ ,  $S$  étant la surface du profil utilisé.

Tableau 1  
Valeurs extrêmes des couples de pivotement pour différentes installations

Chute maximum . . . . .	$H_{n\ max}$	$m$	2,3	4,3	17,4	43
Nombre d'aubes . . . . .	$Z_2$	—	3	4	5	8
Sous $H_{n\ max}$ pour la	$n_s$		890	810	620	400
puissance 10/10 { vitesse spécifique . vitesse spécifique sans dimension . .	$\Omega$	—	1,67	1,50	1,40	0,74
Maximum du couple dû aux pressions en conjugaison optimum . . . . .	$M_{p11}$	$\frac{Kgm}{m^4}$	+11 <sup>1)</sup>	-13	-10	+4
Rapport des maxima à vitesse normale .	$\frac{M_\omega}{M_p}$	—	0,16	0,15	0,34	0,33
Maximum du couple d'origine centrifuge à l'emballement . . . . .	$M_{\omega11}$	$\frac{Kgm}{m^4}$	10	9	17	6,7

1) Axe du tourillon à mi-longueur des profils d'où forte tendance à la fermeture.

4. Les essais

Les mesures de couple de pivotement dont nous rendons compte ici ont été effectuées au laboratoire de mécanique des fluides des Ateliers des Charmilles à Genève. Ces essais sur le modèle réduit d'une installation basse chute ont été faits à l'air.

4.1 Caractéristiques du modèle

Le modèle est celui d'une machine rapide à axe horizontal du type à bulbe amont.  
Diamètre de la roue  $D_2 = 61,7$  cm.  
Vitesse de rotation  $n = 1800$  t/min lors de la plupart des essais à l'air.  
Nombre des aubes de la roue  $Z_2 = 1$  à 4.

Distributeur fixe dans une position adaptée à la roue tripale. Pour cette position du distributeur, le meilleur rendement était atteint sous des chutes correspondant à

$$p = 0,227; 0,172; 0,142 \text{ pour } Z_2 = 4; 3; 2.$$

Il s'agit donc d'une machine rapide. La roue tripale, par exemple, a son meilleur rendement avec un angle de calage des aubes  $\beta_c = 20^\circ$  et un coefficient de



débit  $\varphi = 0,223$ . Sa vitesse spécifique selon [4] est alors

$$\Omega = \sqrt{\frac{\varphi(1-v^2)}{\psi\sqrt{\psi}}} = 1,638.$$

Pour une telle machine, la vitesse spécifique à pleine charge serait de l'ordre de

$$n_s = 1000.$$

Son caractère ressort aussi des proportions de l'aubage:

Rapport entre les diamètres moyeu et roue  $v = 0,4$ .

Surface de l'aube rapportée à la section de passage

$$\frac{S_{aube}}{\frac{\pi}{4} D_2^2 (1-v^2)} = 0,181$$

d'où résulte la corde moyenne selon la définition du paragraphe 1.3.

$$\frac{\bar{L}}{D_2} = 0,434$$

et le rapport de recouvrement moyen, paragraphe 1.3,  $\lambda = (L/t)_{moyen} = Z_2 \cdot 0,181$ . Ces valeurs correspondent à peu près aux valeurs relevées dans la coupe cylindrique qui partage la section de passage en deux moitiés. Cette coïncidence, sans être nécessaire, facilite l'interprétation des résultats obtenus pour l'ensemble de l'aube. Dans cette coupe cylindrique, la ligne squelette a une flèche égale aux 3% de la corde. C'est par rapport à la direction de cette corde que l'angle de calage  $\beta_c$  est défini.

L'axe du tourillon passe à mi-longueur de la corde.

#### 4.2 La technique des mesures

C'est directement par pesées que le couple de pivotement a été déterminé, et non par l'intermédiaire de relevés de pression sur l'aube. Ainsi le couple centrifuge est inclus dans la mesure. Pour que celui-ci, dans l'essai à l'air, ne masque pas le couple aérodynamique, des aubes creuses en Araldit stratifié ont été utilisées. Leur feuille a une densité moyenne d'environ 1 g/cm<sup>3</sup>.

On mesure la rotation de la pale et de son tourillon sous l'effet du couple: un déplacement angulaire de 0,1° correspondant à l'effort maximum. Cette rotation entraîne un levier dont le déplacement est repéré électriquement par la variation de l'inductivité d'un circuit haute fréquence<sup>3)</sup>. Le passage du courant alternatif de la roue aux instruments fixes se fait sans contact, par un transformateur coaxial avec la machine.

<sup>3)</sup> Livré par la Maison Vibro Meter, Fribourg, Suisse.



La réduction de la traction centrifuge et l'emploi de palier-butée à billes empêchent que le couple de frottement ne fausse les mesures.

À part les mesures nécessaires à la détermination du rendement, des sondages ont été faits en aval et surtout en amont de la roue. Ces derniers permettent de reconstituer les vitesses relatives à l'aube en grandeur et en direction. Il est ainsi possible de présenter une partie des résultats sous forme de coefficients d'un caractère plus général, indépendants de l'installation. Une pesée de la poussée axiale serait plus expéditive que les sondages; à défaut d'une analyse de l'écoulement, elle permettrait une généralisation des résultats comme celle que vise le paragraphe 4.5.

#### 4.3 *La mesure du couple centrifuge*

Une mesure d'étalonnage consiste à déterminer le couple d'origine centrifuge. Pour l'isoler, l'aubage a été placé entre deux disques fixés l'un en amont, l'autre en aval sur le moyeu. Entre ces disques les mouvements de l'air sont assez faibles pour ne pas fausser la mesure du couple centrifuge. Celui-ci s'est naturellement révélé fonction de l'angle de calage selon la sinusoïde de l'équation (1). Une confrontation entre des pesées faites avec une aube d'aluminium – donc de densité uniforme – et le calcul, qui dans ce cas n'a rien de problématique, a révélé une concordance entre les directions principales de moins d'un quart de degré d'angle, et de 1% entre les amplitudes.

#### 4.4 *Les résultats de mesure du couple aérodynamique*

La figure 2 donne l'essentiel des résultats sous la forme la plus commode pour le constructeur du mécanisme de réglage.

Toutes les courbes se rapportent à la même valeur du coefficient  $\psi$ , correspondant à la chute maximum pour l'exécution. Les ordonnées sont donc toutes à la même échelle. Leur grande variation suivant la vitesse de rotation est principalement imputable aux variations dans les pressions dynamiques auxquelles l'aube est exposée.

On réduit considérablement le domaine de variation des résultats en introduisant une pression dynamique de référence qui tienne compte des vitesses  $U$  et  $C_m$  [5]. Pour cela, les mesures faites pour la détermination du rendement suffisent. On peut faire un pas de plus dans le sens de la généralisation: paragraphe 4.5.

#### 4.5 *La détermination de coefficients aérodynamiques*

Nous introduisons ici les définitions appliquées aux profils isolés. Considérons une coupe cylindrique de l'aubage. Nous y définissons à partir des vitesses

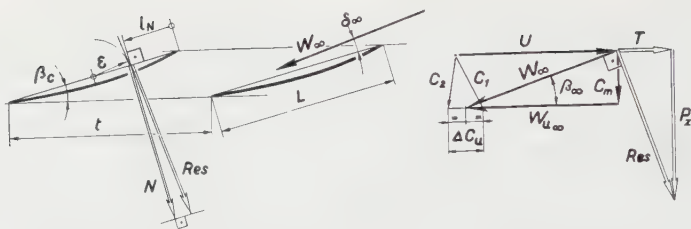


Figure 3

*Esquisses de principe pour les définitions des paramètres de grilles et des vitesses*

Les forces considérées sont celles agissant sur une aube.

Le triangle des forces se rapporte à un écoulement plan sans pertes. Il est alors semblable au triangle formé par les vitesses  $W_\infty$ ,  $C_m$ ,  $W_{u_\infty}$ .

figure 3 le « degré de réaction cinématique » [19]

$$\varrho_{cin} = \frac{W_{u_\infty}}{U}. \quad (3)$$

Au moyen de ce rapport de vitesses et des coefficients d'écoulement  $\varphi$  et  $\psi$  définis dans la coupe considérée on peut exprimer la pression dynamique de référence  $W_\infty^2 \varrho/2$

$$\frac{W_\infty^2/2}{g H_n} = \frac{(W_\infty/U)^2}{\psi_R} = \frac{\varphi_R^2 + \varrho_{cin}^2}{\psi_R}. \quad (4)$$

Si l'on dispose de résultats de mesure en amont de la roue, caractérisant le distributeur, on calculera  $\varrho_{cin}$  d'après :

$$\varrho_{cin} = 1 - \varphi_R \operatorname{ctg} \alpha_1 + \frac{\psi_R \eta_h}{4}. \quad (5)$$

Si l'on dispose de mesure de poussée axiale, on pourrait, dans une certaine mesure, assimiler le degré de réaction cinématique au degré de réaction moyen défini par le coefficient de poussée hydraulique, comme si l'écoulement était plan et sans pertes :

$$\varrho_{cin} \rightarrow \frac{z_2 P_z}{\varrho_{fluide} g H_n \frac{\pi}{4} D_2^2 (1 - \nu^2)}.$$

Quant à la direction de la vitesse moyenne  $W_\infty$ , elle résulte, selon la figure 3, de

$$\operatorname{ctg} \beta_\infty = \frac{\varrho_{cin}}{\varphi_R}. \quad (6)$$

Pour rendre compte du comportement de la pale entière, nous choisissons le rayon  $R = R_2 \sqrt{(1 - \nu^2)/2}$  et nous reconstituons un écoulement à partir des

mesures intégrales

$$\left(\frac{W_\infty}{U_2}\right)^2 = \varphi^2 + \left(\bar{Q}_{cin} \frac{\bar{R}}{R_2}\right)^2 \quad (4')$$

où

$$\bar{Q}_{cin} = 1 - \frac{\int C_{u1} R C_m dR^2}{\bar{U} \bar{R} \int C_m dR^2} + \frac{\psi \eta_h}{4 (\bar{R}/R_2)^2}. \quad (5')$$

Le dépouillement selon (4') et (5') a livré les points de mesure de la figure 4, que les calculs feront mieux comprendre.

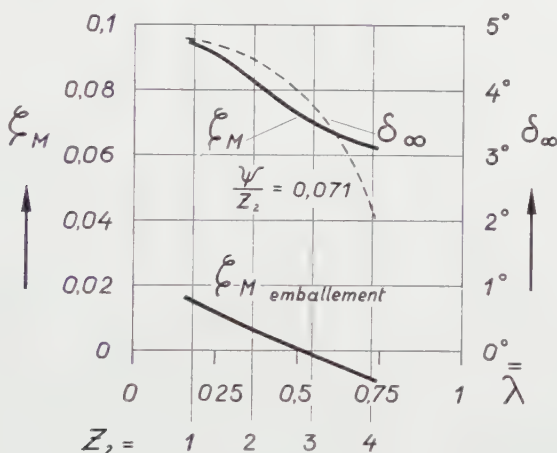


Figure 4

Coefficient de couple aérodynamique résultant de quelques mesures avec  $\beta_c = 7^\circ$

Les points résultant du dépouillement selon le paragraphe 4.5 sont destinés à faire ressortir l'influence du nombre d'aubes. Celui-ci se manifeste particulièrement comme effet de grille, fonction du recouvrement  $\lambda$ .

## 5. Calculs relatifs au couple résultant de la répartition de pression

Certaines lois qui président aux variations du couple de pivotement hydraulique des figures 1, 2 et 4 ressortent de calculs relativement simples. Tous ces calculs se rapportent au développement dans le plan de coupes cylindriques. Les effets de déplacements radiaux [9, 10], du frottement, d'éventuelles zones de décollement, de cavitation sont négligés. De ce fait le calcul exact de l'emballement est exclu; par contre, le comportement de l'aube dans les conditions de marche normales est assez bien rendu pour confirmer nos résultats expérimentaux.

La confrontation des répartitions des pressions mesurées et calculées montre qu'en régime turbine, l'influence du frottement sur la position de la résultante des pressions est faible. Nous avons ainsi dépouillé les figures 99, 101 et 105 à

107 du travail [15] pour constater des déplacements sous l'influence du frottement inférieurs à 2% de la corde et généralement vers l'amont.

### 5.1 Les deux cas limites du profil isolé et de la grille serrée

Le changement dans le sens de la cambrure que l'on constate entre les courbes 1a, 1b, 1c d'une part et la courbe haute chute 1d d'autre part peut s'expliquer par des considérations très schématiques. Si l'on poursuivait la série des figures 1 par des machines de plus en plus rapides, le nombre des aubes et la corde de leurs profils diminuant, on arriverait finalement à considérer des aubes se comportant comme des profils isolés, sans effet de grille. Aubage semblable à celui de moulins à vent du type hélice.

Inversément, une extrapolation au delà de la roue haute chute (figure 1d), conduirait théoriquement à envisager un aubage aussi serré que celui de certaines turbines à vapeur ou d'une Francis. Nous passons ainsi à la limite d'une succession dense de lignes squelette.

Nous comparons nos turbines schématiques sous une chute constante et à vitesse de rotation constante. Le couple moteur est alors proportionnel au débit. Pour nos «grilles» cela signifie que, dans la figure 3,  $\Delta C_u$  et  $U$  sont constants et que la force tangentielle est proportionnelle à  $C_m$ . Sans pertes, la poussée axiale est proportionnelle à  $W_{u\infty}$  et la résultante à  $W_\infty$ .

5.11 *Schéma de la machine rapide.* Une machine extrêmement rapide n'aura point d'appareil directeur [7]. A la limite,  $\Delta C_u$  sera négligeable en regard de  $U$ . Le degré de réaction sera indépendant du débit. Sur cette base, la figure 5 a été établie. Le profil est schématique lui aussi: NACA 8400, donc sans épaisseur. C'est la ligne squelette de [15]. Pour un angle de calage de  $25^\circ$  nous avons admis la condition d'écoulement «sans choc»<sup>4</sup>). Même des hypothèses aussi simples rendent l'allure des couples de pivotement comme ceux de la figure 1b et 1c, suivant la position admise pour le tourillon.

Un appareil directeur fixe déplacerait le sommet de la courbe vers des ouvertures de roue plus grandes (ligne pointillée, figure 5b). Le degré de réaction diminuerait lorsque la roue s'ouvre, tout comme la poussée hydraulique mesurée sur les Kaplan rapides.

5.12 *Schéma de la machine lente.* La turbine lente a un appareil directeur réglable dont l'ouverture est fonction de celle de la roue. La conjugaison de ces deux ouvertures doit assurer le rendement maximum. Nous schématisons cette condition par celle d'une entrée tangentielle (ne pas faire intervenir l'aspirateur dans la recherche du meilleur rendement est d'autant plus licite que

<sup>4</sup>) Il n'y a point de choc tant que la compressibilité du fluide n'entre pas en jeu. Nous qualifions d'entrée sans choc la condition symétrique de celle que l'on impose toujours à l'arête de sortie: le point d'arrêt doit se trouver à l'extrémité de la ligne squelette. L'entrée est tangentielle.

la vitesse spécifique est faible). Cette même conjugaison a été choisie pour tracer les courbes en trait fin de la figure 5b.

La « grille » assure une déflexion angulaire constante qui, pour les profils NACA 8400, est de  $36^\circ$ . Dans une grille infiniment serrée le calcul des couples de pivotement relève simplement de la géométrie. Il conduit à des intégrales du type

$$\int y y' y'' dx \text{ pour le couple dû à la force axiale parallèle à } x,$$

et

$$\int x y'' dx \text{ pour le couple dû à la force tangentielle parallèle à } y.$$

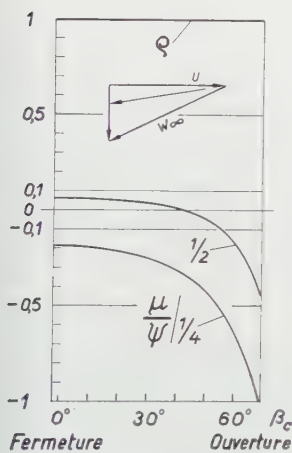


Figure 5a

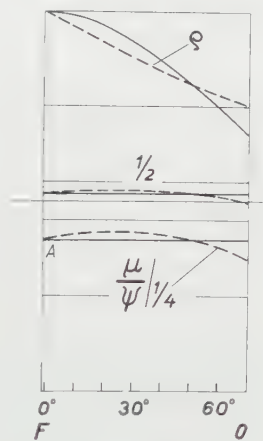


Figure 5b

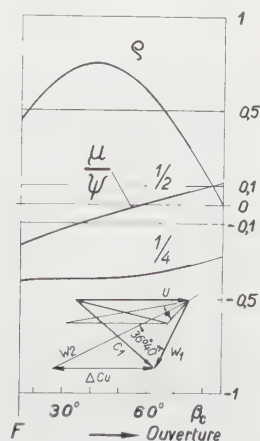


Figure 6

Figure 5. Couple de pivotement sans dimension  $\mu$  et degré de réaction  $q$  d'une turbine très rapide schématisée par le comportement sans pertes d'un profil isolé (paragraphe 5.11)

Profil choisi sans épaisseur: NACA 8400.

Positions du tourillon:  $1/4$  et  $1/2$  de la corde à partir de l'arête d'entrée.

La tendance prédominante à la fermeture même lorsque l'axe de pivotement passe à  $1/4$  de la corde provient de la cambrure. Celle-ci assure toute la portance aux points d'adaptation - définis par l'entrée tangentielle de l'écoulement (un accroissement de l'angle d'incidence agirait comme le montre la figure 8).

a) *Sans distributeur.* L'aubage est établi pour une entrée tangentielle, sans choc, pour un angle de calage  $\beta_c = 25^\circ$ . Le domaine de variation d'ouverture de la roue a été prolongé loin au delà des ouvertures d'une machine réelle. Il n'y a pas de fermeture au sens géométrique telle qu'elle se réalise lorsque  $\lambda > 1$ . Le débit cesse lorsque la puissance développée par la turbine est réduite à zéro - à ce régime précis puisqu'il est fait abstraction des pertes.

b) *Avec distributeur.* — — — — ouverture du distributeur constante; l'entrée tangentielle, sans choc, a été choisie pour  $\beta_c = 50^\circ$ ; — — — — conjugaison optimum entre l'ouverture du distributeur et celle de la roue de manière à réaliser une entrée sans choc à tous les débits.

Figure 6. Couple de pivotement sans dimension  $\mu$  et degré de réaction  $q$  d'une turbine très lente schématisée par le comportement sans pertes d'une grille formée de lignes squelette très serrées (paragraphe 5.12) Le distributeur est supposé en conjugaison optimum avec la roue de manière à assurer une entrée tangentielle sous toutes les charges.



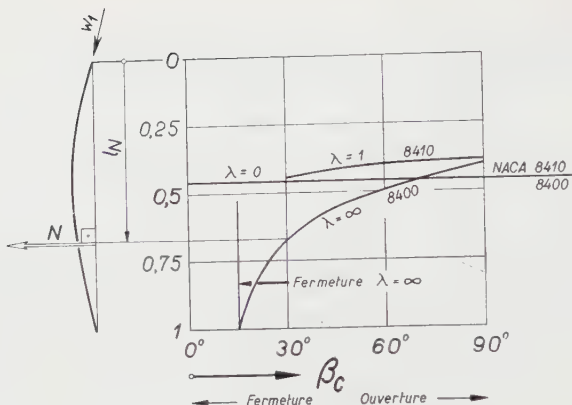


Figure 7

*Déplacements du centre de poussée en fonction de l'ouverture de la roue dans les conditions d'écoulement sans choc – entrée tangentielle*

Le centre de poussée est défini comme l'intersection entre la corde du profil et la ligne d'action d'une force normale à la corde (figure 3). La grandeur  $l_n$  permet de déterminer le couple de pivotement tant que l'incidence  $\delta_\infty$  est faible.

La courbe présentant les plus fortes variations correspond au cas limite d'une grille serrée (paragraphe 5.12). Des valeurs moins influencées par l'angle de calage  $\beta_c$  proviennent de calculs de grilles avec  $\lambda = 1$  [15] dépouillés selon le paragraphe 5.21.

Ce sont des intégrations élémentaires dans le cas de profils formés de paraboles, comme la plus ancienne série NACA, dont fait partie le squelette choisi. La courbe  $\lambda = \infty$  (figure 7) résume une partie des calculs.

Sans autres hypothèses, la figure 6 en résulte. Elle rend bien la cambrure vers le haut du diagramme 1d. Ce dernier est basé sur des mesures qui ne rendent pas compte de la fin de course côté fermeture. En se basant sur la fermeture de machines moins lentes, telle que celle de la figure 1c, on peut néanmoins confirmer la tendance à l'ouverture qui ressort du calcul en  $F$ . Une autre confirmation réside dans un calcul hydrostatique de la fermeture.

**5.13 Influence de l'ouverture du distributeur.** Pour des degrés de réaction et pour des ouvertures du distributeur moins grands que ceux admis aux paragraphes 5.11 et 5.12, les profils seraient exposés à une pression dynamique  $W_\infty^2 \varrho/2$  réduite. A débit constant, cette réduction est plus forte que celle qu'entraîne, pour la force résultante, la diminution du degré de réaction. Le coefficient de portance devra donc augmenter – selon les hypothèses faites au paragraphe 5.1 en raison inverse de  $W_\infty$ . Cet accroissement du coefficient est réalisé par une augmentation de l'angle d'incidence  $\delta_\infty$  par rapport au profil.

La part de la portance due à l'incidence, par opposition à celle réalisée dans un écoulement «sans choc» par la cambrure seule, a une ligne d'action passant plus près de l'arête d'entrée, par le «centre aérodynamique». Celui-ci se trouve





dont nous citerons un exemple basé sur la méthode du professeur ACKERET [1, 13].

5.21 *Calculs de grilles à partir d'un profil donné.* Parmi les travaux du professeur SCHLICHTING, les diagrammes de répartition de pression de [15] nous ont permis de déterminer le centre de poussée sur le profil NACA 8410. C'est la ligne d'action de la force agissant normalement à la corde qui est ainsi repérée, et ceci pour différentes dispositions de grille.

La courbe ainsi obtenue pour  $\lambda = 1$  et une entrée tangentielle (figure 7), a un caractère intermédiaire entre les deux extrêmes des paragraphes 5.11 et 5.12. La position de la force imputable à la cambrure varie un peu suivant l'ouverture de la roue. La force ne se place pas *entre* les positions extrêmes correspondant à  $\lambda = 0$  et  $\lambda = \infty$  à cause de l'épaisseur du profil – effet que le tableau 2 et le paragraphe suivant illustrent.

5.22 *Calcul de grilles partant de données hydrauliques.* Nous utilisons la méthode du professeur ACKERET sous sa forme la plus récente [13], telle qu'elle a déjà été utilisée pour une Kaplan [9], chapitre IV.3. Mais, par opposition à ce qui est usuel lors du tracé de l'aubage, nous n'avons pas introduit d'emblée l'épaisseur, afin d'en repérer l'influence. Pour réaliser le même triangle de vitesse et la même répartition de circulation (figure 9), nous avons ainsi trouvé

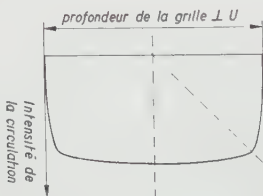


Figure 9

*Répartition de la circulation sur la profondeur de la grille admise pour le calcul selon la méthode Ackeret* Pour le calcul, les singularités sont admises comme fonctions de la profondeur de la grille. Ici la répartition de la circulation est formée de fractions d'une ellipse dont le rapport des axes vaut 0,15. Comme la circulation, l'épaisseur NACA 0005 a été distribuée en fonction de la distance entre les plans d'entrée et de sortie de la grille.

3 profils: 1° celui d'une grille serrée comme au paragraphe 5.12 et qui représente l'approximation d'EULER de l'écoulement désiré; 2° le profil sans épaisseur, se réduisant à une ligne squelette, avec une corde à peu près égale au pas; 3° le profil utilisable, avec une répartition d'épaisseur apparentée à celle du NACA 0005.

La force résultant de la répartition de pression autour du profil a une position différente dans les trois cas, comme le montre le tableau 2. Comme pour

Position du centre de poussée pour différentes grilles dans les conditions d'écoulement avec entrée tangentielle, dite sans choc.  
Angle de calage à peu près le même dans les 6 grilles:  $\beta_0 = 36^\circ$

Conditions initiales du calcul	Épaisseur répartie selon NACA 0005 et 0010 (pour [1] suivant la profondeur de la grille)	Longueur du profil rapportée au pas: recouvrement $\lambda = \frac{L}{t}$	Épaisseur rapportée au pas $\frac{d}{t}$	Position du centre de poussée: Fraction de la corde comprise entre l'arête d'entrée et la ligne d'action de la normale à la corde $\frac{l_N}{L}$	Cause des variations de $l_N$
Conditions d'écoulement: Répartition de circulation selon figure 9 Méthode [1]	0	$\infty$	0	0,518	} $\lambda$ seul (effet de grille) } $d/L$ seul
	0	1,02	0	0,468	
	5%	0,98	5%	0,442	
Conditions géométriques: Forme du profil selon NACA 8410 Méthode et répartition de pression [15]	10%	2	20%	0,38	L'effet d'épaisseur l'emporte sur l'effet de $\lambda$
	10%	1 $\frac{1}{3}$	15%	0,42	
	10%	1	10%	0,43	
Pour comparaison: Calcul linéarisé du profil isolé squelette NACA 8400	quelconque	0	0	0,457	

la figure 7, l'écoulement d'entrée est tangentiel, dit sans choc. A circulation inchangée, la résultante se déplace vers la zone d'épaisseur maximum.

Pour rester dans la limite de notre sujet, bornons-nous à signaler qu'après avoir librement choisi la répartition de circulation et d'épaisseur nous paraissant susceptible de donner le plus de sécurité contre la cavitation, il est compréhensible que nous ayons obtenu du premier coup un profil ayant sur les  $\frac{2}{3}$  de son dos une pression constante à 5% de  $W_1^2 \rho/2$  près. C'est précisément là l'un des avantages de la méthode citée, particulièrement important lorsque le danger de cavitation impose des conditions strictes à la répartition de pression. Evidemment l'influence de l'angle de calage, variable dans une Kaplan, échappe à ce mode de calcul. Nous pensons que c'est l'un des points à élucider par les essais, ceux-ci étant – pour le moment du moins – indispensables aux conditions de marche extrêmes, en particulier à l'emballement.

## 6. Conclusions

L'estimation du couple de pivotement d'origine centrifuge et de ses variations peut être faite d'une manière très expéditive. Ce couple peut faciliter considérablement la fermeture à l'emballement. Cependant, c'est le couple hydraulique qui donne son caractère aux variations des efforts de réglage.

Les différentes allures du couple de réglage en fonction de l'ouverture de la roue sont assez bien rendues en considérant les cas limites d'un profil isolé et d'une grille formée de lignes squelettes très serrées. Ainsi ressort l'effet observé de la vitesse spécifique, de la position du tourillon et de l'ouverture du distributeur.

L'effet de grille, souvent étudié quant au coefficient de portance, se fait aussi sentir sur le coefficient de couple, et dans une certaine mesure sur la position de la résultante. Dans une grille, la force résultant de la cambrure se déplace suivant l'angle de calage des profils, donc suivant l'ouverture de la roue. Elle se rapproche du bord de fuite à la fermeture. Quant à la force résultant de l'angle d'incidence, elle passe de  $\frac{1}{4}$  de la corde du profil isolé à l'arête d'entrée dans l'extrême cas de la grille serrée. Un tel déplacement vers l'entrée peut aussi être imputable à l'épaisseur du profil.

A part les relevés de travail de réglage, des résultats de mesures de couple de pivotement sur modèle réduit sont présentés.

Pour terminer, je tiens à exprimer ma reconnaissance au professeur R. NEESER, président du Conseil d'administration des Ateliers des Charmilles. Tenant à participer à cette publication, il m'a permis de bénéficier de la documentation, des collaborateurs et du temps nécessaires à ce travail. Ma gratitude va aussi à mon vénéré maître, le professeur ACKERET, en particulier pour la manière dont il m'a facilité l'usage de sa méthode.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ACKERET, J., *Zum Entwurf dichtstehender Schaufelgitter*, Schweiz. Bauztg. 120 (9), 120 (1942).
- [2] CALDWEL, F. W., *American Progress in Controllable Pitch Propellers*, International Congress for Aeronautics, London (1923).
- [3] CORDES, G., *Die Rolle des Luftkraftmomentes in der Verstellpropeller-Technik*, Luftfahrtforschung 18 (2), 373-377 (1941).
- [4] CORDIER, O., *Ähnlichkeitsbedingungen für Strömungsmaschinen*, VDI-Berichte 3, 85-88 (1955).
- [5] CHAIX, B., *Couples de pivotement d'origine hydraulique et centrifuge agissant sur les pales de roues Kaplan*, communication faite à la Soc. Suisse de Phys. le 22 septembre 1957. Résumé: Z. angew. Math. Phys. 9, 90 (1958).
- [6] DEGEN M., *Untersuchungen an einem Gegenlaufpropeller im Windkanal*, Mitteilung aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH, No. 18 (1951), p. 53-65.
- [7] DICKMANN, H., *Grenzen der Anwendbarkeit von Leitapparaten bei axialen hydraulischen Arbeitsmaschinen (Pumpen, Gebläsen und Düsenschauben)*, Mitteilung aus dem Institut für Strömungslehre und Strömungsmaschinen, Technische Hochschule Karlsruhe, Nr. 15 (1956).
- [8] GARDINER, G. C. I., et MULLIN, J., *The Design of Propellers*, J. roy. aeron. Soc. 53, 745-762 (1949).
- [9] GINSBURG, THEO, *Untersuchungen über die dreidimensionale Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter*, Mitteilung aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH, Nr. 21 (1956).
- [10] HAHN, K., *Die Untersuchung der Strömung durch eine Flügelradturbine bei verschiedenen Schaufelzahlen*, Mitteilungen aus dem Institut für Strömungslehre und Strömungsmaschinen, Technische Hochschule Karlsruhe (1939), p. 1-39.
- [11] HEINZ, W. B., *Design Problems of Controllable Pitch Propellers*, Trans. ASME. 54 (1932), partie AER-54-19, p. 157-163.
- [12] HUTTON, S. P., *Three-Dimensional Motion in Axial-Flow Impellers* (The Institution of Mech. Engineers, advanced copy, 4 may 1956).
- [13] MEYER, L., *Entwurf von Schaufelgittern*, Mitteilung aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH (en préparation).
- [14] SCHLAG, ALBERT, *Hydraulique générale et mécanique des fluides* (Dunod, Paris 1957).
- [15] SCHLICHTING, H., *Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes Schaufelgitter*, VDI-Forschungsheft 447, Ausg. B, Bd. 21 (1955), 35 p. et 12 p. tableaux.
- [16] SCHOLZ, N., *Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern*, VDI-Forschungsheft 442, Ausg. B, Bd. 20 (1954), p. 442.
- [17] TERRY, R. V., *Development of the Automatic Adjustable-Type Propeller Turbine*, Trans. ASME 62 (5), 395-409 (1941).
- [18] THUSS, W., *Strömungsmessungen vor und hinter einem Kaplan-Turbinenlaufrad*, VDI-Berichte 3, 89-91 (1955).
- [19] TRAUPEL, W., *Neue allgemeine Theorie der mehrstufigen axialen Turbomaschinen*, Diss. (ETH, Zürich 1942).
- [20] WALTER, ERICH, *Die Messung der Drücke auf dem Laufrad einer Flügelradturbine bei verschiedenen Schaufelzahlen*, Mitteilungen aus dem Institut für Strömungslehre und Strömungsmaschinen, Technische Hochschule Karlsruhe (1939), p. 41-78.



*Summary*

The knowledge of the twisting moment acting on the blades of turbines is particularly important for the construction of Kaplan water turbines. The moment due to the centrifugal forces is shown to amount to as much as 30% of the maximum hydraulic moment. Moments of rotation were measured at the Charmilles Engineering Works on a model runner with various numbers of blades. Measurements on radii upstream allow a computation similar to the one used in aerodynamics for isolated aerofoils. The character of governing forces measured in various plants can easily be explained by the behaviour of cascades in both limit cases of a very rapid and very slow runner, i. e.,  $\text{cord/pitch} = 0$  and  $\infty$ . Pressure distributions calculated by SCHLICHTING on actual cascades show an intermediate tendency of the pitching moment in function of the stagger angle. Calculations made with the Ackeret method show the influence of thickness when the distribution of the vortices is unchanged.

(Reçu: le 11 décembre 1957.)



## Le flux d'énergie en mécanique: Application aux turbo-machines

Par GEORGES DARRIEUS, Paris, France<sup>1)</sup>

### Introduction

La notion de flux d'énergie semble avoir fait sa première apparition en 1884 dans le célèbre et élégant théorème que POYNTING a déduit des équations de MAXWELL en électrodynamique<sup>2)</sup>. Huit ans plus tard W. WIEN a développé l'application aux divers chapitres de la physique de cette notion séduisante et éminemment suggestive, dans un important mémoire des *Wiedemann's Annalen*<sup>3)</sup>. Enfin VITO VOLTERRA au Congrès de physique de Côme en 1899, dans un exposé volontairement élémentaire, a étendu l'emploi de cette notion au cas de champs tels que celui de gravitation.

La détermination du flux d'énergie suppose une définition préalable de la localisation de l'énergie.

Seule la théorie de la relativité s'est montrée en mesure, par le principe d'équivalence de la masse et de l'énergie d'EINSTEIN, d'assigner à l'énergie interne une valeur absolue bien définie qui permette d'en effectuer le bilan sans ambiguïté.

Néanmoins le caractère pratiquement illusoire dans l'immense majorité des cas, de cette énergie totale, conduit à lui substituer en général une énergie utilisable évaluée chaque fois à partir d'un zéro conventionnel plus ou moins arbitrairement choisi conformément au point de vue qui a longtemps prévalu en thermodynamique, de l'ancienne énergétique (LE CHÂTELIER, DUHEM, OSTWALD... etc.), laquelle se refuse à définir l'énergie interne autrement que par ses échanges avec l'extérieur, c'est-à-dire à une constante arbitraire près.

Une première partie du flux d'énergie est assurée par le transport, solidairement avec celui de la matière, de l'énergie ainsi localisée et comprenant, par unité de masse, l'énergie interne  $E$  et l'énergie cinétique  $V^2/2$ , de sorte que l'énergie totale par unité de volume est  $(E + V^2/2) \rho$ , et le flux d'énergie à travers une surface quelconque immobile dans le champ est égal au flux à travers cette surface du vecteur  $(E + V^2/2) \rho \mathbf{v}$ , en désignant par  $\mathbf{v}$  le vecteur vitesse.

<sup>1)</sup> Cie Electro-Mécanique.

<sup>2)</sup> J. H. POYNTING, *Phil. Trans.* 175, 343 (1884).

<sup>3)</sup> W. WIEN, *Ann. Phys.* 45, 685 (1892).

Cette première partie du flux d'énergie existe seule dans le cas du transport ordinaire en réservoirs, en wagons-citerne... etc., des matières porteuses d'énergie, telles que les combustibles solides, liquides ou gazeux, les explosifs, les gaz comprimés... etc., renfermés dans des enveloppes (emballages) entre lesquelles ne se transmet aucune action mutuelle.

Une deuxième partie se manifeste en même temps que ces actions mutuelles, sous la forme du travail que développent alors par l'effet du mouvement les contraintes correspondantes au sein du milieu, et doit être considérée comme «transmise» à travers la matière indépendamment du transport proprement dit de l'énergie interne qui accompagne son propre déplacement.

Si nous désignons dans le cas général par  $N_{kl}$  le tenseur des pressions internes ( $N_{12}$  par exemple est la composante suivant la coordonnée  $x_2$  de la force par unité de surface exercée par le côté négatif du milieu sur le côté positif, à travers un élément de surface  $ds$ , normal à  $x_1$ ), la force exercée à travers un élément de surface  $ds^n$  normal au vecteur-unité  $n$ , a pour composante suivant  $x_l$ ,  $dN_{nl} = ds^k N_{kl}$ , de sorte que son travail par unité de temps, ou puissance transmise à travers l'élément de surface dans le sens du vecteur normal  $n$ , a pour valeur  $dN_{nl} v^l = ds^k N_{kl} v^l$ , produit scalaire du vecteur  $ds$  par le vecteur de composantes  $S_k = N_{kl} v^l$ , ou flux à travers l'élément de surface du vecteur  $S_k$ . C'est à cette deuxième partie, «transmise», par les contraintes du milieu, que se réduit le flux d'énergie dans le cas d'un corps dont l'énergie interne se réduit à une énergie élastique nulle ou négligeable, comme dans le cas du corps solide, des courroies ou câbles inextensibles, ou du fluide incompressible (transmissions hydrauliques).

Dans le cas du fluide parfait ou de viscosité négligeable, le tenseur des contraintes dégénère en une pression  $p$ , indépendante de l'orientation, et le flux d'énergie correspondant se réduit au vecteur  $p v$  dirigé suivant le vecteur  $v$ .

Le flux d'énergie total est ainsi représenté dans ce dernier cas (pression hydrostatique) par le flux du vecteur

$$S = \left( E + \frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} \right) \varrho v,$$

également dirigé suivant le vecteur  $v$ .

L'ensemble  $E + p/\varrho = E + \varrho \sigma$  des deux premiers termes de la parenthèse, en désignant par  $\sigma = \varrho^{-1}$  le volume spécifique, représente l'enthalpie  $H$  ou chaleur totale par unité de masse du fluide.

Remarquons d'ailleurs que, dans cette expression, la part  $p \sigma$  qui provient de l'énergie transmise de proche en proche dans le fluide par les contraintes qui y règnent, n'appartient pas en propre à l'élément considéré, mais au système entier, bien qu'elle se manifeste de la même manière que l'énergie interne et puisse être rapportée comme elle à l'unité de masse.

Dans le cas, très étendu et seul considéré ici, d'un fluide parfait non soumis à des échanges de chaleur et dont les changements d'état sont ainsi pratiquement isentropiques, la variation d'enthalpie, variation d'une fonction d'état ou différentielle exacte,  $dH = \sigma dp + T dS$  se réduit à son premier terme, de sorte que dans le cas d'une phase homogène où la densité et le volume spécifique  $\sigma$  ne sont plus ainsi fonction que de la seule pression  $p$ , l'enthalpie  $H$  se réduit à la fonction même de la pression  $H = \int dp/\rho$  qu'amènent à considérer en hydrodynamique les équations (EULER, BERNOULLI) des fluides parfaits.

Calculons maintenant la divergence du flux d'énergie pour mettre en évidence les diverses sources d'où procède ce flux :

$$\operatorname{div} S = \operatorname{div} \left[ \left( H + \frac{v^2}{2} \right) \rho v \right] = \left( H + \frac{v^2}{2} \right) \operatorname{div} \rho v + \left( \operatorname{grad} \left( H + \frac{v^2}{2} \right), \rho v \right)$$

où le deuxième terme représente le produit scalaire du gradient de  $H + v^2/2$  par le vecteur  $\rho v$ .

Or  $\operatorname{div} \rho v = -\partial \rho / \partial t$  en vertu de l'équation de continuité, et l'ensemble des équations d'EULER qui représentent les lois dynamiques du mouvement du fluide peut se mettre sous la forme vectorielle :

$$\operatorname{grad} \left( H + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} - v \wedge \operatorname{rot} v = F$$

où  $v \wedge \operatorname{rot} v$  désigne le produit vectoriel de  $v$  par son rotationnel ou vecteur tourbillon  $\operatorname{rot} v$ , et  $F$  la force de volume, telle que la gravité, appliquée au fluide et rapportée à l'unité de masse. Comme le produit scalaire de  $v \wedge \operatorname{rot} v$  par  $v$  est identiquement nul, la divergence de  $S$  se réduit, en tirant  $\operatorname{grad} (H + v^2/2)$  de la dernière équation, à

$$\operatorname{div} S = - \left( H + \frac{v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} - \left( \frac{\partial v}{\partial t}, \rho v \right) + \rho (v, F)$$

ou, en notant que

$$\frac{v^2}{2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right),$$

et que

$$H \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (H \rho) - \rho \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( E - \frac{p}{\rho} \right) \rho \right] - \rho \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho E);$$

$$\operatorname{div} S = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho E + \rho \frac{v^2}{2} \right) + \rho (v, F).$$

Le premier terme représente évidemment la contribution que donne à la puissance ou au flux d'énergie à travers une surface quelconque fermée immobile, la diminution de l'énergie totale,  $\rho (E + v^2/2)$  par unité de volume, renfermée à l'intérieur de cette surface, tandis que le deuxième terme représente

l'apport du travail des forces extérieures appliquées au fluide supposées distribuées de manière continue sous la forme des forces de volume qui interviennent dans les équations d'EULER.

Dans le cas général où ces forces de volume  $F$ , distribuées de manière quelconque au sein du fluide, ne dérivent pas d'un potentiel, de sorte que la conservation du tourbillon suivant le théorème de CAUCHY-HELMHOLTZ n'est plus assurée, il demeure cependant possible de représenter la force  $F$  comme la somme  $-\text{grad } U + N$ , du gradient d'un potentiel  $-U$  et d'un vecteur  $N$  normal à  $\text{rot } v$ .

Une détermination du potentiel  $U$  peut s'obtenir en notant que les projections  $F_l$  et  $-(\text{grad } U)_l$ , de  $F$  et de  $-\text{grad } U$ , sur la direction  $l$  de  $\text{rot } v$  sont égales, puisque  $N$  est normale à cette direction par définition.

Le potentiel  $U$  se calcule ainsi de proche en proche en intégrant l'équation ci-dessus le long des différentes lignes tourbillon, à partir de leur intersection respective avec une surface quelconque prise arbitrairement comme équipotentielle  $U_0$ ,

$$U = U_0 - \int_0^l F_l dl.$$

La force  $N = F + \text{grad } U = F_n + (\text{grad } U)_n$  se trouve ainsi déterminée et puisqu'elle est normale à  $\text{rot } v$ , il est permis de la poser égale au produit vectoriel  $-w \wedge \text{rot } v$ , en définissant ainsi en tout point du champ de tourbillons, une vitesse  $w$  en outre normale à  $\text{rot } v$ , et résultant du caractère partiellement non irrotationnel de la force  $F$ .

L'équation d'EULER prend ainsi la forme

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (v - w) \wedge \text{rot } v + \text{grad} \left( H + \frac{v^2}{2} + U \right) = 0.$$

Son intégration le long d'un circuit fermé fait disparaître le terme en  $\text{grad}$  tandis que l'intégrale des deux premiers termes représente (comme on peut s'en assurer aisément par l'application du théorème de STOKES, suivant une forme de raisonnement que HERTZ a utilisée dans le calcul analogue de la force électromotrice induite dans un circuit mobile) la dérivée par rapport au temps de la circulation le long du circuit dans le cas où les différents points de ce circuit se meuvent avec la vitesse  $u = v - w$ <sup>4</sup>). La conservation de la circulation ou du tourbillon total embrassé est ainsi assurée, non plus pour un circuit fluide ou se déplaçant en tout point avec la vitesse même  $v$  du fluide, comme dans le cas des forces conservatives (théorème de CAUCHY-HELMHOLTZ), mais pour un circuit mobile tel que dans la région où les forces ne dérivent pas d'un

<sup>4</sup>) Le choix des notations  $u$ ,  $v$ ,  $w$  s'inspire des conventions usuelles de la théorie des turbomachines:  $u$  = vitesse d'entraînement,  $v$  = vitesse absolue,  $w$  = vitesse relative.

potentiel, le fluide se meut par rapport à lui ou par rapport aux tubes tourbillon (tourbillons liés) avec une vitesse relative  $w$ .

Le cas des turbomachines où les forces extérieures sont transmises au fluide par l'intermédiaire d'aubes solides autour desquelles existe une circulation donnant lieu à une portance suivant le théorème de KUTTA-JOUKOWSKI, peut être ramené au cas du fluide indéfini par la fiction (PRANDTL) qui consiste à substituer aux corps solides immergés tels que les aubes (figure 1), un volume

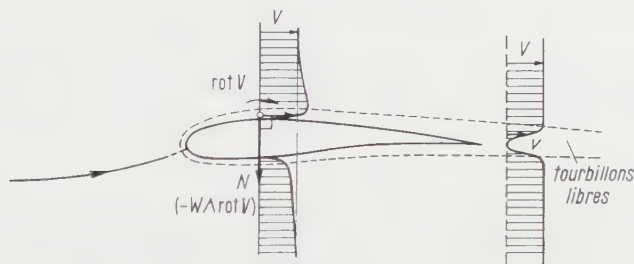


Figure 1

La distribution des vitesses dans la couche limite qui résulte de la viscosité peut être reproduite en fluide parfait par l'introduction, en chaque point du volume tourbillonnaire, d'une force  $H$  (par unité de masse) normale à la fois à la vitesse  $v$  et au tourbillon  $\text{rot } v$  qu'elle immobilise (tourbillon « lié »).

équivalent de fluide, siège de tourbillons liés distribués, soit sous forme lamellaire le long des parois de l'aube, soit plus correctement au point de vue physique, dans les zones minces que constituent les couches limites, afin d'assurer dans les deux cas la transition entre le domaine immobilisé intérieur et celui, en général irrotationnel, du courant extérieur.

Tout champ de vitesses ainsi prescrit arbitrairement (ainsi que la pression que lui fait correspondre l'équation d'état) peut être réalisé en assignant à la force de volume  $F$  appliquée au fluide la valeur qui satisfait à l'équation d'EULER.

Les forces  $F$  ainsi distribuées à travers la zone des tourbillons liés, et dont l'ensemble équivaut aux forces que l'aube exerce réellement sur le fluide qui la baigne, sont telles qu'elles assurent la conservation de ces tourbillons, en même temps que leur progression à travers le fluide avec la vitesse relative  $-w$ , et, dans un écoulement stationnaire, la permanence de leur configuration.

Dans le cas, fort important en pratique, des écoulements plans, la force  $F$ , située dans le plan et normale à  $\text{rot } v$ , se réduit à  $N = -w \wedge \text{rot } v$ , ou à  $-v \wedge \text{rot } v$  pour une aube stationnaire ( $u = 0$ ). S'il s'agit par surcroît d'une aile isolée dans un courant indéfini de fluide incompressible de vitesse  $V$  à l'infini, en posant  $v = V + v'$  où  $v'$  représente au point considéré la vitesse induite par le champ de tourbillons, l'intégrale  $\int (v' \wedge \text{rot } v) \rho \, ds$  étendue à une tranche



d'épaisseur unité de l'aube ou du volume tourbillonnaire s'annule en raison de la réciprocité des actions mutuelles de deux filets tourbillon considérés deux à deux, tandis que  $V$  se met en facteur dans le terme restant  $\int (V \wedge \text{rot } v) \cdot \rho \, ds$  de sorte que la résultante  $\int N \, dS$  des forces appliquées à l'aube par le fluide devient égale à  $\rho \, \Gamma' \cdot \Gamma'$ , où  $\Gamma' = \int \text{rot } v \, dS$  représente la circulation, ce qui est l'expression même du théorème de KUTTA-JOUKOWSKI.

### Cas du mouvement permanent

Dans le cas du mouvement permanent tel que l'écoulement à travers une grille fixe d'aubes directrices, l'enthalpie totale par unité de masse :

$$E + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2},$$

est, d'après le théorème de BERNOULLI, soit constante pour toute l'étendue du fluide dans le cas du mouvement irrotationnel, soit au moins constante le long de chaque filet, quoique différente d'un filet à l'autre, dans le cas rotationnel ; mais même en ce dernier cas le gradient de cette enthalpie totale est perpendiculaire aux filets ou à la vitesse  $v$ , de sorte que le deuxième terme  $(\text{grad}[H + v^2/2], \rho w)$  disparaît encore dans l'expression (2) de la divergence du flux d'énergie.

La conservation du flux d'énergie est alors assurée simplement par l'annulation de la divergence de  $\rho v$  qui résulte de l'équation de continuité.

Le cas d'une grille d'aubes mobiles, quoique ne constituant pas un mouvement strictement permanent pour un observateur fixe, peut néanmoins être considéré comme tel dans l'hypothèse, approchée pour les anciennes turbines qui est celle de la théorie à deux dimensions de LORENZ, où les aubes infiniment nombreuses et serrées peuvent être considérées à la limite comme exerçant sur la masse du fluide des forces  $F$  distribuées de manière continue dans le volume, et de révolution autour de l'axe.

Dans ce cas les forces  $F$ , normales à la surface de l'aube, c'est-à-dire à la vitesse relative, développent le même travail  $[\rho (v F) = \rho (u F)]$ , que leur point d'application soit considéré comme lié au fluide (vitesse  $v$ ) ou à l'aube (vitesse  $u$ ).

Mais alors le théorème de BERNOULLI n'est plus vérifié, et le gradient de l'enthalpie totale n'est plus normal aux filets, de sorte que la divergence du flux d'énergie comporte maintenant un terme correspondant au travail  $\rho (u F)$  transmis au rotor.

### Cas de la grille mobile à aubes espacées

La considération du flux d'énergie peut contribuer à éclairer ce paradoxe apparent que la cession par le fluide de son énergie, ne dépende pas d'un con-



tact plus ou moins intime de ses différentes parties avec les aubes, de sorte qu'une roue très aérée (turbine Kaplan, ou hélice à grande vitesse spécifique dont les pales ne couvrent qu'une faible fraction du cercle balayé) est aussi efficace que celles dont les aubes serrées, auxquelles s'appliquaient les théories classiques d'EULER et de LORENZ, paraissaient viser à atteindre à la fois, en les guidant étroitement, toutes les parties du fluide.

Dans le cas par exemple d'une grille d'aubes mobiles à grande vitesse spécifique dont le triangle des vitesses est représenté figure 2, la figure 3 représente, dans ses positions successives, l'évolution d'une cellule de fluide telle que  $a_0b_0a_1b_1$  délimitée par deux lignes de courant  $b_0a_0$  et  $b_1a_1$  du mouvement relatif, de vitesse  $w_1$  à l'entrée et  $w_2$  à la sortie, et deux lignes fluides  $a_0a_1$  et  $b_0b_1$  telles qu'à une distance suffisante en amont de la grille elles coïn-

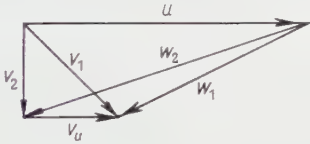


Figure 2

Diagramme des vitesses de la grille d'aubes de la figure 3.

$u$  vitesse d'entraînement;  $v_1$  vitesse absolue amont;  $v_2$  vitesse absolue aval;  $w_1$  vitesse relative amont;  $w_2$  vitesse relative aval;  $v_u$  impulsion tangentielle par unité de masse.

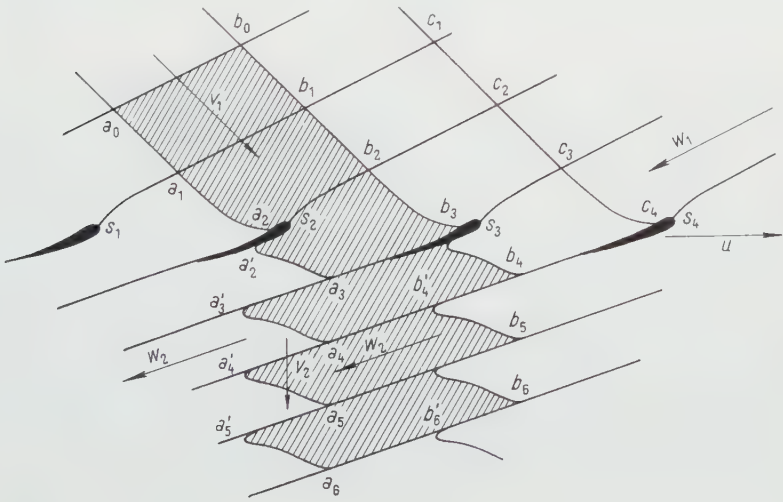


Figure 3

Écoulement à travers une grille d'aubes.

Les arrondis aux angles des cellules fluides tels que  $a_3b_4$  après traversée de la roue résultent, même en l'absence de frottement, du ralentissement local et momentané dû à la rencontre de la ligne fluide et du bord d'attaque, non infiniment mince, de l'aube.

cident avec des lignes du courant absolu. A partir du moment où son angle inférieur  $a_1$  atteint le bord d'attaque  $s_1$  sur la ligne de courant relative  $c_1 b_1 a_1 s_1$ , la ligne fluide  $a_0 a_1 a_2 \dots$  se trouve coupée par l'aube 2 et séparée en deux tronçons aboutissant respectivement aux points  $a_2$  et  $a'_2$ , dont le premier progresse moins vite le long de l'aube que le second, car l'existence de la circulation ralentit les vitesses au creux de l'aube et les accélère au dos. Les points  $a$  et  $a'$  ainsi séparés rejoignent en aval la même ligne de courant relative de vitesse finale  $w_2$ , mais avec un décalage tel que  $a_3 a'_3$ <sup>5</sup>).

Au cours des diverses phases qui, en un nombre entier de périodes, amènent la cellule considérée, suivie dans son mouvement absolu, de sa position initiale  $a_0 b_0 a_1 b_1$  à une finale telle que  $a'_4 b'_4 a_5 b_5$ , les échanges d'énergie le long du contour donnent lieu à compensation pour tous les éléments tels que  $a_1 b_1$ ,  $a_1 a_2$ ,  $b_1 b_2$ ,  $s_2 b_2$  qui demeurent en contact avec d'autres portions du fluide, car le flux d'énergie qui, à un instant donné, sort par exemple de la cellule  $a_1 b_1 a_2 b_2$  à travers la frontière  $s_2 b_2$ , se trouve compensé, lorsqu'elle est venue en  $a'_2 b_2 a_3 b_3$ , une période plus tard, par l'apport d'un flux identique provenant de la cellule qui lui a succédé en  $a_1 b_1 a_2 b_2$  dans la position initiale; tandis que les contributions des éléments tels que  $a_2 s_2$ ,  $a'_2 s_2$  en contact avec les aubes, ne se compensent plus en raison de l'inégalité des pressions de part et d'autre de l'aube ainsi que de la différence des trajets parcourus par  $a_2$  et  $a'_2$ , mais donnent lieu au contraire à la convergence, sur la paroi solide, du flux d'énergie, par laquelle s'effectue la transmission à la roue de l'enthalpie primitivement contenue dans la cellule considérée du fluide.

### Summary

The concept of flux of energy, first introduced in electrodynamics by J. H. POYNTING, can be extended to the domain of fluid-mechanics. It conduces to recognize in the flux of energy for a continuous portion of matter two parts: the first one, which can be called 'transported', corresponds to the energy localized in the matter and carried with it as a consequence of its displacement; the other results from the work developed by the stresses and can be called 'transmitted'.

The expression of this flux of energy in the general case of variable motion of a compressible fluid introduces the concept of enthalpy. Its application to an extension of HELMHOLTZ's theorem on the conservation of vorticity in a perfect fluid, according which bound vortexes have a definite relative motion across the fluid, contributes to explain the mechanism by which, even in the case of grids with a large pitch: chord ratio (Kaplan turbines, screw propellers), the energy of all parts of fluid is finally transmitted to the moving blades.

(Reçu: le 3 octobre 1957.)

<sup>5</sup>) Dans le cas simplifié d'aubes infiniment minces et peu chargées (nappe de tourbillons liés) on peut démontrer que la contribution du tronçon  $a$  et  $a'$  à la circulation le long d'une boucle fluide fermée qui, coupée par l'aube dans sa portion antérieure continue à l'embrasser par sa partie postérieure, est égale à la circulation autour de l'aube, mais avec le signe opposé, de sorte que la circulation le long de la portion de boucle ouverte en  $a$  et  $a'$ , qui entoure l'aube, doit être égale à  $2\Gamma$ .

# On the Aerodynamic Heating of Blunt Bodies<sup>1)</sup>

By EDWARD R. VAN DRIEST, Downey, California, USA<sup>2)</sup>

## Introduction

The noses of bodies and leading edges of wings for high-speed flight are being blunted in order to reduce the transfer of heat in those regions. The blunting is beneficial, regardless of whether the flow in the boundary layer is laminar or turbulent. However, since at high Reynolds numbers the turbulent heat transfer in the stagnation region is greater for turbulent than for laminar flow, it is desired that transition be discouraged in that region. It will be seen that even a small degree of roughness may be a source of transition under conditions of extreme cooling. Also, mass transfer as a means of alleviating turbulent heating will be discussed.

## Stagnation Region Solution

The heat-transfer rate  $q_w$  in a stagnation region is computed from the law

$$q_w = c_{H\infty} q_\infty u_\infty (i_r - i_w) \quad (1)$$

in which  $c_{H\infty}$  is the Stanton number,  $q_\infty$  and  $u_\infty$  the undisturbed-stream (before the shock wave) density and velocity, respectively,  $i_r$  the boundary layer recovery enthalpy, and  $i_w$  the enthalpy of the fluid at the wall.

## Laminar Flow

For laminar flow on cylinders,  $c_{H\infty}$  can be approximated with SQUIRES' incompressible formula [1-3] applied to the stagnation region (s) behind the shock, viz.,

$$c_{H\infty} = 0.570 \left( \frac{\beta D}{u_\infty} \right)^{0.5} \left( \frac{q_\infty u_\infty D}{\mu_\infty} \right)^{-0.5} \left( \frac{c_{p_s} \mu_s}{k_s} \right)^{-0.6} \left( \frac{q_s}{q_\infty} \right)^{0.5} \left( \frac{\mu_s}{\mu_\infty} \right)^{0.5} \quad (2)$$

For spheres, SIBULKIN's incompressible formula [2] is used:

$$c_{H\infty} = 0.763 \left( \frac{\beta D}{u_\infty} \right)^{0.5} \left( \frac{q_\infty u_\infty D}{\mu_\infty} \right)^{-0.5} \left( \frac{c_{p_s} \mu_s}{k_s} \right)^{-0.6} \left( \frac{q_s}{q_\infty} \right)^{0.5} \left( \frac{\mu_s}{\mu_\infty} \right)^{0.5} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> This research was supported by the United States Air Force, through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command, under contract AF 18(600)-786.

<sup>2)</sup> North American Aviation, Inc., Missile Development Division.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 247.

In these expressions  $D$  is the diameter of curvature at the stagnation point or line, and  $\beta = (\partial u_\delta / \partial x)_{x=0}$ , where  $u_\delta$  is the local velocity just outside of the boundary layer and  $x$  is measured along the body from the stagnation point. Furthermore,  $\rho$ ,  $u$ ,  $c_p$ ,  $\mu$ , and  $k$  are density, velocity, specific heat at constant pressure, viscosity, and thermal conductivity of the fluid, respectively. Subscripts  $s$  and  $\infty$  refer specifically to stagnation and undisturbed flow conditions.

With supersonic flow,  $\beta$  can be approximated upon the assumption that Newtonian flow exists between the bow wave and the body. Ultimately,  $\beta$  is found to be given by

$$\frac{\beta D}{u_\infty} = \left\{ \frac{8[(\gamma-1)M_\infty^2 + 2]}{(\gamma+1)M_\infty^2} \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{(\gamma-1)M_\infty^2 + 2}{2\gamma M_\infty^2 - (\gamma-1)} \right]^{-1/(\gamma-1)} \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

This equation is plotted in Figure 1 with experimental data obtained by KOROBKIN [3].

Equations (2) and (3) will also yield approximate results at speeds such that the air dissociates behind the shock. The effect of dissociation (real gases) is not large, however, compared to results obtained from perfect gas calculations.

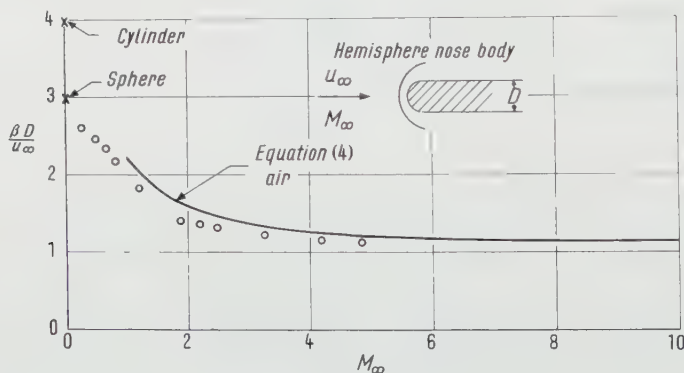


Figure 1

Local velocity gradient at the stagnation point of a hemisphere-cylinder combination. NOL data [3].

When the flow over the front of a blunt body is completely laminar, the maximum heating rate occurs at the stagnation point. This is seen from equations (2) and (3), since the terms  $\rho_s/\rho_\infty$  and  $\mu_s/\mu_\infty$  decrease as the ambient temperature decreases with expansion of the gas about the body. The variation of  $c_{H_\infty}$  over the face of a sphere as determined theoretically and experimentally by STINE and WANLASS [4] is shown in Figure 2 when the properties of the flow are put in terms of local conditions ( $\delta$ ), i.e.,  $c_{H_\delta} = q_w/\rho_\delta u_\delta (i_r - i_w)$  and  $Re_{x_\delta} = \rho_\delta u_\delta x/\mu_\delta$ .

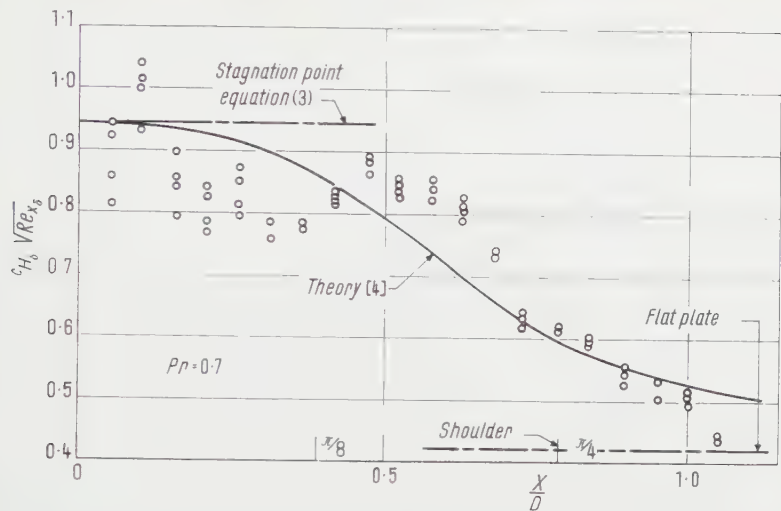


Figure 2  
Local heat-transfer rate for a hemispherical nose.  $M_\infty = 1.97$ . Naca (Ames) data [4].

*Turbulent Flow*

While it is expected that the flow will be laminar in the immediate neighborhood of the stagnation point, owing to the low Reynolds number of the local flow there, the flow may become unstable and eventually turbulent with increasing distance from that region.

A theoretical analysis can be made for a fully turbulent boundary layer near the stagnation point using the momentum integral for that region and assuming similar velocity profiles. For a  $1/7$ -power law for velocity distribution, the Stanton number becomes [5]

$$c_{H\sim} = 0.042 \left( \frac{\beta D}{u_\infty} \right)^{4/5} \left( \frac{\varrho_\infty u_\infty D}{\mu_\infty} \right)^{-1/5} \left( \frac{c_{ps} \mu_s}{k_s} \right)^{-2/3} \left( \frac{\varrho_s}{\varrho_\infty} \right)^{4/5} \left( \frac{\mu_s}{\mu_\infty} \right)^{1/5} \left( \frac{x}{D} \right)^{3/5} \tag{5}$$

for spheres. For cylinders, the constant is 0.040.

For an approximate calculation of heat transfer over the face of a sphere, the constant 0.042 may be apportioned linearly with  $\beta$  to 0.030 for a flat plate, with the ratios  $\varrho_s/\varrho_\infty$ ,  $\mu_s/\mu_\infty$ , as well as  $\beta$  computed from Newtonian pressures and isentropic expansion from the stagnation region. The turbulent heat-transfer rate then becomes a maximum at about 40 degrees of arc. Figure 3 shows the heat transfer on the face of a sphere moving in air at  $M_\infty = 3$  and  $Re_{D_\infty} = \varrho_\infty u_\infty D/\mu_\infty = 10^7$ . Also shown in the figure is the heating for completely laminar flow. It will be seen that the maximum turbulent heating rate increases relative to the maximum laminar rate as Reynolds number increases.

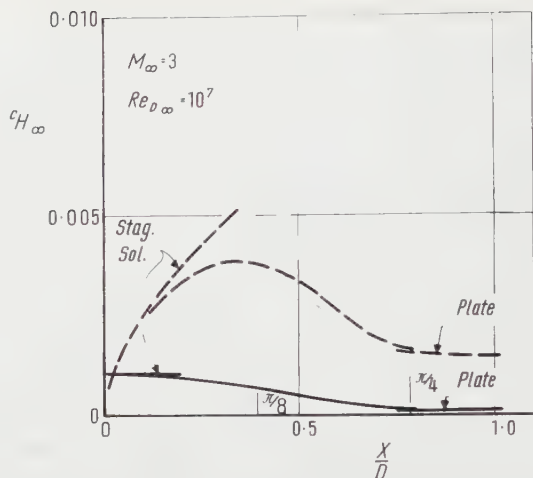


Figure 3

Heat transfer on the face of a sphere in air.  $M_{\infty} = 3$  and  $Re_{D_{\infty}} = 10^7$ . — laminar; ---- turbulent.

With hypersonic speed where the air behind the shock waves dissociates, equation (5) can be used to yield engineering answers. However, like with laminar flow, the effect of dissociation for turbulent flow is not very great, compared to results for a perfect gas assumption.

## Transition

### *Criterion for Minimum Transition Reynolds Number*

Observation [6, of velocity data near the wall of a pipe (Figure 4) indicates that an inner stability region exists adjacent to the wall where the turbulent eddies originate and Reynolds stresses alter the laminar velocity profile. (In Figure 4,  $u^* = u/\sqrt{\tau_w/\rho}$  and  $y^* = \rho\sqrt{\tau_w/\rho} \cdot y/\mu$ , where  $\tau_w$  is wall shear stress and  $y$  is distance normal from the wall.) The inner stability region is seen to extend to  $y^* = 60$ . Since the three-dimensional eddies with their associated Reynolds stresses act initially on the pure laminar flow, the minimum transition criterion is assumed to be

$$y_T^* = \rho \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \cdot \frac{\delta_T}{\mu} = 60, \quad (6)$$

where  $\delta_T$  is the width of the initial wholly laminar profile. This criterion has apparent justification in pipe flow; thus, when applied to the Poiseuille (parabolic) profile for incompressible flow in a pipe of diameter  $d$ , it is found that  $Re_d = \rho u_{ave} d/\mu = 1800$ , which agrees well with pipe-friction data (see Figure 5



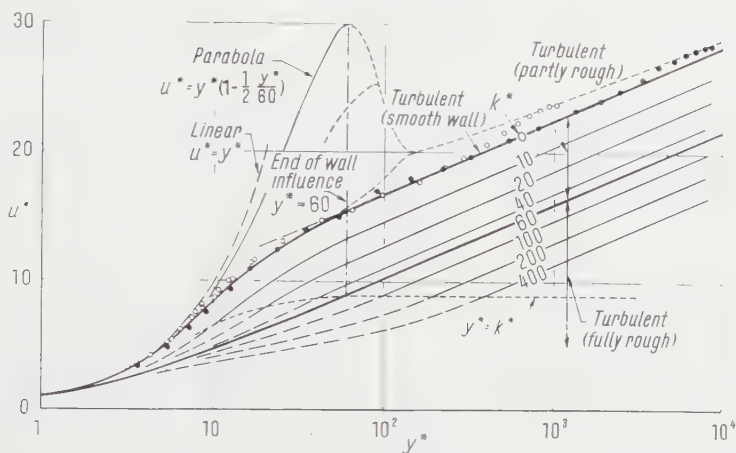


Figure 4

Semi-logarithmic plot of velocity profiles for incompressible turbulent flow near smooth and rough walls. Laufer data  $Re_d$ :  $\circ$  50,000;  $\bullet$  500,000.

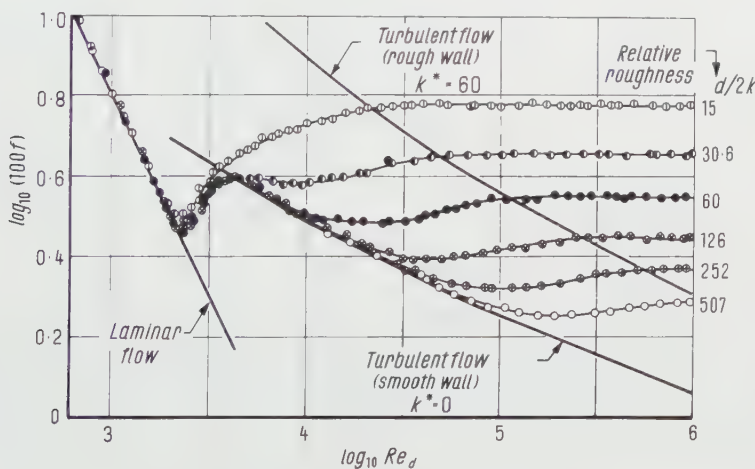


Figure 5

Friction factor for incompressible flow in a pipe.

at  $\log_{10} 1800 = 3.26$ ). It will be noted that a value of  $y_T^* = 63$  would yield  $Re_d = 2000$ , whence  $\log_{10} 2000 = 3.30$ .

### Stagnation-Point Flow

When equation (6) is applied to the exact laminar-flow solution for incompressible flow on a smooth sphere, there results  $Re_0 = \rho u_\infty \theta / \mu = 150$ ,

where  $\theta$  is the momentum thickness of the boundary layer. This value of  $Re_\theta$  should apply approximately near the stagnation point behind the shock wave of a high-speed aircraft. It will correspond to a value of about  $\rho_\delta u_\delta x / \mu_\delta \approx 400,000$  along the surface for  $Re_{D_\infty} = 20,000,000$  and  $M_\infty = 10$ . Incipient transition would then occur at  $x/D \approx 0.08$ , or at an angle of about 9 degrees off the stagnation point.

### *Effect of Roughness*

It is expected that the conditions near the wall ( $w$ ) control the dynamics of the flow near the wall; therefore, the stability criterion should be written as  $\rho_w \sqrt{\tau_w} / \rho_w \cdot \delta_{T_w} / \mu_w = 60$ . Since the fluid density and viscosity are functions of temperature, it will be seen that cooling decreases  $\delta_{T_w}$  in approximately  $T_w^{3/2}$ . Hence, it follows that the inner viscous region decreases strongly with cooling, and in fact decreases faster than the boundary layer thickness which varies approximately as  $T_w$ . Although cooling is ordinarily a stabilizing agent, it could however lead to transition reversal as a result of exposure of submerged roughness [7]. (An increasingly favorable pressure gradient could also cause transition reversal by exposure of submerged roughness.) At any rate, a reasonable pertinent parameter for roughness-effect evaluation would be  $k/\delta_{T_w}$ , where  $k$  is roughness height, rather than for example  $k/\theta$ .

When  $k/\delta_T = 1$ , that is  $k^* = 60$ , the roughness protuberances completely disrupt the inner viscous region and fully turbulent flow commences. For Blasius boundary layers, this means that the flow is tripped the earliest when  $k = \delta$  at  $Re_{x_\delta} = 160,000$ .

## **Mass Transfer**

One means of alleviating excessive heating on the face of a body in case the boundary layer becomes turbulent is to transfer mass, such as steam or air, through the surface into the boundary layer (blowing). Since in the stagnation region the flow is subsonic, an incompressible-flow analysis will yield an approximate solution.

### *Wall Law for Mass Transfer*

With mass transfer, the boundary condition for velocity at the wall is  $u = 0$ ,  $v = v_w$ . It then follows from the  $x$ -momentum boundary layer equation that

$$\rho v_w \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_w.$$

Here,  $u$  and  $v$  are the  $x$  and  $y$  components of the velocity,  $x$  being measured along the flow and  $y$  normal to the flow. The subscript  $w$  denotes the condition

at the wall. As a first approximation to shear stress *near* the wall, one may then write

$$\tau = \tau_w + \rho v_w u. \tag{7}$$

With turbulent flow, equation (7) should be valid for calculation of the velocity in an assumed simply wholly-laminar sublayer, because of the thinness of such a sublayer. Thus, since  $\tau = \mu \partial u / \partial y$ , it follows for such a wholly-laminar sublayer with incompressible flow that

$$u^* = \frac{1}{v_w^*} (e^{v_w^* y^*} - 1) \tag{8}$$

in which  $u^* = u / \sqrt{\tau_w / \rho}$ ,  $v_w^* = v_w / \sqrt{\tau_w / \rho}$ , and  $y^* = \rho \sqrt{\tau_w / \rho} \cdot y / \mu$ . Note that the blowing rate is expressed by

$$v_w^* = \frac{v_w}{u_\delta} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_{f\delta}/2}}, \tag{9}$$

where  $u_\delta$  is the velocity at the outer edge of the boundary layer and  $c_{f\delta}$  is the local coefficient of friction defined by  $c_{f\delta} = 2 \tau_w / \rho u_\delta^2$ .

Calculation of a *wall* law for the velocity profile of an assumed fully turbulent portion of a boundary layer with blowing or sucking can be effected also upon use of equation (7). Thus, assuming a mixing length model with  $l = K y$  in  $\tau = \rho l^2 (du/dy)^2$ , there results [8]

$$u^* = u_L^* + \sqrt{1 + v_w^* u_L^*} \frac{1}{K} \ln \frac{y^*}{y_L^*} + \frac{v_w^*}{4} \left( \frac{1}{K} \ln \frac{y^*}{y_L^*} \right)^2 \tag{10}$$

in which  $u_L^*$  and  $y_L^*$  are constants which set the position of the velocity profile. Hence, the analysis of heat transfer for turbulent flow with blowing or sucking reduces to the problem of joining the laminar sublayer and the fully turbulent zone.

*Location of the Wholly-Laminar Sublayer*

Assuming a wholly-laminar sublayer for simplicity, and since the vorticity is variable across such a region (in fact  $du^* / dy^* = 1 + v_w^* u^*$ ), the criterion adopted for stability of the layer is

$$\rho \left| \frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{y_L}{\mu} \right| = 11.3 \tag{11}$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_L \cdot \frac{y_L^2}{\mu} = 128 \tag{12}$$

in which  $L$  refers to the sublayer edge. This model assumes of course that the laminar flow immediately breaks up into turbulent eddies at the edge of the layer.

Substitution of equation (7) in equation (11) gives

$$\sqrt{1 + v_w^* u_L^* y_L^*} = 11.3. \quad (13)$$

Elimination of  $v_w^*$  between equations (13) and (8) then yields

$$u_L^* = \frac{y_L^*}{\ln \left( \frac{11.3}{y_L^*} \right)^2} \left[ \left( \frac{11.3}{y_L^*} \right)^2 - 1 \right] \quad (14)$$

as the locus of the edge of the laminar layer.

Equations (8), (10), and (14) are plotted in Figure 6 as the solid lines for both blowing and sucking. Note that in this analysis apparently only a limited amount of sucking (viz.  $v_w^* = -0.065$ ) is necessary to make the sublayer sufficiently stable to completely eliminate a turbulent boundary layer. The friction coefficient thus reaches a maximum, and this is found to be about  $c_{f\delta} = 0.01$ . However, such a conclusion as this must be given a dim view owing to the improper use of equation (7) all the way across the boundary layer.

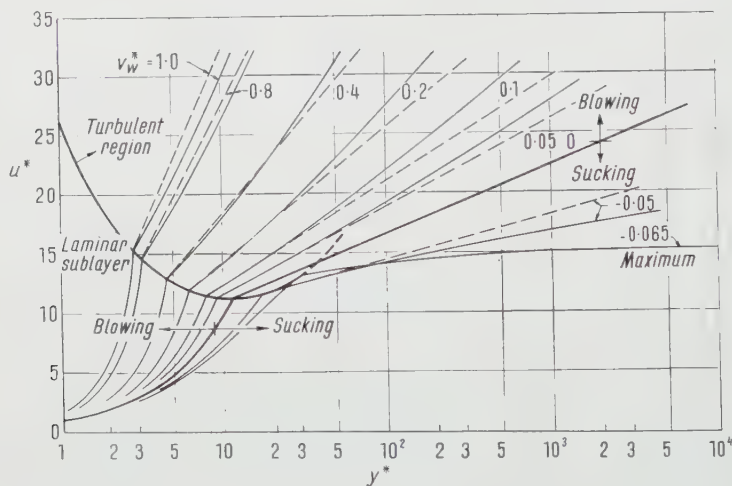


Figure 6

Semi-logarithmic plot of velocity profiles for turbulent flow with blowing and sucking.

### *Calculation of the Friction and Heat-Transfer Coefficients for Flat Plates, Spheres, and Cylinders*

The friction on a flat plate is obtained from the momentum integral including mass transfer:

$$\tau_w = -\rho v_w u_\delta + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u (u_\delta - u) dy \quad (15)$$

in which  $\delta$  is the boundary layer thickness. In order to facilitate integration, the velocity profile is approximated by

$$u^* = \frac{u_L^*}{y_L^*} \left( y_L^* + \frac{1}{K} \ln \frac{y^*}{y_L^*} \right) \quad (16)$$

valid for small  $v_w^*$ . This approximation is plotted in Figure 6 as the dashed lines, and it is seen that the approximation is good. Substitution of equation (16) in equation (15) then yields, after the conventional boundary layer approximations and adjustments are made,

$$\frac{0.174}{\frac{u_L^*}{y_L^*} \sqrt{\frac{c_{f\delta}}{2}}} = -0.20 + 0.174 y_L^* - \log_{10} u_L^* + \log_{10} \left[ Re_{x\delta} \sqrt{\frac{c_{f\delta}}{2}} \left( \sqrt{\frac{c_{f\delta}}{2}} + v_w^* \right) \right], \quad (17)$$

which is plotted in Figure 7 for various values of  $v_w^*$ . It will be noted that this result differs somewhat from the excellent pioneering work of DORRANCE and

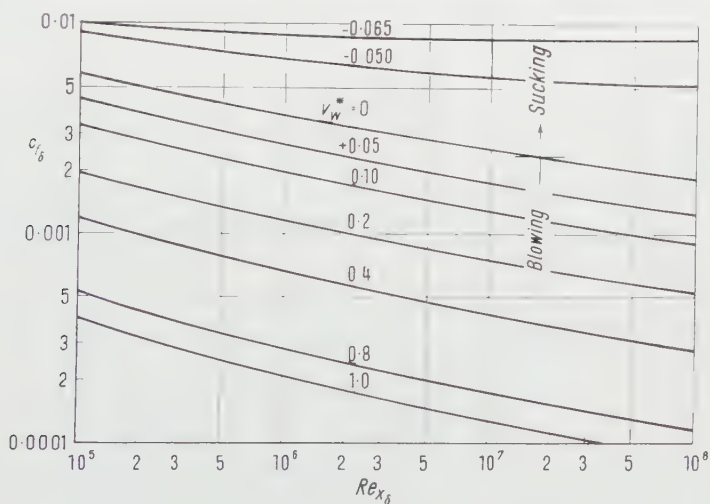


Figure 7

Local friction coefficient on a flat plate for turbulent flow with blowing and sucking.  $M_\delta = 0$ .

DORE [9] and RUBESIN [10], mainly owing to the definition of the laminar sublayer and the use of  $v_w^*$  [equation (9)] as the blowing parameter.

The friction in the stagnation region of a *sphere* or *cylinder* may be calculated when it is remembered that the form of the local equations for laminar or turbulent flow for flat plate, sphere, or cylinder is the same, only the constant is new. This idea is here transferred to the logarithmic friction law, although

the similarity was established in [5]. Thus, when the constant in equation (17) is adjusted to conform to the results for sphere and cylinder given in [5], one may write

$$\frac{0.174}{y_L^* \sqrt{\frac{c_{f\delta}}{2}}} = -1.01 + 0.174 y_L^* - \log_{10} u_L^* + \log_{10} \left[ Re_{x\delta} \sqrt{\frac{c_{f\delta}}{2}} \left( \sqrt{\frac{c_{f\delta}}{2}} + v_w^* \right) \right] \quad (18)$$

for spheres, and

$$\frac{0.174}{y_L^* \sqrt{\frac{c_{f\delta}}{2}}} = -0.91 + 0.174 y_L^* - \log_{10} u_L^* + \log_{10} \left[ Re_{x\delta} \sqrt{\frac{c_{f\delta}}{2}} \left( \sqrt{\frac{c_{f\delta}}{2}} + v_w^* \right) \right] \quad (19)$$

for cylinders. Equations (18) and (19) are plotted in Figures 8 and 9, respectively.

The local heat-transfer coefficient (Stanton number)  $c_{H\delta}$  defined by

$$q_w = c_{H\delta} \rho_\delta u_\delta (i_r - i_w) \quad (20)$$

is computed from

$$c_{H\delta} = \frac{c_{f\delta}}{2} \cdot \frac{1}{Pr^{2/3}}, \quad (21)$$

where  $Pr$  is the Prandtl number. Corrections can be made to equation (21) to take into account the size of the laminar sublayer relative to the turbulent

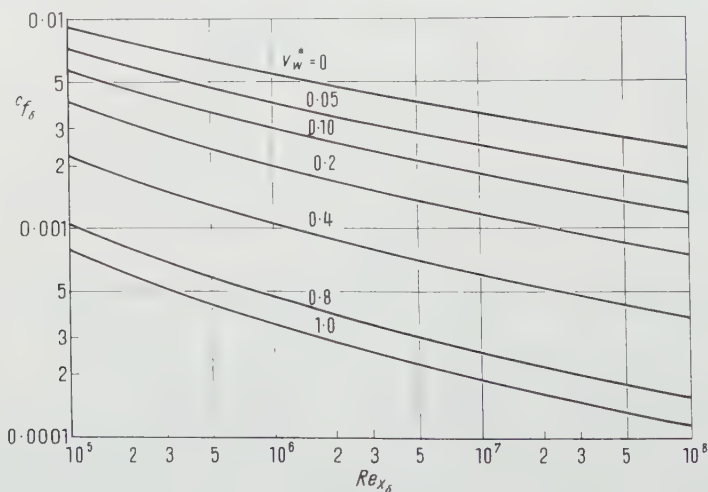


Figure 8

Local friction coefficient in the stagnation region of a sphere for turbulent flow with blowing.



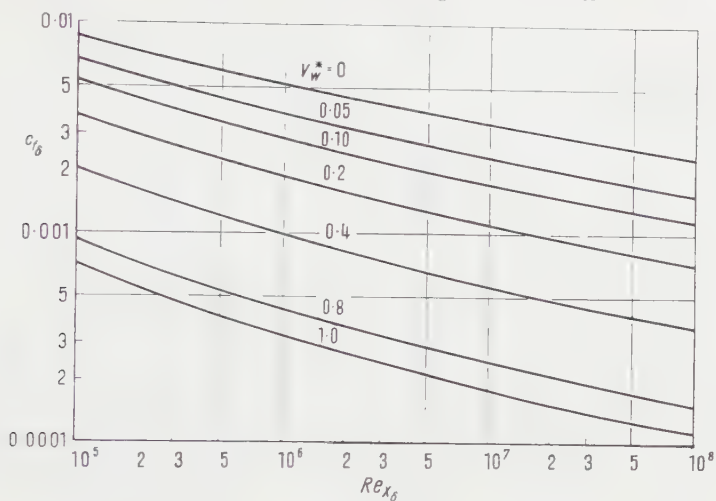


Figure 9

Local friction coefficient in the stagnation region of a cylinder for turbulent flow with blowing.

portion of the boundary layer and also the variation of shear [equation (7)] across the layer; however, these effects are not great compared to the blowing effect on  $c_f$  itself, hence equation (21) will be used for the present purposes of this paper. The coefficients corresponding to the flat plate, the sphere, and the cylinder are plotted respectively in Figures 10, 11, and 12.

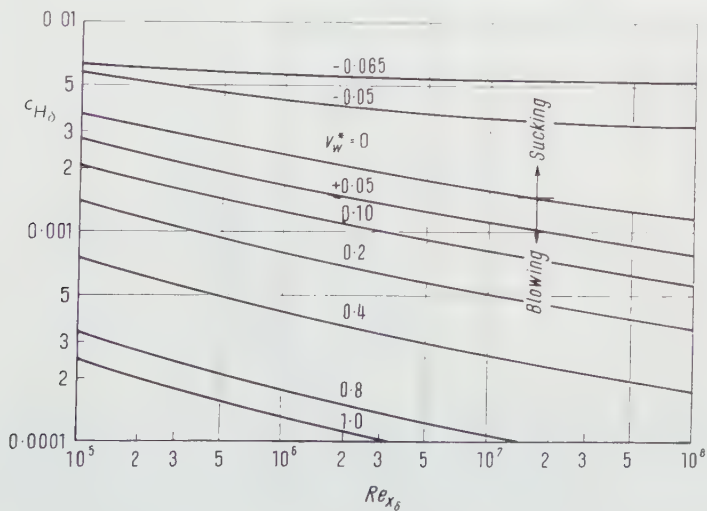


Figure 10

Local heat-transfer coefficient on a flat plate for turbulent flow with blowing and sucking.  $M_\delta = 0$ .

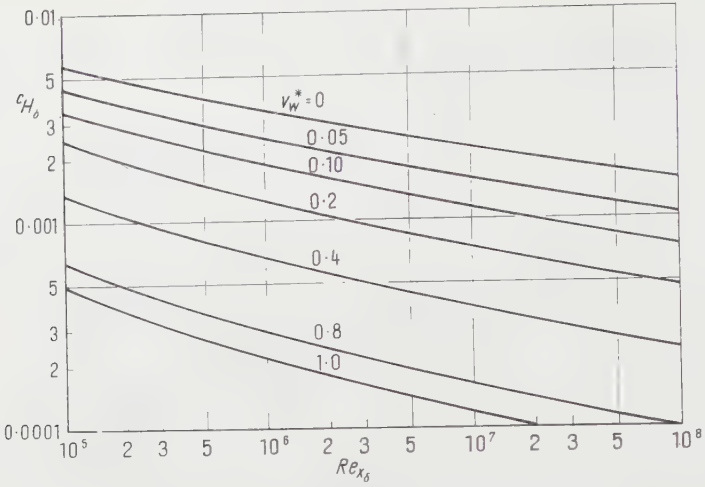


Figure 11

Local heat-transfer coefficient in the stagnation region of a sphere for turbulent flow with blowing.

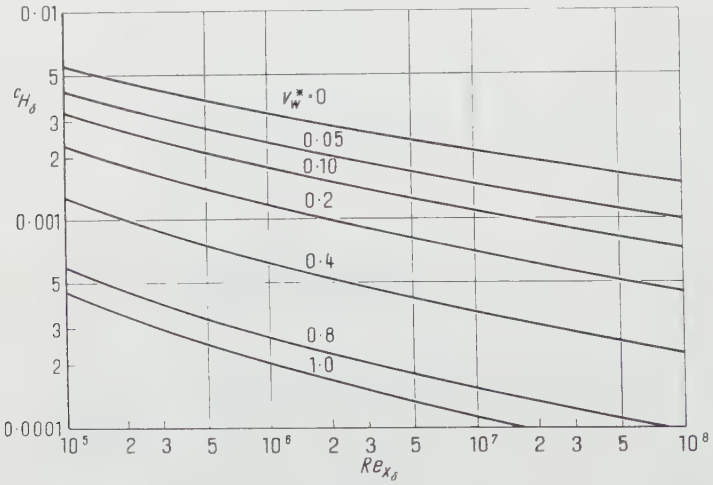


Figure 12

Local heat-transfer coefficient in the stagnation region of a cylinder for turbulent flow with blowing.

The ratios of the friction and heat-transfer coefficients with mass transfer (air) to those without mass transfer for the flat plate, the stagnation region of the sphere, and the stagnation region of the cylinder are given in Figures 13, 14, and 15, respectively, as a function of the mass-transfer parameter and local Reynolds number  $Re_{x_\delta} = \rho_\delta u_\delta x / \mu_\delta$ .

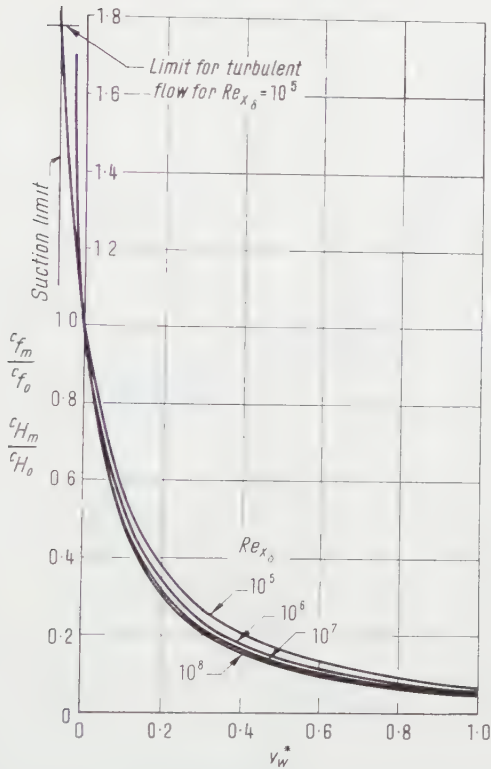


Figure 13

Effect of blowing or sucking on local skin friction and heat transfer on a flat plate with turbulent flow.  $M_\delta = 0$ .

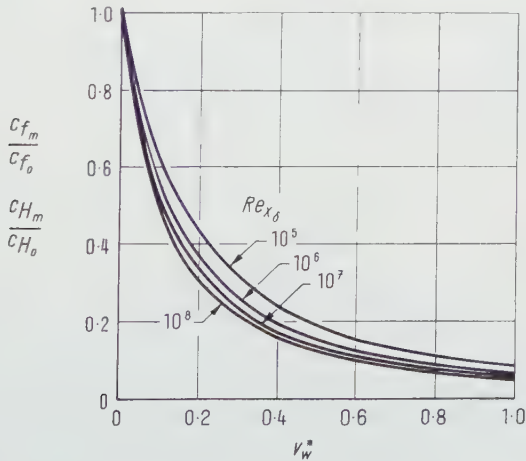


Figure 14

Effect of blowing on local skin friction and heat transfer in the stagnation region of a sphere with turbulent flow.

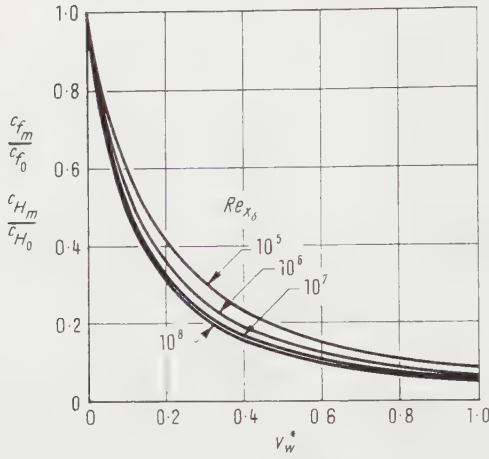


Figure 15

Effect of blowing on local skin friction and heat transfer in the stagnation region of a cylinder with turbulent flow.

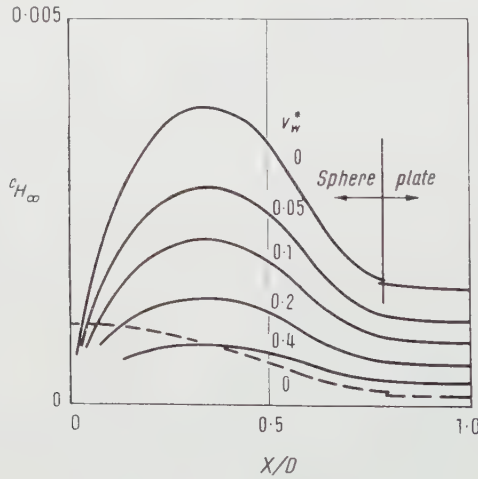


Figure 16

Effect of blowing on heat transfer on the face of a sphere for turbulent flow.  $M_\infty = 3$ ;  $Re_{D_\infty} = 10^7$ .  
- turbulent; --- laminar.

When, for example, the ratios from Figure 14 are applied to the heat-transfer coefficients for the face of a sphere [5] at free-stream Mach number  $M_\infty = 3$  and  $Re_{D_\infty} = \rho_\infty u_\infty D / \mu_\infty = 10^7$ , the effect of blowing (air) is as seen in Figure 16. Here  $c_{H_\infty}$  is proportional to the actual heat-transfer rate [see

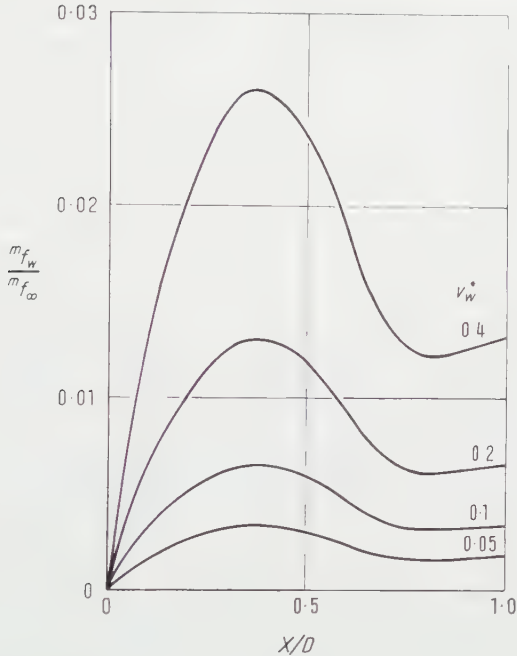


Figure 17

Blowing rates for air corresponding to Figure 16.  $M_\infty = 3$ ;  $Re_{D_\infty} = 10^7$ .

equation (1)], because the local sphere  $c_{H_\delta}$ 's have been transferred to free-stream conditions.

The mass-transfer rates associated with the reduced heat-transfer-coefficient curves of Figure 16 are calculated from

$$\frac{m_{fw}}{m_{f\infty}} = \frac{\varrho_\delta v_w}{\varrho_\infty u_\infty} = v_w^* \left[ c_{H_\infty} Pr^{2/3} \left( \frac{\beta D}{u_\infty} \right) \left( \frac{x}{D} \right) \left( \frac{\varrho_\delta}{\varrho_\infty} \right) \right]^{1/2}. \tag{22}$$

The rates are plotted in Figure 17 for the sphere at  $M_\infty = 3$  and  $Re_D = 10^7$ .

REFERENCES

[1] S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, 1st ed., vol. 2 (Oxford University Press, London 1938), p. 631.  
[2] M. SIBULKIN, *Heat Transfer Near the Forward Stagnation Point of a Body of Revolution*, J. aeron. Sci. 19, No. 8, 570-571 (August 1952).  
[3] I. KOROBKIN, *Laminar Heat-Transfer Characteristics of a Hemisphere for Mach Number Range 1.9 to 4.9* (Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, June 23-25, 1955).

- [4] H. A. STINE and K. WANLASS, *Theoretical and Experimental Investigation of Aerodynamic-Heating and Isothermal Heat-Transfer Parameters on a Hemispherical Nose with Laminar Boundary Layer at Supersonic Mach Numbers*, NACA TN 3344 (December 1954).
- 5] E. R. VAN DRIEST, *The Problem of Aerodynamic Heating*, Aeron. Eng. Rev. 15, No. 10, 26-41 (October 1956).
- 6] E. R. VAN DRIEST, *On Turbulent Flow Near a Wall*, J. aeron. Sci. 23, No. 11, 1007-1011 (November 1956).
- 7] E. R. VAN DRIEST and J. CHRISTOPHER BOISON, *Research on Boundary-Layer Transition at Supersonic Speeds*, J. aeron. Sci. 24, No. 12, 885-899 (December 1957).
- 8] J. H. CLARKE, H. R. MENKES and P. A. LIBBY, *A Provisional Analysis of Turbulent Boundary Layers with Injection*, J. aeron. Sci. 22, No. 4, 255-260 (April 1957).
- 9] WILLIAM H. DORRANCE and FRANK J. DORE, *The Effect of Mass Transfer on the Compressible Turbulent Boundary-Layer Skin Friction and Heat Transfer*, J. aeron. Sci. 21, No. 6, 404-410 (June 1954).
- 10] MORRIS W. RUBESIN, *An Analytical Estimation of the Effect of Transpiration Cooling on the Heat-Transfer and Skin-Friction Characteristics of a Compressible, Turbulent Boundary Layer*, NACA TN 3341 (December, 1954).

### Zusammenfassung

Die Berechnung der Erwärmung stumpfer Flugkörper wird für grosse Geschwindigkeiten in Berücksichtigung der Übergangserscheinungen erörtert. Im besondern wird auf das Problem der Abkühlung durch Massentranspiration eingegangen.

(Received: November 19, 1957.)



# Combined Effects of Turbulence and Roughness on Transition

By HUGH L. DRYDEN, Washington, D.C., USA<sup>1)</sup>

## Introduction

The flow of a fluid in the boundary layer of a thin flat plate parallel to the stream is known to be laminar at a sufficiently low value of the Reynolds number  $Re$  defined as  $U_0 x/\nu$ , where  $U_0$  is the velocity of the free stream outside the boundary layer,  $x$  is the distance from the leading edge, and  $\nu$  is the kinematic viscosity of the fluid. At a sufficiently large value of  $Re$  the flow is turbulent. The value of the Reynolds number at which the velocity distribution begins to depart from the theoretical results for a laminar flow is called the transition Reynolds number  $Re_t$ .

$Re_t$  is a function of many variables for bodies of arbitrary shape, but for a thin flat plate parallel to the stream in a flow of uniform velocity the primary variables at subsonic speeds are stream turbulence and surface roughness. There have been a number of investigations of the effect of turbulence on transition on smooth plates and of the effect of single two-dimensional roughness elements in streams of several turbulence levels. This paper presents a semi-empirical method of computing the transition Reynolds number for a plate with a single two-dimensional roughness element in a stream of any specified turbulence.

## Notation

- $C_D$  effective drag coefficient of roughness element;
- $k$  height of roughness element;
- $Re$  Reynolds number,  $U_0 x/\nu$ ;
- $u$  local velocity in boundary layer at station  $x, y$ ;
- $u'$  root-mean-square component of velocity fluctuation in stream direction;
- $u'_1$  value of  $u'$  due to stream turbulence;
- $u'_2$  equivalent value of  $u'$  for disturbance due to roughness element;
- $U_0$  mean velocity of stream outside boundary layer;
- $v'$  root-mean-square component of velocity fluctuation normal to stream and plate;
- $w'$  root-mean-square component of velocity fluctuation normal to stream and parallel to plate;

<sup>1)</sup> National Advisory Committee for Aeronautics.

$x$	distance in stream direction from leading edge of plate;
$x_0$	value of $x_t$ for smooth plate;
$y$	distance of station normal to plate;
$\delta^*$	displacement thickness of boundary layer;
$\theta$	momentum thickness of boundary layer;
$\rho$	density of fluid;
$\nu$	kinematic viscosity of fluid;
$x$	value at roughness element;
$t$	value at transition.

### Effect of Turbulence on Transition on Smooth Plate

In any quantitative study of transition Reynolds number it is necessary to specify carefully the method of measurement. The departures from laminar flow begin gradually and transition to fully turbulent flow extends over a range of Reynolds numbers. Many experimental methods have been used including those based on the appearance of high frequency velocity fluctuations in oscillograms from a hot-wire anemometer, of pressure fluctuations detected by a stethoscope, etc. The results quoted in this paper are based on the indications of a surface Pitot tube traversed along the surface and responsive to the mean speed. Its indication falls slowly as a result of skin friction, and increases rapidly at transition. The value of  $x$  for which the pressure is a minimum is defined as the location of transition and used in computing  $Re_t$ . Other methods for determining the beginning of transition give results which differ among themselves and from this method by amounts which are small compared to the effects of stream turbulence and surface roughness.

Stream turbulence is usually described by the root-mean square values of the three Cartesian velocity components,  $u'$ ,  $v'$ , and  $w'$ , where  $u'$  is the component in the flow direction, and  $v'$  and  $w'$  are the cross stream components and by the scale of the turbulence. For a flat plate, the transition Reynolds number is found to correlate very well with the average intensity

$$\sqrt{\frac{1/3 (u'^2 + v'^2 + w'^2)}{U_0^2}},$$

the scale being ignored. The available results [1-4]<sup>2)</sup> are shown in Figure 1. In many cases only  $u'$  was measured so that the intensity was taken as  $u'/U_0$ , the turbulence being assumed to be isotropic. The data define a reasonably definite curve, but the scatter and the abrupt variations of curvature are probably due to some of the factors ignored as well as to experimental errors in measuring  $Re_t$ .

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 257.

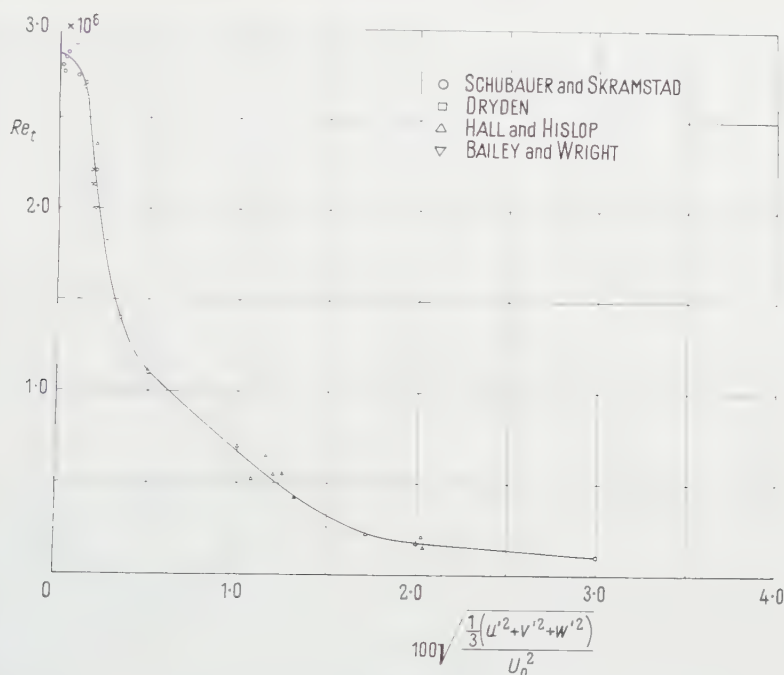


Figure 1

Effect of stream turbulence on transition Reynolds number.

The effect of turbulence is small below a turbulence intensity of 0.1%: there is then a rapid decrease in  $Re_t$  up to turbulence levels of 0.5%, a less rapid decrease from a turbulence of 0.5 to 1.5%, and a very slow decrease above 1.5%. From a stream of very low turbulence to one of high (3%) turbulence  $Re_t$  decreases to 1/28 of its low turbulence value.

### Effect of Two-Dimensional (Cylindrical) Roughness Element

Many measurements have been made [5-9] of the effect on transition on a plate of a cylindrical wire placed on the plate perpendicular to the fluid stream. From time to time summaries and correlations of the data have been presented by the author [10-12]. If transition occurs at distance  $x_0$  for the smooth plate yielding a value of  $Re_t$  of  $U_0 x_0 / \nu$ , a wire of diameter  $k$  placed at a distance  $x_k$  less than  $x_0$  produces transition at a distance  $x_t$  less than  $x_0$  but greater than  $x_k$  or in some cases equal to either  $x_0$  or  $x_k$ . The data are well represented by a single curve of  $Re_t$  versus the ratio of the roughness height  $k$  to the displacement thickness  $\delta_k^*$  of the boundary layer at the location of the roughness element for all values of  $k$ ,  $x_k$ , and  $U_0$  so long as the resulting  $x_t$  is greater than  $x_k$ .

As the height  $k$  of the roughness element is gradually increased for any fixed location  $x_k$  of the element and speed  $U_0$  transition moves gradually forward from  $x_0$  until it reaches the roughness element at  $x_k$ . With further increase in roughness height, transition remains fixed at the element.

It first appeared that the ratio of  $Re_t$  for the rough plate to that for the smooth plate was a universal function of  $k/\delta_k^*$  independent of stream turbulence. This is now known to be incorrect and the combined effects will be discussed later in this paper.

In a stream of low turbulence  $Re_t$  is nearly independent of roughness height up to values of  $k/\delta_k^*$  of about 0.25; at  $k/\delta_k^*$  of 0.5,  $Re_t$  has fallen to one half the value for a smooth plate; and at  $k/\delta_k^*$  of 0.8,  $Re_t$  is less than 1/25 that for the smooth plate. Thus the effects of roughness are comparable in magnitude to those of turbulence.

### Concept of 'Equivalent' Turbulence and Combination Rule

The fact that a cylindrical roughness element moves transition forward from its position on the smooth plate but does not produce immediate transition at the element suggests that it imposes a flow disturbance which grows downstream. We are thus led to consider the effects of the roughness element and of stream turbulence to be similar in nature. In each case a larger initial disturbance requires less amplification to produce transition.

Let us consider then an empirical method of determining the relation between the disturbance produced by a cylindrical roughness element for a given value of  $k/\delta_k^*$  and an 'equivalent' turbulence. We need two experimental curves. One is the effect of turbulence on a smooth plate which we have in Figure 1. The second is the effect of  $k/\delta_k^*$  in a stream of zero turbulence. This we do not yet have by direct measurement, but for the moment let us suppose that this second curve were available. For any value of  $k/\delta_k^*$  we could then read off the value of  $Re_t$ . Corresponding to this value of  $Re_t$  we could read off the 'equivalent' turbulence from Figure 1. Repeating the process would give a curve of 'equivalent' turbulence *versus*  $k/\delta_k^*$ .

Having determined this equivalence we could then determine the combined effects of turbulence and roughness by an appropriate combination rule. Since the turbulence is a random time function the appropriate combination rule is to take  $\sqrt{(u_1'^2 + u_2'^2)/U_0^2}$  as the combined disturbance,  $u_1'$  being the stream turbulence and  $u_2'$  the 'equivalent' turbulence produced by the roughness element.  $Re_t$  for the rough plate in a turbulent stream would be read from Figure 1 at an abscissa of  $100\sqrt{(u_1'^2 + u_2'^2)/U_0^2}$ .

Using this combination rule we are in a position to estimate the effect of  $k/\delta_k^*$  in a stream of zero turbulence from measurements in a stream of small turbulence. Because of the experimental scatter the accuracy of the deter-

mination is not great. The lowest turbulence at which roughness effects have been studied is about 0.15%, as inferred from the smooth plate value of  $Re_t$  [8]. Reading values from faired curves and applying the combination rule we proceed as shown in the following table:

$\frac{k}{\delta_k^*}$	$Re_t$	$100 \sqrt{\frac{u_1'^2 + u_2'^2}{U_0^2}}$ (from Figure 1)	$\frac{10^4 (u_1'^2 + u_2'^2)}{U_0^2}$	$\frac{10^4 u_2'^2}{U_0^2}$	$\frac{100 u_2'}{U_0}$ (equivalent turbulence)	$4 \left(\frac{k}{\delta_k}\right)^2$ (for com- parison)
0	2.61	0.155	0.0240	0	0	0
0.3	2.36	0.188	0.0353	0.0113	0.106	0.108
0.4	1.75	0.267	0.0712	0.0472	0.218	0.256
0.5	1.09	0.543	0.2949	0.2709	0.520	0.500
0.6	0.68	1.005	1.0100	0.986	0.993	0.864

The first two columns are the faired data on roughness effect. The third column gives the combined disturbance from stream turbulence and roughness. The value for  $k/\delta_k^*$  equal to zero is the stream turbulence. The sixth column gives the resulting values of the 'equivalent' turbulence of the roughness element as a function of  $k/\delta_k$ . It is found empirically that the 'equivalent' turbulence is approximately proportional to  $(k/\delta_k^*)^3$  as shown by comparing the sixth column with the values of  $4(k/\delta_k)^3$  in the last column.

A study of other data [7-9] leads to the proposed empirical relation

$$\frac{100 u_2'}{U_0} = 4.4 \left(\frac{k}{\delta_k}\right)^3,$$

which will be used to compute the combined effects of stream turbulence and a single two-dimensional roughness element.

**Computed and Observed Combined Effects of Turbulence and a Single Two-Dimensional Roughness Element**

The computations proceed in an obvious manner. The empirical formula is used to compute  $u_2'/U_0$  for several values of  $k/\delta_k^*$ . Computations are then made for several stream turbulence levels  $u_1'/U_0$ . For the resultant

$$\sqrt{\frac{(u_1'^2 + u_2'^2)}{U_0^2}}$$

the corresponding value of  $Re_t$  is read from Figure 1. The results for stream turbulence levels of 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.8 and 1.0% are plotted in Figure 2. The effect of increasing roughness height diminishes as the stream turbulence increases. Likewise the relative effect of turbulence is decreased for the greater



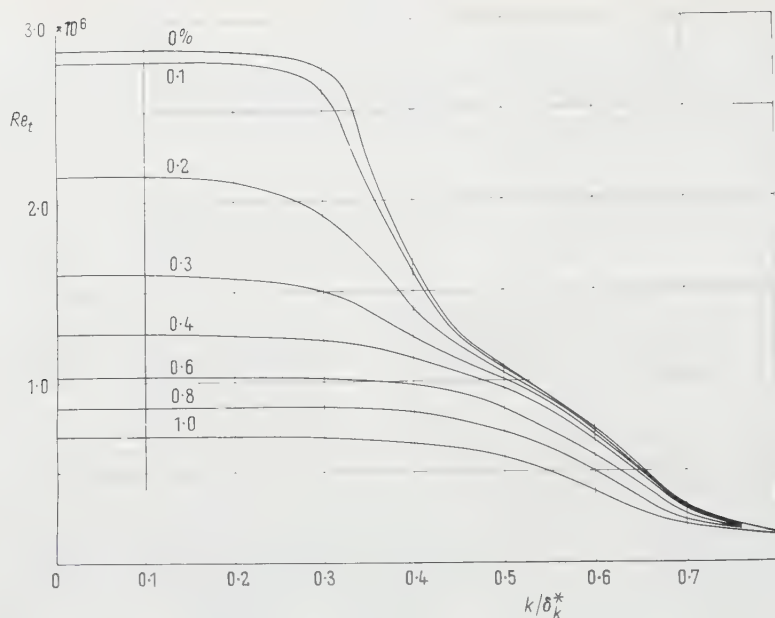


Figure 2

Computed effect of a single cylindrical roughness element on transition Reynolds number at various stream turbulence levels.

roughness heights. At zero turbulence the effect of roughness is small at values of  $k/\delta_k^*$  less than 0.3, but at  $k/\delta_k^*$  of a little over 0.4 the value of  $Re_t$  is halved.

Figure 3 shows a comparison of observed points with curves computed for stream turbulence of 0.15, 0.3 and 0.8%. The reference curves are not intended as the best representative of the experimental data. Unfortunately the stream turbulence was not measured in the experiments. It is clear that the computed curves correspond to the essential features of the experiments.

### Theoretical Aspects of Empirical Formula for 'Equivalent' Turbulence

Having obtained as an empirical result that the 'equivalent' turbulence varies as the cube of the ratio  $k/\delta_k^*$ , it was natural to seek some rational basis for such a simple result. LIEPMANN and FILA [13] made some measurements of the mean velocity distribution in the wake of such an element. The results are given only in the form of rather small-scale graphs of the velocity profiles for five values of  $k/\delta_k^*$ , namely 0.76, 0.92, 1.29, 1.52 and 2.58. In every case the flow separates from the surface of the plate at the element. For  $k/\delta_k^*$  equal to 0.76 the flow reattaches and remains laminar for a distance of  $100 k$ , the extent



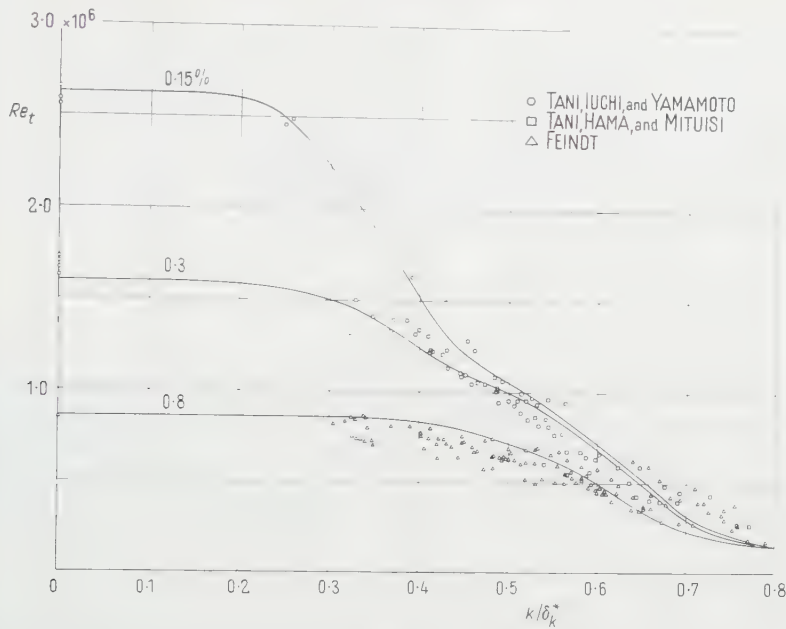


Figure 3

Comparison of theoretical and experimental results on combined effects of turbulence and roughness.

of the measurements. For  $k/\delta^*$  equal to 0.92 transition occurs immediately on reattachment and for larger values in the separated flow. The attached boundary layer flow is then turbulent. For these large roughness elements it is probable that vortices are shed from the element.

There is then one case of interest in the present connection, for which  $U_0 = 17.7$  ft/s,  $x_k = 1.645$  ft,  $k = 0.0625$  in.,  $\delta_k^* = 0.082$  in., and momentum thickness  $\theta_k = 0.0318$  in., these last two values being computed for a smooth plate. Velocity distributions are shown for downstream distances from the element of 0.79, 1.57, 2.36, 3.15, and 6.30 in. The actual values of  $\delta^*$  and  $\theta$  were computed as well as could be done from the graphs, yielding the following results:

$x - x_k$ in.	$\delta^*$ in.	$\theta$ in.
0	0.115	0.0298
0.79	0.121	0.0391
1.57	0.104	0.0334
2.36	0.111	0.0384
3.15	0.103	0.0387
6.30	0.118	0.0428

Excluding the first station (at the element) and the last (far downstream), there are spatial variations of  $\pm 8\%$  in  $\delta^*$  and  $\pm 7.5\%$  in  $\theta$ . The average values of both  $\delta^*$  and  $\theta$  are considerably larger than the theoretical values for a smooth plate at the same location. Because of the separated flow which extends to  $x = x_k = 2.4$ , the percentage increase in  $\delta^*$  is much larger than the percentage increase in  $\theta$ , 34% as compared with 17%. The boundary layer is pushed outward by the element.  $\rho U_0^2 \theta$  is the momentum defect

$$\int_0^\infty \rho u (U_0 - u) dy$$

and the change in  $\theta$  reflects the additional loss in momentum produced by the force applied to the flow by the roughness element. We would expect this force and additional momentum defect to be proportional to the momentum flux in the boundary layer comprised between the wall and a line parallel to the wall at the height of the roughness element. This momentum flux is equal to

$$\int_0^k \rho u^2 dy.$$

From the Blasius theory  $u = 0.332 U_0^{1/2} y (\nu x)^{-1/2}$ , whence the momentum flux is  $0.0367 \rho U_0^3 k^3 / \nu x$ . The total momentum defect produced by wall friction from the leading edge to the station is  $\rho U_0^2 \theta$ . Thus if the additional momentum defect produced by the roughness element is assumed to be  $C_D$  times the momentum flux up to height  $k$ , where  $C_D$  is a kind of drag coefficient, a suitable measure of the disturbance produced by the element is the ratio of the additional momentum defect produced by the element to the total defect for the whole boundary layer resulting from skin friction. Remembering that

$$\delta^* = 1.73 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \quad \text{and} \quad \theta = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}},$$

we find this ratio to be  $0.286 C_D k^3 / \delta^{*3}$ . For LIEPMANN's case previously analyzed this ratio is  $0.126 C_D$  or  $12.6\%$  for  $C_D = 1$ . A value of  $C_D$  of 1.35 is required to match the 17% derived from LIEPMANN's data which seems reasonable in view of the reduced pressure behind the element arising from the separated flow.

Since it is known [14] that spaced roughness elements excite Tollmien-Schlichting oscillations leading to transition, the spatial variations of  $\delta^*$  and  $\theta$  may in themselves act in a similar fashion. However, it seems probable that the mean flow changes are accompanied by velocity fluctuations which follow the same general relationships. There is one measurement [15] known to the

author. Hot-wire measurements were made behind a single cylindrical roughness element for which  $k \delta_k^*$  was 0.45. The oscillogram was approximately sinusoidal and the predominant frequency was that of the Tollmien-Schlichting oscillations. The amplitudes are plotted to a very small scale indeed and the author considered the fluctuation almost non-existent. The value seems to be 0.3% as nearly as can be determined. This compares with a value of 0.4% computed from the empirical formula for 'equivalent' turbulence.

### Three-Dimensional Roughness

The disturbances from single three-dimensional roughness elements (small sphere or hemisphere, short cylinder, etc.) seem to be too small in spatial extent to lead to transition unless vortices are generated by the element [11, 12]. As previously stated and as described in [15] even a two-dimensional element will function in this manner at a sufficiently high Reynolds number of the element, which is realizable in most cases of practical interest only at large values of  $k/\delta_k^*$ .

The available data are to some extent suggestive of an effect of turbulence in this case also. Just as the critical Reynolds number of a sphere, cylinder, or flat plate in a free stream is sensitive to stream turbulence, the critical Reynolds number for vortex generation behind a roughness element is apparently dependent on stream turbulence, the critical Reynolds number decreasing as the turbulence level increases. The data are insufficient to establish this firmly or to justify quantitative studies of combined effects.

### REFERENCES

- [1] H. L. DRYDEN, *Air Flow in the Boundary Layer Near a Plate*, N.A.C.A. Rep. 562 (Washington 1936).
- [2] A. A. HALL and G. S. HISLOP, *Experiments on the Transition of the Laminar Boundary Layer on a Flat Plate*, Brit. Aero. Res. Comm., Reports and Memoranda 1843 (London 1938).
- [3] E. A. WRIGHT and G. W. BAILEY, *Laminar Frictional Resistance with Pressure Gradient*, J. aero. Sci. 6, 485 (1939).
- [4] G. B. SCHUBAUER and H. K. SKRAMSTAD, *Laminar-Boundary-Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate*, N.A.C.A. Rep. 909 (Washington 1948).
- [5] I. TANI, F. R. HAMA, and S. MITUISI, *On the Permissible Roughness in the Laminar Boundary Layer*, Aeronaut. Res. Inst. Tokyo, 199 (1940).
- [6] I. TANI and F. R. HAMA, *Some Experiments on the Effect of a Single Roughness Element on Boundary-Layer Transition*, J. aero. Sci. 20, 289 (1953).
- [7] I. TANI, F. R. HAMA, and S. MITUISI, *On the Effect of a Single Roughness Element on Boundary-Layer Transition*, Rep. Inst. Sci., Tokyo 125, No. 8 (1954).
- [8] I. TANI, M. IUCHI, and K. YAMAMOTO, *Further Experiments on the Effect of a Single Roughness Element on Boundary-Layer Transition*, Rep. Inst. Sci., Tokyo 171, No. 8 (1954).

- [9] E. G. FEINDT, *Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages Laminar-Turbulent von der Oberflächenrauigkeit und der Druckverteilung*, D. F. L. Institut für Aerodynamik, Bericht Nr. 56/10 (Braunschweig 1956).
- [10] H. L. DRYDEN, *Review of Published Data on the Effect of Roughness on Transition from Laminar to Turbulent Flow*, J. aero. Sci. 20, 477 (1953).
- [11] H. L. DRYDEN, *Transition from Laminar to Turbulent Flow at Subsonic and Supersonic Speeds*, Proceedings, Conference on High Speed Aeronautics, Polytechnic Institute of Brooklyn (New York 1955).
- [12] H. L. DRYDEN, *Transition from Laminar to Turbulent Flow. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, vol. V: *Turbulent Flow and Heat Transfer* (in press, Princeton Press).
- [13] H. W. LIEPMANN and G. H. FILA, *Investigations of Effects of Surface Temperature and Single Roughness Elements on Boundary-Layer Transition*, N.A.C.A. Rep. 890 (Washington 1947).
- [14] H. W. LIEPMANN, *Investigations on Laminar Boundary-Layer Stability and Transition on Curved Boundaries*, N.A.C.A. Wartime Report W-107 (Washington 1943).
- [15] I. TANI and H. SATO, *Boundary-Layer Transition by Roughness Element*, J. phys. Soc. Japan 11, 1284 (1956).

### Zusammenfassung

Eine Betrachtung der vorhandenen Messungen über die Wirkungen eines zylindrischen Rauigkeitselementes auf die Umschlag-Reynolds-Zahl der Grenzschicht einer Platte in Strömungen mit verschiedenem Turbulenzgrad weist darauf hin, dass die Wirkung eines solchen Rauigkeitselementes mit gegebenem Verhältnis seiner Höhe zur Verdrängungsdicke der Grenzschicht als ein «gleichwertiger» Turbulenzgrad betrachtet werden kann. Auf empirische Weise wird festgestellt, dass der «gleichwertige» Turbulenzgrad  $4.4 (h/\delta_x^*)^3$  ‰ ist. Die physikalische Bedeutung dieses Verhältnisses wird erörtert. Die zusammengesetzte Wirkung von Turbulenz und Rauigkeit wird berechnet und mit veröffentlichten Versuchsergebnissen verglichen.

(Received: August 23, 1957.)

## Einfluss eines Verbrennungsvorganges auf den Wärme- und Stoffaustausch in einer laminaren Grenzschicht

VON ERNST R. G. ECKERT und JAMES P. HARTNETT, St. Paul, Minn., USA<sup>1)</sup>

### Einleitung

Die Entwicklung der Technik hat auf verschiedenen Gebieten den Ingenieur vor die Aufgabe gestellt, Konstruktionselemente gegen den Einfluss eines heissen Gasstromes zu schützen. Besonders stark beansprucht sind in dieser Hinsicht beispielsweise die Wände der Brennkammern und der Düsen von Raketen, die einem Gasstrom von 3000°C und mehr ausgesetzt sind, und die Aussenhaut von Überschallflugkörpern, da bei hohen Mach-Zahlen die umgebenden Luftschichten durch innere Reibung Temperaturen annehmen, die höher sein können als die Oberflächentemperatur der Sonne. Als aussichtsreiches Kühlverfahren für solche Verhältnisse hat sich die «Schwitzkühlung» erwiesen. Bei diesem Verfahren werden die dem heissen Gasstrom ausgesetzten Wände aus einem porösen Material hergestellt, und ein gasförmiges oder flüssiges Kühlmittel wird durch die Poren gedrückt, so dass es sich zwischen den heissen Gasstrom und die Wand schiebt. Die gleiche Wirkung wird auch erzielt, wenn das Wandmaterial selbst an der Oberfläche verdampft.

Die Kühlwirkung beruht zum Teil auf der Wärmekapazität einschliesslich der Verdampfungswärme des Kühlmittels, zum Teil darauf, dass der Gasstrom, der die Oberfläche der Wand verlässt, die Grenzschicht beeinflusst. Die Geschwindigkeitsverhältnisse und der Wärmeübergang in derartigen Grenzschichten sind bereits rechnerisch und versuchsmässig eingehend untersucht worden [1 — 6]<sup>2)</sup>. Bei den hohen Temperaturen, die wie vorher erwähnt in solchen Grenzschichten herrschen, werden häufig chemische Reaktionen zwischen dem Sauerstoff in dem heissen Gasstrom und dem Kühlmittel auftreten, und der Ablauf dieser Reaktionen wird den Wärme- und Stoffaustausch in der Grenzschicht wesentlich beeinflussen. Dieser Vorgang wird vom Druck und der Temperatur im Gasstrom, von der Natur des Kühlmittels und der Temperatur der Wandoberfläche bestimmt und verlangt für eine Vorausberechnung die Kenntnis der Kinetik des Reaktionsvorganges, die heute noch weitgehend ungeklärt ist. Ein Bild, das den tatsächlichen Vorgang in vielen Fällen qualitativ und in der Grössenordnung auch quantitativ richtig wiedergeben sollte,

<sup>1)</sup> Universität von Minnesota, Wärmeübergangslaboratorium.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 272.



lässt sich jedoch durch die rechnerische Untersuchung des folgenden vereinfachten Modells gewinnen.

Es wird die Strömung eines Gases parallel zu einer ebenen Platte mit Ausbildung einer laminaren Grenzschicht untersucht. Ein Massenstrom eines anderen Gases von der Oberfläche weg möge durch Ausblasen durch die Poren der Platte oder durch Verdampfen an der Plattenoberfläche erzeugt werden. Es wird weiter vorausgesetzt, dass alle Stoffwerte innerhalb der Grenzschicht konstant, das heisst unabhängig von der Temperatur und der Zusammensetzung des Gases sind, dass die chemische Reaktion (Verbrennung) zwischen dem Hauptstrom und dem Kühlmittel mit sehr grosser Reaktionsgeschwindigkeit verläuft und dass die chemische Gleichgewichtsbedingung praktisch vollkommene Verbrennung vorschreibt.

### Formelzeichen

- $a$  Temperaturleitzahl;
- $c_f$  örtlicher Reibungsbeiwert  $= 2 \tau_w / \rho u_\infty^2$ ;
- $f$  dimensionslose Stromfunktion [Gleichung (10)];
- $H$  Heizwert;
- $i$  Enthalpie;
- $k$  Diffusionszahl;
- $\dot{m}$  Massenstrom des Brennstoffes;
- $q$  Wärmestrom in die Plattenoberfläche ohne Verbrennung;
- $q'$  Wärmestrom in die Plattenoberfläche mit Verbrennung;
- $T$  Temperatur;
- $u$  Geschwindigkeit parallel zur Platte;
- $v$  Geschwindigkeit normal zur Platte;
- $w$  Massenverhältnis = Verhältnis der partiellen zur totalen Dichte;
- $x$  Koordinate parallel zur Platte;
- $y$  Koordinate normal zur Platte;
- $\alpha$  örtliche Wärmeübergangszahl  $= q / (T_e - T_w)$ ;
- $\alpha_i$  örtliche Wärmeübergangszahl, definiert als  $q / (i_e - i_w)$ ;
- $\beta$  Stoffübergangszahl  $= k (\partial w / \partial y)_w / (w_\infty - w_w)$ ;
- $\eta$  dimensionsloser Wandabstand [Gleichung (9)];
- $\vartheta$  dimensionslose Temperatur [Gleichung (10)];
- $\lambda$  Wärmeleitzahl;
- $\nu$  kinematische Zähigkeit;
- $\rho$  Dichte;
- $\tau$  Schubspannung;
- $\psi$  Stromfunktion;
- $\varphi$  dimensionsloses Massenverhältnis [Gleichung (10)];
- $Nu$  Nusseltsche Kennzahl  $= \alpha x / \lambda$ ;



$Nu_s$	Nusseltsche Zahl für Stoffaustausch = $\beta x/k$ ;	
$Re$	Reynoldsche Zahl = $u_\infty x/\nu$ ;	
$Pr$	Prandtlsche Zahl = $\nu/\alpha$ ;	
$Sc$	Schmidtsche Zahl = $\nu/k$ .	
$e$	Eigen-;	
$f$	Brennfläche;	
$i$	Enthalpie;	
$\infty$	ausserhalb der Grenzschicht;	
$w$	Wand;	
1	diffundierendes Kühlgas;	
2	Gas ausserhalb der Grenzschicht;	
3	inertes Gas	} ausserhalb der Grenzschicht;
4	reagierendes Gas	
5	Verbrennungsprodukt;	
6	Kühlgas .	

### Wärme- und Stoffaustausch ohne Verbrennung

Der Wärme- und Stoffaustausch in der laminaren Grenzschicht an einer ebenen Platte wurde bereits verschiedentlich untersucht. Der Berechnungsgang und die Ergebnisse werden in diesem Abschnitt kurz geschildert, da sie die Grundlage der Behandlung der Austauschvorgänge mit Verbrennung bilden.

Das von der Wand ausgestossene Gas werde durch den Index 1, das ausserhalb der Grenzschicht der Wand entlangströmende Gas durch den Index 2 charakterisiert. Innerhalb der Grenzschicht strömt dann ein Gemisch aus den beiden Gasen mit örtlich veränderlicher Zusammensetzung. Die Stoffwerte werden als konstant und für beide Gase als nahezu gleich vorausgesetzt. Die folgenden Gleichungen beschreiben die Kontinuität, den Impuls-, Energie-, und Stoffaustausch innerhalb der Grenzschicht, wenn die in der vorstehenden Tabelle aufgeführten Formelzeichen verwendet werden.

Kontinuität:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

Impuls:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (2)$$

Energie:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (3)$$

Stoff:

$$u \frac{\partial w_1}{\partial x} + v \frac{\partial w_1}{\partial y} = k \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Zusätzlich gibt

$$w_1 - w_2 = 1. \quad (5)$$

Die Grenzbedingungen lauten für

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = v_w, \quad w_1 = w_{1w}, \quad T = T_w; \quad (6)$$

$$y = \infty: \quad u = u_\infty, \quad w_1 = w_{1\infty}, \quad T = T_\infty. \quad (7)$$

In den vorgenannten Anwendungen ist das Massenverhältnis  $w_1$  des Kühlgases ausserhalb der Grenzschicht gleich Null und die Plattenoberfläche gegen das Gas 2 undurchlässig. Die letztere Bedingung verlangt, dass der diffuse Strom des Gases 2 auf die Wand zu den konvektiven Strom, der von der Wand weggerichtet ist, gerade ausgleicht. Dies ergibt die folgende zusätzliche Bedingungsgleichung

$$\varrho k \left( \frac{\partial w_2}{\partial y} \right)_w = \varrho_{2w} v_w. \quad (8)$$

Die partiellen Differentialgleichungen können in üblicher Weise in totale umgewandelt werden, wenn die Temperatur und das Massenverhältnis  $w_1$  längs der Oberfläche konstant ist. Durch Einführen der Stromfunktion

$$\psi \left( u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \right),$$

der unabhängigen Veränderlichen

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} = \frac{y}{x} \sqrt{Re} \quad (9)$$

und der abhängigen Veränderlichen

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{u_\infty x \nu}}, \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}, \quad \varphi = \frac{w_1 - w_{1w}}{w_{1\infty} - w_{1w}} \quad (10)$$

erhält man die folgenden Differentialgleichungen:

Impuls:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0; \quad (11)$$

Energie:

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2} f Pr \frac{d\theta}{d\eta} = 0; \quad (12)$$

Stoff:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \frac{1}{2} f Sc \frac{d\varphi}{d\eta} = 0. \quad (13)$$

Die Grenzbedingungen lauten für

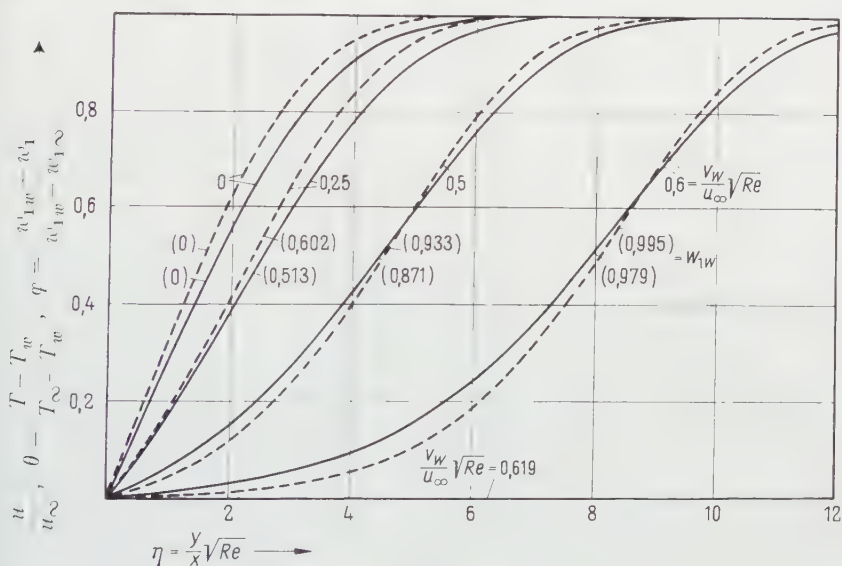
$$\eta = 0: \quad \frac{df}{d\eta} = 0, \quad f = f_w = -2 \frac{v_w}{u_\infty} \sqrt{Re}, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0; \quad (14)$$

$$\eta = \infty: \quad \frac{df}{d\eta} = 1, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1. \quad (15)$$

Aus der Gleichung (8) wird

$$\frac{1 - w_{1w}}{w_{1w} - w_{1\infty}} = \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_w}{\frac{v_w}{u_\infty} \sqrt{Re} Sc}. \quad (16)$$

Man erkennt sofort, dass die obigen Gleichungen für  $df/d\eta = u/u_\infty$ ,  $\theta$  und  $\varphi$  sowie die zugehörigen Grenzbedingungen für Gase mit  $Pr = Sc = 1$  identisch sind. Dies bedeutet, dass auch die Geschwindigkeits-, Temperatur-, und  $\varphi$ -Profile übereinstimmen. Figur 1 zeigt als gestrichelte Linien diese Profile nach den ausgedehnten Berechnungen von EMMONS und LEIGH [5]. Es ist bemerkenswert, dass die Profile für Werte des Massenstromparameters  $|Re_x v_w/u_\infty|$  grösser als 0,619 sich von der Oberfläche ablösen in dem Sinne, dass in Wandnähe  $u/u_\infty = \theta = \varphi = 0$  die Lösung der Gleichung darstellt. Als volle Linien sind in



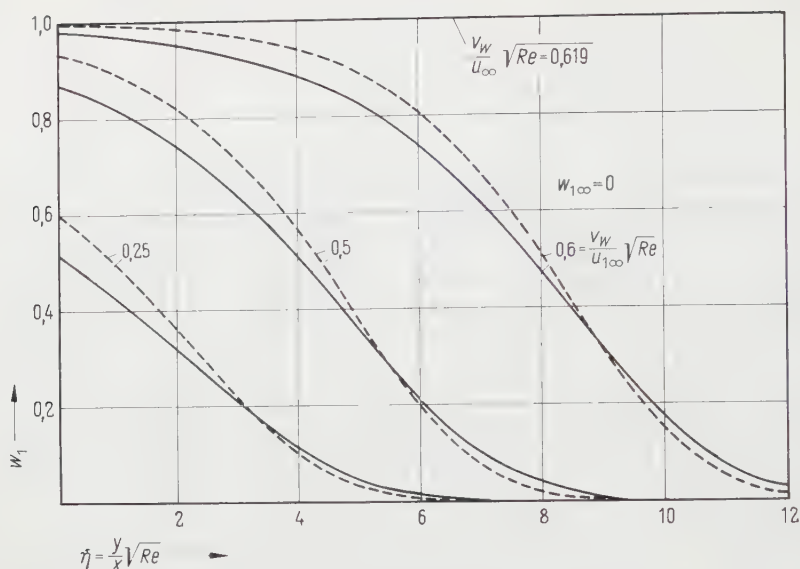
Figur 1

Dimensionslose Geschwindigkeits- ( $u/u_\infty$ ), Temperatur- ( $\theta$ ), und Massenverhältnisprofile ( $\varphi$ ) für laminare Strömung entlang einer ebenen Platte.

—  $Pr = 0,7, Sc = 0,7$ ; - - -  $Pr = 1, Sc = 1$ .

Figur 1 auch die Temperaturprofile für Gase mit  $Pr = 0,7$ , beziehungsweise die  $\varphi$ -Profile für Gase mit  $Sc = 0,7$  eingetragen. Die zugehörigen Geschwindigkeitsprofile werden dabei immer noch durch die gestrichelten Linien dargestellt.

Die Massenverhältnisse  $w_{1w}$  an der Oberfläche lassen sich mit Gleichung (16) als Funktion des Massenstromparameters  $|Re_x v_w/u_\infty|$  berechnen. Damit sind dann auch die Massenverhältnisprofile innerhalb der Grenzschicht festgelegt.



Figur 2

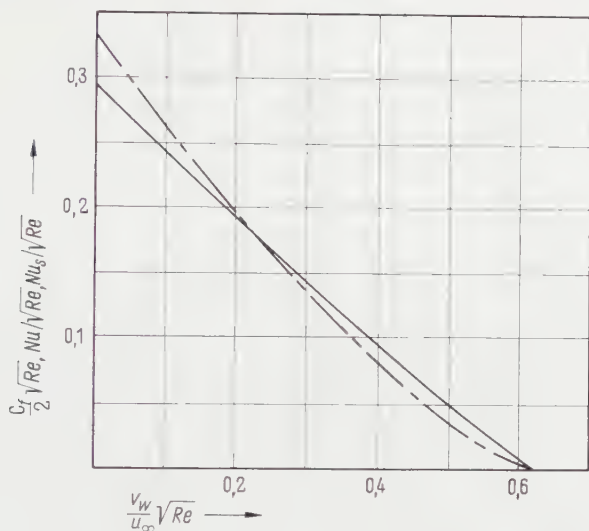
Massenverhältnisprofile  $w$ , für laminare Strömung entlang einer ebenen Platte.  
 ———  $Sc = 0,7$ ; - - -  $Sc = 1$ .

Figur 2 zeigt diese Profile für 3 Werte des Ausblaseparameters. Hierbei ist zusätzlich  $w_{1\infty} = 0$  vorausgesetzt. Der entsprechende Wert von  $w_{1w}$  ist ausserdem an den Profilen in Figur 1 in Klammern angegeben.

Von besonderer Bedeutung für ingenieurmässige Rechnungen sind der Reibungsbeiwert  $c_f$ , die Wärmeübergangszahl  $\alpha$  und die Stoffaustauschzahl  $\beta$ . Die Reibungszahl  $c_f$  sowie die Nusseltsche Kennzahl  $Nu$  und die Stoffaustauschkennzahl  $Nu_s$  sind durch die Gradienten der entsprechenden Profile in Figur 1 bestimmt und in Figur 3 als Funktion des Massenstromparameters  $\sqrt{Re} v_w/u_\infty$  eingetragen. Aus diesen Werten lässt sich die örtliche Wandschubspannung, der Wärmestrom und der Massenstrom an der Plattenoberfläche berechnen. Man erkennt, dass mit zunehmendem Massenstromparameter der Wärmestrom in die Oberfläche stark verringert wird. Dies erklärt zum Teil die gute Kühlwirkung der Schwitzkühlung.

### Wärme- und Stoffaustausch mit Verbrennung an der Oberfläche

Nunmehr wird angenommen, dass das von der Wand ausgestossene Gas mit dem Gas im Hauptstrom eine chemische Reaktion (Verbrennung) eingeht und dass diese Reaktion, wie vorher erwähnt, völlig durch den Diffusionsvorgang bestimmt ist. Es sei ausserdem vorausgesetzt, dass das Gas ausserhalb der Grenzschicht ein Gemisch aus zwei Komponenten ist, einem inerten Gas 3 und



Figur 3

Dimensionsloser, örtlicher Reibungswert  $\sqrt{Re} c_f/2$ , Wärmeübergangszahl  $Nu/\sqrt{Re}$  und Stoffübergangszahl  $Nu_s/\sqrt{Re}$  für laminare Strömung entlang einer ebenen Platte, aufgetragen über dem Massenstromparameter  $\sqrt{Re} v_w/u_\infty$ .

$Pr = 0,7$ ,  $Sc = 0,7$ ; — — — — —  $Pr = 1$ ,  $Sc = 1$ .

Der Reibungsbeiwert ist für beide  $Pr$ - und  $Sc$ -Werte durch die gestrichelte Linie gegeben.

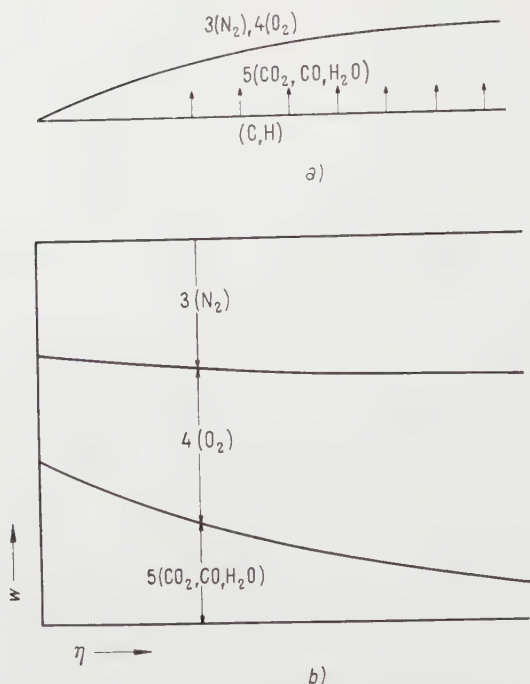
einem reagierenden 4. Wenn ein Luftstrom an der Platte entlangströmt, dann entspricht der Stickstoff dem Gas 3 und der Sauerstoff dem Gas 4.

Wir wollen nun den Verbrennungsvorgang in der Weise betrachten, dass der Massenstrom  $\dot{m}_{1w}$  allmählich, beginnend vom Werte Null, anwächst. Für kleine Werte von  $\sqrt{Re} v_w/u_\infty$  erfolgt die Verbrennung unmittelbar an der Oberfläche. In Figur 4a sind als Beispiel die Verhältnisse für die Verbrennung von Kohlenstoff und Wasserstoff in Luft dargestellt. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, dass für manche dieser Reaktionen die Voraussetzung konstanter Stoffwerte nur schlecht zutrifft. In der Grenzschicht findet man ein Gemisch aus Gas 3 und 4 und aus dem Reaktionsprodukt 5 ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{CO}$  oder  $\text{H}_2\text{O}$ ). Die Massenverhältnisse innerhalb der Grenzschicht sind in Figur 4b schematisch dargestellt.

Die den Impuls und Energieaustausch beschreibenden Differentialgleichungen bleiben die gleichen wie im vorhergehenden Abschnitt [Gleichungen (1) bis (3)]. Der Stoffaustausch wird dagegen nunmehr durch 2 Differentialgleichungen

$$u \frac{\partial w_3}{\partial x} + v \frac{\partial w_3}{\partial y} = k \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2}, \quad (17)$$

$$u \frac{\partial w_4}{\partial x} + v \frac{\partial w_4}{\partial y} = k \frac{\partial^2 w_4}{\partial y^2} \quad (18)$$



Figur 4

Skizze einer Grenzschicht mit Oberflächenverbrennung (a) und Massenverhältnisprofile in der Grenzschicht (b).

und die Bedingungsgleichung

$$w_3 + w_4 + w_5 = 1 \quad (19)$$

beschrieben. Zu diesen Gleichungen gehören die Randbedingungen für

$$y = 0: \quad w_3 = w_{3w}, \quad w_4 = w_{4w}; \quad (20)$$

$$y = \infty: \quad w_3 = w_{3\infty}, \quad w_4 = w_{4\infty}. \quad (21)$$

Nach einer Transformation in totale Differentialgleichungen werden die Gleichungen (17) und (18) und ihre Randbedingungen mit der Gleichung (13) und ihren Randbedingungen völlig identisch. Demgemäss stellen die  $\varphi_1$ -Linien in Figur 1 auch die  $\varphi_3$ - und  $\varphi_4$ -Profile dar. Sie werden daher im folgenden mit  $\varphi$  ohne Index bezeichnet. Zur Bestimmung der Massenverhältnisprofile selbst ist die Aufstellung zweier weiterer Gleichungen nötig. Die Bedingung, dass das



inerte Gas 3 nicht durch die Oberfläche in die Platte eindringt, ergibt

$$\varrho k \left( \frac{\partial w_3}{\partial y} \right)_w = \varrho_{3w} v_w. \quad (22)$$

In den  $(\varphi, \eta)$ -Koordinaten schreibt sich die Gleichung

$$w_{3w} = \frac{v_w}{u_\infty} \frac{\left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_w}{\sqrt{Re} Sc + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)_w} w_{3\infty}. \quad (23)$$

Ausserdem muss der diffuse Massenstrom des reagierenden Gases 4 auf die Oberfläche zu gleich sein der Summe aus dem konvektiven Massenstrom des Gases 4 von der Oberfläche weg und dem diffusen und konvektiven Massenstrom des im Verbrennungsprodukte enthaltenen Gases 4. Diese Bedingung ergibt

$$\varrho k \left( \frac{\partial w_4}{\partial y} \right)_w = \varrho_{4w} v_w - K \varrho k \left( \frac{\partial w_5}{\partial y} \right)_w + K \varrho_{5w} v_w, \quad (24)$$

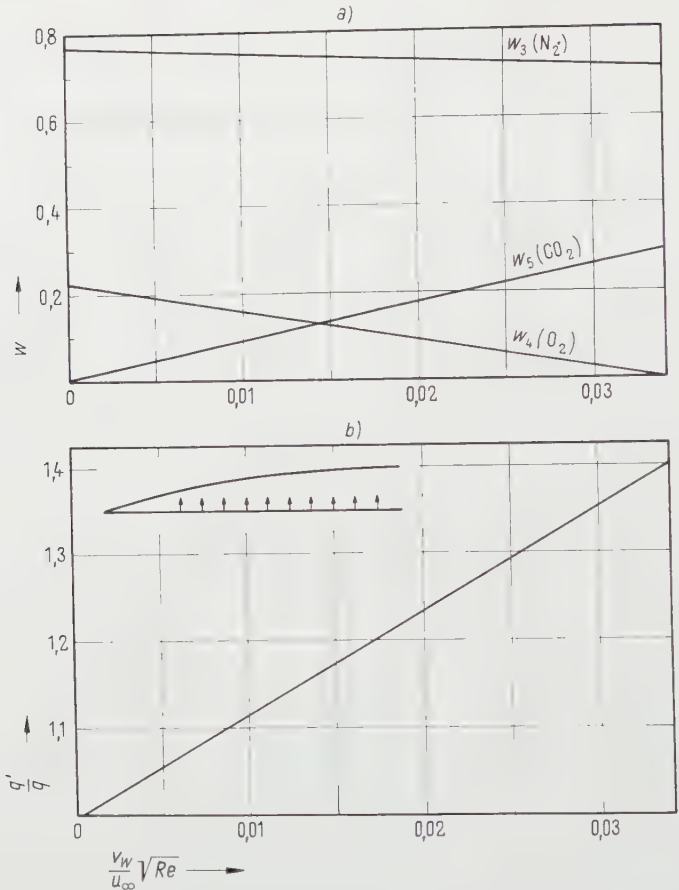
wobei  $K$  das Molverhältnis von Gas 4 zum Verbrennungsprodukt bedeutet. Für die in Figur 4a angegebenen Reaktionen ist beispielsweise

$K = 32,44$  für die  $\text{CO}_2$  Reaktion,  $K = 32/56$  für die  $\text{CO}$  Reaktion,  $K = 32/36$  für die  $\text{H}_2\text{O}$  Reaktion.

Gleichung (24) ergibt, wenn ausgedrückt in den  $(\varphi, \eta)$ -Koordinaten und aufgelöst nach  $w_{4w}$

$$w_{4w} = \frac{w_{4\infty} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_\infty - K (1 - w_{3w}) \left[ \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_w + \frac{v_w}{u_\infty} \sqrt{Re} Sc \right]}{(1 - K) \left[ \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_w + \frac{v_w}{u_\infty} \sqrt{Re} Sc \right]}. \quad (25)$$

Eine numerische Berechnung der Massenverhältnisse  $w_{3w}$  und  $w_{4w}$  wurde für das Beispiel der Verbrennung von Kohlenstoff in Luft ( $w_{3\infty} = 0,77$ ,  $w_{4\infty} = 0,23$ ) durchgeführt. Dabei wurde die Schmidtsche Kennzahl zu 0,7 angenommen. Das Ergebnis ist in Figur 5a als Funktion des Massenstromparameters  $|Re v_w|/u_\infty$  dargestellt. Man erkennt, dass das Massenverhältnis des reagierenden Gases 4 (Sauerstoff) an der Wand mit wachsendem Massenstrom abfällt und bei  $|Re v_w|/u_\infty = 0,034$  den Wert Null erreicht. Für Massenströme, die grösser sind als dieser Grenzwert, hebt sich die Brennfläche (Flamme) von der Plattenoberfläche ab, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird. Andererseits werden, wenn die Verbrennungsreaktion genügend schnell abläuft, aller Sauerstoff an einer Kohlenstoffoberfläche zur Reaktion kommen und die Geschwindigkeit des Verbrennungsablaufes durch den Grenzwert 0,034 wiedergegeben. Derselbe Grenzwert folgt auch für die Verbrennung von Kohlenstoff zu Kohlenoxyd und für die Verbrennung von Wasserstoff zu Wasserdampf. Die Ergebnisse sind in der Tabelle eingetragen.



Figur 5

Massenverhältnisprofile (a) und Verhältnis der Wärmeflüsse in die Plattenoberfläche ohne und mit Verbrennung (b) aufgetragen über dem Massenstromparameter.

Reaktion	Sc	Maximum $\frac{v_w}{u_\infty} \sqrt{Re}$	$\frac{q'}{q}$
$C + O_2 \rightarrow CO_2$	0,7	0,034	1,40
$C + O_2 \rightarrow CO_2$	1,0	0,027	1,40
$2 C + O_2 \rightarrow 2 CO$	0,7	0,062	1,25
$2 C + O_2 \rightarrow 2 CO$	1,0	0,051	1,25
$2 H_2 + O_2 \rightarrow 2 H_2O$	0,7	0,012	1,50
$2 H_2 + O_2 \rightarrow 2 H_2O$	1,0	0,0095	1,50

Nunmehr kann die Frage beantwortet werden, wie weit der Wärmeübergang von einer heissen Grenzschicht zur Oberfläche der Platte durch die Oberflächenverbrennung beeinflusst wird. Da es sich bei den in der Einleitung genannten Anwendungen um sehr grosse Temperaturunterschiede handelt, soll dabei von der folgenden Verallgemeinerung Gebrauch gemacht werden. In einer früheren Arbeit [7] wurde bewiesen, dass Wärmeübergangszahlen, die aus Rechnungen oder Messungen mit konstanten Stoffwerten gewonnen sind, sich mit einer Genauigkeit innerhalb etwa  $\pm 4\%$  auf Verhältnisse anwenden lassen, bei denen die Stoffwerte infolge grosser Temperaturunterschiede stark schwanken, wenn sie auf die Enthalpiedifferenz bezogen werden, für welche die Definitionsgleichung

$$q = \alpha_i (i_e - i_w) \quad (26)$$

gilt. Es ergab sich, dass diese Gleichung sogar den Einfluss einer Dissoziation in der heissen Grenzschicht mit guter Näherung wiedergibt [8]. Die Energieumwandlung durch innere Reibung, die bei hohen Geschwindigkeiten den Wärmeübergang stark beeinflusst, ist durch Einführung der Eigenenthalpie  $i_e$  (entsprechend der Eigentemperatur) berücksichtigt. Wenn Oberflächenverbrennung auftritt und trotzdem die Wandtemperatur nicht geändert werden soll, muss die Verbrennungswärme ins Innere der Platte abgeführt werden, und der Wärmefluss durch die Plattenoberfläche ist

$$q' = \alpha_i (i_e - i_w) + \dot{m} H, \quad (27)$$

wobei  $\dot{m}$  die Menge des je Zeiteinheit verbrannten Brennstoffes und  $H$  seinen Heizwert angibt. Das Verhältnis der Wärmeflüsse mit und ohne Verbrennung lässt sich aus den Gleichungen (26) und (27) mit Berücksichtigung der früheren Beziehungen in diesem Abschnitt berechnen zu

$$\frac{q'}{q} = 1 + \frac{\frac{\dot{v}_w}{u_\infty} \sqrt{Re} Pr}{\frac{Nu}{\sqrt{Re}}} \cdot \frac{H}{i_e - i_w}. \quad (28)$$

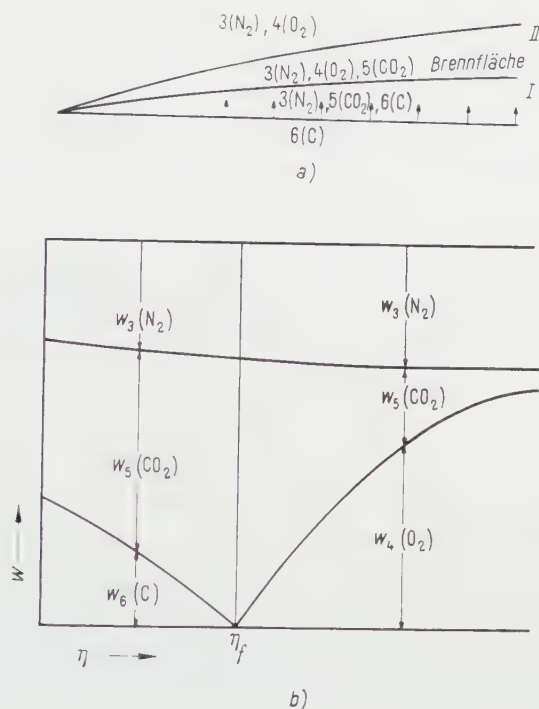
Für eine zahlenmässige Berechnung möge ein Flugkörper untersucht werden, der mit einer Geschwindigkeit von 4300 m/s (entsprechend einer Mach-Zahl 14 in grosser Flughöhe) fliegt. Die Wandtemperatur soll durch Kühlen auf  $1100^\circ\text{C}$  gehalten werden. Für die Enthalpiedifferenz  $i_e - i_w$  folgt damit etwa 1650 kcal/kg. Wenn man im weiteren die folgenden Verbrennungswärmen einführt:  $\text{CO}_2$  — — 7800 kcal/kg,  $\text{CO}$  — — 2 500 kcal/kg,  $\text{H}_2\text{O}$  — — 29 000 kcal/kg, den Massenstromparameter  $\sqrt{Re} v_w / u_\infty$  aus der Tabelle entnimmt und  $Nu / \sqrt{Re}$  aus Figur 3 abliest, erhält man schliesslich die in der letzten Kolonne der Tabelle eingetragenen Werte. In Figur 5b ist das Wärmeflussverhältnis  $q'/q$  über dem Massenstromparameter eingetragen.

Es möge nochmals darauf hingewiesen werden, dass wegen der Vereinfachungen des der Rechnung zugrunde gelegten Modells die Ergebnisse in der Tabelle nur als grössenordnungsmässig richtig angesehen werden sollten. Mit dieser Einschränkung erkennt man, dass die betrachteten Oberflächenverbrennungen den Wärmeübergang an den betrachteten Flugkörper überraschend wenig beeinflussen (nur 25 bis 50%).

### Wärme- und Stoffaustausch mit Verbrennung in der Grenzschicht

Die in der Kolonne 3 der Tabelle angeführten Werte des Massenstromparameters beschreiben die Intensität der Verbrennung im untersuchten Modell, wenn der Massenstrom des Verbrennungsmittels (C oder H), der die Plattenoberfläche verlässt, durch die Angabe bestimmt wird, wie viel von dem reagierenden Gas 4 (Sauerstoff) je Zeiteinheit an die Plattenoberfläche gelangt. Die Verbrennung einer Graphitoberfläche in einem heissen Luftstrom stellt ein Beispiel eines solchen Vorganges dar. Es gibt auch Fälle, in denen der Massenstrom des Verbrennungsmittels durch einen anderen Vorgang gesteuert wird. Wenn man «Schwitzkühlung» durch Ausblasen von Wasserstoff durch eine poröse Wand verwirklicht, kann man im allgemeinen den Mengenstrom des Kühlgases willkürlich regeln. Wenn der Mengenstromparameter kleiner ist als der Grenzwert, dann tritt auch in diesem Falle Oberflächenverbrennung ein. Das Massenverhältnis des Sauerstoffes an der Oberfläche hat dann einen endlichen Wert, wie in den Figuren 4 und 5 gezeigt wird. Ist der Massenstromparameter grösser als der Grenzwert, dann hebt sich die Reaktionszone von der Plattenoberfläche ab und erscheint als eine Brennfläche innerhalb der Grenzschicht, wie dies in Figur 6a dargestellt ist. Dieser Zustand kann auch bei der Verbrennung einer Graphitoberfläche eintreten, wenn die Oberflächentemperatur genügend hoch ist, so dass der Graphit verdampft. Die Grenzschicht besteht in diesem Fall aus zwei Zonen. In einer inneren Zone I zwischen der Plattenoberfläche und der Brennfläche befindet sich das Kühlgas 6 (C oder  $H_2$ ), das Inertgas 3 ( $N_2$ ) und das Verbrennungsprodukt 5 ( $CO_2$ , CO oder  $H_2O$ ); während das Gasgemisch, bestehend aus dem Inertgas 3, dem reagierenden Gas 4 (Sauerstoff) und dem Verbrennungsprodukt 5 in der äusseren Zone II ausserhalb der Brennfläche enthalten ist. In Figur 6a sind diese Verhältnisse am Beispiel der Kohlensäureverbrennung dargestellt, und in Figur 6b sind die Massenverhältnisse der einzelnen Gase innerhalb der Grenzschicht skizziert.

Die den Massentransport beschreibenden Differentialgleichungen sind für jede der beiden Zonen wieder die gleichen wie in den vorhergehenden Abschnitten. Daher können geeignete Abschnitte der Profile in Figur 1 verwendet werden, um die Massenverhältnisse in den Zonen I und II zu beschreiben, wenn die  $\varphi$ -Parameter in geeigneter Weise aus den folgenden Randbedingungen definiert werden.



Figur 6

Skizze einer Grenzschicht mit abgehobener Brennfläche (a) und Massenverhältnisprofile in der Grenzschicht (b).

Zone I für

$$\eta = 0: \quad w_3 = w_{3w}, \quad w_5 = w_{5w}, \quad w_6 = w_{6w} = 1 - w_{3w} - w_{5w}; \quad (29)$$

$$\eta = \eta_f: \quad w_3 = w_{3f}, \quad w_6 = 0, \quad w_5 = w_{5f} = 1 - w_{3f}. \quad (30)$$

Zone II für

$$\eta = \eta_f: \quad w_3 = w_{3f}, \quad w_4 = 0, \quad w_5 = w_{5f} = 1 - w_{3f}; \quad (31)$$

$$\eta = \infty: \quad w_3 = w_{3\infty} (= 0,77), \quad w_4 = w_{4\infty} (= 0,23), \quad w_5 = 0. \quad (32)$$

Um die Massenverhältnisse an den Zonengrenzen und damit die Massenverhältnisprofile zu berechnen, benötigt man eine Reihe von Bedingungsgleichungen. Eine Durchsicht der Randbedingungen zeigt, dass 4 Unbekannte vorhanden sind, nämlich  $w_{3w}$ ,  $w_{5w}$ ,  $w_{3f}$  und  $\eta_f$ . Auf der anderen Seite lassen sich je 2 Bedingungen an den beiden Grenzen  $\eta = 0$  und  $\eta = \eta_f$  durch Gleichungen

von der gleichen Art wie in den vorhergehenden Abschnitten ausdrücken. Die Summe der Massenströme durch Diffusion und Konvektion für jedes der beiden Gase 3 ( $N_2$ ) und 5 ( $CO_2$ ) durch die Plattenoberfläche muss Null sein. Die Kontinuität der Massenströme für Gas 3 ( $N_2$ ) und für den Brennstoff 6 durch die Brennoffläche muss gewahrt werden. Damit ist das Problem im Prinzip gelöst. Die Ergebnisse numerischer Rechnungen sollen in einer späteren Arbeit mitgeteilt werden.

Die den Temperaturverlauf in den beiden Zonen beschreibenden Differentialgleichungen haben ebenfalls dieselbe Form wie Gleichung (3), so dass ihre Lösung wieder durch Abschnitte der in Figur 1 gezeigten Kurven beschrieben wird, wenn man den Temperaturparameter  $\theta$  in geeigneter Weise aus den Werten an den Rändern der Zonen definiert:

$$\text{für } \eta = 0: \quad T = T_w; \quad (33)$$

$$\text{für } \eta = \eta_f: \quad T = T_f; \quad (34)$$

$$\text{für } \eta = \infty: \quad T = T_\infty. \quad (35)$$

Die Temperaturen  $T_w$  und  $T_\infty$  sind im allgemeinen vorgegeben; die Temperatur  $T_f$  der Brennzonen bestimmt man aus der Kontinuität des Wärmeflusses durch die Brennoffläche, wobei zu beachten ist, dass die Reaktionswärme eine Wärmequelle in der Brennoffläche darstellt. Dies ergibt die Gleichung

$$\left[ a \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\eta_f} \right]_{II} = \left[ a \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\eta_f} \right]_{I} - \dot{m} H. \quad (36)$$

Die beiden Temperaturgradienten sind an der Brennoffläche in Zone I bzw. II einzusetzen. Aus dem so berechneten Temperaturprofil innerhalb der Grenzschicht lässt sich der Gradient an der Plattenoberfläche entnehmen und damit der Wärmestrom nach der Wand bestimmen. Dieser Wert kann wieder mit dem Wärmestrom ohne Verbrennung verglichen werden.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. SCHLICHTING und K. BUSSMANN, *Exakte Lösungen für die laminare Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen*, Schr. dtsh. Akad. Luftfahrtforschung [B] 7, Nr. 2 (1943).
- [2] E. R. G. ECKERT, *Heat Transfer and Temperature Profiles in Laminar Boundary Layers on a Sweat Cooled Wall*, Technical Report No. 5646, Air Material Command (November, 1947).
- [3] W. B. BROWN, *Exact Solution of the Laminar Boundary Layer Equations for a Porous Flat-Plate with Variable Fluid Properties and a Pressure Gradient in the Main Stream*, Proc. First US Nat. Congr. appl. Mech. (Juni, 1951).



- [4] W. B. BROWN und P. L. DONOGHUE, *Tables of Exact Laminar-Boundary-Layer Solutions when the Wall is Porous and Fluid Properties are Variable*, NACA TN No. 2479 (September, 1951).
- 5 H. W. EMMONS und D. C. LEIGH, *Tabulation of the Blasius Function with Blowing and Suction*, Fluid Motion Sub-Committee, Aeronautical Research Council, Report No. FM 1915 (Juni, 1953).
- 6 J. P. HARTNETT und E. R. G. ECKERT, *Mass-Transfer Cooling in a Laminar Boundary Layer with Constant Fluid Properties*, Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. 79, 247-254 (1957).
- 7 E. R. G. ECKERT, *Engineering Relations for Heat Transfer and Friction in High-Velocity Laminar and Turbulent Boundary-Layer Flow Over Surfaces with Constant Pressure and Temperature*, Trans. amer. Soc. mech. Engrs. 78 (August), 1273 (1956).
- 8 MARY F. ROMIG, *Stagnation Point Heat Transfer for Hypersonic flow*, Jet Propulsion 26, 1098-1101 (1956).

### Summary

The influence of combustion on heat and mass transfer is investigated on the following model. A mixture of an inert with a combustible gas (air) flows in steady, laminar flow over a flat plate. A mass flux of gaseous fuel away from the plate surface is produced by some means. Combustion is assumed to occur with very fast reaction rate so that the process is purely controlled by diffusion and the equilibrium is assumed as very close to complete combustion. It is studied under which conditions the combustion occurs at the surface or when the flame is displaced into the boundary layer. The influence of combustion on the heat transfer from a hot gas to the plate surface is calculated, for the condition that combustion occurs at the surface.

(Eingegangen: 26. September 1957.)

# Berechnung der reibungslosen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten<sup>1)</sup>

VON ERNST-GÜNTHER FEINDT und HERMANN SCHLICHTING,  
Braunschweig, Deutschland<sup>2)</sup>

## 1. Einleitung und Aufgabenstellung

Die Beschauelungen von Dampfturbinen und Kompressoren arbeiten in vielen Fällen bei Strömungsgeschwindigkeiten, die der Schallgeschwindigkeit nahekommen und diese teilweise sogar überschreiten. Für die Strömung durch Schaufelgitter liegt daher das dringende Bedürfnis nach einem Rechenverfahren vor, das die Kompressibilität des strömenden Mediums berücksichtigt. Im Hinblick auf die Anwendungen bei Strömungsmaschinen ist der Bereich der hohen Unterschallgeschwindigkeiten besonders wichtig.

Für den Sonderfall eines ungestaffelten ebenen Schaufelgitters aus symmetrischen Profilen bei symmetrischer Anströmung, also ohne Ablenkung der Strömung im Gitter, ist schon früher von J. ACKERET und N. ROTT [1]<sup>3)</sup> ein Berechnungsverfahren für die reibungslose kompressible Strömung angegeben worden.

Im folgenden wollen wir für den allgemeineren Fall eines ebenen Schaufelgitters bei beliebigem Teilungsverhältnis und Staffelungswinkel die reibungslose kompressible Unterschallströmung nach einem Näherungsverfahren berechnen. Dieses Verfahren stellt eine Übertragung der für den Einzeltragflügel seit langem bekannten Prandtl-Glauertschen Regel auf das Schaufelgitter dar. Die Anwendbarkeit der Prandtl-Glauertschen Regel erfordert beim Schaufelgitter in gleicher Weise wie beim Einzeltragflügel, dass die Strömung nur wenig von einer Parallelströmung abweicht. Dies bedingt für den Einzeltragflügel die Beschränkung auf dünne Profile geringer Wölbung bei kleinen Anstellwinkeln. Beim Schaufelgitter ergibt sich hieraus überdies die Beschränkung auf kleine Umlenkungen der Strömung. Bei dem nachstehend angegebenen Rechenverfahren wird die kompressible Strömung durch eine einfache Affintransformation in den Koordinaten auf eine zugeordnete inkompressible

<sup>1)</sup> Eine ausführliche Veröffentlichung dieser Untersuchungen ist in «Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens» 24, 19–28, (1958), erschienen.

<sup>2)</sup> Technische Hochschule Braunschweig, Institut für Strömungsmechanik.

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 282.

Gitterströmung zurückgeführt. Für die letztere ist kürzlich von H. SCHLICHTING [2] ein bequemes Rechenverfahren angegeben worden, so dass damit der wesentliche Teil der Rechenarbeit für die kompressible Gitterströmung als schon erledigt angesehen werden kann. Von den verschiedenen Varianten der Prandtl-Glauertschen Regel werden wir diejenige behandeln, bei welcher für die kompressible und die ihr zugeordnete inkompressible Gitterströmung das Schaufelprofil gleich ist, während Teilungsverhältnis und Staffelungswinkel verschieden sind. Somit wird die praktisch besonders wichtige Aufgabe gelöst, die Strömung durch ein vorgegebenes Schaufelgitter bei Änderung der Machschen Zahl zu untersuchen (sogenannte zweite Hauptaufgabe der Gittertheorie). Schon früher hat N. SCHOLZ [3] für die ebene kompressible Gitterströmung eine andere Variante der Prandtl-Glauertschen Regel angegeben, bei welcher in der kompressiblen und der zugeordneten inkompressiblen Strömung gleiche Druckverteilung an den Schaufelprofilen gefordert wird. Diese Überlegungen sind neuerdings von W. TRAUPEL [4] weiter ausgebaut worden.

## 2. Das Rechenverfahren

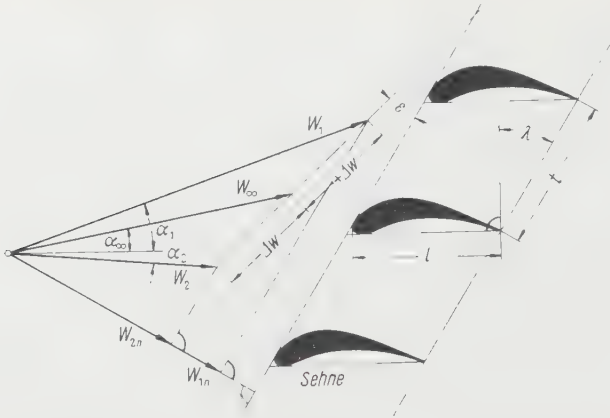
In Figur 1 ist als Beispiel ein Pumpengitter dargestellt. Es bezeichnet  $l$  die Schaufeltiefe,  $t$  die Gitterteilung und  $\lambda$  den Staffelungswinkel. Ferner ist  $W_1$  die Geschwindigkeit weit vor und  $W_2$  die Geschwindigkeit weit hinter dem Gitter. Die Geschwindigkeitsvektoren  $W_1$  und  $W_2$  bilden mit der Profilschne die Winkel  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_2$ , die als Zu- bzw. Abströmwinkel bezeichnet werden. Das vektorielle Mittel von  $W_1$  und  $W_2$  wird mit  $W_\infty$  bezeichnet, ebenso wie bei inkompressibler Strömung. Seien ferner  $p_1$ ,  $p_2$  und  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  Druck und Dichte weit vor bzw. hinter dem Gitter, so gilt nach der Kontinuitätsgleichung

$$\varrho_1 W_{1n} = \varrho_2 W_{2n},$$

wobei  $W_{1n}$  und  $W_{2n}$  die Komponenten von  $W_1$  und  $W_2$  normal zur Gitterfront bedeuten. Für das in Figur 1 dargestellte Pumpengitter ist  $p_2 > p_1$  und somit  $\varrho_2 > \varrho_1$  und  $W_{2n} < W_{1n}$ . Die Verbindungslinien der Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren  $W_\infty$  und  $W_1$  bzw.  $W_\infty$  und  $W_2$  stellen die induzierten Geschwindigkeiten  $\pm \Delta w$  weit vor bzw. weit hinter dem Gitter dar. Diese induzierten Geschwindigkeiten  $\pm \Delta w$  bilden mit der Gitterfront den von Null verschiedenen Winkel  $\varepsilon$ , während bei inkompressibler Strömung  $\varepsilon = 0$  ist.

Um die kompressible Gitterströmung nach dem Prandtl-Glauertschen Näherungsverfahren behandeln zu können, müssen wir voraussetzen, dass sie nur wenig von einer Parallelströmung abweicht. Demnach sei der Geschwindigkeitsvektor  $\bar{W}$  dargestellt als Überlagerung einer Translationsströmung der Geschwindigkeit  $U_\infty$  längs der  $x$ -Achse (Profilschne) mit der Störgeschwindigkeit  $\bar{w}$  (vgl. Figur 2):

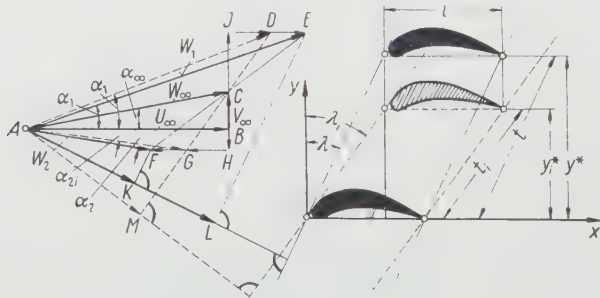
$$\bar{W} = i U_\infty + \bar{w}. \quad (1)$$



Figur 1

Geschwindigkeitsplan der kompressiblen Gitterströmung (Beispiel: Pumpengitter).

Profiltiefe,  $t$  Teilung,  $\lambda$  Staffellungswinkel,  $W_1$  Zuströmgeschwindigkeit,  $W_2$  Abströmgeschwindigkeit,  $W_\infty$  vektorielles Mittel von  $W_1$  und  $W_2$ ,  $\pm \Delta w$  induzierte Geschwindigkeiten weit vor bzw. weit hinter dem Gitter,  $W_{1n}$  und  $W_{2n}$  Komponenten normal zur Gitterfront von  $W_1$  bzw.  $W_2$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  Zu- bzw. Abströmwinkel gegen Sehnenrichtung gemessen,  $\alpha_\infty$  Anstellwinkel,  $\epsilon$  Winkel zwischen  $\Delta w$  und Gitterfront.



Figur 2

Gittergeometrie und Geschwindigkeitsplan der kompressiblen Strömung (ausgezogene Linien) und der zugeordneten inkompressiblen Strömung (gestrichelte Linien).

$l$  Profiltiefe (für kompressible und zugeordnete inkompressible Strömung gleich),  $\lambda$  und  $t$  Staffellungswinkel bzw. Teilung des kompressiblen Gitters;  $\lambda_i$  und  $t_i$  Staffellungswinkel bzw. Teilung des zugeordneten inkompressiblen Gitters;  $y^*$  und  $y_i^*$  Querabstand der Schaufeln des kompressiblen bzw. zugeordneten inkompressiblen Gitters.

Bezeichnungen in den Geschwindigkeitsdreiecken:

Kompressible Strömung				zugeordnete inkompressible Strömung			
AB	$U_\infty$	JE	$u_1$	AB	$U_\infty$	CG	$-\Delta w_i$
BC	$V_\infty$	HF	$u_2$	BC	$V_\infty$	JD	$u_{1i}$
AC	$W_\infty$	BJ	$v_1$	AC	$W_\infty$	HG	$u_{2i}$
AE	$W_1$	BH	$v_2$	AD	$W_{1i}$	BJ	$v_{1i}$
AF	$W_2$	AL	$W_{1n}$	AG	$W_{2i}$	BH	$v_{2i}$
CE	$+\Delta w$	AK	$W_{2n}$	CD	$\Delta w_i$	AM	$W_{ni}$
CF	$-\Delta w$						

Dabei ist  $|\vec{w}| \ll U_\infty$ . Für das durch  $\vec{W} = \text{grad} \Phi$  definierte Geschwindigkeitspotential gilt dann die linearisierte Potentialgleichung

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

mit  $M_\infty = U_\infty/c_\infty$  als Mach-Zahl der Grundströmung. Wird ferner gemäss

$$\Phi(x, y) = U_\infty x + \varphi(x, y) \quad (2)$$

ein Störpotential  $\varphi$  eingeführt mit  $w = \text{grad} \varphi$ , so genügt auch dieses der Gleichung

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Um Gleichung (3) für das Potential der kompressiblen Strömung zu lösen, wird dem kompressiblen Störpotential  $q(x, y)$  ein inkompressibles Störpotential  $\varphi_i(x_i, y_i)$  zugeordnet durch die folgende Prandtl-Glauertsche Transformation:

$$\varphi = a \varphi_i, \quad (4)$$

$$x = x_i; \quad y = \frac{y_i}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (5)$$

Damit wird für  $M_\infty < 1$  die Gleichung (3) auf die Laplacesche Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y_i^2} = 0 \quad (6)$$

zurückgeführt. Es sei ferner  $\vec{W}_i = \text{grad} \Phi_i$  das Geschwindigkeitsfeld der zugeordneten inkompressiblen Strömung mit dem Potential  $\Phi_i$ . Für  $\Phi_i$  kann, in Analogie zu Gleichung (2), angesetzt werden

$$\Phi_i = U_\infty x_i + \varphi_i \quad (7)$$

Dieser Ansatz genügt der Forderung, dass  $\Phi_i$  als Potential einer inkompressiblen Strömung die Laplacesche Gleichung (6) erfüllt. Nach den Gleichungen (2) und (7) werden die beiden einander zugeordneten Strömungen aufgebaut aus einer für beide gleichen Grundströmung  $U_\infty$  und aus Störströmungen, deren Potentiale  $\varphi$  bzw.  $\varphi_i$  durch Gleichung (4) miteinander verknüpft sind.

Der Proportionalitätsfaktor  $a$  dieser beiden Störpotentiale wird aus der Forderung bestimmt, dass das Schaufelprofil in der kompressiblen und der zugeordneten inkompressiblen Strömung gleich sein soll. Dies bedingt, dass die Strömungsrichtung in entsprechenden Punkten der Schaufelkontur gleich ist. Bedeuten  $\delta$  und  $\delta_i$  den Winkel der Strömung mit der  $x$ -Achse in der kompres-

siblen bzw. inkompressiblen Strömung, so ist unter Vernachlässigung der Zustandsgeschwindigkeiten  $u$  und  $u_i$  gegen  $U_\infty$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v}{U_\infty} = \frac{1}{U_\infty} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

und

$$\operatorname{tg} \delta_i = \frac{v_i}{U_\infty} = \frac{1}{U_\infty} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i}.$$

Die Forderung  $\delta = \delta_i$  führt somit auf

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

oder

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} = a \sqrt{1 - M_\infty^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i}.$$

Hieraus folgt

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (8)$$

Führt man Gleichung (8) in Gleichung (4) ein, so ergibt sich für die Komponenten der Störgeschwindigkeit

$$u = \frac{u_i}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}; \quad v = v_i. \quad (9)$$

Die Querabstände  $y^*$  und  $y_i^*$  von zwei benachbarten Gitterschaufeln zweier zugeordneter Gitter stehen ebenfalls in dem Verhältnis von Gleichung (5). Somit ergibt sich nach Figur 2 für die Staffelungswinkel  $\lambda$  und  $\lambda_i$  der einander zugeordneten Gitter die Beziehung

$$\operatorname{tg} \lambda_i = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (10)$$

Für die Teilungen folgt aus  $y^* = t \cos \lambda$  und  $y_i^* = t_i \cos \lambda_i$  die Beziehung

$$t_i = t \sqrt{\sin^2 \lambda + (1 - M_\infty^2) \cos^2 \lambda}. \quad (11)$$

Hiernach ist also bei gleichem Schaufelprofil dem kompressiblen Gitter ein inkompressibles Gitter mit grösserem Staffelungswinkel und kleinerem Teilungsverhältnis zugeordnet (Figur 2).

Für den Sonderfall des ungestaffelten Gitters,  $\lambda = 0$ , erhält man aus den Gleichungen (10) und (11)

$$\lambda_i = 0; \quad t_i = t \sqrt{1 - M_\infty^2}. \quad (11a)$$



Das dem kompressiblen Gitter zugeordnete inkompressible Gitter ist in diesem Fall also ebenfalls ungestaffelt, und es hat eine engere Teilung.

### 3. Berechnungsbeispiele

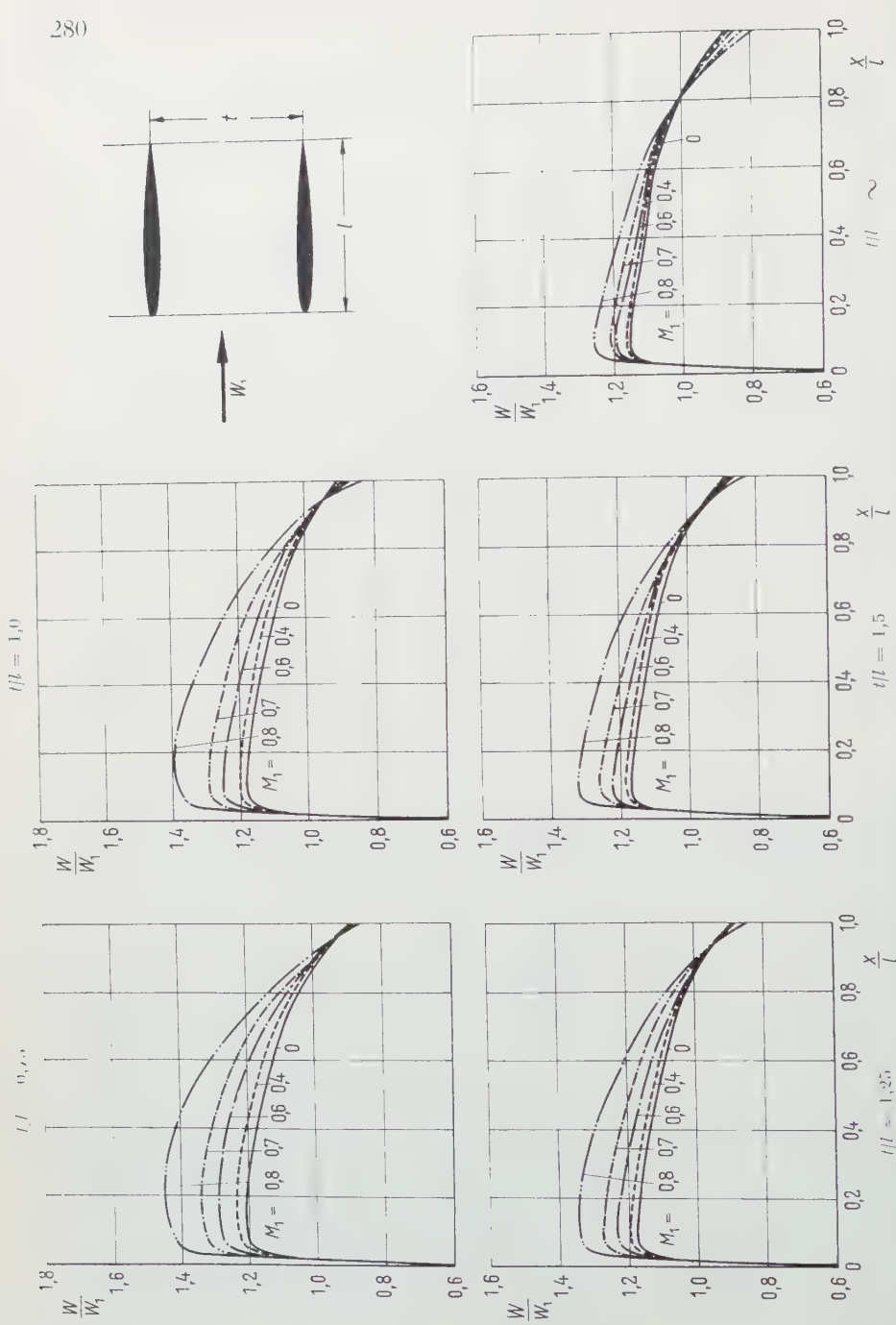
Die Berechnung der Druckverteilung längs der Schaufelkontur für ein vorgegebenes Schaufelgitter (Schaufelprofil, Teilungsverhältnis  $t/l$ , Staffelungswinkel  $\lambda$ ) bei einer vorgegebenen Machschen Zahl  $M_\infty = U_\infty/c_\infty$  gestaltet sich nach dem vorstehenden folgendermassen: Nach den Gleichungen (10) und (11) werden Staffelungswinkel  $\lambda_i$  und Teilungsverhältnis  $t_i/l$  des zugeordneten inkompressiblen Gitters ermittelt. Für dieses zugeordnete inkompressible Gitter wird sodann bei gleichem Schaufelprofil nach dem Rechenverfahren von H. SCHLICHTING [2] die Geschwindigkeitsverteilung längs der Schaufelkontur  $W_i(x)$  ermittelt. Bezeichnet  $W(x)$  die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung des vorgelegten Gitters bei kompressibler Strömung, so gilt im Rahmen der linearen Näherung

$$W_i(x) = U_\infty + u_i(x), \quad W(x) = U_\infty + u(x).$$

Wegen Gleichung (9) hat man somit für die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung auf der Schaufelkontur bei kompressibler Strömung

$$\frac{W(x)}{U_\infty} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left( \frac{W_i(x)}{U_\infty} - 1 \right). \quad (12)$$

Die Ergebnisse einiger Beispielrechnungen sind in den Figuren 3 und 4 angegeben. In Figur 3 ist für ungestaffelte Gitter ( $\lambda = 0^\circ$ ) aus symmetrischen Profilen NACA 0010 bei symmetrischer Anströmung ( $\alpha_1 = 0^\circ$ ) die Geschwindigkeitsverteilung für verschiedene Mach-Zahlen  $M_1 = 0; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8$  dargestellt. Das Teilungsverhältnis ist geändert von  $t/l = 0,75$  bis  $t/l = \infty$  (Einzelprofil). Ein Vergleich der Diagramme für verschiedene  $t/l$  zeigt, dass mit enger werdender Teilung der Kompressibilitätseinfluss auf die Geschwindigkeitsverteilung längs der Schaufelkontur, insbesondere auf die maximale Übergeschwindigkeit, stark zunimmt. Während beim Einzelprofil ( $t/l = \infty$ ) beim Übergang von  $M_1 = 0$  auf  $M_1 = 0,8$  die maximale Übergeschwindigkeit nur von  $W_{max} = 1,16 W_1$  auf  $1,26 W_1$  anwächst, ergibt sich für  $t/l = 0,75$  eine Steigerung von  $W_{max} = 1,21 W_1$  auf  $1,45 W_1$ . In Figur 4 sind für das gleiche Schaufelgitter bei unsymmetrischer Anströmung ( $\alpha_1 = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ ) die Geschwindigkeitsverteilungen ebenfalls für Mach-Zahlen  $M_\infty = 0$  bis  $0,8$  dargestellt. Das Teilungsverhältnis ist mit  $t/l = 1$  festgehalten. Auch in diesem Fall tritt mit wachsender Mach-Zahl eine beträchtliche Steigerung der Übergeschwindigkeit an der Kontur ein.



Figur 3

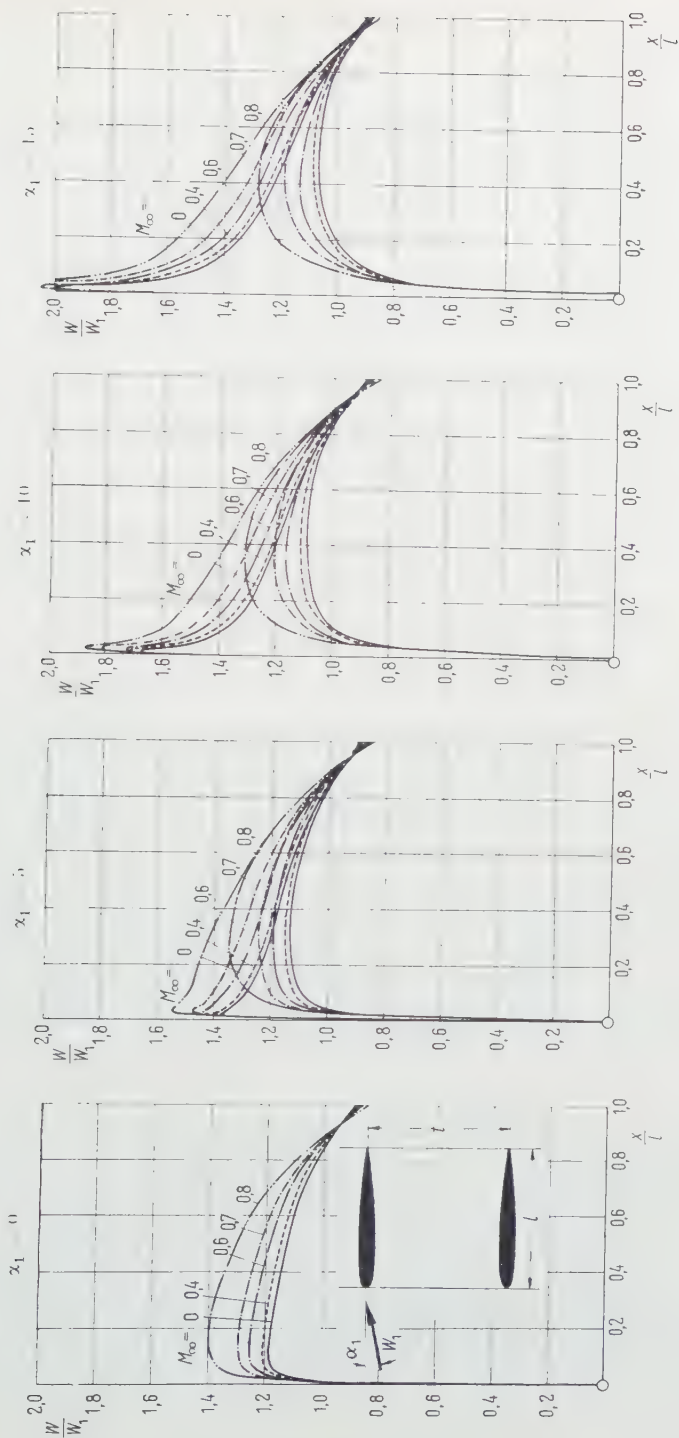


Figure 1

Theoretische Geschwindigkeitsverteilungen von ungestaffelten Schaufelgittern bei un-symmetrischer Anströmung für verschiedene Machsche Zahlen  $M_\infty = 0 \sim 0.8$ , Schaufelprofil NACA 0010; Teilungsverhältnis  $z_1 = 0; 5; 10; 15$ .

#### 4. Vergleich von Rechnung und Messung<sup>4)</sup>

Einen Vergleich zwischen Theorie und Messung gibt Figur 5 für den Fall eines ungestaffelten Gitters. Das Teilungsverhältnis ist  $t/l = 1,0$ , das Schaufelprofil NACA 0010, und der Zuströmwinkel  $\alpha_1 = 0^\circ$  (obere Reihe) und  $\alpha_1 = 10^\circ$  (untere Reihe). Die Kurven  $W/W_1$  stellen die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung der Theorie dar, mit  $W_1$  als Zuströmgeschwindigkeit, und zwar die ausgezogenen Kurven für die Machsche Zahl  $M_1 = W_1/c_1$  der betreffenden Messung und die gestrichelten Kurven für die inkompressible Strömung ( $M_1 = 0$ ). Die eingetragenen Punkte bedeuten die Messung. Hierbei ist der gemessene dimensionslose Druckbeiwert

$$c_p = \frac{p - p_1}{p_0 - p_1} = \frac{p - p_1}{q_1} \quad (13)$$

auf die potentialtheoretische Geschwindigkeit  $W/W_1$  umgerechnet worden nach der Gleichung

$$c_p = \frac{\left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \left(1 - \frac{W^2}{W_1^2}\right)\right]^{\kappa/(\kappa-1)} - 1}{\left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2\right]^{\kappa/(\kappa-1)} - 1}. \quad (14)$$

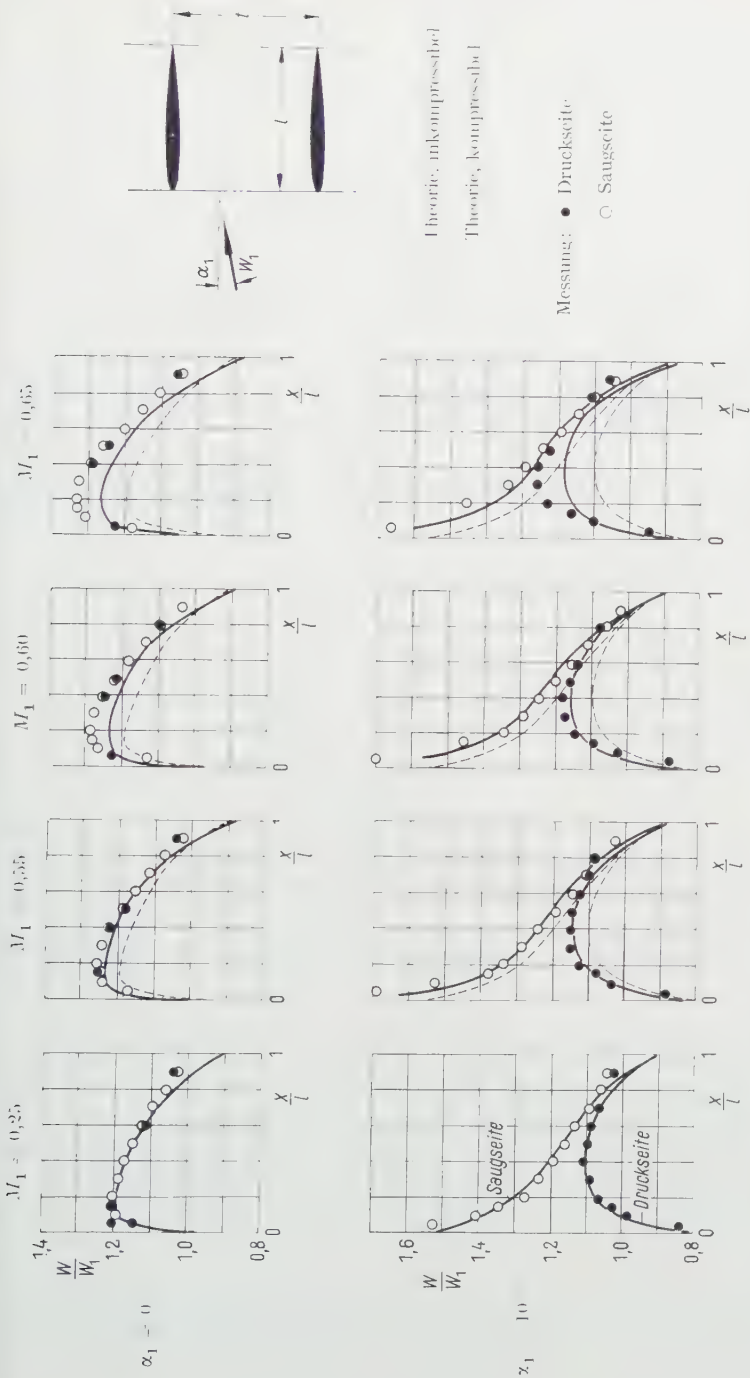
Dabei bedeutet in Gleichung (13)  $p_1$  den statischen Druck vor dem Gitter,  $p_0$  den Ruhedruck und  $p$  den statischen Druck an einer beliebigen Stelle der Schaufelkontur, ferner ist  $\kappa = c_p/c_v$  der Adiabatenexponent ( $\kappa = 1,4$  für Luft).

Der Vergleich von Theorie und Messung zeigt, dass der in der Messung vorhandene Kompressibilitätseinfluss durch die Theorie im wesentlichen befriedigend wiedergegeben wird, solange örtlich die Schallgeschwindigkeit nicht erreicht wird. Die bei der grössten Mach-Zahl vorhandenen Unterschiede zwischen Theorie und Messung dürften darauf zurückzuführen sein, dass einerseits die Theorie etwas zu kleine Übergeschwindigkeiten am Profil liefert und dass andererseits die gemessenen Werte etwas zu gross sind, weil für die Strahlkontraktion keine Korrektur angebracht wurde.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. ACKERET und N. ROTT, *Über die Strömung von Gasen durch ungestaffelte Profilvergitter*, Schweiz. Bauztg. 67, 40–41 und 58–61 (1949).
- [2] H. SCHLICHTING, *Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter*, VDI-Forschungsheft Nr. 447 (1955).

<sup>4)</sup> Die hier mitgeteilten Messungen wurden von Herrn Dipl.-Ing. K. H. GREWE im neuen Hochgeschwindigkeits-Gitterkanal des Instituts für Aerodynamik der Deutschen Forschungsanstalt für Luftfahrt (DFL), Braunschweig, ausgeführt. Sie stellen einen kleinen Ausschnitt dar aus umfangreichen systematischen Druckverteilungsmessungen an Schaufelgittern im Bereich hoher Unterschallgeschwindigkeiten. Diese Messungen werden demnächst an anderer Stelle veröffentlicht werden.



Figur 5

Vergleich der theoretischen und experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen von ungestaffelten Schaufelgittern für verschiedene Machsche Zahlen  $M_1 = W_1/c_1$ . Teilungsverhältnis  $l/l = 1,0$ ; Schaufelprofil NACA 0010; Zuströmwinkel  $\alpha_1 = 0$  und  $10^\circ$ ; Reynoldszahl der Messung  $Re = W_1 l/\nu = 3 \cdot 10^5$ .

3. N. SCHOLZ, *Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern*, VDI-Forschungsheft Nr. 442 (1954).
4. W. TRAUPEL, *Der Einfluss der Kompressibilität auf die Druckumsetzung in Verzögerungsgittern*, Mitteilungen aus dem Institut für thermische Turbomaschinen der ETH Zürich, Nr. 3, S. 7–25 (1956).

### Summary

A simple approximation method based on PRANDTL-GLAUERT's rule is given for the calculation of inviscous compressible flow through a two-dimensional cascade. It is applicable to cascades of any solidity and stagger angle with blade sections of small thickness and camber. The calculation of compressible flow for a predetermined cascade at a given Mach number is reduced to the calculation of an 'associated incompressible flow' through a cascade having blades of the same blade section, a higher solidity and larger angle of stagger. This associated incompressible cascade flow can be conveniently calculated on the basis of a method disclosed by H. SCHLICHTING [2].

Comparison of some computed pressure distributions along the blade contour reveals satisfactory agreement with measurements in the high-speed cascade wind tunnel of the Deutsche Forschungsanstalt für Luftfahrt (DFL; German Research Centre for Aviation), Brunswick.

(Eingegangen: 26. November 1957.)



## Beachtenswerte Vorgänge bei hochtouriger hydrodynamischer Lagerschmierung

Von WILHELM FRÖSSEL, Göttingen, Deutschland<sup>1)</sup>

Die hydrodynamische Schmierung im Gleitlager kommt bekanntlich durch die Relativbewegung der beiden übereinander gleitenden Lagerflächen zustande, indem das an den Gleitflächen haftende Schmiermittel seine Bewegung durch Flüssigkeitsreibung auf die inneren Schmiermittelschichten überträgt. Aus der so entstandenen Spaltströmung entwickelt sich im verengten Teil des Schmierspalt nach den bekannten Strömungsgesetzen ein Schmiermitteldruck, der letzten Endes die hydrodynamische Tragkraft hervorbringt. Dieser Zustand der dauernden Druckerzeugung aus der Strömung heraus setzt jedoch am Spaltanfang einen reichlichen Zufluss und am Spaltende einen entsprechenden Abfluss des Schmiermittels voraus. Bei den bisher in der Praxis meist üblichen Drehzahlen bzw. Wellengeschwindigkeiten sind bei diesem Vorgang kaum Schwierigkeiten bekannt geworden. Neuerdings steigen die Drehzahlforderungen jedoch beträchtlich an, zum Beispiel werden bei Wellendurchmessern von 20 mm bereits Drehzahlen von über 40000 bis hinauf zu 60000 U/min gewünscht. Einige bei so hochtourigen Maschinen beobachtete ungeklärte Vorkommnisse gaben Veranlassung, die Zu- und Abflussverhältnisse im Schmierspalt einer genaueren Betrachtung zu unterziehen. Die gemachten Beobachtungen deuteten nämlich darauf hin, dass bei hohen Wellenumfangsgeschwindigkeiten unter gewissen Voraussetzungen, insbesondere bei niedrigem Ölpumpendruck, zeitweilig Öl-mangel<sup>2)</sup> im Schmierspalt mit den üblichen Folgeerscheinungen einsetzen kann, auch wenn die äussere Ölversorgung reichlich gesichert ist.

Zur Überlegung der vermuteten Strömungsvorgänge bei hochtouriger Lagerschmierung mag unsere Figur die notwendige Anschauung und Erklärung geben. Es zeigt gerade den in Drehrichtung der Welle verengten Schmierspaltteil, in dem die hydrodynamische Druckentwicklung stattfindet. Dieser Schmierspaltteil beginnt mit seiner grösseren Spaltweite an der Ölnute und endet an der engsten Spaltstelle  $h_0$ . Seine Schmiermittelversorgung erfolgt aus der Ölnute, und zwar hauptsächlich

<sup>1)</sup> Max-Planck-Institut für Strömungsforschung.

<sup>2)</sup> Den ersten Hinweis auf einen möglichen Öl-mangel in Schmierspalten hochtouriger Gleitlager gab Dipl.-Ing. SCHWARZ, Frankenthal.

1. durch Mitnahme des an der bewegten Welle haftenden Schmiermittels und
2. durch den Öldruck in der Ölnute.

Während also die Ölzufuhrmenge von den Verhältnissen in der Ölnute abhängt, wird die im Schmierpalt notwendige Ölmenge allein von dem dort herrschenden Druck- und Strömungsfeld entsprechend den hydrodynamischen Strömungsgesetzen bestimmt. Man hat daher bei der hydrodynamischen Schmierung zu unterscheiden zwischen Ölzufuhr und Ölabfuhr, deren Mengen in ganz verschiedener Weise von der Wellengeschwindigkeit abhängen.

Bei mässiger Wellengeschwindigkeit ist die Ölzufuhr am Anfang des Schmierpaltcs stets grösser als die Ölabfuhr im Schmierpalt, so dass hier keine Gefahr für Ölmangel besteht. Jedoch wächst die Ölzufuhr mit steigender Wellengeschwindigkeit langsamer an als die Ölabfuhr. Wenn letztere grösser wird als erstere, muss zwangsläufig im Schmierpalt ein Unterdruck entstehen. Natürlich verliert eine solche Ölschicht jegliche Tragfähigkeit. Weit schlimmer ist aber, dass sich als Folge des Unterdruckes die im Öl befindliche Luft ausscheidet, die die üblicherweise geschlossene Ölschicht aufreisst, so dass sich Welle und Lagerschale teilweise schutzlos gegenüberstehen.

Die Untersuchung der vorangehend geschilderten Strömungsvorgänge soll der Einfachheit halber für den zweidimensionalen Strömungsfall, also ohne Seitenfluss, vorgenommen werden. Diese Annahme trifft für den drucklosen Strömungszustand genau, für alle anderen hinreichend genau zu.

In der Figur ist zum besseren Verständnis der Spaltvorgänge eine gesunde Spaltströmung dargestellt. Die Ölzufuhr am Spaltanfang ist hierbei bedeutend grösser als der Ölbedarf im Spalt. Man erkennt an den eingezeichneten Strompfeilen die stattfindende Ölbewegung mit teilweiser Rückwärtsströmung, die für eine gesunde Spaltströmung mit Druckentwicklung charakteristisch ist.

In der weiteren Untersuchung sei das Augenmerk zunächst auf die abfließende Ölmenge gerichtet. Sie lässt sich am einfachsten an der engsten Spaltstelle  $h_0$  ermitteln, wo die Geschwindigkeitsverteilung quer zum Spalt «ir. etwa» geradlinig ist. Genau genommen, besteht diese Geradlinigkeit bei der gesunden Strömung am Druckmaximum vor der engsten Spaltstelle  $h_0$  und am Ende des Druckgebietes ebensoviel dahinter. Sie wandert aber mit ungesunder werdender Spaltströmung, das heisst bei mangelnder Ölzufuhr, zur engsten Spaltstelle hin, so dass für unsere abschätzende Betrachtung die engste Spaltstelle  $h_0$  als Berechnungsquerschnitt geeigneter ist.

Aus dem Teilbild *a* der Figur, welche die Geschwindigkeitsverteilung an der engsten Spaltstelle  $h_0$  vergrössert wiedergibt, folgt die Ölabflussmenge für die Breitereinheit zu

$$Q_a = U \frac{h_0}{2}. \quad (1)$$

$Q_a$  Abflussmenge [ $\text{m}^3/\text{s}$ ],  $U$  Wellenumfangsgeschwindigkeit [ $\text{m}/\text{s}$ ],  $h_0$  Spaltweite an der engsten Spaltstelle [ $\text{m}$ ].



Um für die Betrachtung exakte Bedingungen zu schaffen, wird festgesetzt, dass die Grenzschicht  $c$  in der Figur an der linken Ölnutenkante beginnt und an der rechten endet. In Wirklichkeit wird der Beginn schon etwas in dem vorausgehenden Schmierespalt liegen und zudem unregelmässig über der Breite verteilt sein. Weiterhin wird laminare Grenzschichtströmung angenommen und die Wellenkrümmung vernachlässigt. Beide Voraussetzungen treffen nicht immer genau zu, erleichtern aber die abschätzende Betrachtung.

In der Figur soll die schräg schraffierte Fläche  $c$  die Grenzschicht veranschaulichen, deren Dicke mit dem Berührungsweg  $x$  beständig wächst. Der Vollständigkeit halber muss hinzugefügt werden, dass die Grenzschichtdicke theoretisch von Anfang ( $x = 0$ ) an unendlich gross ist. Damit aber ein definierter Wert vorliegt, wurde nach der Grenzschichttheorie der Rand der Grenzschicht dort festgelegt, wo die Geschwindigkeit nur noch ein Prozent der maximalen Geschwindigkeit beträgt.

Nach dieser Festlegung errechnet sich die Grenzschichtdicke allgemein zu

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{x \nu}{U}}$$

und die maximale Grenzschichtdicke bei  $x = L$  zu

$$\delta_m = 5 \sqrt{\frac{L \nu}{U}} \quad (2)$$

$x$ bzw. $L$	Berührungslänge [m],
$\nu = \eta/\rho$	kinematische Zähigkeit [ $\text{m}^2/\text{s}$ ],
$\eta$	Schmiermittelzähigkeit [ $\text{kg s}/\text{m}^2$ ],
$\rho$	Schmiermitteldichte [ $\text{kg s}^2/\text{m}^4$ ],
$U$	Wellengeschwindigkeit [m/s].

Die Geschwindigkeitsverteilung quer zur Grenzschicht zeigt das Teilbild  $a$  an drei Stellen und stark vergrössert das Teilbild  $b$  in der Figur. Sie ist für laminare Grenzschichtströmung theoretisch berechnet und experimentell gemessen. Alle Geschwindigkeitskurven entlang dem Weg  $x$  sind affin zueinander, das heisst, sie fallen alle zusammen, wenn sie auf  $\delta = 1$  bezogen werden.

Die Geschwindigkeitsverteilung gibt zugleich die in der Grenzschicht mitgeführte Ölmenge an. Die maximale Grenzschichtdicke  $\delta_m$  und damit die maximale Ölmenge liegt bei  $x = L$ . Um einfache und leicht übersichtliche Formeln mit runden Zahlen zu erhalten, wird der Flächeninhalt der Geschwindigkeitskurven mit dem eingezeichneten gestrichelten Dreieck in Teilbild  $b$  errechnet. Auch hier wird eine zweidimensionale Grenzschichtströmung angenommen, so dass die Breite wieder mit Eins eingesetzt werden kann. Die maximale Ölzufuhr ist somit

$$Q_z = \frac{9}{15} U \frac{\delta_m}{2} \quad (3)$$

Wird  $\delta_m$  mit Gleichung (2) eliminiert, so folgt

$$Q_z = \frac{3}{2} \sqrt{L \nu U}. \quad (4)$$

Es stehen sich nunmehr Gleichung (4) als Ölzufuhr und Gleichung (1) als Öl-abfuhr gegenüber. Während Gleichung (4) mit  $U$  wächst, nimmt Gleichung (1) mit  $U$  direkt proportional zu. Ausserdem hängt die Ölzufuhr von der Ölnutenbreite  $L$  und der Öleigenschaft  $\nu$ , die Öl-abfuhr aber von der Spaltweite  $h_0$  an der engsten Spaltstelle ab. Die Einflussgrössen sind auf beiden Seiten grundverschieden. Die Bedingung, dass  $Q_z > Q_a$  ist, kann meist leicht erfüllt werden. Mit sehr stark steigender Geschwindigkeit holt aber  $Q_a$  beträchtlich auf und erreicht bei der Grenzgeschwindigkeit  $U_g$  Gleichheit mit  $Q_z$ . Dann kann

$$Q_z = Q_a = \frac{3}{2} \sqrt{L \nu U_g} = \frac{U_g h_0}{2} \quad (5)$$

geschrieben werden und daraus die Grenzgeschwindigkeit

$$U_g = \frac{9}{8} \frac{L \nu}{h_0^2}. \quad (6)$$

Wenn die Grenzgeschwindigkeit  $U_g$  von der Wellengeschwindigkeit  $U$  überschritten wird, tritt Ölmangel im Schmierspalt auf und damit statt Überdruck Unterdruckentwicklung. Wie aus der Gleichung (6) aber zu erkennen ist, verändert sich  $U_g$  bei einem gegebenen Lager und gegebenem Schmieröl noch umgekehrt mit  $h_0^2$ , wird also unendlich, wenn  $h_0$  gegen Null geht. Dadurch müsste eigentlich der Ölmangelzustand ungefährlich sein, denn bei kleinem  $U_g$  tritt zwar Ölmangel ein, aber  $h_0$  wäre dann gross und es bestünde keine Berührungsgefahr zwischen Welle und Lagerschale. Wenn aber Berührungsgefahr droht, ist  $h_0$  naturgemäss klein und somit die Grenzgeschwindigkeit  $U_g$  nach Gleichung (6) gross, so dass wieder kein Ölmangel besteht.

Leider macht sich hierbei die oben schon erwähnte Eigenschaft des Schmieröles bemerkbar, dass nämlich bei Unterdruck das Öl Luft ausscheidet, die die schützende Ölschicht verdrängt, so dass Wellenstösse direkt auf die Lagerschale durchschlagen können, ehe sich wieder ein schützender Ölfilm ausgebildet hat.

Um diesem Übelstand abzuhelpen, muss das Druckniveau im ganzen Schmierölgebiet so gehoben werden, dass nirgends Unterdruck entsteht. Zwangsläufig führt diese Forderung auf die zweite anfänglich aufgeführte Möglichkeit der Ölzufuhr mittels Druckdifferenz. Neben der Vermeidung der Luftausscheidung erhält man dabei noch zusätzlich eine Ölzufuhr bei einsetzendem Ölmangel, so dass die Hebung des Druckes in doppelter Hinsicht von Bedeutung ist.

Die zusätzliche Ölzufuhrmenge regelt sich automatisch mit dem Absinken des Öldruckniveaus im Schmierspalt, indem dadurch eine Druckdifferenz zwi-



schen Ölnute und Schmierspaltanfang entsteht. Sie ergibt sich wieder für die Breitereinheit mit

$$Q_a = h_1 \sqrt{\frac{2 g p}{\gamma}}. \quad (7)$$

Darin sind nach der Figur

- $h_1$  Spaltweite am Anfang des Schmierspaltaltes [m],
- $p$  Druckdifferenz zwischen Ölnut und Schmierspaltanfang [ $\text{kg/m}^2$ ],
- $\gamma$  spezifisches Gewicht des Schmieröles [ $\text{kg/m}^3$ ],
- $g$  Erdbeschleunigung [ $\text{m/s}^2$ ],
- $Q_a$  zusätzliche Ölmenge [ $\text{m}^3/\text{s}$ ].

Den Anfangsspalt  $h_1$  wiederum liefert die Spaltformel

$$h_1 = (R - r) (1 - \cos \varphi) + h_0 \cos \varphi. \quad (8)$$

- $R$  Radius der Lagerschale [m],
- $r$  Radius der Welle [m],
- $\varphi$  Winkel zwischen engster Spaltstelle und Anfangsspalt,
- $h_0$  Spaltweite an engster Spaltstelle [m],
- $h_1$  Spaltweite am Anfang des Schmierspaltaltes [m].

Nunmehr kann man zur Bestimmung der Grenzgeschwindigkeit  $U_g$  ansetzen

$$Q_a + Q_z = Q_a$$

und entsprechend

$$h_1 \sqrt{\frac{2 g p}{\gamma}} + \frac{3}{2} \sqrt{L \gamma U_g} = \frac{U_g h_0}{2}. \quad (9)$$

Daraus folgt die Grenzgeschwindigkeit

$$U_g = \left( \sqrt{2 \frac{h_1}{h_0}} \sqrt{\frac{2 g p}{\gamma}} + \frac{9}{4 h_0^2} L \gamma + \frac{3}{2 h_0} \sqrt{L \gamma} \right)^2. \quad (10)$$

Auch hier wurde die Rechnung für zweidimensionale Strömung durchgeführt. Diese Annahme ist berechtigt, denn bei akutem Ölmangel sinkt die Druckentwicklung im Schmierspalt bis auf den Aussendruck ab, so dass kein seitliches Ausströmen stattfinden kann.

Ausser den zwei behandelten Möglichkeiten für die Ölzufuhr zum Schmierspalt sei der Vollständigkeit halber noch eine scheinbare dritte angegeben. Bei gesunder Spaltströmung wird nämlich der Zufuhrüberschuss am Spaltanfang abgezweigt, wie es in der Figur schematisch dargestellt ist. Dadurch kommt in der Ölnute eine Zirkulation zustande, die die Ölzufuhr zwar unterstützt, solange kein Ölmangel besteht, im kritischen Augenblick aber gerade versagt, weil dann die Ölabzweigung fortfällt. Sie ist daher für unsere Betrachtung uninteressant.



Nach allgemeiner Darlegung der Verhältnisse ist es nützlich, anhand eines in der Praxis häufiger vorkommenden Lagerfalles die Ölmangelfrage zu diskutieren.

Angenommen seien folgende Daten:

Lagerdurchmesser	= 20 mm,
Lagerspiel	= 0,1 mm,
Ölnutenbreite	$L = 4$ mm (vgl. Figur),
dynamische Zähigkeit des Öles	$\eta = 0,001$ kgs/m <sup>2</sup> ,
Einheitsgewicht des Öles	$\gamma = 900$ kg/m <sup>3</sup> ,
Dichte des Öles	$\rho = 91,8$ kgs <sup>2</sup> /m <sup>4</sup> ,
kinematische Zähigkeit	$\nu = \eta/\rho = 0,0001089$ m <sup>2</sup> /s.

Bei hoher Drehzahl läuft die Welle praktisch zentriert, so dass der engste Spalt  $h_0$  gleich dem halben Lagerspiel = 0,05 mm angesetzt werden darf. Für den drucklosen Ölzustand in der Ölnute ergibt sich die Grenzgeschwindigkeit, bei der Ölmangelgefahr eintritt, aus der Gleichung (6) zu

$$U_g = 157 \text{ m/s}.$$

Die zugehörige Grenzdrehzahl einer Welle von 20 mm Durchmesser wäre  $n_g = 150000$  U/min, eine Höhe, die in der Praxis zurzeit bei weitem noch nicht üblich ist. Normalerweise dürfte somit der Schmierpalt stets reichlich mit Öl versorgt sein. Doch kann die Welle unter äusserer Stossbelastung gelegentlich von ihrer zentrierten Lage abweichen und der unbelastete Spaltteil kurzzeitig auf nahezu das ganze Lagerspiel, also  $h_0 \approx 0,1$  mm, anwachsen. Sofort fällt für diese Stelle die Grenzgeschwindigkeit auf  $U_g = 39,25$  m/s und die entsprechende Grenzdrehzahl auf  $n_g = 37500$  U/min ab. Diese kann aber schon beträchtlich unter einer immerhin praktisch vorkommenden Drehzahl liegen, so dass Ölmangelgefahr mit ihren Nebenerscheinungen, wie Luftausscheidung, Metallberührung usw., akut zu werden droht.

Es ist naheliegend, für zweifelhafte Laufzustände das Öldruckniveau höher zu halten. Unser Beispiel wird deshalb vom drucklosen Zustand auf 3 atü Druck in der Ölnute erweitert. Alsdann hat die Rechnung nach Gleichung (10) zu erfolgen. Zur Bestimmung des noch fehlenden Anfangsspalt  $h_1$  wird Gleichung (8) benutzt. Es sei an dieser Stelle vermerkt, dass für den hier behandelten Drehzahlbereich meist nur Mehrgleitflächen-Lager verwendet werden. Deshalb wird die Rechnung auch für diese weitergeführt. Für den im obigen Beispiel angeführten Lagerdurchmesser haben Mehrgleitflächen-Lager eine Radiendifferenz von 0,2 mm, und der wirksame Gleitwinkel  $\varphi$  (vgl. Figur) beträgt etwa 50°. Damit wird der Anfangsspalt bei gelegentlich extremster Ausweichung der Welle aus der Mitte in unserem Beispiel nach Gleichung (8)

$$h_1 = 0,1357 \text{ mm}.$$

Mit Gleichung (10) ergibt sich nun

$$U_g = 145 \text{ m/s}$$

und als entsprechende Grenzdrehzahl

$$n_g = 138\,500/\text{min}.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass sich mit Steigerung des Druckniveaus die Gefahrenzone genügend nach oben aus dem Anwendungsbereich verschieben lässt. Die Schwierigkeit wird allerdings darin liegen, das Druckniveau in den Ölnuten zu halten. Dazu wird es nötig sein, die zur Kühlung notwendigen Öldurchflussmengen mit der vorhandenen Ölnutendrosselung abzustimmen.

Die Grenzgeschwindigkeit  $U_g$  lässt sich gemäss den Gleichungen (6) und (10) in beschränktem Umfang auch mit der Nutenbreite  $L$  erhöhen. Es ist daher ratsam, die Ölnuten so breit auszuführen, wie es die Gleitflächen zulassen. Die Grössen  $\gamma$  und  $\nu$  geben reine Öleigenschaften an und sind meist schon anderweitig festgelegt. Dagegen gibt beim Mehrgleitflächen-Lager noch der Spaltwert  $h_1$  durch geeignete Wahl von  $R - r$  eine gewisse Möglichkeit der Steigerung der Grenzgeschwindigkeit  $U_g$ , doch ist damit gleichzeitig eine Beeinträchtigung der Tragkraftentwicklung verbunden, was wohl zu beachten ist.

Aus vorstehender Untersuchung lässt sich erkennen, dass die heutigen Drehzahlen des hochtourigen Maschinenbaues im allgemeinen mit der hydrodynamischen Schmierung noch gut zu bewältigen sind, dass in besonderen Lagerfällen aber doch eine obere hydrodynamische Drehzahlbegrenzung möglich ist.

### Summary

Flow conditions in the lubricating gap of a hydro-dynamically lubricated sleeve bearing at extremely high speed have been investigated theoretically. It is known that hydrodynamic lubrication requires a copious oil supply so as not to interrupt the flow and consequently the generation of pressure. However, it is found that with certain running conditions there may be lack of oil in the lubricating gap despite ample supply of oil in the grooves. This is caused by the fact that the oil discharge may be larger than the amount of oil that can be supplied at the beginning of the gap. The result is a vacuum combined with air evaporation and the formation of bubbles, which endanger the running surfaces locally by denuding them of the protective oil film.

The results are explained by an example. This shows that under certain circumstances the region of critical speed can still be attained in practice.

(Eingegangen: 21. Juni 1957.)

## Einige laminare Grenzschichtströmungen, berechnet mittels einer neuen Reihenmethode

VON HENRY GÖRTLER UND HERMANN WITTING, Freiburg i. Br., Deutschland<sup>1)</sup>

### 1. Einleitung

Eine neue Methode <sup>1,2)</sup> zur Berechnung stationärer, ebener und inkompressibler laminarer Grenzschichten bei allgemeinem äusserem Druckverlauf mit Hilfe einer formal exakten Lösung dieses allgemeinen Problems der Grenzschichttheorie in Gestalt einer unendlichen Reihe in besonders geeigneten Variablen hat sich in einer grösseren Zahl von Anwendungsbeispielen [1, 2] gut bewährt. Trotz ihrer Strenge und Allgemeinheit erfordert die Methode in ihrer Anwendung keinen grösseren, sondern eher einen geringeren Arbeitsaufwand als die wegen ihrer Einfachheit vielfach benutzten, nicht strengen Verfahren nach dem Muster des Kármán-Pohlhausen-Verfahrens. Es steht somit ein zuverlässiges und einfaches Verfahren zur Verfügung, Grenzschichtströmungen in grösserem Umfange mit grosser Genauigkeit zu berechnen und damit instruktives Material über den Einfluss verschiedener Bedingungen zu erhalten, etwa über den Einfluss des Druckverlaufs auf die Lage der Ablösungsstelle. Die Ergebnisse des Verfahrens bieten sich in ihrer Zuverlässigkeit auch in besonderer Weise als Unterlage für theoretische Untersuchungen der Stabilität von Grenzschichten unter variablen Bedingungen an. Der folgende Beitrag setzt sich das bescheidene Ziel, eine Reihe weiterer und, wie wir hoffen, instruktiver und nützlicher Beispiele zu demonstrieren, darunter solche von einparametrischen Familien verwandter äusserer Geschwindigkeitsverteilungen, die besonders einprägsam den Einfluss variablen Druckanstiegs auf den Verlauf der Wandschubspannung zeigen.

Der Grund für die Einfachheit der Berechnung solcher Beispiele besteht in erster Linie darin, dass die Koeffizientenfunktionen der neuen Reihe sich als lineare Kombinationen von universellen Funktionen darstellen lassen. Die hauptsächliche Arbeit der strengen Integration eines Grenzschichtproblems kann daher vor jeder Einzelanwendung ein für allemal geleistet werden, und jede Einzelanwendung selbst besteht dann nur noch in der vom Verfahren vorgeschriebenen Koordinatentransformation und in der Auswertung der genannten Linearkombinationen unter Heranziehung der bereitgestellten Zahlen- tafeln der universellen Funktionen. Die Güte der unter Abbrechen der Reihe

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der Universität Freiburg i. Br. und Institut für angewandte Mathematik und Mechanik der DVL, Freiburg i. Br.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 306.

erzielbaren Approximation hängt von dem Konvergenzverhalten der Reihe ab. Da die Wahl der Variablen so erfolgt, dass bereits das Glied nullter Ordnung der Reihe neben den Randbedingungen an der Wand auch die äussere Randbedingung überall exakt erfüllt, fallen die Glieder höherer Ordnung mit Korrekturen im Innern der Grenzschicht erst weit stromabwärts allmählich ins Gewicht. Mit den bisher in Tafeln zur Verfügung stehenden universellen Funktionen konnten Strömungen an Zylindern mit spitzer Vorderkante (oder, was grenzschichttheoretisch dasselbe ist, an Platten bei variablem äusserem Druckverlauf) in allen behandelten Fällen mit guter Genauigkeit von der Vorderkante stromabwärts bis unmittelbar vor der Ablösungsstelle berechnet werden. (Falls statt einer kurzen Extrapolation eine genauere Bestimmung der Ablösestelle gewünscht wird, müssen einige wenige Schritte eines der üblichen Fortsetzungsverfahren angeschlossen werden, vgl. Beispiele unten.) Bei Zylindern mit runder Nase erwies sich das Konvergenzverhalten als nicht so günstig. Über die Vorteile der Methode im allgemeinen und im einzelnen ist in den früheren Arbeiten ausführlich berichtet worden [1, 2].

Inzwischen ist die Methode erweitert worden auf Grenzschichten mit allgemeiner Absaugeverteilung längs der Wand [3]; die zur Anwendung erforderlichen zusätzlichen universellen Funktionen sollen in Kürze vertafelt werden. Das Gleiche gilt für die Berechnung von Temperaturgrenzschichten bei konstanten Stoffwerten [11]. Die Erweiterung des Verfahrens auf kompressible Grenzschichten bei allgemeinen Bedingungen wird zurzeit bearbeitet.

## 2. Bezeichnungen und Variablenwahl

Wie üblich bezeichnen  $x$  die Wandbogenlänge (gemessen von der Vorderkante bzw. vom vorderen Staupunkt aus),  $y$  den senkrechten Abstand von der Wand,  $u$  und  $v$  die Geschwindigkeitskomponenten in der Grenzschicht in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung,  $\psi(x, y)$  die Stromfunktion der Grenzschicht,  $U(x)$  die vorgegebene äussere Geschwindigkeitsverteilung und  $\nu$  die konstante kinematische Zähigkeit. Die Methode beruht auf der Verwendung der neuen unabhängigen Veränderlichen

$$\xi = \frac{1}{\nu} \int_0^x U(x) dx, \quad \eta = \frac{\frac{U(x) y}{\nu}}{\left\{ \frac{2}{\nu} \int_0^x U(x) dx \right\}^{1/2}} \quad (1)$$

und der neuen abhängigen Veränderlichen

$$F(\xi, \eta) = \frac{\psi(x, y)}{\left\{ 2 \nu \int_0^x U(x) dx \right\}^{1/2}}. \quad (2)$$

Das Grenzschichtproblem reduziert sich dabei auf die Differentialgleichung

$$F_{\eta\eta\eta} + FF_{\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_{\eta}^2) = 2\xi\{F_{\eta}F_{\xi\eta} - F_{\xi}F_{\eta\eta}\} \quad (3)$$

mit den universellen Randbedingungen

$$F(\xi, 0) = 0, \quad F_{\eta}(\xi, 0) = 0, \quad F_{\eta}(\xi, \infty) = 1 \quad (4)$$

(wozu in  $\xi = 0$  das vorgeschriebene singuläre Verhalten als «Einlaufbedingung» kommt [1]). Die Daten des jeweiligen Problems erscheinen explizit nur in dem Koeffizienten  $\beta(\xi)$ , der «Hauptfunktion der Grenzschicht»

$$\beta(\xi) = \frac{2 \int_0^{\xi} U'(x) U(x) dx}{U^2(x)} \quad (5)$$

die als analytisch im interessierenden Intervall vorausgesetzt wird. Die Potenzentwicklung

$$\beta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \xi^k \quad (6)$$

führt zur Darstellung der gesuchten Lösungsfunktion  $F$  in der Form

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\eta) \xi^k, \quad (7)$$

und dabei erweisen sich die  $F_k(\eta)$  als gewisse Linearkombinationen von universellen Funktionen. Für alle Einzelheiten verweisen wir aus Raumgründen auf unsere frühere ausführliche [1] und zusammenfassende [2] Darstellung.

Die gegenwärtig verfügbaren Zahlentafeln [4] erlauben die Auswertung der Reihe (7) bis zur Ordnung  $k = 5$  einschliesslich, und zwar sowohl für die Klasse der symmetrischen Strömungen an Zylindern mit runder Nase ( $\beta_0 = 1$ ) als auch für die Klasse der Strömungen an Zylindern mit spitzer Vorderkante ( $\beta_0 = 0$ ). (Die Methode ist auch für beliebige vordere Kantenwinkel anwendbar, jedoch liegen für andere als die vorderen Keilwinkel  $\pi\beta_0 = \pi$  und  $= 0$  keine Tafeln universeller Funktionen bisher vor.)

In den folgenden Ausführungen benutzen wir unter Verwendung einer charakteristischen Länge  $L$  und einer charakteristischen Geschwindigkeit  $U_0$  die dimensionslosen Grössen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y Re^{1/2}}{L} \quad \text{mit} \quad Re = \frac{U_0 L}{\nu}; \\ \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{u(x, y)}{U_0}, \quad \bar{U}(\bar{x}) = \frac{U(x)}{U_0}; \\ \bar{\xi} &= \frac{\xi}{Re}, \quad \bar{\beta}(\bar{\xi}) = \beta(\xi), \quad \text{somit} \quad \bar{\beta}_k = \beta_k Re^k. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$



### 3. Grenzsichten bei äusseren Geschwindigkeiten der Form $U(x) = U_0 (1 + x/L)^{-n}$ , $x \geq 0$ , $n \geq 0$

Der Sonderfall  $n = 1$  dieser Klasse von äusseren Geschwindigkeitsverteilungen ist bereits in [1] behandelt worden. Er kann gedeutet werden als der Fall einer Platte  $x \geq 0$ ,  $y = 0$  in der äusseren Potentialströmung aus einer in  $x = -L$ ,  $y = 0$  gelegenen Quelle. Entsprechend hat man für allgemeines  $n > 0$  allgemeinere verzögerte Aussenströmungen an Platten (oder Profilen mit spitzer Vorderkante)  $x \geq 0$ ,  $y = 0$ , wie sie etwa in divergenten Kanälen auftreten können.

In den Dimensionslosen (8) hat man

$$\bar{U}(\bar{x}) = (1 + \bar{x})^{-n} \quad (\bar{x} \geq 0, \quad n \geq 0). \quad (9)$$

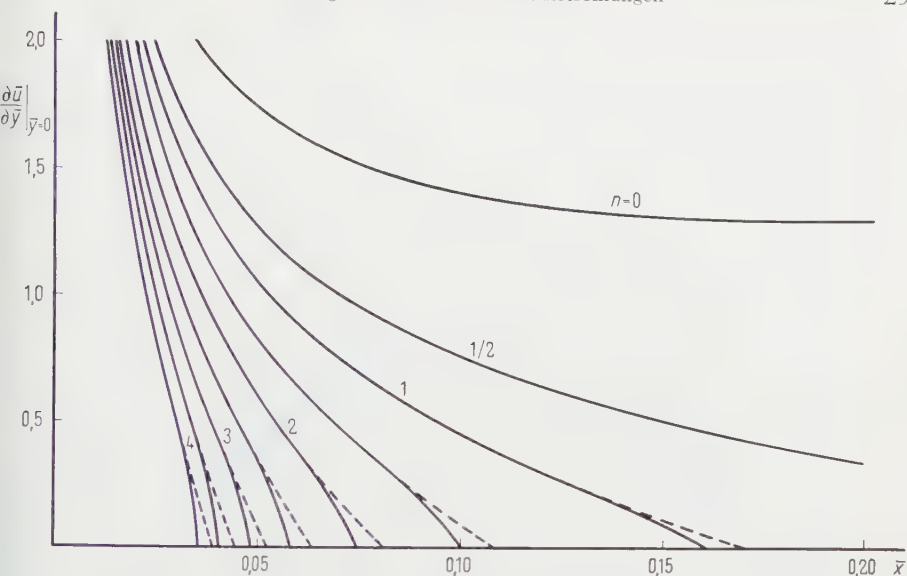
Eine elementare Rechnung erlaubt, die Hauptfunktion geschlossen anzugeben:

$$\bar{\beta}(\bar{\xi}) = \frac{-2n\bar{\xi}}{1 - (n-1)\bar{\xi}}, \quad (10)$$

und die Potenzreihenentwicklung dieses Ausdrucks um  $\bar{\xi} = 0$  liefert sofort die für die numerischen Auswertungen benötigten Zahlen  $\bar{\beta}_k$ .

Numerisch untersucht wurden die Fälle  $n = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots, 4$ . Der Fall  $n = 1$  wurde bereits erwähnt. Der Grenzfall  $n = 0$  ist der bekannte Fall der Blasiuschen Platte. Die Approximationsgüte der Ergebnisse der abgebrochenen Reihe wurde wieder, wie schon früher [1, 2], geprüft, indem bereits unnötig früh in Strömungsrichtung, wo die Approximation ganz offensichtlich noch gut war, eine Kontrollrechnung mit Hilfe des von uns entwickelten umständlichen, aber stets zuverlässigen Differenzenverfahrens der schrittweisen Fortsetzung [5, 6] begonnen wurde. Wieder zeigte sich, dass erst kurz vor der jeweiligen Ablösungsstelle die Ergebnisse der abgebrochenen Reihe (Approximation 5. Ordnung, siehe oben) von jenen der schrittweisen Fortsetzung abzuweichen begannen und dann bald unbrauchbar wurden. Das ist in Figur 1 an den Verläufen der örtlichen Wandschubspannung gezeigt; dort, wo die Ergebnisse der abgebrochenen Reihe unbrauchbar werden, sind sie gestrichelt eingetragen. Das schärfere Hinwenden der ausgezogenen Kurven zur  $\bar{x}$ -Achse (ausgezogen hier das Ergebnis der schrittweisen Fortsetzung) ist ganz typisch. Man findet diese systematische Abweichung bei allen bisher ausgewerteten Beispielen von Plattenströmungen ( $\beta_0 = 0$ ) in derselben Weise und in etwa gleichem Ausmass. (Diese Erfahrung erlaubte uns, den wahren Verlauf unmittelbar vor der Ablösungsstelle durch freihändige Extrapolation mit ausreichender Genauigkeit zu raten, wie die dann nachträglich durchgeführte Fortsetzungskontrolle bestätigte.)





Figur 1

Verlauf der lokalen Wandschubspannung für verschiedene Werte von  $n$ .

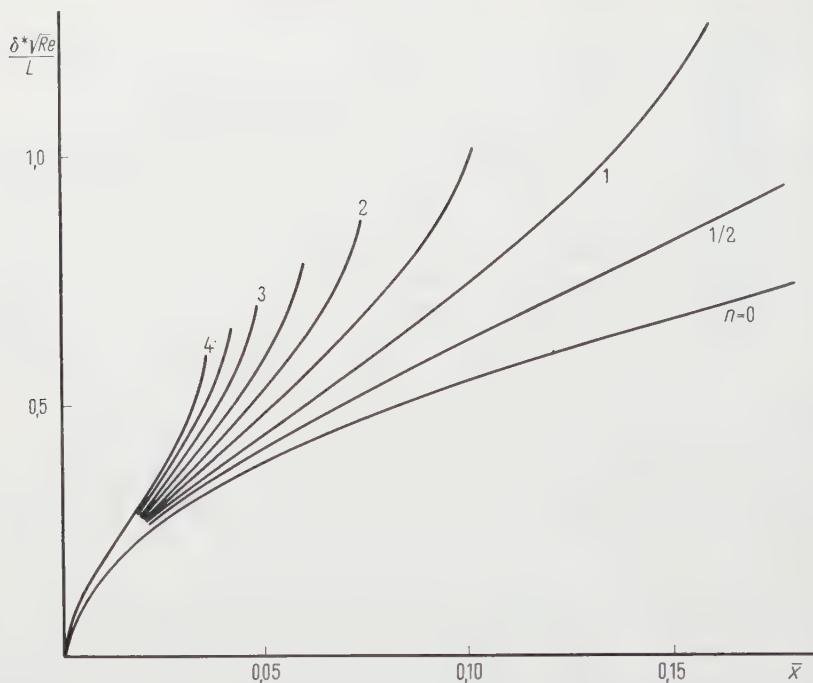
An Figur 2 wurde der Verlauf der Verdrängungsdicken für die betrachteten Werte von  $n$  aufgetragen, in Figur 3 entsprechend der Verlauf der Impulsverlustdicke. Dabei wurden jeweils im Bereich unmittelbar vor der Ablösungsstelle die Werte der Fortsetzungsrechnung wiedergegeben.

Numerisch mögen hier wenigstens die ermittelten Ablösungsstellen  $\bar{x}$  angegeben werden, da sie eine willkommene Vergleichsmöglichkeit bei der Verwendung anderer, insbesondere nicht-strenger Verfahren bieten dürften:

$n$	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4
$\bar{x}$	0,161	0,101	0,075	0,058	0,048	0,041	0,036

#### 4. Grenzschichten bei äusseren Geschwindigkeiten der Form $U(x) = U_0 (1 - x/L)^n$ , $x \leq 0$

Diese Klasse von äusseren Geschwindigkeitsverteilungen stellt wiederum die Verallgemeinerung eines von uns bereits in [1] untersuchten Sonderfalls ( $n = -1$ , Platte im konvergenten Kanal, Potentialsenke in  $x = L$ ,  $y = 0$ ) dar. Sie enthält für  $n = 0$  wieder die Blasiusche Plattenströmung, und für  $n = 1$  liegt der erstmals von L. HOWARTH [7] sorgfältig untersuchte Fall des linearen Druckanstiegs vor. Man vergegenwärtige sich, dass noch vor kurzer Zeit diese zwei



Figur 2

Verlauf der Verdrängungsdicke für verschiedene Werte von  $n$ .

Strömungen  $n = 0$  und  $1$  die einzigen in mathematischer Strenge behandelten Fälle von Plattenströmungen waren. Dem Howarth'schen «nicht-trivialen» Fall einer Strömung mit Druckanstieg wurde eine entsprechend grosse Beachtung geschenkt. Die Neuberechnung mit Hilfe unserer Reihe und ein Vergleich der erzielten Ergebnisse mit jenen von L. HOWARTH findet sich in [1].

In den dimensionslosen Variablen (8) ist

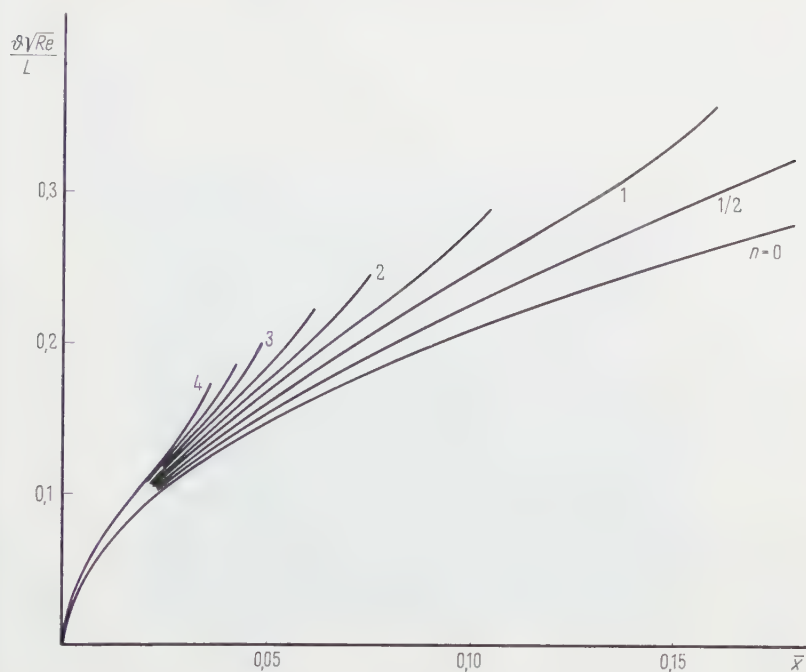
$$\bar{U}(\bar{x}) = (1 - \bar{x})^n \quad (\bar{x} \geq 0). \quad (11)$$

Auch hierzu lässt sich die Hauptfunktion geschlossen angeben:

$$\bar{\beta}(\bar{\xi}) = \frac{-2n\bar{\xi}}{1 - (n+1)\bar{\xi}}, \quad (12)$$

woraus durch Potenzreihenentwicklung um  $\bar{\xi} = 0$  wieder mühelos die Koeffizienten  $\bar{\beta}_k$  zu ermitteln sind.

Als Modellvorstellung für die verzögerten Potentialströmungen  $n > 0$  der Schar (11) kann man sich in der Ebene der kartesischen Koordinaten  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$



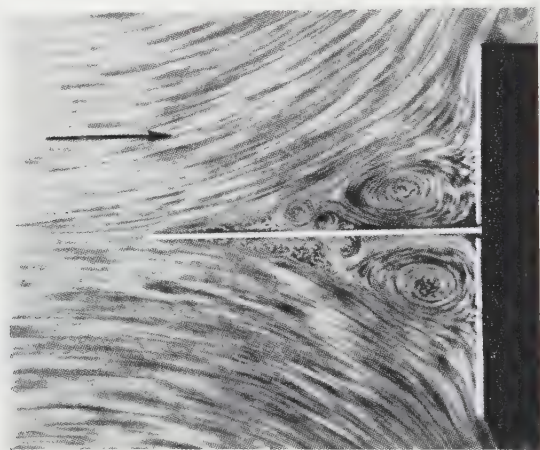
Figur 3

Verlauf der Impulsverlustdicke für verschiedene Werte von  $n$ .

längs  $0 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_1 (\leq 1)$ ,  $\bar{y} = 0$  eine Platte endlicher Tiefe denken, hinter der sich symmetrisch zur Ebene der Platte ein Keil mit Kante in  $\bar{x} = 1$ ,  $\bar{y} = 0$  befindet. Ist dann der Keilwinkel gleich  $2n\pi/(n+1)$ , so hat man bei symmetrischer Anströmung dieses aus Platte und Keil bestehenden Gebildes eine Potentialströmung, die längs der Vorderplatte genau die verzögerte Strömung mit der Verteilung (11) liefert. (Insbesondere hat man für den Howarth'schen Fall  $n = 1$  den Keilwinkel  $\pi$ , das heisst, hinter der Vorderplatte ist in  $\bar{x} = 1$  eine dazu senkrechte, unbegrenzte Platte zu denken.) Da sich aber nun an der Vorderplatte eine Grenzschicht ausbildet, ist diese Modellvorstellung für die wirkliche Strömung nur insoweit brauchbar, als die äussere Potentialströmung nicht durch die Verdrängungswirkung der Grenzschicht wesentlich modifiziert wird. Man kann sich, um das Modell zu retten, die Vorderplatte an einer Stelle  $\bar{x}_1$  endend denken, die jedenfalls nicht weiter stromabwärts liegt als die Ablösungsstelle an der Vorderplatte. Dann wird die Nachlaufströmung, laminar gedacht, genügend Gelegenheit haben, sich der Potentialströmung anzugleichen.

Denkt man sich die Vorderplatte bis zur Keilvorderkante reichend ( $\bar{x}_1 = 1$ ), so wird sich in der Anschlusssecke ein Wirbel hinter der Ablösung an der Vor-

derplatte ausbilden, der die Aussenströmung mehr oder weniger modifiziert. Jedoch dürfte dies die Aussenströmung *vor* der Ablösungsstelle nicht wesentlich beeinflussen, so dass auch dann (11) dort noch eine brauchbare Approximation wäre. Eine solche Eckenströmung ist in Figur 4 wiedergegeben (Repro-



Figur 4

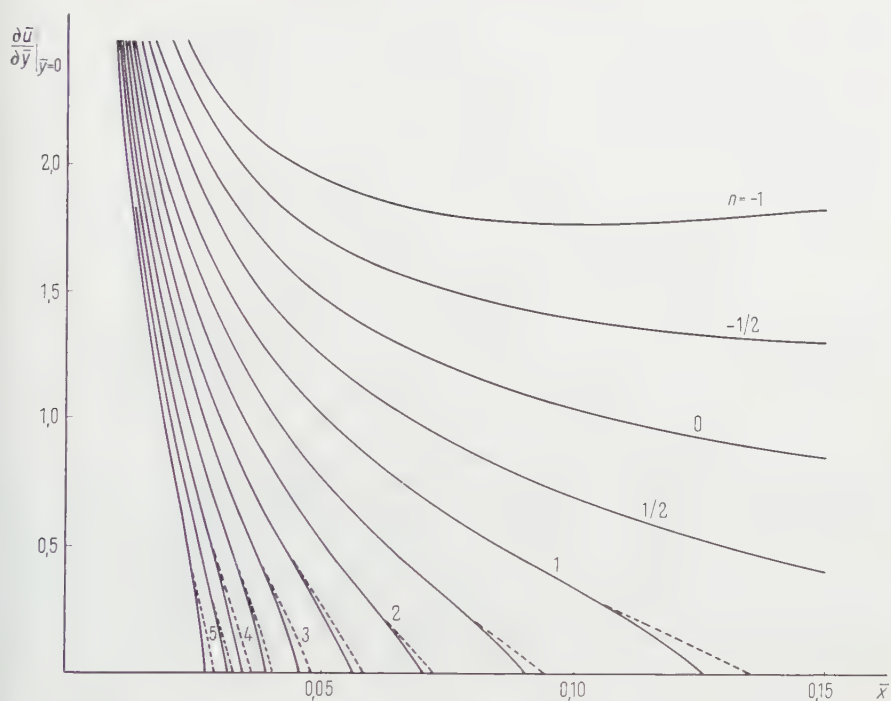
Bild einer Eckenströmung nach H. FÖTTINGER.

duktion einer Aufnahme von H. FÖTTINGER [12]). Der Fall  $n = 1$  ist hier insofern nicht voll realisiert, als die Querplatte nur eine endliche Ausdehnung hat. Dies und die Auswirkung des Eckwirbels ergeben eine Verschiebung der Ablösestelle gegenüber unserem Modell. (Man findet in Figur 4 Ablösung bei *etwa*  $\bar{x} = 0,15$  gegenüber unserem Resultat  $\bar{x} = 0,126$  für den Howarth'schen Fall  $n = 1$ .)

Numerische Auswertungen wurden vorgenommen für  $n = -1$  und  $-1/2$  (beschleunigte Strömungen) sowie neben  $n = 0$  (BLASIUS) für die verzögerten Strömungen  $n = +1/2, +1, \dots, +5$ . Figur 5 zeigt den Verlauf der örtlichen Wandschubspannung für diese Werte von  $n$ , wobei kurz vor den Ablösestellen die unzureichende Reihenapproximation (hier wieder gestrichelt) durch eine zuverlässige Differenzenrechnung (ausgezogen) ergänzt wurde. Für die Grenzschichtdicken der verzögerten Strömungen ergibt sich ein ähnlicher Verlauf wie bei jenen des vorangehenden Abschnitts, wir sehen von einer Wiedergabe ab. (Für  $n = 1$  findet man sie, verglichen mit  $n = 0$  und  $n = -1$  in [1].)

Wir notieren wieder die von uns ermittelten Ablösestellen:

$n$	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4	9/2	5
$\bar{x}$	0,126	0,090	0,070	0,056	0,046	0,039	0,035	0,031	0,028



Figur 5  
Verlauf der lokalen Wandschubspannung für verschiedene Werte von  $n$ .

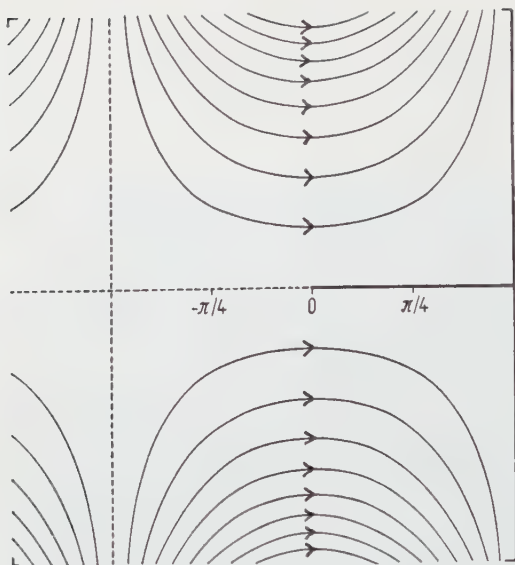
5. Plattengrenzschicht mit  $U(x) = U_0 \cos(x/L)$ ,  $x \geq 0$

Eine gewisse Ähnlichkeit mit der im vorangehenden Abschnitt für  $n = 1$  (HOWARTH) betrachteten Strömung liegt bei dieser Strömung vor, die in unserer dimensionslosen Schreibweise die Aussengeschwindigkeit

$$\bar{U}(\bar{x}) = \cos \bar{x} \tag{13}$$

besitzt. In der kartesischen  $(x, \bar{y})$ -Ebene erhält man diese Verteilung auf  $\bar{y} = 0$  in einer Potentialströmung mit dem Potential  $\varphi(x, \bar{y}) = \sin \bar{x} \cosh \bar{y}$ , von deren Stromlinien in Figur 6 ein Ausschnitt wiedergegeben ist. Denkt man sich in dieses Strömungsfeld längs  $0 \leq \bar{x} \leq \pi/2$ ,  $\bar{y} = 0$  eine Platte endlicher Tiefe eingebracht und in deren Endpunkt normal dazu eine unbegrenzte Ebene, so wird sich an der Vorderplatte eine Grenzschicht einstellen, deren Aussenströmung wenigstens vor der Ablösestelle noch gut durch (13) beschrieben wird.

Die äussere Ähnlichkeit dieses Modells mit dem im vorangehenden 4. Abschnitt beschriebenen Modell für den Howarth'schen Fall  $n = 1$  darf nicht zu



Figur 6

Stromlinien der reibungsfreien Strömung mit dem Potential  $\sin \bar{x} \cosh \bar{y}$  als weiteres Beispiel einer Eckenströmung.

der Vermutung verleiten, dass eine nahe quantitative Übereinstimmung im Verlauf der Wandschubspannung und insbesondere in der Lage der Ablösungsstelle bestehen wird. Entwickelt man (13):

$$\bar{U}(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}^2}{2} + \dots, \quad (14)$$

so erkennt man, dass für die kleinen  $\bar{x}$ -Werte bis zur Ablösungsstelle diese von der linearen Howarth'schen Verteilung wesentlich verschiedene Verteilung weit besser durch eine «Tanische Verteilung» [2] der Form  $\bar{U}(\bar{x}) = 1 - a \bar{x}^n$  mit  $n = 2$ ,  $a = 1/2$  approximiert wird. (In der Tat bleibt die Abweichung beider Verteilungen bis zur Ablösestelle unter  $1\%$ , und die zugehörigen Verteilungen der äusseren Druckgradienten weichen hier nur bis  $0,5\%$  voneinander ab.) In [2] wurde für die genannte Tanische Strömung, jedoch mit  $a = 1$ , eine Ablösung bei  $\bar{x} = 0,290$  gefunden. (TANI selbst fand  $0,271$ .) Multipliziert man mit  $1/2$ , so erhält man  $\bar{x} = 0,410$  (während der von TANI gefundene Wert auf  $\bar{x} = 0,383$  führt). Es muss nach obigem erwartet werden, dass dieser Wert in guter Näherung auch als Ablösestelle für die Verteilung (13) resultiert. In der Tat hat unsere Rechnung hierfür den Wert  $\bar{x} = 0,41$  gerundet ergeben. (Demnach ist der von TANI gefundene Wert offenbar ein wenig zu klein, wie auch bereits in [2] aus anderen Erwägungen heraus begründet wurde.)



Die Rechnung im einzelnen für die vorliegende Verteilung (13) verläuft wieder sehr einfach, da die Hauptfunktion in geschlossener Form angegeben werden kann:

$$\bar{\beta}(\bar{\xi}) = \frac{-2\bar{\xi}^2}{1 - \bar{\xi}^2}. \quad (15)$$

Somit ergeben sich die Koeffizienten  $\bar{\beta}_k$  zu

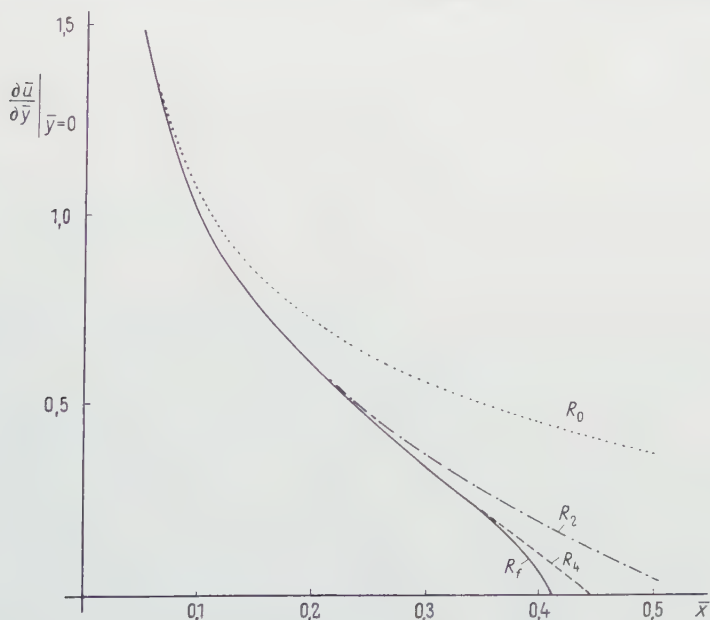
$$\bar{\beta}_{2k-1} = 0, \quad \bar{\beta}_{2k} = -2 \quad (k \geq 1). \quad (16)$$

Nach der allgemeinen Theorie [1] der neuen Reihe erhält die Funktion  $F(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  dementsprechend die einfache Gestalt

$$F(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = F_0 - 2f_2\bar{\xi}^2 - (2f_4 - 2^2f_{22})\bar{\xi}^4 - \dots, \quad (17)$$

wo  $F_0, f_2, f_4, f_{22}, \dots$  die benötigten universellen Funktionen des Tafelwerks [4] sind und nur Funktionen bis zur 4. Ordnung angeschrieben wurden, weil für jene der 6. Ordnung keine Tafeln vorliegen.

Figur 7 zeigt den Verlauf der Wandschubspannung, wobei wir hier neben der erreichbaren Approximation 4. Ordnung (gestrichelt) auch die Approxima-



Figur 7

Verlauf der lokalen Wandschubspannung. ( $R_f$  Ergebnis des Differenzenfortsetzungsverfahrens;  $R_0$ ,  $R_2$  und  $R_4$  Ergebnisse der Approximation 0., 2. und 4. Ordnung durch die neue Reihe.)

tionen 0. Ordnung (punktiert) und 2. Ordnung (strichpunktiert) angegeben haben, um einen Eindruck von der Güte der Konvergenz zu vermitteln. Die ausgezogene Kurve gibt dort, wo die Reihenapproximation unbrauchbar wird, das Ergebnis unserer Fortsetzung mit dem Differenzenverfahren wieder.

## 6. Die Grenzschicht am Kreiszylinder mit der potentialtheoretischen Geschwindigkeitsverteilung $U(x) = u_1 R \sin(x/R)$

Bei der Berechnung der Grenzschicht an einem Kreiszylinder wird die potentialtheoretische äussere Druckverteilung stark von jener in der realen Strömung abweichen. Daher wurde in [1] die von K. HIEMENZ gemessene Druckverteilung zugrunde gelegt. Vom theoretischen Standpunkt kann aber auch die analytisch einfache potentialtheoretische Verteilung als willkommenes Beispiel für Vergleiche verschiedener Verfahren dienen. Da die zugehörige Grenzschicht von A. ULRICH [8] mit der für Strömungen mit vorderem Staupunkt zur Verfügung stehenden Blasiuschen Reihe berechnet worden ist, ergibt sich für uns die Möglichkeit, diese Reihe mit unserer neuen Reihe zu vergleichen.

Wählt man für die dimensionslosen Variablen (8) als Bezugslänge  $L = R$  (den Zylinderradius) und als Bezugsgeschwindigkeit  $U_0 = u_1 R = U'(0) R$ , so hat man

$$\bar{U}(\bar{x}) = \sin \bar{x}. \quad (18)$$

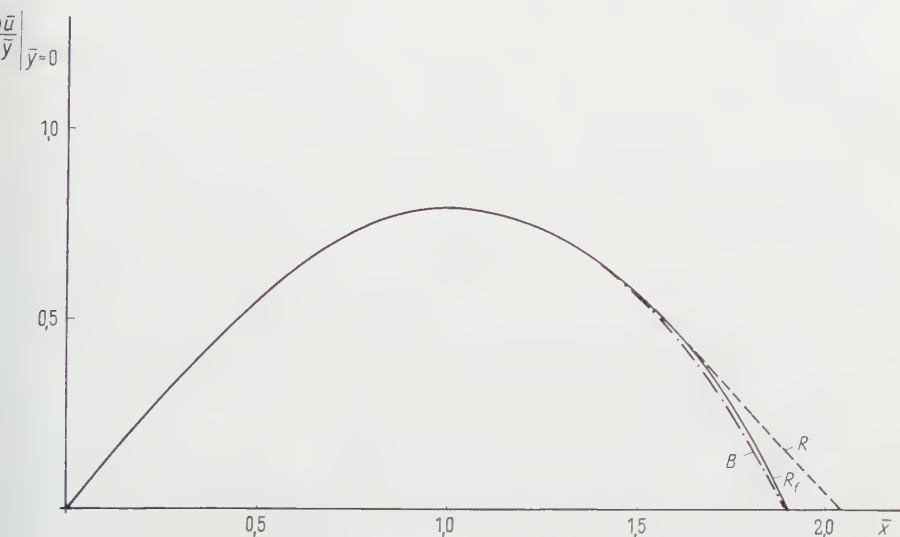
Die Hauptfunktion berechnet sich hierfür leicht zu

$$\beta(\bar{\xi}) = \frac{1 - \bar{\xi}}{1 - \bar{\xi}/2}. \quad (19)$$

Die numerische Auswertung der Grenzschicht zeigt, dass man mit der uns zugänglichen Approximation 5. Ordnung in  $\bar{\xi}$  eine gute Näherung bis zum Druckminimum bei  $\bar{x} = \pi/2 = 1,57 \dots$  erhält. Hier haben wir daher eine Fortsetzungsrechnung mit unserem Differenzenverfahren angeschlossen. Es ergab sich dann Ablösung der Grenzschicht bei  $\bar{x} = 1,90$ .

Während die Blasiusche Reihe eine Entwicklung nach Potenzen der Wandbogenlänge  $\bar{x}$  darstellt (oder nach dem Zentriwinkel), ist die neue Reihe eine Potenzreihenentwicklung nach  $\bar{\xi} - 1 = \cos \bar{x}$ , also nach der Projektion des zugehörigen Bogens auf die Achse in Anströmrichtung. Es ist daher einleuchtend, dass zunächst das Konvergenzverhalten der neuen Reihe wesentlich günstiger als das der Blasiuschen Reihe ist. Bereits das Glied nullter Ordnung der neuen Reihe gibt eine gute Approximation der Grenzschicht vom vorderen Staupunkt weit stromabwärts, was auch deswegen zu erwarten war, weil dieses Glied bereits überall alle Randbedingungen exakt erfüllt (im Gegensatz zum ersten Glied der Blasiuschen Reihe).

Figur 8 zeigt den Verlauf der Wandschubspannung. Dort, wo die Approximation durch die abgebrochene neue Reihe unbrauchbar wird (gestrichelt), ist das Ergebnis der Differenzenrechnung (ausgezogen) eingetragen. Das Ergebnis von ULRICH mit der Blasius'schen Reihe ist zum Vergleich (strichpunktiert) angegeben. Während die Approximation mit der neuen Reihe bis zur 5. Ordnung in  $\xi$  etwas länger brauchbar bleibt, um dann rasch unbrauchbar zu werden,



Figur 8

Verlauf der lokalen Wandschubspannung. ( $R$  Ergebnis der abgebrochenen neuen Reihe;  $R_f$  Ergebnis des Differenzenfortsetzungsverfahrens;  $B$  Ergebnis der abgebrochenen Blasius'schen Reihe nach A. ULRICH.)

führt die früher vom strengen Ergebnis abweichende Approximation mit der Blasius'schen Reihe bis zur 9. Ordnung in  $\bar{x}$  dann bei mangelhaft werdender Konvergenz doch noch zu einem brauchbaren Ergebnis für die Ablösestelle. Hierzu muss allerdings bemerkt werden, dass die von A. ULRICH verwendeten Tafeln [9] der universellen Funktionen der Blasius'schen Reihe sich inzwischen als sehr ungenau erwiesen haben, so dass das in Figur 8 gezeigte Ergebnis mit den sehr sorgfältig berechneten neuen Tafeln von A. N. TIFFORD [10], die uns erst nach Abschluss dieser Arbeit bekannt wurden, neu berechnet werden müsste, um einen zuverlässigeren Vergleich zu haben.

Im wesentlichen bestätigt dieses Beispiel erneut, dass zwar die neue Reihe im Falle der Umströmung von Zylindern mit runder Nase zunächst vom vorderen Staupunkt weit stromabwärts mit nur einem Glied und später mit nur wenigen Gliedern eine gute Approximation liefert, dass aber die Konvergenz-

güte hinter dem Druckminimum rasch unzureichend wird und eine Approximation von wesentlich höherer als 5. Ordnung nötig wäre, um auch bei dieser Problemklasse brauchbare Werte bis unmittelbar vor der Ablösungsstelle zu erhalten.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. GÖRTLER, *A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows*, J. Math. Mech. 6, 1–66 (1957).
- [2] H. GÖRTLER und H. WITTING, *Zu den Tanischen Grenzschichten*, Österr. Ing.-Arch. 11, 111–122 (1957).
- [3] H. GÖRTLER, *On the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows with Continuous Suction*, J. Math. Mech. 6, 323–340 (1957).
- [4] H. GÖRTLER, *Zahlentafeln universeller Funktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminarer Grenzschichten*, Bericht Nr. 34 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (1957).
- [5] H. GÖRTLER, *Ein Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten*, Ing.-Arch. 16, 173–187 (1948).
- [6] H. WITTING, *Verbesserung des Differenzenverfahrens von H. Görtler zur Berechnung laminarer Grenzschichten*, Z. angew. Math. Phys. 4, 376–397 (1953).
- [7] L. HOWARTH, *On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations*, Proc. roy. Soc. [A] 164, 547–579 (1938).
- [8] A. ULRICH, *Die laminare Reibungsschicht am Kreiszylinder*, Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen, F. B. 1762 (1943).
- [9] A. ULRICH, *Die ebene laminare Reibungsschicht an einem Zylinder*, Arch. Math. 2, 33–41 (1949).
- [10] A. N. TIFFORD, *Heat Transfer and Frictional Effects in Laminar Boundary Layers. Part 4: Universal Series Solution*, Wright Air Development Center Technical Report 53–288 (August 1954).
- [11] E. WRAGE, noch unveröffentlicht, erscheint als DVL-Bericht.
- [12] H. FÖTTINGER, Mitt. Vereinig. Grosskesselbesitzer, H. 73 (1939).

### Summary

A new and formally exact series solution of the general laminar boundary layer problem for arbitrary outer pressure distribution [1] is discussed briefly. The main part of the paper is concerned with the application of this solution to the numerical evaluation of instructive examples of boundary layer flows. Application of this new and rigorous series method requires only a short and simple numerical calculation, involving the application of tables of certain universal functions.

(Eingegangen: 3. Oktober 1957.)

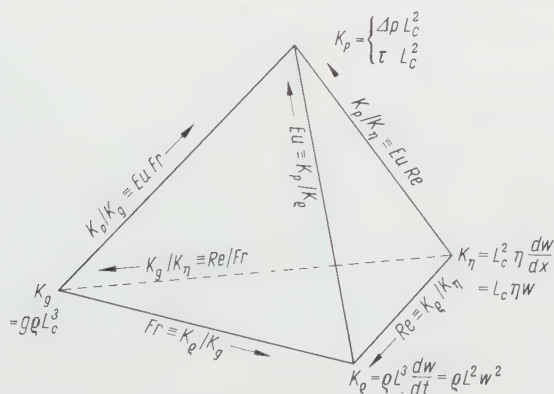
# Einordnung der Gleichungen der inkompressiblen, reibenden und schweren Flüssigkeit

Von PETER GRASSMANN, Zürich, Schweiz<sup>1)</sup>

Für die Bewegung einer reibenden und schweren Flüssigkeit sind für den stationären Fall 4 Kräfte massgebend, nämlich

1. die Druckkraft  $K_p$ ,
2. die Trägheitskraft  $K_\varrho$ ,
3. die Zähigkeitskraft  $K_\eta$ ,
4. die Schwerkraft  $K_g$  (oder allgemeiner eine der Massendichte proportionale Feldkraft).

Diese lassen sich durch die 4 Ecken des in der Figur dargestellten Tetraeders



Darstellung der Kräfte und Kennzahlen durch ein Tetraeder.

darstellen. Die 6 Seiten entsprechen den 6 möglichen dimensionslosen Kennzahlen, die aus diesen 4 Kräften zu bilden sind. Drei von ihnen sind benannt, nämlich<sup>2)</sup>

$$Re \equiv \frac{K_\varrho}{K_\eta} \equiv \frac{\varrho w L_c}{\eta} \equiv \text{Reynoldssche Zahl,}$$

$$Fr \equiv \frac{K_\varrho}{K_g} \equiv \frac{w^2}{g L_c} \equiv \text{Froudesche Zahl,}$$

$$Eu \equiv \frac{K_p}{K_\varrho} \equiv \frac{K_p}{F \varrho w^2} \equiv \text{Eulersche Zahl.}$$

<sup>1)</sup> ETH.

<sup>2)</sup> Vgl. Das Verzeichnis der Bezeichnungen am Ende der Arbeit.

Als Froudesche Kennzahl wird auch häufig die Wurzel aus dem oben angegebenen Ausdruck, also  $w/\sqrt{g L}$  bezeichnet. Leider wird die Eulersche Kennzahl sehr verschieden definiert<sup>3)</sup>. Durch die hier gebrauchte Definition wird sie zum übergeordneten Begriff für die häufig gebrauchten «Widerstandsbeiwerte» oder steht zumindest mit diesen in einfachen Beziehungen. Versteht man unter  $K_p$  eine Normalkraft und unter  $F$  eine Querschnittsfläche, so wird  $K_p/F$  identisch mit dem Druck  $p$  bzw. einer Druckdifferenz  $\Delta p$ . Die Eulersche Zahl ist dann identisch mit dem in der englisch-amerikanischen Literatur viel verwendeten «pressure coefficient». Bei der Rohrströmung wird sie gleich  $(\lambda/2) L/D$  und gleich der Hälfte der Widerstandszahl  $\zeta$  von Rohreinbauten. Setzt man die Kraft  $K_p$  gleich dem Widerstand  $W$  und  $F$  — Spantfläche, so wird die Eulersche Zahl identisch mit dem Widerstandsbeiwert  $c$ , durch den das Verhalten umströmter Körper beschrieben wird<sup>4)</sup>. In anderen Fällen — so bei der längs angeströmten Platte — wird unter  $F$  die gesamte von der Strömung bespülte Fläche verstanden. Der Widerstand  $W = K_p$  ist dann allerdings allein durch Schubspannungen bedingt, so dass der Index  $p$  nicht mehr zutreffend ist.

Da auch bei der Reynoldsschen Zahl die Trägheitskraft pro Volumeneinheit ohne den Faktor  $1/2$  geschrieben wird, scheint uns die oben gewählte Definition zweckmässiger als die gleichfalls zu findende  $Eu \equiv \Delta p / (\rho w^2 / 2) = 2 \Delta p / (\rho w^2)$ .

Für die anderen Kennzahlen — nämlich  $K_g/K_\eta$ ,  $K_p/K_\eta$  und  $K_p/K_g$  — erübrigt sich eine besondere Bezeichnung, da sie sich leicht als Produkte der drei oben genannten Zahlen ausdrücken lassen. Aus der Definition der Kennzahlen als Quotient der angegebenen Kräfte folgt nämlich: Umläuft man eines der vier das Tetraeder begrenzenden Dreiecke in einem bestimmten Umlaufsinn, so ist das Produkt sämtlicher «durchlaufener» Kennzahlen gleich 1. Dabei ist jeweils der reziproke Wert der angeschriebenen Kennzahl einzusetzen, wenn die betreffende Seite entgegen dem angegebenen Pfeil durchlaufen wird. Beispielsweise gilt für das Dreieck  $K_p, K_g, K_g$

$$\frac{1}{Eu} \cdot \frac{1}{Fr} \cdot [Eu Fr] = 1.$$

Da die Integration der Navier-Stokesschen Differentialgleichung auch schon für die inkompressible Flüssigkeit grosse Schwierigkeiten bietet, sind in den für die Praxis brauchbaren Gleichungen meist eine oder zwei dieser Kräfte vernachlässigt. Dadurch ergeben sich ausser dem allgemeinen Fall, der sozusagen dem Inneren des Tetraeders entspricht, zunächst durch Vernachlässigung je einer Kraft vier Spezialfälle, die durch die vier Seiten des Tetraeders ver-

<sup>3)</sup> W. WESTPHAL, *Physikalisches Wörterbuch* (Verlag Springer, 1952):  $Eu = w/\sqrt{2 \Delta p/\rho}$ . A. G. KASSATKIN, *Chemische Verfahrenstechnik* (Verlag Technik, Berlin 1953):  $Eu \equiv \Delta p/(\rho w^2)$ . B. KOCH, *Grundlagen des Wärmeaustausches* (Verlag H. Beucke & S., Dissen T. W. 1950):  $Eu \equiv 2 \Delta p/(\rho w^2)$ . R. E. JOHNSTONE und M. W. THRING, *Pilot Plants, Models and Scale-up Method in Chemical Engineering* (McGraw-Hill Book Company, 1957):  $Eu \equiv p/(\rho w^2)$ .

<sup>4)</sup> Der Ausdruck  $W/(\rho w^2 F)$  wird auch als Newtonsche Kennzahl bezeichnet.



sinnbildlicht sind. Sie sind, wie die Tabelle zeigt, jeweils durch eine Funktion von zwei dimensionslosen Kennzahlen darstellbar, die gleich einem Zahlenwert  $C$  ist. Er hängt als Formfaktor von der Geometrie des betreffenden Strömungsvorgangs ab. Die beiden in der Funktion auftretenden, dimensionslosen Kennzahlen entsprechen dabei jeweils zwei Seiten des betreffenden Dreiecks. Es ist rein eine Frage der Zweckmässigkeit, welche von den jeweils drei möglichen Kombinationen der drei Kennzahlen man hierzu heranzieht.

Werden zwei Kräfte vernachlässigt, so lässt sich der betreffende Vorgang durch die Funktion *einer* dimensionslosen Kennzahl darstellen. Sie ist gebildet aus dem Verhältnis der beiden nicht vernachlässigten Kräfte. Da drei dieser Verhältnisse durch Produkte oder Quotienten der Kennzahlen  $Re$ ,  $Fr$  und  $Eu$  ausgedrückt werden und deshalb in der betreffenden Gleichung zwei dimensionslose Kennzahlen erscheinen, wird oft fälschlicherweise angenommen, man habe eine Funktion zweier dimensionsloser Zahlen vor sich. Tatsächlich handelt es sich jedoch nur um die Funktion  $\varphi$  einer einzigen Kennzahl, zum Beispiel des Produkts  $Eu Re$ . Zur Hervorhebung sind derartige Produkte in der Tabelle durch [ ] gekennzeichnet. In den für die Darstellung empirischer Gesetze häufig benutzten Potenzausdrücken erscheinen dann beide Kennzahlen mit denselben Exponenten oder die eine mit dem negativen Exponenten der anderen.

Im obigen Beispiel wurde von Kräften ausgegangen. In anderen Fällen mag es zweckmässiger sein, Energien, Leistungen oder sonstige Grössenarten zu wählen. Sie müssen nur alle die gleiche Dimension besitzen, damit durch Division dimensionslose Ausdrücke entstehen.

Besonders bei mehrphasigen Strömungsvorgängen, bei denen zum Beispiel eine Flüssigkeit und ein Gas beteiligt sind, steigt die Zahl der zu berücksichtigenden Kräfte oft über vier an<sup>5)</sup>, so dass eine Wiedergabe im dreidimensionalen Raum nicht mehr möglich ist. Es lässt sich dann eine verwirrende Fülle dimensionsloser Kennzahlen bilden. Interessiert ist man jedoch an einem «vollständigen Satz». Ein solcher muss nach LANGHAAR<sup>6)</sup> die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Es muss jede beliebige im vorliegenden Problem auftretende Kennzahl als Produkt der Kennzahlen des vollständigen Satzes darstellbar sein.
2. Keine der Kennzahlen des Satzes darf durch dessen andere Kennzahlen identisch darstellbar sein.

Die drei Kennzahlen  $Re$ ,  $Fr$  und  $Eu$  stellen somit für das eingangs erörterte Problem einen vollständigen Satz dar, ebenso auch das Triplet  $[Eu Fr]$ ,  $[Eu Re]$  und  $Eu$ . Dagegen bilden die drei Kennzahlen  $Re$ ,  $Eu$  und  $[Eu Re]$  keinen vollständigen Satz. Um auf einen Blick zu erkennen, ob es sich bei einer Gruppe dimensionsloser Kennzahlen um einen vollständigen Satz handelt, stellt man

<sup>5)</sup> P. GRASSMANN, Chem.-Ing.-Techn. 28, 270 (1956).

<sup>6)</sup> H. L. LANGHAAR, *Dimensional Analysis and Theory of Models* (John Wiley & Sons, New York, und Chapman & Hall Ltd., London 1951).

Übersicht über die Gleichungstypen, die das stationäre Verhalten der inkompressiblen, reibenden und schweren Flüssigkeiten beschreiben

Vernachlässigt	Grenzesetz für	Gleichungstyp	Beispiele
—	—	$\varphi (Re, Fr, Eu) = C$	Navier-Stokesche Differentialgleichung für die inkompressible Flüssigkeit
$K_\eta$	$K_p/K_\eta \rightarrow \infty$ $Re \rightarrow \infty$ $K_g/K_\eta \rightarrow \infty$	$\varphi (Fr, Eu) = C$	Reibungsfreie, schwere Flüssigkeit Bernoullische Gleichung: $Eu + 1, Fr = C$
$K_g$	$K_p/K_g \rightarrow \infty$ $Fr \rightarrow \infty$ $K_\eta/K_g \rightarrow 0$	$\varphi (Re, Eu) = C$	Druckabfall im Rohre: $Eu = (1/2) \lambda (Re_p) L/D$ Druckabfall an Rohreinbauten: $Eu = (1/2) \zeta (Re_p)$ Umströmter Körper im Bereich mittlerer $Re$ -Zahlen $Eu = C(Re)$
$K_p$	$K_p/K_g \rightarrow 0$ $Eu \rightarrow 0$ $K_\eta/K_p \rightarrow 0$	$\varphi (Re, Fr) = C$	Turbulenter Rieselfilm <sup>1</sup> : $Fr = 12,1 Re^{0.4}$
$K_Q$	$Fr \rightarrow 0$ $Re \rightarrow 0$ $Eu \rightarrow \infty$	$\varphi \left( \frac{Re}{Fr}, \frac{[Eu Fr]}{C} \right) = C$	Kapillare Strömung unter Einfluss eines Druckgefälles und der Schwere. Glattscherbewegung (bei dieser ist jedoch $\eta \neq \text{const!}$ )
$K_Q, K_\eta$	$Fr \rightarrow 0$ $Eu \rightarrow \infty$	$\varphi ([Eu Fr]) = C$	Hydrostatik Bodendruck einer Flüssigkeit mit der Höhe $L_c$ : $Eu Fr = 1$
$K_Q, K_g$	$Re \rightarrow 0$ $Eu \rightarrow \infty$	$\varphi ([Eu Re]) = C$	Hagen-Poiseuille-Gleichung: $Re_p Eu = 32 L/D$ Laminare Strömung durch Spalt: $Re_p Eu = 12 L/D$ Stokesches Gesetz <sup>2</sup> : $Re_p Eu = 3$ (wenn $Eu$ auf die Oberfläche der Kugel bezogen)
$K_\eta, K_g$	$Re \rightarrow \infty$ $Fr \rightarrow \infty$	$\varphi (Eu) = C$	Grenzesetze der Widerstandsformeln für $Re \rightarrow \infty$ , das heisst für den Bereich, in dem der Widerstandsbewert von $Re$ unabhängig wird. Strömung durch Messblenden und scharfkantige Rohreinsätze
$K_p, K_Q$	$Re \rightarrow 0$ $Fr \rightarrow 0$	$\varphi \left( \frac{Re}{Fr} \right) = C$	Stationärer Fall einer Kugel in viskosem Medium <sup>3</sup> : $Re/Fr = 18$ Grundwasserströmung, soweit nicht durch Adsorption beeinflusst Laminarer Rieselfilm $Re/Fr = 3$ ( $Re$ bezogen auf Filmdicke)
$K_p, K_\eta$	$Eu \rightarrow 0$ $Re \rightarrow \infty$	$\varphi (Fr) = C$	Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Schwerewellen: $Fr = 1/(2\pi) \left\{ \frac{L_c - \lambda'}{Fr - 1} \right\}$ Schwerewellen in flachem Wasser:
$K_p, K_g$	$Eu \rightarrow 0$ $Fr \rightarrow \infty$	$\varphi (Re) = C$	Vernichtung kinetischer Energie durch Viskosität Flüssigkeitsdämpfung. Reichweite von Strahlen

<sup>1</sup>) Die angegebene Gleichung geht aus Gleichung (37) von H. BRAUER (VDI Forschungsheft Nr. 457, Düsseldorf 1956) hervor, wenn man beachtet, dass die dort durch Gleichung (34) definierte Widerstandszahl  $\Psi = 2/Fr$ .

<sup>2</sup>) Für die charakteristische  $L$  ist der Kugeldurchmesser einzusetzen.

<sup>3</sup>) Da hierbei der Auftrieb zu berücksichtigen ist, geht die Formel für die Froudesche Zahl über in  $Fr \equiv a^2 g F / [g D (Q + QF)]$ .

die Kräfte, Energien oder die sonstigen  $n$  Grössenarten, die man als Ausgangspunkte wählt, als  $n$  Punkte in einer Ebene dar. Jede der  $n(n-1)/2$  Verbindungsstrecken zweier Punkte verkörpert dann eine dimensionslose Kennzahl. Ein vollständiger Satz wird somit durch ein Streckennetz symbolisiert. Wir behaupten:

Ein vollständiger Satz liegt vor, wenn von jedem Punkt aus jeder andere Punkt auf einem und nur einem Weg erreichbar ist.

Ist diese Bedingung erfüllt, so lässt sich jede beliebige in das Problem eingehende Kennzahl durch die Kennzahlen des Satzes darstellen. Entweder entspricht nämlich die gesuchte Kennzahl einer Strecke, die in dem Streckennetz des vollständigen Satzes bereits enthalten ist. Dann gehört sie sowieso schon dem Satz an. Oder sie entspricht einer Strecke, die noch nicht zum Satz gehört. Zusammen mit den Strecken des Satzes ergibt sich dann immer ein geschlossener Linienzug. Wie schon eingangs bemerkt, ist aber das Produkt sämtlicher Kennzahlen längs eines geschlossenen Linienzuges – natürlich wieder unter Beachtung des Vorzeichens – identisch mit 1. Mit Hilfe dieser Beziehung lässt sich somit die betreffende Kennzahl durch die des Satzes darstellen.

Liesse sich dagegen von irgendeinem Punkt irgendein anderer Punkt auf mehr als einem Wege erreichen, wobei nur Strecken des betreffenden Satzes benützt werden, so würden diese beiden Wege zusammen einen geschlossenen Linienzug bilden. Da dann das Produkt der betreffenden Kennzahlen identisch 1 wäre, liesse sich eine von ihnen durch die anderen des gleichen Satzes ausdrücken. Das widerspricht aber der Forderung der Vollständigkeit des betreffenden Satzes.

### Verzeichnis der Bezeichnungen

$D$  Rohrdurchmesser, Kugeldurchmesser, Spaltbreite,  $F$  Stirnfläche, Oberfläche, Spantfläche;  $g$  Schwerebeschleunigung;  $K$  Kraft;  $L$  Rohrlänge;  $L_c$  charakteristische Länge;  $w$  Geschwindigkeit;  $\zeta$  Widerstandsbeiwert  $= \Delta p / (\rho w^2/2)$ ;  $\eta$  dynamische Viskosität;  $\lambda$  Widerstandsbeiwert für Rohrströmung  $= \Delta p D / (L \rho w^2/2)$ ;  $\lambda'$  Wellenlänge;  $\rho$  Massendichte.

### Summary

The four forces  $K_p$ ,  $K_\theta$ ,  $K_\eta$ , and  $K_g$  due to pressure, inertia, viscosity and gravity respectively, may be represented by the four corners of a tetrahedron whose 6 edges correspond to the dimensionless groups formed from the forces. The equations of hydrodynamics for the steady state which are shown to be represented by the volume, sides, or edges of the tetrahedron, can then be classified in eleven sets of 3, 2 or 1 dimensionless groups. For flow with two and more phases, many independent dimensionless groups occur which may or may not be a complete set to a given problem. A simple construction gives the answer.

(Eingegangen: 4. Oktober 1957.)

# Laminar Boundary Layer Oblique Shock Wave Interaction on Flat and Curved Plates<sup>1)</sup>

By ISAAC GREBER, RAIMO J. HAKKINEN, and LEON TRILLING,  
Cambridge, Mass., USA<sup>2)</sup>

## 1. Introduction

This paper presents some of the results obtained up to now in the course of an investigation of the interaction of oblique shock waves with laminar boundary layers at a constant Mach number  $M = 2$ . From detailed measurements of the boundary layer on flat and curved plates, several quantities characteristic of the interaction pattern are deduced, and their variation with the flow parameters (particularly shock strength and Reynolds number) is studied.

The pressure rise due to a shock wave thickens the boundary layer and decreases the skin friction upstream of the shock. If the shock is strong enough, the boundary layer separates upstream of the shock and a constant pressure separated region is observed between the separation point and the shock. The significant parameters are the shock strength needed to separate a laminar boundary layer, the conditions at separation, the pressure in the constant pressure separated region, and the size of the separated region.

## 2. Experimental Apparatus and Technique

### *Wind Tunnel*

The experiments were performed in the  $8 \times 8$  in. continuous flow supersonic wind tunnel in the Gas Turbine Laboratory of the Massachusetts Institute of Technology. This tunnel has a fixed Mach number 2 nozzle with an upward flow direction. A standard Schlieren optical system is available for observing and photographing the flow. The tunnel operates at stagnation pressures from 3 to 15 psi absolute, using a steam ejector system for evacuation to sub-atmospheric levels. However, practical problems of manometer accuracy prevented successful operation at the lowest available pressure levels.

<sup>1)</sup> This work was supported by the National Advisory Committee for Aeronautics Contracts Nos. NAW-6320, 6412, 6452, 6507 and Air Force Contract No. 33-(616-3064) sponsored by the Wright Air Development Center, Wright Patterson Air Force Base.

<sup>2)</sup> Massachusetts Institute of Technology.

*Flat and Curved Plates*

Both the flat plate and the curved plate are full-span sharp-nosed models. A photograph of the flat plate mounted in the tunnel with the shock generator and Pitot tube is shown in Figure 1. A cross-section of the curved plate is

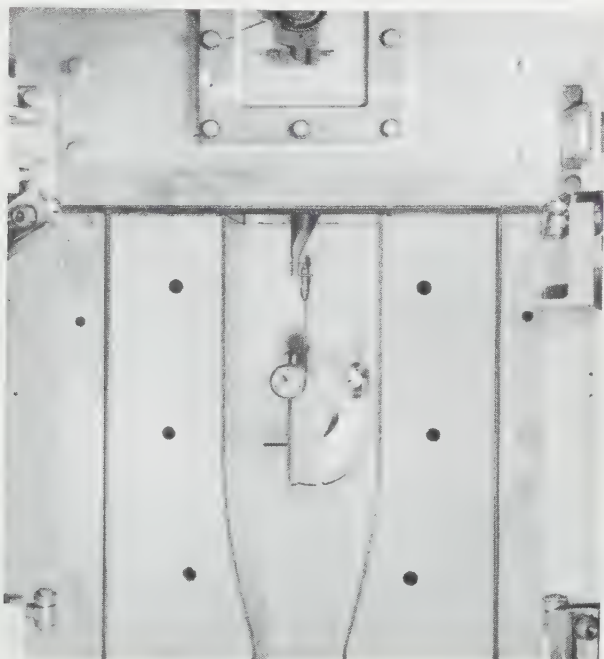


Figure 1  
Flat plate mounted in wind tunnel.

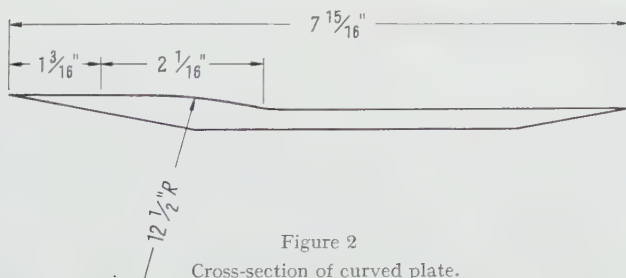


Figure 2  
Cross-section of curved plate.

shown in Figure 2. Both plates have static pressure orifices drilled at one tenth of an inch spacing to measure streamwise static pressure distribution. Thermocouples are imbedded in the surfaces of the plates.



### Shock Generators

The adjustable angle shock generators developed by BARRY, SHAPIRO and NEUMANN [1]<sup>3)</sup> for this tunnel were used without changes.

### Velocity Profile and Skin Friction Measurement

The total head in the boundary layer was measured by a small slit mouth tube (Figure 3) which could be traversed streamwise and normal to the plate

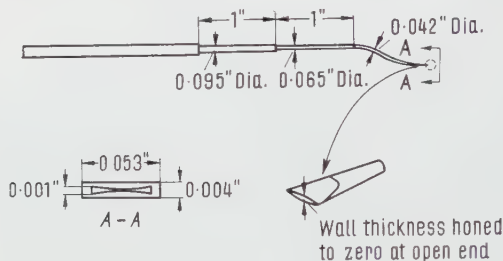


Figure 3  
Stanton tube configuration.

by controls outside the tunnel. The tube location was observed through a cathetometer accurate well within 0.001 in.

The same tube resting on the plate surface was used to measure local skin friction. The theory of such measurements is given in [2], and the calibration of the present tube in [3].

### Observation of Separation

The separation point was taken to be the point where the measured skin friction vanished. Since the instrument does not measure negative shear, it was often necessary to extrapolate the zero position from readings of positive skin friction upstream. Although this does not lead to a serious error in the location of separation, it can lead to appreciable uncertainty in the determination of the pressure at separation, because the pressure gradient near separation is large. In measurements of the minimum shock strength needed to cause separation, the shock generator was adjusted to provide zero skin friction at one point.

### Range of Measurements

The experiments were performed at several different shock strengths up to a static pressure ratio of 2.4, and at different stagnation pressure (i.e., Rey-

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 331.



nolds number) levels. The shock strengths ranged from those small enough not to cause separation to cases involving extended upstream influence. The stagnation pressure range corresponded to Reynolds numbers based on distance from leading edge to shock interaction of  $10^5$  to  $6 \times 10^5$ .

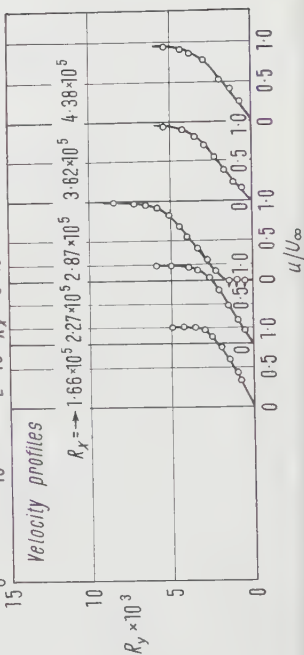
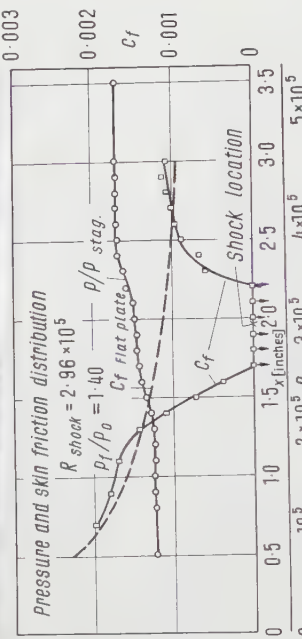
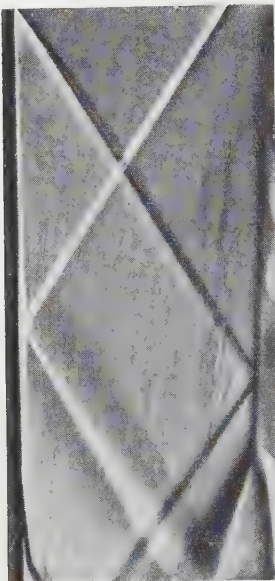
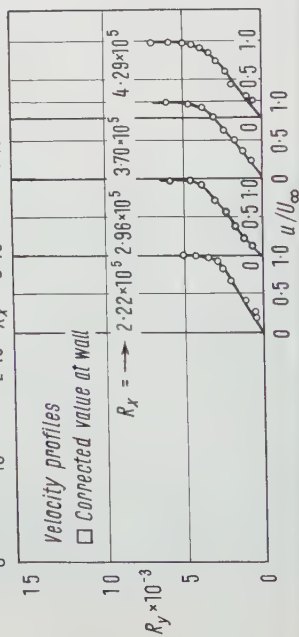
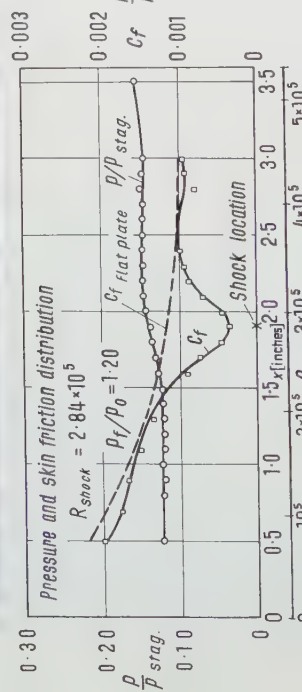
### 3. Typical Measurements on Flat Plate

In Figure 4 are shown typical pressure distributions, shear distributions, and velocity profiles on the flat plate. Figure 4A shows measurements for a shock not sufficiently strong to cause separation. The skin friction coefficient is near the flat plate value upstream of the shock impingement point, falls rapidly to a low value near the shock, then again approaches the flat plate value downstream of the shock. Figure 4B shows measurements for a case in which a separated flow region exists. Again the skin friction coefficient is near the flat plate value both upstream of separation and downstream of reattachment. The velocity profiles indicate that in the separated region the forward flow profile is essentially the undisturbed constant pressure boundary layer profile. This will be made a crucial part of the subsequent analysis. The pressure distribution shows a constant pressure undisturbed region, a pressure rise through the separation region, culminating in a constant pressure separated region, a pressure rise up to reattachment, and a further pressure rise beyond reattachment culminating in a constant pressure region. Figure 4C also shows measurements for a case involving separation. The picture of the approach to separation and the separated region is similar to Figure 4B. Shortly after reattachment, however, the skin friction measurements and the boundary layer profiles show that the boundary layer becomes turbulent.

### 4. Self-Similar Separation Properties on Flat Plate

Figure 5 is a sketch of typical pressure and shear distributions when a separated region exists and the boundary layer remains laminar throughout the interaction region. It is the physical model for the analysis, and defines the quantities which will be used.

CHAPMAN, KUEHN, and LARSON [4] and GADD [5, 6] have pointed out that, at least when there is an appreciable length of separated flow, conditions near separation are independent of the agency which induced separation and the separation phenomenon is essentially self-similar; all significant parameters are then functions of local Mach number and Reynolds number only. Thus the analysis of the shock-wave boundary layer interaction can be broken up into two parts: the determination of self-similar separation properties, which are functions only of local conditions, and the relationship between the length of separated region and the shock strength.



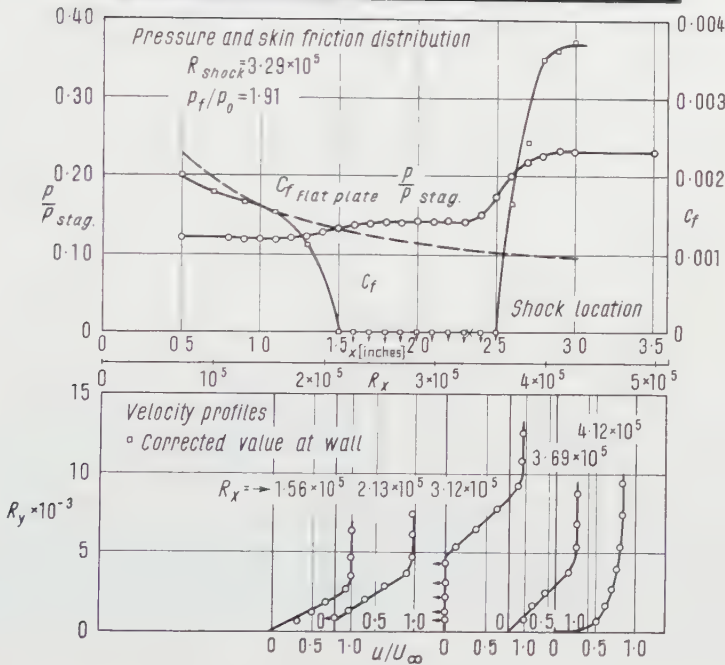
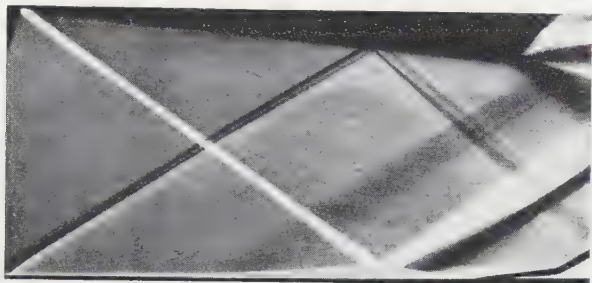


Figure 4C  
Typical measurements on flat plate.

The important parameters in the self-similar separation are the pressure rise to the separation point and the pressure rise to the constant pressure separated region (henceforth called the 'plateau' pressure rise). The minimum pressure rise to cause separation also will be analyzed from the point of view of a self-similar interaction. CHAPMAN, KUEHN, and LARSON have given an order of magnitude analysis which suggests that

$$\Delta C_x \sim \sqrt{\frac{c_{f_0}}{\beta}}, \tag{1}$$

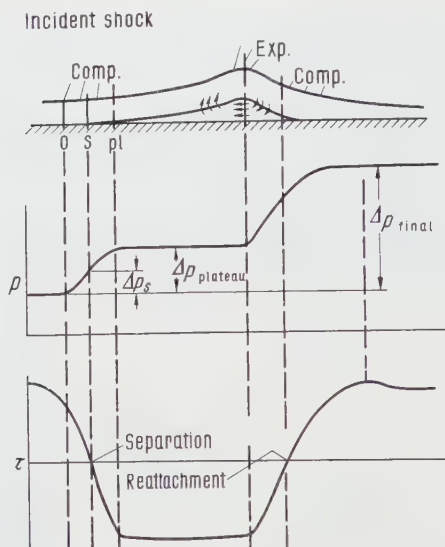


Figure 5

Sketch of flow pattern with separated region.

where  $\Delta C_p$  is a characteristic pressure rise coefficient for the separating region,  $c_{f_0}$  is the skin friction coefficient at the beginning of the separating region (this is taken as a characteristic skin friction coefficient for the region), and  $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ , where  $M$  is the free stream Mach number. From the analysis of CHAPMAN *et al.*, equation (1) should hold for the separation, plateau, and incipient separation pressure coefficients. GADD's quantitative calculation [6] also leads to equation (1) for the separation pressure coefficient and determines the constant of proportionality for separation.

### Pressure Rise to Separation

The law given by equation (1), together with an estimate of the constant of proportionality, can also be derived from the observation that the undisturbed boundary layer appears to be 'lifted' from the wall. Assuming that the sublayer below the 'lifted' layer has negligible momentum, the force balance in the sublayer of height  $\varepsilon$  gives

$$\varepsilon \frac{dp}{dx} = \tau_\varepsilon - \tau_w. \quad (2)$$

Taking the pressure rise to be due to the growth of  $\varepsilon$ , and assuming small pressure perturbations, the pressure rise is related to the growth of the sub

layer by

$$C_p = \frac{2}{\beta} \cdot \frac{d\varepsilon}{dx}. \quad (3)$$

Eliminating  $\varepsilon$  between (2) and (3) leads to

$$\frac{\beta}{2} \cdot \frac{dC_p}{dx} \int_{x_0}^x C_p dx = c_{fe} - c_{fw}. \quad (4)$$

Since  $C_p$  varies almost linearly up to separation except for a small region in which it is small, equation (4) at the separation point gives

$$C_{ps} = \sqrt{\frac{(c_{fe})_s}{\beta}}. \quad (5)$$

To evaluate  $(c_{fe})_s$  a plausible definition of the 'lifting' height  $\varepsilon$  is made as in Figure 6:

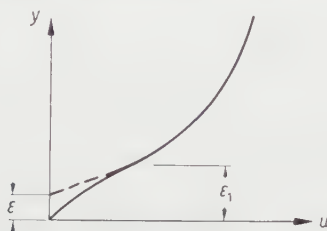


Figure 6

The sublayer profile is described by a parabola; if the velocity and its first derivative are matched at  $\varepsilon_1$ , where  $c_f \approx c_{f_0}$  then it is found that  $(c_{fe})_s \approx c_{f_0}/2$ . Thus the separation pressure coefficient is

$$C_{ps} = \sqrt{\frac{2 c_{f_0}}{\beta}}. \quad (6)$$

Figure 7 shows the measured separation pressure rises. Within the scatter of the experimental points equation (6) correlates the data reasonably well. For additional comparison, GADD's theory [6] gives  $C_{ps} = 1.39 \sqrt{c_{f_0}/\beta}$ . The data correlated by CHAPMAN *et al.* shows that at  $M = 2$ ,  $C_{ps} = 1.19 \sqrt{c_{f_0}/\beta}$ .

The same assumptions may be made within the framework of the Karman integral momentum equation. For small disturbances from uniform free stream conditions this can be written

$$c_f = 2 \frac{d\theta}{dx} - [\delta^* + \theta (2 - M^2)] \frac{dC_p}{dx}, \quad (7)$$

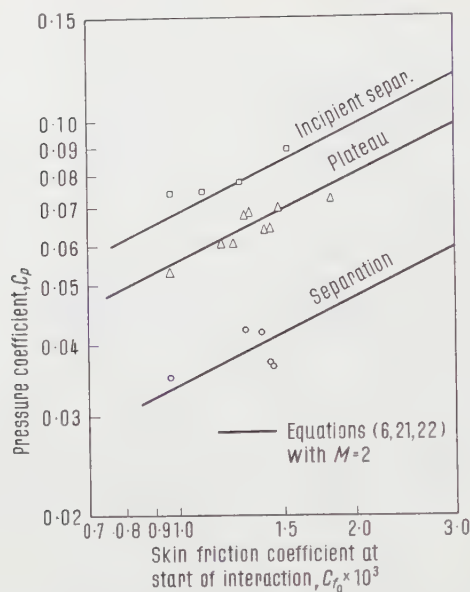


Figure 7

Separation plateau, and incipient separation pressure coefficients on flat plate.

where  $\delta^*$  is the boundary layer displacement thickness and  $\theta$  is the momentum thickness. If the boundary layer is lifted by a sublayer of negligible momentum, the momentum thickness is approximately unchanged. The displacement thickness is increased by an amount  $\Delta\delta^*$  given by

$$\Delta\delta^* = \frac{\beta}{2} \int_{x_s}^x C_p dx. \quad (8)$$

Then the momentum integral becomes

$$c_{f_c} - c_{f_w} = [H_c + 2 - M^2] \theta_c \frac{dC_p}{dx} + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{dC_p}{dx} \int_{x_0}^x C_p dx, \quad (9)$$

where the subscript  $c$  denotes the constant pressure value. At the separation point where  $c_{f_w} = 0$ , and under the assumption of a constant pressure gradient, equation (9) gives

$$\frac{\beta}{4} C_{p_s}^2 (c_{f_c})_s - [H_c + 2 - M^2] \left( \theta_c \frac{dC_p}{dx} \right)_s. \quad (10)$$

Now, if the boundary layer separation mechanism simply involves the action of an adverse pressure gradient, an estimate of  $[\theta_c (dC_p/dx)]_s$  can be obtained



from a Pohlhausen similarity analysis (e.g., [7]). The boundary layer is described by a Pohlhausen-Gruschwitz parameter  $K$ , which at separation can be written

$$K_s = - \left[ \frac{\varrho_e}{\varrho_w} \cdot \frac{\theta^2}{C} \cdot \frac{U_e}{2 \, v_e} \cdot \frac{dC_p}{dx} \right]_s = \text{const}, \tag{11}$$

where the subscript  $e$  denotes conditions at the outer 'edge' of the boundary layer. If the profiles are representable by the one-parameter Pohlhausen polynomial, then  $K_s = -0.157$ . In general, this need not be the case; the similarity analysis merely predicts that  $K_s$  is a negative constant. Equation (11) leads to the approximate result

$$\left( \theta \frac{dC_p}{dx} \right)_s = \frac{-4.54 \, (c_{fe})_s \, K_s}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \, r \, M^2} \tag{12}$$

or since  $\theta_e = x \, c_{fe}$

$$\left( x \frac{dC_p}{dx} \right)_s = \frac{-4.54 \, K_s}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \, r \, M^2}. \tag{13}$$

In equations (12) and (13)  $r$  is the recovery factor. Equation (13) is subject to experimental verification. Data from NACA, USC, MIT, NPL in a Mach number range 2.0 to 2.53 and a Reynolds number range of 76,000 to 1,130,000, in which separation was induced by a step, a corner, and a reflecting shock

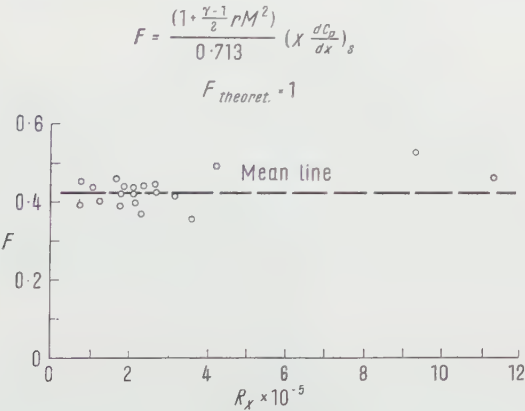


Figure 8  
Test of Pohlhausen-Gruschwitz separation parameter.

wave, are plotted in Figure 8. Considering the difficulty of measuring a pressure gradient, these data indicate that the product  $x \, (dC_p/dx)$  at separation is constant at a given Mach number, but that the constant has less than half the Pohlhausen value. Using the measured value of  $K_s$  in (10) one derives for the

separation pressure coefficient

$$C_{ps} = 2 \sqrt{\frac{(c_{fc})_s}{\beta}} \sqrt{1 - \frac{0.3 [H_c + 2 - M^2]}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} \gamma M^2}}. \quad (14)$$

It follows from the work of CHAPMAN and RUBESIN [8], that

$$H_c = H_B [1 + 0.258 M^2] \quad (15)$$

for  $\gamma = 1.4$  and Prandtl number of 0.72. The subscript  $B$  denotes the Blasius value. Therefore for  $M = 2$ , equation (14) shows that

$$C_{ps} = 1.29 \sqrt{\frac{(c_{fc})_s}{\beta}}. \quad (16)$$

The reasonable agreement between equations (6) and (16) indicates that the integral momentum equation may be satisfactory even in strong pressure gradients in supersonic flow if it is applied judiciously. The failure of the Pohlhausen-Gruschwitz parameter to describe the pressure gradient at separation is due to the inadequate representation of the boundary layer profile. The variation of  $C_{ps}$  with Mach number is not clearly established and it therefore appears simplest to use equation (6).

### *Pressure Rise to the Plateau*

Beyond the separation point the analysis is more difficult. The parabolic approximation for the inner boundary layer profile cannot hold throughout this region, because the inertia forces must balance the shear forces when the plateau is reached. However, one expects that the inertia forces and the decrease in pressure gradient come into play about the same time, and balance each other. An upper limit for the plateau pressure coefficient may then be found by neglecting both:

$$C_{ppl} \approx 1.9 \sqrt{\frac{2 c_{f_0}}{\beta}} = 1.9 C_{ps}. \quad (17)$$

Another order of magnitude estimate can be made by adopting the point of view that beyond separation, the line  $u = 0$  acts as a wall. Then the integral momentum equation (7) can be applied above  $u = 0$ . If the line  $u = 0$  is lifted a height  $h$  from the wall, then one has analogously to equation (9)

$$c_{fc} - c_{fh} = [H_c + 2 - M^2] \theta_c \frac{dC_p}{dx} + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{dC_p}{dx} \int_{x_0}^x C_p dx - \frac{dC_p}{dx} \int_{x_s}^x \frac{dh}{dx} dx. \quad (18)$$

A lower limit for the plateau pressure is obtained by assuming that most of the pressure rise occurs before the reverse flow momentum becomes important. Then the pressure rise occurs almost entirely at constant pressure gradient, and the deviation of the skin friction coefficient at  $u = 0$  from the constant pressure value is symmetric about the separation point. This model gives

$$C_{p_{pl}} \approx C_{p_s} \sqrt{2}. \quad (19)$$

Taking the mean between the estimates of equations (17) and (19) as the approximate plateau pressure coefficient gives:

$$C_{p_{pl}} = 1.65 C_{p_s}. \quad (20)$$

Using equation (6) to give  $C_{p_s}$  one has

$$C_{p_{pl}} = 2.33 \sqrt{\frac{c_{f_0}}{\beta}}. \quad (21)$$

The data plotted in Figure 6 show good agreement with equation (21). The correlation of data in [4] gives for  $M = 2$ ,  $C_{p_{pl}} = 2 \sqrt{c_{f_0}/\beta}$ . On the other hand, it gives  $C_{p_{pl}} = 1.68 C_{p_s}$ , in agreement with equation (20).

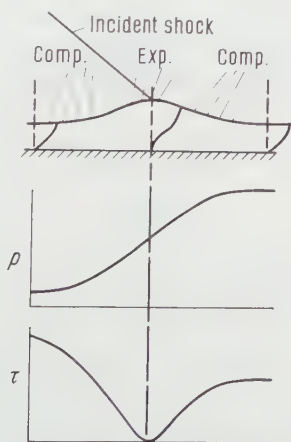


Figure 9

Sketch of flow pattern at incipient separation.

### *Pressure Rise for Incipient Separation*

For shock strengths just great enough to create zero wall friction at one point, the observed flow pattern is shown in Figure 9. In the vicinity of the shock the pressure gradient on the surface is maintained reasonably constant

by the external shock configuration, although the self-induced gradient would be negative as the boundary layer 'edge' becomes convex. One can argue, however, that the local effect of the shock system cannot extend very far from the impingement point since the pressure jump is progressively cancelled by the expansions when the surface is approached. This view seems to be supported by the experiments. Thus the pressure rise is due primarily to the self-induced effect, and the pressure rise to separation should be about the same as that for separation well upstream of the shock. If symmetry of thickening and thinning of the boundary layer is assumed, there results:

$$(C_p)_{incip} = 2 C_{ps}. \quad (22)$$

The data shown in Figure 7 support this simple point of view.

### 5. Length of Separated Region on Flat Plate

When the flow is completely separated, the height of the separated region depends on the mass of fluid forced into the backflow by the overpressure left available from the main shock after subtracting the pressure rise from undisturbed conditions to the plateau plus the pressure rise needed for the reattachment process. Now, all of the fluid which is reversed must come from above the line  $u = 0$ . The integral of the boundary layer momentum equation, along the line  $u = 0$  from the maximum height of the separated region to the reattachment point, is

$$\int \left[ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dp}{dx} \right] dx = \int \frac{\partial \tau}{\partial y} dx. \quad (23)$$

Neglecting

$$\int \frac{\partial \tau}{\partial y} dx,$$

introducing mass continuity, and taking averages (denoted by bars), one derives from (23)

$$\Delta p_d \frac{\mu_w}{\bar{\tau}} = \rho_w \bar{u} h_{max}. \quad (24)$$

A momentum balance in the separated region at  $h_{max}$  gives approximately

$$\rho_w \bar{u}^2 \frac{dh}{dx} = \frac{\beta}{2} \rho_w \bar{u}^2 C_{ppl} = \tau_{u=0} - \tau_w \approx 2 \bar{\tau}. \quad (25)$$

Eliminating  $\bar{u}$  between (24) and (25), writing

$$h_{max} = h_{pl} + \frac{\beta}{2} C_{ppl} l, \quad (26)$$

where  $l$  is the length of the plateau, assuming  $h_{pl} \ll h_{max}$ , replacing  $C_{ppl}$

by its value from equation (21), and writing  $\bar{c}_f \approx c_{f,x_l}$  (this neglects mixing), one derives from equation (25)

$$\frac{l}{x_l} \left(1 - \frac{l}{x_l}\right)^{-1/8} - 2.1 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \gamma M^2\right]^{3/2} \beta^{-1/4} c_{f,x_l}^{1/4} \Delta C_{p_d}, \tag{27}$$

where  $x_l$  is the distance from the leading edge to the end of the plateau. The important results of equation (27) are that the length of the separated region depends strongly on the driving pressure and only weakly on the Reynolds number. Choosing for the driving pressure the difference between the final pressure and the pressure for incipient separation gives

$$\Delta C_{p_d} = C_{p_f} - 1.21 C_{p_{pl}}. \tag{28}$$

With this choice of  $\Delta C_{p_d}$ , the lengths of the separated regions are plotted in Figure 10. The linear relationship between the function of length of the separated region and the driving pressure is clear ( $c_{f,x_l}^{1/4}$  is not a major variable in

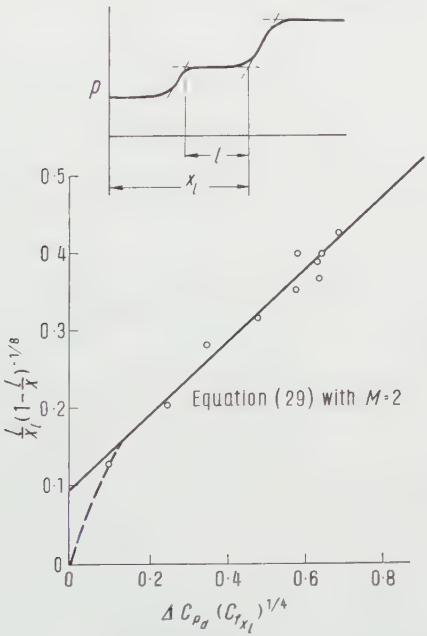


Figure 10  
Length of separated region on flat plate.

these tests). However, the constant of proportionality is greater than that of equation (27) and the line does not go through the origin. Both of these results are unexpected. For short lengths of separated regions the reverse flow is

not well established, the wall shear must be close to zero, and hence the effective  $\bar{c}_f$  must be less than the local constant pressure value. Consequently for small lengths of separated region the length should grow more rapidly than for larger lengths in which the backflow is well established. The constant of proportionality is larger than the prediction of equation (27) because  $\bar{c}_f$  really is somewhat less than  $c_{fx_l}$  because of mixing along the line  $u = 0$ . Using the experimental slope and intercept, equation (27) becomes, for the longer separated regions,

$$\frac{l}{x_l} \left(1 - \frac{l}{x_l}\right)^{-1/8} = 2.83 \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \gamma M^2\right]^{3/2} \beta^{-1/4} c_{fx_l}^{1/4} \Delta C_{p_d} + 0.097. \quad (29)$$

The new constant of proportionality implies that  $\bar{c}_f \approx 0.82 c_{fx_l}$ , which agrees with the measured slopes of the profile near  $u = 0$  in the separated region. Thus the experiments bear out the analytical model for the length of separated region.

## 6. Typical Measurements on the Curved Plate

Typical streamwise pressure distributions on the curved plate are shown in Figure 11. Curve *A* is a pressure distribution with no shock generator. The plateau is due to separation caused by the compression of the flow downstream

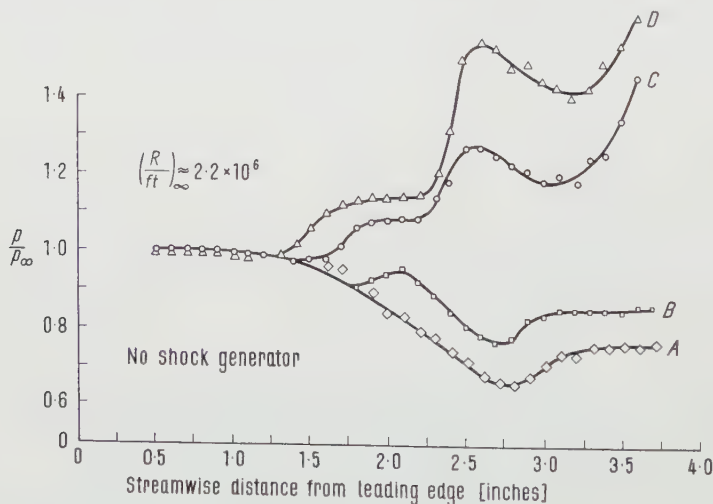


Figure 11

Typical pressure distributions on curved plate.

of the convex surface. Curve *B* shows the pressure distribution in presence of a shock not strong enough to cause separation. Downstream of the shock the



negative gradient due to the convex curvature of the surface is again apparent, as is the separation plateau caused by the downstream compression. Curves *C* and *D* show distributions with shock-induced separation. The pressure in the separated region is constant, as if the outer flow no longer had any information about the shape of the wall. After reattachment the negative pressure gradient manifests itself, but downstream separation due to compressive turning does not occur. The probable reason is that the reattached boundary layer is turbulent.

## 7. Separation and Plateau Pressure on Curved Plate

The analysis previously given for the separation and plateau pressure on the flat plate can be extended to the curved plate by superposing the pressures due to the thickening of the boundary layer and due to the wall curvature. The results are

$$(C_{p_s} - C_{p_0}) \left[ 1 - \frac{C_{p_{Es}} - C_{p_0}}{C_{p_s} - C_{p_0}} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2 C_{f_0}}{\beta}}, \quad (30)$$

$$(C_{p_{pl}} - C_{p_0}) \left[ 1 - \frac{C_{p_{Epl}} - C_{p_0}}{C_{p_{pl}} - C_{p_0}} \right]^{1/2} = 2.33 \sqrt{\frac{C_{f_0}}{\beta}}, \quad (31)$$

where  $C_{p_E}$  is the pressure coefficient which would occur at the same location on the plate in the absence of separation. Since shears were not measured on the curved plate, equation (30) could not be checked experimentally. A plot of the

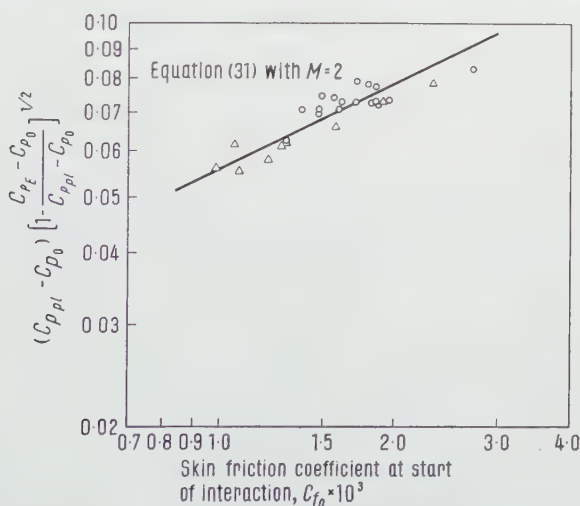


Figure 12

Plateau pressure coefficients on curved plate.

○ Separation due to impinging shock; Δ separation due to compression curve.

plateau pressures, however, is shown in Figure 12. The pressure levels are defined in Figure 13.

The skin friction coefficients were determined by GRUSCHWITZ' method, using the table in [7] and the experimental mean undisturbed pressure distribution. Figure 12 shows theory and experiment to be in reasonable agreement.

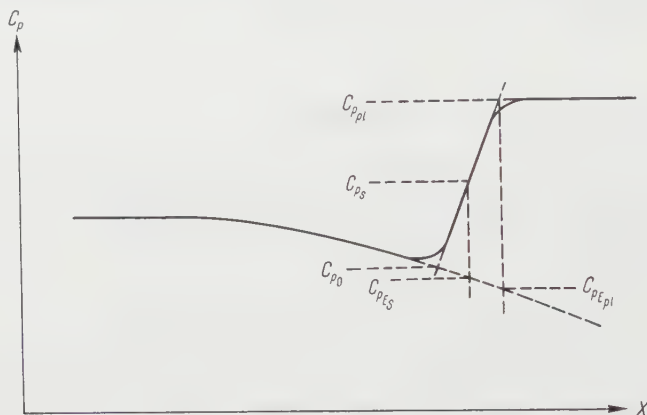


Figure 13  
Definition of pressure levels.

## 8. Interaction of an Oscillating Shock Wave with a Boundary Layer

The preceding model can be applied to the interaction of a laminar boundary layer with an oscillating shock. It is known that most shocks which are observed oscillate slightly. A simple analysis suggests that for certain combinations of shock strength, frequency, Mach number and Reynolds number, these oscillations are unstable.

The physical mechanism of the interaction seems to be as follows: a small change in shock strength and position brings about a small change in the mass flow into the backflow region, which causes a bulge in the shape of the separated jet; that bulge is carried along approximately at the backflow velocity, and looks to the outer flow somewhat as a mouse running under a rug would look to us. The moving bulge generates a pressure wave system in the outer stream which in turn interacts with the shock in the manner suggested by BURGERS. Thus the entire system is somewhat similar to the aero-elastic system, but with the backflow oscillation replacing the elastic vibration; it leads to a similar eigenvalue problem, from which characteristic frequencies and Reynolds numbers are determined and stability boundaries can be drawn.

If one represents the backflow perturbation as

$$h'(x, t) = B l e^{i\omega(t + x/|\bar{u}|)} \quad (32)$$

and the unsteady pressure coefficient as

$$C_p' \approx \frac{2}{\beta} \left( \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{i w}{U_\infty} h' \right) \quad (33)$$

one must satisfy the following boundary conditions: at the separation point, the pressure coefficient perturbation is due to a change in skin friction due to a change in position of the separation point, both because  $h$  changes and because the entire flow pattern oscillates with an amplitude  $X$ . This condition is

$$C_p'(x_s) = C_{ppl} \frac{c_f'}{2 c_{fs}} = -\frac{\alpha}{4 x_l \beta} \left( X - \frac{h'(x_s)}{\alpha} \right), \quad (34)$$

where  $\alpha$  is the mean slope of the free viscous layer,  $h'(x_s)$  is the perturbation in height of the separated flow region and  $X(t)$  is the amplitude of motion of the shock.

At the shock ( $x = x_l$ ), the pressure perturbation must satisfy the instantaneous Rankine-Hugoniot conditions, and induces perturbations in backflow mass rate which set the whole perturbation system into motion. This can be written as follows:

$$\frac{h'}{h}(x_l) = \frac{C_p'(x_l + \varepsilon)}{\Delta C_p} + \frac{c_f'}{c_f}. \quad (35)$$

Here  $C_p'(x_l + \varepsilon)$  is the pressure coefficient immediately behind the shock which is related to  $C_p'(x_l - \varepsilon)$ , the coefficient just ahead of the shock, by

$$C_p'(x_l + \varepsilon) = -C_p'(x_l - \varepsilon) - \frac{d \Delta C_p}{d U_\infty} \dot{X}(t), \quad (36)$$

where  $\dot{X}(t)$  is the velocity of oscillation of the shock.

When equations (32, 33) are substituted into (34, 35), a pair of complex homogeneous equations for  $\Delta C_p$ ,  $X$  are obtained; by requiring that their discriminant vanish and that the frequency be real, one obtains a frequency-shock strength stability limit curve which is approximately as follows:

$$\left. \begin{aligned} k' &= \frac{w x_l}{U_\infty} = \frac{1.8}{M S^n \Delta C_p}, \\ \Delta C_p &= \sqrt{\frac{11.5}{(\gamma+1) M^3 S^n} + \frac{32 \lambda}{25 (\gamma+1) M^3} + \frac{3 \lambda^2}{s} + \dots}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

where  $k' = w x_l / U_\infty$  is the critical reduced frequency based on free stream velocity and distance from leading edge to mean shock position,

$$\lambda = \sqrt[4]{S \left( \frac{c_f}{\beta} \right)^{1/4}}, \quad S = 1 + \frac{\gamma-1}{2} r M^2, \quad \mu_\infty = \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^n.$$

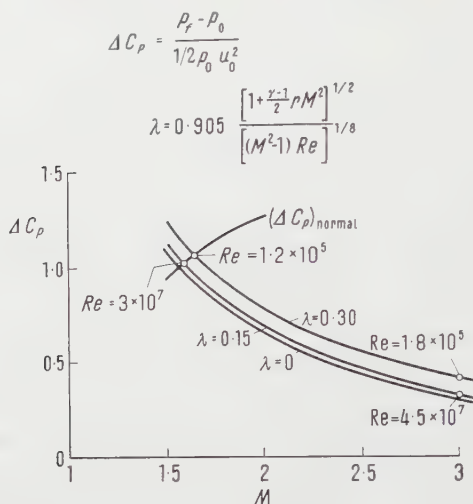


Figure 14

Shock strength for undamped oscillation of shock wave-laminar boundary layer interaction on flat plate.

The variation of critical shock strength  $\Delta C_p$  with Mach number is shown in Figure 14 for various values of the parameter  $\lambda$  which governs the Reynolds number effect. At Mach numbers below 1.6 the shock oscillation is stable. Normal shocks are unstable between  $M = 1.57$  ( $R \rightarrow \infty$ ) and  $M = 1.65$  ( $R \approx 120,000$ ). At higher Mach numbers, the critical shock is much weaker than a normal shock. For instance, at  $M = 2$ , a flow deflection of  $6^\circ$  is critical and at  $M = 3$ , a flow deflection of  $4^\circ$ .

## 9. Conclusions

An experimental and theoretical analysis of the interaction between a shock wave and a laminar boundary layer has been made. The qualitative picture of the interaction is as follows:

The adverse pressure gradient due to a shock wave causes the wall shear to decrease upstream of the shock wave. When the pressure rise reaches a certain threshold the wall shear is brought to zero. For larger pressure rises a separated region occurs.

The experiments show, that when the separated flow region is sufficiently long the pressure levels associated with separation depend only on local conditions. The boundary layer profiles are modified primarily near the wall, the outer flow remaining essentially an undisturbed boundary layer. An analysis of the separation pressure levels based on this observation gives reasonable

agreement with the measurements, both on the flat plate and on the curved plate. It is also shown that the integral momentum equation can be used to predict the separation pressure levels provided that one has an adequate measure of the pressure gradient at separation.

An analysis of the length of the separated region shows that it is almost proportional to the pressure rise in excess of that needed to induce incipient separation, and varies only weakly with Reynolds number; the length is inversely proportional to the eighth root of the Reynolds number. The measurements also support this analysis.

An analysis of the interaction of an oscillating shock with a laminar boundary layer, made by perturbing the steady results previously derived, shows that neutrally stable oscillations can occur, and the conditions for neutral stability have been presented.

### REFERENCES

- [1] F. W. BARRY, A. H. SHAPIRO, and E. P. NEUMANN, *The Interaction of Shock Waves with Boundary Layers on a Flat Surface*, M.I.T. Meteor Report 52 (1950).
- [2] L. TRILLING and R. J. HAKKINEN, *The Calibration of the Stanton Tube as a Skin Friction Meter*, 50 Jahre Grenzschichtforschung, pp. 201-209 (1955).
- [3] S. S. ABARBANEL, *The Calibration of the Stanton Tube as a Skin Friction Meter*, M. S. Thesis, M.I.T. (May 1955).
- [4] DEAN R. CHAPMAN, DONALD M. KUEHN, and HOWARD K. LARSON, *Investigation of Separated Flows in Supersonic and Subsonic Streams with Emphasis on the Effect of Transition*, NACA TN 3869 (1957).
- [5] G. E. GADD, *Interactions Between Wholly Laminar or Wholly Turbulent Boundary Layers and Shock Waves Strong Enough to Cause Separation*, J. aeron. Sci. 5 (11), 20 (1953).
- [6] G. E. GADD, *A Theoretical Investigation of the Effects of Mach Number, Reynolds Number, Wall Temperature and Surface Curvature on Laminar Separation in Supersonic Flow*, Great Britain ARC FM 2415 (June 1956).
- [7] H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill, New York 1955).
- [8] DEAN R. CHAPMAN and MORRIS W. RUBESIN, *Temperature and Velocity Profiles in the Compressible Laminar Boundary Layer with Arbitrary Distribution of Surface Temperature*, J. aeron. Sci. 5 (9), 16 (1949).

### Résumé

Ce mémoire décrit quelques recherches expérimentales et théoriques sur l'interaction des ondes de choc obliques avec les couches limites laminares. Une série de mesures détaillées de pressions et du frottement a été faite dans la région d'interaction dans un écoulement le long d'une plaque plane. Un modèle du mécanisme en a été déduit, dont les prédictions s'accordent raisonnablement bien avec les résultats des expériences. Les mêmes idées ont été appliquées à l'interaction sur une surface courbe, et les résultats s'accordent encore avec les expériences. Une étude simplifiée de la région de stabilité de l'interaction sous l'action d'oscillations de faible amplitude a été faite.

Received: September 28, 1957.)



# Über ein Charakteristiken-Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten

Von DIETHER GROHNE und RAMPURKAR MANOHAR, Göttingen, Deutschland<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Im Rahmen der Untersuchungen laminarer Grenzschichten wurde von W. TOLLMIESEN angeregt, das Charakteristiken-Differenzenverfahren auf solche Eigenschaften hin zu diskutieren, die es für die Lösung der parabolischen Fortsetzungsaufgabe der Grenzschichttheorie als besonders angepasst erscheinen lassen. Drei Fragen stehen dabei im Vordergrund: 1. Kann das Verfahren die allgemeinsten physikalisch sinnvollen Randbedingungen verarbeiten? 2. Besitzt das Verfahren die für die parabolische Fortsetzungsaufgabe charakteristische Fortpflanzung von Randwertstörungen und lässt es diese direkt erkennen? 3. Lässt sich der numerische Aufwand des Differenzenverfahrens durch eine vorherige analytische Aufbereitung der Differentialgleichungen vermindern?

Zu diesen Punkten sei ausgeführt: Während zum Beispiel das v. Kármán-Pohlhausen-Verfahren für viele Zwecke eine zu geringe und schlecht abschätzbare Genauigkeit liefert, sind die Potenzreihenverfahren nach BLASIUS-HOWARTH an die Konvergenz der auftretenden Reihen gebunden. Das Konvergenzintervall kann aber bei praktisch interessierenden Strömungen relativ klein werden (gemessen an der Gesamtstrecke bis zur Ablösung). Ein solches Potenzreihenverfahren verlangt die Darstellung der vorgelegten Druckverteilung durch ein Polynom oder zumindest durch eine konvergente Reihe, und zwar durchgängig im ganzen Lösungsintervall. Das Charakteristiken-Differenzenverfahren legt dagegen ein Polynom jeweils nur durch eine begrenzte Anzahl konsekutiver Punkte und gestattet damit eine allgemeinere Anwendbarkeit auf empirische Druckverteilungen.

Das Charakteristiken-Differenzenverfahren wurde bereits mehrfach in der Literatur behandelt [1-3]<sup>2)</sup>. Man kann nun den numerischen Aufwand vermindern, indem man die Grenzschichtgleichung vor Anwendung des Verfahrens auf neue geeignete Veränderliche transformiert, wodurch ein gleichmässiges Kleinhalten des lokalen Restgliedes bezweckt werden soll. Die Wahl der neuen Veränderlichen geschieht in Anlehnung an eine Formel von W. TOLLMIESEN [4, 5

<sup>1)</sup> Max-Planck-Institut für Strömungsforschung.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 346.



für den asymptotischen Übergang der Grenzschicht in die Potentialströmung. Eine wichtige Rolle spielt heute die Eignung eines Verfahrens für eine programmgesteuerte Rechnung. Der zweitgenannte Verfasser [7] hat deswegen das Charakteristiken-Differenzenverfahren am Beispiel des Schubauerschen elliptischen Zylinders [6] auf einer elektronischen Rechenmaschine durchgerechnet und damit die Eignung erwiesen.

## 2. Die Fortsetzungsaufgabe

Die Geschwindigkeitsverteilung in einer ebenen laminaren Grenzschicht wird beschrieben durch die Prandtlsche Grenzschichtgleichung

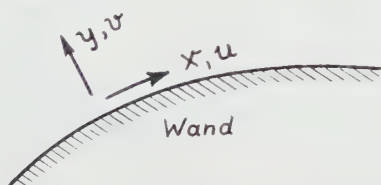
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U(x) \frac{dU(x)}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

wenn das strömende Medium von konstanter Dichte ist.

Hierin bezeichnet  $x$  die Bogenlänge entlang der Wand (die auch mässig gekrümmt sein darf);  $y$  ist eine Ortsveränderliche senkrecht zur Wand;  $u$  und  $v$  sind die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten;  $U(x)$  ist die Geschwindigkeit der reibungsfreien Strömung am Aussenrande der Grenzschicht,



Figur 1

Skizze der Ortskoordinaten  $x, y$  und der Geschwindigkeitskomponenten  $u, v$  in der Strömungsebene.

die auch vermöge der Bernoullischen Gleichung durch den Druck am Rande der Grenzschicht dargestellt werden kann.

Zu diesen Differentialgleichungen treten die Randbedingungen des Haftens der Strömung an der Wand:

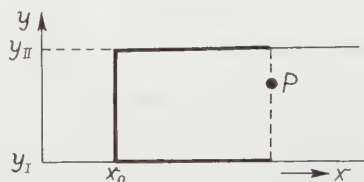
$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{bei} \quad y = 0, \quad (3a)$$

sowie die Randbedingungen des Überganges der Grenzschicht in die reibungsfreie Strömung:

$$u(x, y) \rightarrow U(x) \quad \text{für} \quad y \gg \delta \quad (\delta = \text{Grenzschichtdicke}). \quad (3b)$$

Zur vollständigen Bestimmung der Grenzschichtaufgabe gehört als Anfangsbedingung die Angabe der Geschwindigkeitsverteilung  $u(x, y)$  längs einer Charakteristik  $x = x_0$ ; entspricht speziell  $x_0$  einer singulären Stelle der Differentialgleichung, so kann die Anfangsbedingung auch in eine Regularitätsforderung entarten, wobei die Anfangsverteilung  $u(x_0, y)$  nicht mehr frei wählbar bleibt, sondern bereits durch die Differentialgleichungen festgelegt wird.

Die Fortsetzung eines Grenzschichtprofils  $u_0(y)$  (Figur 2) durch die Grenzschichtgleichungen bei Erfüllung der Randwerte  $u_I(x)$  und  $u_{II}(x)$  bei



Figur 2

Das Einflussintervall (stark ausgezogen) auf dem Rande zum Punkte P.

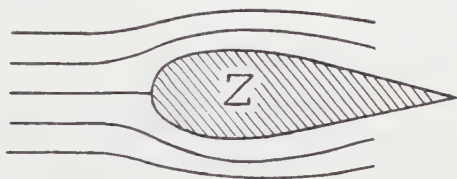
$y = y_I$  und  $y = y_{II}$  wird als Fortsetzungsaufgabe bezeichnet und ist als solche typisch für parabolische Differentialgleichungen. Um den parabolischen Typus der Grenzschichtgleichungen und die Rolle der Charakteristiken  $x = \text{const}$  zu veranschaulichen, sind in Figur 2 diejenigen Punkte des Randes als *Einflussintervall zum Punkte P* hervorgehoben, von denen aus die Lösung im Punkte P beeinflusst werden kann. Das Einflussintervall zum Punkt P wird rechtsseitig durch eine Charakteristik begrenzt, die durch den Punkt P geht. Eine Änderung der Randwerte von einer Stelle  $x_1$  an, das heisst für  $x \geq x_1$ , kann sich also nur in das rechtsseitige Gebiet  $x \geq x_1$  fortpflanzen, niemals dagegen in das linksseitige Gebiet  $x < x_1$ .

Diesem Sachverhalt ist das Charakteristiken-Differenzenverfahren besonders angepasst. Hier werden nach Einführung von Stützstellen  $x_n$  die partiellen Ableitungen nach  $x$  mittels rückwärtiger Differenzen durch finite Ausdrücke approximiert, so dass die partielle Differentialgleichung für die Stromfunktion  $\psi$  in eine gewöhnliche Differentialgleichung längs der jeweiligen Charakteristik  $x = x_n$  übergeht. Eine Änderung der Randwerte an einer Stelle  $x_n$  beeinflusst die Lösung dann nur längs der Charakteristiken  $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$  im rechtsseitigen Gebiet, nicht aber längs der linksseitigen Charakteristiken.

Eine solche Fortpflanzung von Randstörungen können die Potenzreihenverfahren von der Art [8] niemals auf direkte Weise erkennen lassen. Denn eine Änderung der Randwerte wird im allgemeinen die sämtlichen Taylor-Koeffizienten der Lösungsreihe abändern, mit denen aber die Charakteristiken in keinem direkten Zusammenhang stehen.

### 3. Vorbereitung der Grenzschichtgleichung für das Differenzenverfahren

Die zur Grenzschicht gehörige reibungsfreie Strömung werde dahin spezialisiert, dass sie bei  $x = 0$ ,  $y = 0$  einen (ebenen) Staupunkt besitzen soll. Als Modell kann man sich etwa die Strömung um einen profilierten Zylinder vorstellen (Figur 3), dessen Profil in der Strömungsebene längs der interessierenden Grenzschicht stückweise stetig gekrümmt sein soll. Die Wandgeschwindigkeit



Figur 3

Skizze der Strömung um einen Zylinder mit dem Profil  $Z$ .

$U(x)$  der reibungsfreien Strömung beginnt dann bei  $x = 0$  wie

$$U(x) = U_1 x + U_2 x^2 + \dots$$

Die zugehörige Grenzschicht soll von ihrem Beginn an bei  $x = 0$  bis zur etwaigen Ablösung berechnet werden.

Am Staupunkt  $x = 0$  hat die Grenzschichtgleichung (1) eine singuläre Stelle der Bestimmtheit; die Lösung bleibt dort regulär, ist aber im Sinne einer Anfangsbedingung nicht mehr frei wählbar. Auf Grund der Blasiuschen Reihe [9] gilt um  $x = 0$

$$\frac{u(x, y)}{U(x)} = f'_0(\bar{\eta}) + \xi f'_1(\bar{\eta}) + \dots \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{x}{L} \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{y}{L} \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}, \quad (4)$$

worin  $f'_0(\eta)$  das Geschwindigkeitsprofil der Staupunktströmung ist ( $L$  Bezugslänge,  $U_0$  Anströmgeschwindigkeit).

Das Differenzenverfahren könnte jetzt grundsätzlich in Gang gesetzt werden. Es empfiehlt sich aber, zuvor eine Transformation der Veränderlichen vorzunehmen, die etwa in folgender Weise motiviert werden kann: Die Integration der Grenzschichtgleichung ist von  $y = 0$  bis  $y = \infty$  zu erstrecken; da man dieses Intervall bei der numerischen Rechnung nur durch eine begrenzte Anzahl von Stützstellen repräsentieren kann, ist es wünschenswert, für das Verhalten der Lösung bei  $y \gg 1$  eine bequem auswertbare Formel zu besitzen. Eine solche asymptotische Formel für den Übergang der Grenzschicht in die Potential-

strömung hat nun W. TOLLMIEH [4, 5] aufgestellt. Sie nimmt ihre einfachste Gestalt an bei Verwendung der neuen Veränderlichen

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y U(x)}{\sqrt{2 \nu \int_0^x U dx}} \quad (5)$$

und lautet

$$\frac{u(x, y)}{U(x)} \cong 1 - c \beta(\xi) \frac{e^{-(\eta - \Delta)^2/2}}{(\eta - \Delta)^3} \quad (6)$$

mit

$$\beta = \frac{2 U'(x)}{U^2(x)} \int_0^x U dx. \quad (7)$$

(Die Konstante  $c$  und die Funktion  $\Delta(\xi)$  bleiben im Rahmen dieser Formel unbestimmt.) Die Bauweise der Formel legt die Einführung einer modifizierten Stromfunktion  $f$  nahe:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u(x, y)}{U(x)}, \quad f(\eta = 0) = 0. \quad (8)$$

(Die Linien  $f \sqrt{2 \nu \int_0^x U dx} = \psi = \text{const}$  sind dann die Stromlinien.)

Hierdurch lassen sich nämlich die Randbedingungen (3) unabhängig von  $x$  formulieren:

$$\left. \begin{aligned} f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \quad \text{bei } \eta = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{für } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Grenzschichtgleichung (1) lautet in den neuen Veränderlichen

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \beta(\xi) \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] \\ & = \frac{2}{U(\xi)} \int_0^\xi U d\xi \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

mit  $\beta$  wie in (7) zu

$$\beta = \frac{2 U'(x)}{U^2(x)} \int_0^x U dx.$$

Nach Durchführung der numerischen Rechnung [7] in unserem Beispiel des Schubauerschen Zylinders ergab sich die willkommene Tatsache, dass die Geschwindigkeitsprofile in den neuen Veränderlichen nur noch geringfügig mit  $\xi$  variieren; dadurch kommt man bei den finiten Ersetzungen der Ableitungen

nach  $\xi$  mit relativ wenigen Stützstellen aus, was eine Ersparnis an numerischer Rechnung bedeutet.

### *Andere in der Literatur verwendete Veränderliche*

Das Charakteristiken-Differenzenverfahren wurde erstmalig 1933 von H. J. LUCKERT [1] auf die Berechnung des Nachlaufes hinter einer längsangeströmten ebenen Platte angewendet. Als Veränderliche diente nach einem Vorschlage von R. v. MISES [10] die Geschwindigkeit  $u$  in Abhängigkeit von der Lauflänge  $x$  und der Stromfunktion  $\psi$ . Bei Wahl dieser Veränderlichen erniedrigt sich die Ordnung der Differentialgleichung von 3 auf 2, während nachteilig bei einer allfälligen Ablösungsstelle eine algebraische Singularität hinsichtlich  $\psi$  für  $\psi = 0$  auftritt. Unter Verwendung ähnlicher Veränderlicher berechnete 1944 R. IGLISCH [3] mit Differenzenformeln höherer Genauigkeit die Grenzschicht an einer längsangeströmten ebenen Platte bei konstantem Absaugen. D. R. HARTREE [2] berechnete 1939 mit dem Charakteristiken-Differenzenverfahren die Grenzschicht am Schubauerschen Zylinder unter Verwendung der Stromfunktion  $\psi$  in Abhängigkeit der ursprünglichen Ortsveränderlichen  $x$  und  $y$  (= Wandabstand). H. GÖRTLER [8] verwendete bei seinem Potenzreihenverfahren die in (8) erklärte modifizierte Stromfunktion  $f(t, \eta)$  in Abhängigkeit von  $\eta$  wie in (5) und der neuen Veränderlichen

$$\bar{t} = \int_0^x \frac{U dx}{U_0 L}. \quad (11)$$

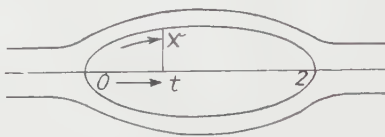
(Die Koordinatenlinien  $\bar{t} = \text{const}$  und  $(\eta \sqrt{\bar{t}}) = \text{const}$  lassen sich im Bereich der Grenzschicht anschaulich deuten als Äquipotentiallinien und Stromlinien der Potentialströmung.) Die gleichen Veränderlichen verwendete D. MEKSYN [11] für sein Grenzschicht-Fortsetzungsverfahren auf Potenzreihenbasis, welches im Unterschied zu den Reihenverfahren von BLASIUS-HOWARTH und GÖRTLER die für parabolische Fortsetzungsaufgaben eigentümliche Fortpflanzung von Randwertstörungen besitzt, wie sie in Abschnitt 2 beschrieben wurde. MEKSYN entwickelt die Lösung  $u(\xi, \eta)$  in Reihen nach Potenzen von  $\eta$ , deren nur von  $\xi$  abhängige Koeffizienten aus einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu ermitteln sind.

Zuweilen kann es von Vorteil sein, unter Beibehaltung von  $\eta$  und  $f$  gemäss (5) und (8) die andere Ortsveränderliche  $t = t(\xi)$  mittels der Potentialströmung  $\tilde{U}(x)$  ohne Ablösung zu bilden:

$$t = \int_0^x \frac{\tilde{U}(x) dx}{U_0 L}. \quad (12)$$

Hierbei hängt nämlich die Umrechnung von  $x$  in  $t$  nicht mehr von der Stärke der Anströmung ab, wie es bei der Veränderlichen (11)  $\tilde{t}$  infolge der Wanderung der Ablösungsstelle bei wechselnder Anströmung der Fall ist. Andererseits bleiben mit (11) verbundene Vorteile am Beginn der Grenzschicht erhalten, da dort die Potentialströmungen mit und ohne Ablösung nur gering voneinander abweichen.

In dem von uns behandelten Beispiel des Schubauerschen elliptischen Zylinders [6] wird die mit der Potentialströmung ohne Ablösung gemäss (12) gebildete Veränderliche  $t$  proportional der Projektion des Ellipsenbogens  $x$  auf die



Figur 4

Zusammenhang zwischen  $x$  und  $t$ .

grosse Achse der Ellipse (Figur 4). Wir haben uns deswegen für die Verwendung dieser Veränderlichen entschieden.

Es sei hier die Grenzschichtgleichung in den neuen Veränderlichen  $t$  und  $\eta$  angeschrieben, wie wir sie in der Differenzenrechnung zugrunde legen wollen. Es sei

$$\left. \begin{array}{l} U(x) \text{ die beobachtete Potentialströmung} \\ \text{und} \\ \tilde{U}(x) \text{ die Potentialströmung ohne Ablösung,} \end{array} \right\} \quad (13a)$$

für die in (13g) ein geschlossener Ausdruck angegeben wird. Die neuen Ortsveränderlichen sind

$$t = \int_0^x \frac{\tilde{U}(x) dx}{U_0 L}, \quad \eta = \frac{y U(x)}{\sqrt{2 \nu \int_0^x U dx}} \quad (13b)$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} L = a + b \\ (a \text{ grosse Halbachse der Ellipse; } b \text{ kleine Halbachse der Ellipse).} \end{array} \right\} \quad (13c)$$

Nach Einführung der Hilfsfunktionen

$$\beta(t) = \frac{2 U'(x)}{U^2} \int_0^x U dx, \quad \alpha(t) = \frac{\tilde{U}(x)}{U(x)} \int_0^t \frac{U}{\tilde{U}} dt \quad (13d)$$



lautet die Grenzschichtgleichung

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \beta(t) \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 2 \alpha \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{\partial f}{\partial \eta}. \quad (13e)$$

Die Randbedingungen sind

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \quad \text{bei} \quad \eta = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (13f)$$

Die Potentialströmung ohne Ablösung lässt sich mittels der Veränderlichen  $t$  darstellen durch

$$\frac{\tilde{U}^2}{U_0^2} = \left( 1 + \frac{b}{a} \right)^2 \frac{1 - (1-t)^2}{1 - (1-t)^2 \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right)}. \quad (13g)$$

Wollte man diese Geschwindigkeit  $\tilde{U}$  in eine Reihe nach Potenzen von  $t$  entwickeln, so wäre der Konvergenzkreis auf Grund der Polstellen gegeben durch

$$|t| < t^* = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \approx 1.$$

Beim Kreiszylinder  $b = a$  wird  $t^* = \infty$ ; bei einer sehr langgestreckten Ellipse wird  $t^*$  sehr klein; beim Schubauerschen Zylinder mit  $b/a = 1/3$  wird  $t^* = 0,0625$ . Dieser Konvergenzradius wird sich beim Übergang zur Potentialströmung mit Ablösung nicht sehr ändern. In  $t^*$  hat man einen Anhalt für das Konvergenzverhalten der Reihenentwicklung innerhalb der Grenzschicht, denn deren Konvergenzradius muss ja für grossen Wandabstand in den Konvergenzradius der Potentialgeschwindigkeit übergehen.

#### 4. Das Charakteristiken-Differenzenverfahren

Wir wollen in unserer Grenzschichtgleichung (13e) die partiellen Ableitungen nach  $t$  durch finite Ausdrücke mit rückwärtigen Differenzen ersetzen, zum Beispiel bei äquidistanten Stützstellen  $t_0, t_1, \dots, t_n$  mit der Schrittweite  $h = t_v - t_{v-1}$  durch eine der folgenden Formeln

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial t} &= \frac{1}{h} \left( \frac{3}{2} f_n - 2 f_{n-1} + \frac{1}{2} f_{n-2} \right) + R, & R &= \frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}; \\ \text{oder} & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial t} &= \frac{1}{h} \left( \frac{11}{6} f_n - 3 f_{n-1} + \frac{3}{2} f_{n-2} - \frac{1}{3} f_{n-3} \right) + R, & R &= \frac{h^3}{4} \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial t^4}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

In den Restgliedern  $R$  sind die Ableitungen an einer Zwischenstelle des Interpolationsintervalles zu nehmen. Bezeichnen wir die partiellen Ableitungen

nach  $\eta$  durch Striche, zum Beispiel  $\partial f / \partial \eta = f'$ , so geht die Grenzschichtgleichung (13e) nach den finiten Ersetzungen über in die Charakteristiken-Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} f_n''' + f_n f_n'' + \beta_n (1 - f_n'^2) &= \frac{2 \alpha_n f_n'}{h} \left( \frac{3}{2} f_n' - 2 f_{n-1}' + \frac{1}{2} f_{n-2}' \right) \\ &- \frac{2 \alpha_n f_n''}{h} \left( \frac{2}{3} f_n - 2 f_{n-1} + \frac{1}{2} f_{n-2} \right) + \hat{K}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Diese ist bei bekanntem  $f_{n-1}, f_{n-2}$  eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $f_n$ , die unter den Randbedingungen  $f_n(\eta = 0) = 0$ ,  $f_n'(0) = 0$ ,  $f_n'(\infty) = 1$  längs der Charakteristik  $t = t_n$  zu lösen ist.

Das Anfangsprofil  $f_0(\eta)$  ist durch die Anfangsbedingungen (bzw. eine stellvertretende Gleichung) gegeben. Das zweite zum Ingangsetzen der Rekursion (15) erforderliche Profil  $f_1(\eta)$  kann zum Beispiel mittels einer Reihenentwicklung um  $t = 0$  beschafft werden [7] oder auch in Verbindung mit (15) durch eine zu (15) analoge Formel, wobei anstelle von (14) die finite Ersetzung

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{1}{2h} (f_2 - f_0) + R, \quad R = -\frac{h^2}{6} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}$$

zu nehmen ist; die beiden Profile  $f_1$  und  $f_2$  sind dann aus zwei simultanen Gleichungen zu ermitteln.

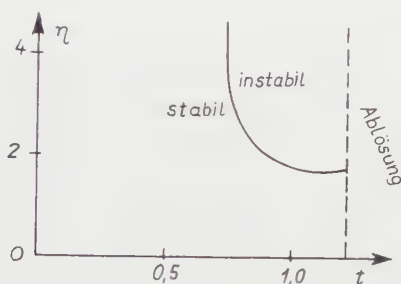
Die Lösung der Charakteristiken-Differentialgleichung (15) kann zum Beispiel durch einen Analogcomputer erfolgen [2]. Bei höheren Genauigkeitsansprüchen haben sich Quadraturformelverfahren bewährt, insbesondere das von ADAMS-STÖRMER, wie die Rechnungen von HARTREE [2], IGLISCH [3] und MANOHAR [7] zeigen.

Unberührt von der Frage, ob die Charakteristiken-Differentialgleichung mittels Differenzenverfahren oder anderweitig gelöst wird, wollen wir bereits die Umwandlung der partiellen Differentialgleichung in eine «Differenzen-Differentialgleichung», nämlich die Charakteristiken-Differentialgleichung (15) als *Differenzenverfahren* bezeichnen; wir wollen speziell von einem *Charakteristiken-Differenzenverfahren* sprechen, wenn die partielle Differentialgleichung und die stellvertretende Differenzen-Differentialgleichung die gleichen Wirkungsgebiete von Randwertstörungen haben. Dies ist der Fall bei unseren *interpolierenden* finiten Ersetzungen (14), wäre jedoch bei Extrapolationsformeln nicht der Fall gewesen.

## 5. Fehlerbetrachtungen

Es sei  $D$  die Lösung der partiellen Differentialgleichung,  $A$  die Lösung der Differenzengleichung und  $N$  die *numerische* (mit Abrundungsfehlern und ihren Folgefehlern behaftete) Lösung der Differenzengleichung; alle drei Lösungen

sollen den Randbedingungen genügen. Durch die numerische Lösung  $N$  der Differenzengleichung wird die Differentialgleichung nur bis auf einen Fehler erfüllt, den wir als *Gleichungsfehler* bezeichnen; der Gleichungsfehler lässt sich zum Beispiel durch das Restglied in (15) und den Abrundungsfehler darstellen, wenn die Charakteristikendifferentialgleichung (15) längs jeder Charakteristik mit einer gewissen Zahl gültiger Dezimalstellen exakt gelöst wird. Der Rückschluss vom Gleichungsfehler auf einen der *Lösungsfehler*  $D - \Delta$  oder  $D - N$  erfordert mittelbar die Lösung einer partiellen Randwertaufgabe; handliche Abschätzungen scheinen nicht bekannt zu sein.



Figur 5  
Bereich der numerischen Stabilität nach [14].

COURANT, FRIEDRICHS und LEWY [12] haben die Frage untersucht, wann der Lösungsfehler  $D - \Delta$  bei fortgesetzter Verkleinerung der Schrittweiten  $h$  und  $k$  gegen Null strebt; ist dies der Fall, so heisst das betreffende Differenzenverfahren *konvergent*. Ein konvergentes Differenzenverfahren kann für die numerische Rechnung dadurch unbrauchbar werden, dass innerhalb der Differenzengleichung der durch Abrundung entstandene Lösungsfehler  $\Delta - N$  mit wachsender Schrittzahl unzulässig anwächst; das Differenzenverfahren heisst dann *instabil*. O'BRIEN, HYMAN und KAPLAN [13] haben die Stabilität bei Ausserachtlassung der Randbedingungen untersucht.

Diese Art der Stabilität gilt stets in einem bestimmten Teilgebiet des Lösungsbereiches unter einer zusätzlichen Einschränkung der Schrittweiten, die bei der Grenzschichtgleichung von der Art  $h/k^2 < a(t, \eta)$  ist [14]. Die Einschränkung der Schrittweiten kann auch mit  $a = \infty$  entfallen, wie dies bei unserm Charakteristiken-Differenzenverfahren mit interpolierenden Differenzen der Fall ist. Das von dem jeweiligen Differenzenverfahren abhängige Stabilitätsgebiet kann man nach WITTING [14] durch ein zur partiellen Differentialgleichung gehöriges Stabilitätsgebiet annähern. Wir haben dieses Stabilitätsgebiet zur Grenzschichtgleichung (13e) gemäss der Bedingung

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \beta \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \vartheta^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{1}{\vartheta^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)^2 \geq 0 \quad (\vartheta \geq \text{reell})$$

durch Einsetzen unserer numerisch gewonnenen Lösung ermittelt und in Figur 5 dargestellt. Ein Vergleich mit Fehlerbetrachtungen nach der «Methode der halben Schrittweiten» zeigt, dass die Untersuchung der numerischen Stabilität ohne Berücksichtigung der Randbedingungen keinen befriedigenden Aufschluss über die bei uns beobachtete Fehlerfortpflanzung zu geben vermag. Werden nun die Randbedingungen berücksichtigt und werden die Eigenschaften «stabil» und «konvergent» nur auf die Ersetzung der partiellen Differentialgleichung durch die Charakteristiken-Differentialgleichung (15) bezogen, so müssen die Gebiete der Konvergenz oder Stabilität rechtsseitig stets durch Charakteristiken  $t = \text{const}$  begrenzt sein.

## 6. Eine mögliche Nichterfüllbarkeit der Randbedingungen

Es lassen sich Druckverteilungen angeben, zu denen die Charakteristiken-Differentialgleichung (15) unter den gegebenen Randbedingungen von einer bestimmten Stelle  $t'$  an nicht mehr lösbar bleibt. An unserem Beispiel des Schubauerschen Zylinders untersuchten wir an einer festen Stützstelle  $t_n$  den Einfluss einer Änderung des Koeffizienten  $\beta$  [in der Differentialgleichung (15)] auf die Wandschubspannung. Hierbei ergab sich, dass die Differentialgleichung (15) unterhalb eines bestimmten Wertes  $\beta^*$ , das heisst für  $\beta < \beta^*$ , unter den gegebenen Randbedingungen nicht mehr lösbar ist. Für  $\beta > \beta^*$  ergeben sich zwei Lösungen  $f_I(\eta)$  und  $f_{II}(\eta)$ , die sich durch die folgende topologische Eigenschaft unterscheiden: Werden zu den beiden Lösungen  $f_I$  und  $f_{II}$  Nachbarschaftslösungen  $\hat{f}_I$  und  $\hat{f}_{II}$  ermittelt, die nicht den Randbedingungen genügen, sondern stattdessen den Anfangsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}_I(0) &= 0, & \hat{f}'_I(0) &= 0, & \hat{f}''_I(0) &= f''_I(0) + \varepsilon, \\ \hat{f}_{II}(0) &= 0, & \hat{f}'_{II}(0) &= 0, & \hat{f}''_{II}(0) &= f''_{II}(0) + \varepsilon, \end{aligned} \right\} \text{ mit } \varepsilon > 0,$$

so gilt

$$\hat{f}'_I(\infty) > 1 \quad \text{und} \quad \hat{f}'_{II}(\infty) < 1.$$

Da die um  $t = 0$  gültige Blasiusche Reihe sich wie die Lösung  $f_I$  verhält, ist diese für unsere Grenzschichtfortsetzung als die richtige zu betrachten.

Das Verhalten den Lösungen  $f_I$  und  $f_{II}$  (die beide den Randbedingungen genügen) lässt sich auf Grund unserer numerischen Rechnungen in der Nähe des Parameterwertes  $\beta^*$  durch das folgende Gesetz darstellen:

$$\left. \begin{aligned} f_I(\eta) &\cong f^*(\eta) + \sqrt{\beta - \beta^*} \varphi(\eta), \\ f_{II}(\eta) &\cong f^*(\eta) - \sqrt{\beta - \beta^*} \varphi(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Zur Klärung der Frage, ob es sich bei der zweiten Lösung  $f_{II}$  um eine durch das Differenzenverfahren «ingeschleppte» Lösung handelt, die infolge der

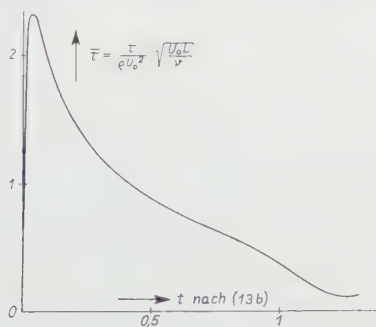
finiten Ersetzungen der Ableitung  $\partial/\partial t$  durch einen Differenzenausdruck höherer Ordnung auftreten kann, haben wir die Charakteristiken-Differentialgleichung (15) mittels der finiten Ersetzung 1. Ordnung

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} \sim \frac{f_n - f_{n-1}}{h}$$

neu gebildet und gelöst. In Übereinstimmung mit dem vorherigen Ergebnis ergaben sich wieder zwei Lösungen für  $\beta > \beta^*$  und die Nichtlösbarkeit für  $\beta < \beta^*$ .

## 7. Zur Ablösung der Grenzschicht

Bei den Experimenten von G. B. SCHUBAUER [6] am elliptischen Zylinder (Achsenverhältnis 1:3, Anströmung in Richtung der grossen Achse) trat die Ablösung der Grenzschicht bei  $x = 1,99 \pm 0,02$  auf ( $x$  = Bogenlänge, gemessen vom Staupunkt, bezogen auf die kleine Achse). Dem entspricht in unserer Veränderlichen  $t$  der Wert  $t \approx 1,25$ . Dieser experimentelle Befund konnte durch die numerische Lösung der Grenzschichtgleichungen nicht bestätigt werden, wenn die zugehörige Druckverteilung genau nach den Angaben von SCHUBAUER gewählt wurde. Nach unseren Rechnungen, die sich in guter Übereinstimmung mit früheren Rechnungen von HARTREE [2] befinden, wird die Wandschubspannung  $\tau$  in der Nähe der experimentellen Ablösung wohl relativ



Figur 6

Verlauf der Wandschubspannung in Abhängigkeit von  $t$ .

klein, ohne indes auf Null abzusinken. Dies geht genauer aus Figur 6 hervor, in der die Wandschubspannung

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

in der dimensionslosen Auftragung

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\rho U_0^2} \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}}$$

dargestellt ist [ $U_0$  Anströmgeschwindigkeit,  $L$  nach (13c)].

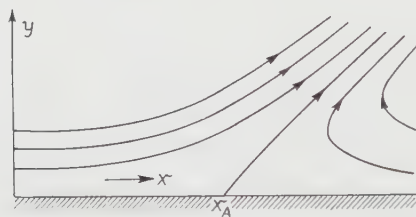


Da die Ablösung bei den Experimenten einwandfrei eintritt, möchte man sie auch durch die Grenzschichtrechnung bestätigt sehen. Man wird daher, um dies zu erreichen, die ja mit Messfehlern behaftete Druckverteilung in der Nähe der Ablösung abzuändern versuchen. Um eine Klärung dieses Problems haben sich bereits HARTREE [2] und GOLDSTEIN [15] bemüht; GOLDSTEIN untersuchte das mögliche analytische Verhalten der Lösungen der Grenzschichtgleichungen in der Nähe der Ablösungsstelle.

Nach GOLDSTEIN verhält sich die Lösung der Grenzschichtgleichungen unmittelbar vor der Ablösungsstelle  $x_A$  im allgemeinen wie

$$u(x, y) = \sqrt{x_A - x} \{f'_0(\eta) + (x_A - x)^{1/4} f'_1(\eta) + \dots\}$$

$$\text{mit } \eta = \frac{y}{\sqrt[4]{x_A - x}} \quad \text{und} \quad f'_0(\eta) = c \eta^2.$$



Figur 7

Verlauf der Stromlinien an der Ablösungsstelle im Falle der regulären Lösung.

Neben dieser singulären Lösung gibt es auch in Ausnahmefällen eine reguläre Lösung, nämlich wenn die Druckverteilung gewissen (bis heute noch nicht bekannten) Bedingungen genügt; auf die Notwendigkeit solcher Bedingungen hat PRANDTL [16] hingewiesen. Die reguläre Lösung ist von der Gestalt

$$u(x, y) = u_0(y) + (x - x_A) u_1(y) + \dots$$

Das Stromlinienbild zu einer regulären Lösung ist in Figur 7 dargestellt. Die reguläre Lösung kann im Gegensatz zur singulären Lösung auch in das Gebiet stromabwärts der Ablösungsstelle fortgesetzt werden.

Für das Beispiel des Schubauerschen Zylinders erhielt HARTREE [2] nach geeigneter Abänderung der Druckverteilung eine Ablösung nach Art der singulären Lösung. Unterstellen wir dieses Ergebnis als richtig, so folgt daraus für jedes Differenzenverfahren die Unmöglichkeit, bis an die Ablösungsstelle heranzukommen oder gar darüber hinaus zu gelangen; das ginge nur dann, wenn man die Position der Singularität an der Ablösung als vorher bekannt mit in die Rechnung einsetzen könnte.



HARTREE [2] und vor ihm MILLIKAN [17] erwähnen, dass die Geschwindigkeitsprofile in der Nähe der Ablösung sehr empfindlich gegenüber Änderungen der Druckverteilung seien. Zum Studium dieses auch bei unseren Rechnungen aufgetretenen Verhaltens haben wir an der beobachteten Potentialströmung stromabwärts einer Stelle  $t_0$  eine infinitesimale Änderung angebracht und deren Auswirkung auf die modifizierte Stromfunktion  $f$  untersucht. Die Änderung  $\delta U$  sei in der Bezeichnungsweise (13a-d) von der Gestalt

$$\delta U = \hat{\varepsilon} (t - t_0)^{n+1} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Nach (13d) gilt dann

$$\delta \alpha = O[(t - t_0)^{n+1}]$$

und

$$\delta \beta = \varepsilon (t - t_0)^n + O[(t - t_0)^{n+1}].$$

Die resultierende Änderung  $\delta f$  an der modifizierten Stromfunktion  $f$  lässt sich bei kleinen Werten von  $\delta \alpha$ ,  $\delta \beta$  aus einer linearen Differentialgleichung bestimmen. Beschränkt man sich hierbei auf eine asymptotische Darstellung für kleine Werte von  $(t - t_0)$ , so erhält man im Intervall  $\eta \geq a(t - t_0)^{1/3}$  mit  $a \gg 1$ :

$$\delta f \cong \varepsilon (t - t_0)^{n+2/3} \frac{c(n)}{\lambda^{2/3}} \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial \eta}}{\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0}} \quad \text{mit} \quad \lambda = 2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0}. \quad (17)$$

In der Wandzone  $0 \leq \eta \leq a(t - t_0)^{1/3}$  mit  $a \gg 1$  gilt

$$\delta f \cong \varepsilon \frac{(t - t_0)^{n-1}}{\lambda} \Phi \left( \frac{\eta \lambda^{1/3}}{(t - t_0)^{1/3}} \right),$$

worin  $\Phi(z)$  der Differentialgleichung

$$\Phi'''(z) + (n+1)(\Phi - z\Phi') + \frac{z^2}{3}\Phi'' = -1$$

genügt. Die Lösung unter den Randbedingungen  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(0) = 0$  und  $\Phi'(\infty) = \text{const}$  lautet zum Beispiel für  $n=1$

$$\Phi(z) = -\frac{z^3}{6} - \frac{z^6}{360} + E\psi(z)$$

mit

$$\begin{aligned} \psi(z) = z \int_0^z \left( 2 - \frac{2}{3}\zeta^3 - \frac{\zeta^6}{90} \right) \frac{e^{-\zeta^3/9} d\zeta}{\left( 1 - \frac{2}{3}\zeta^3 + \frac{\zeta^6}{36} \right)^2} \\ - \left( 2 - \frac{2}{3}z^3 - \frac{z^6}{90} \right) \int_0^z \frac{e^{-\zeta^3/9} \zeta d\zeta}{\left( 1 + \frac{2}{3}\zeta^3 + \frac{\zeta^6}{36} \right)^2}. \end{aligned}$$

Die Darstellung (17) zeigt deutlich, dass  $\delta f$  bei Annäherung an die Ablösung sehr gross wird, weil dort  $f''(0)$  und damit  $\lambda$  gegen Null gehen. Darin prägt sich aber gerade die erwähnte Empfindlichkeit der Geschwindigkeitsprofile gegenüber der Druckverteilung aus. Der hierdurch bewirkte Genauigkeitsverlust in den Lösungen ist nicht an das Differenzenverfahren gebunden, sondern tritt notwendig bei jedem anderen Verfahren auf.

Bei Anwendung eines Differenzenverfahrens tritt ein weiterer Verlust an Genauigkeit ein, wenn sich die Lösung an der Ablösungsstelle singular verhält. Bleibt aber die Lösung regulär, so gerät man in eine kritische Nähe derjenigen  $\beta^*$ -Werte, unterhalb deren nach Abschnitt 6 die Randbedingungen nicht mehr erfüllbar sind; denn die zur Funktion  $\varphi(\eta)$  des Ansatzes (16) gehörige Differentialgleichung besitzt die Partikularlösung  $c \partial f / \partial \eta$ , welche an der Ablösungsstelle gerade die erforderlichen Randbedingungen erfüllt.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. LUCKERT, Dissertation (Berlin 1933); abgedruckt in: Schr. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 1, 245–274 (1933).
- [2] D. R. HARTREE, ARC, R. & M. 2427 (1939).
- [3] R. IGLISCH, Schr. dtsh. Akad. Luftfahrtforsch. 8B, 1–51 (1944).
- [4] W. TOLLMEN, *50 Jahre Grenzschichtforschung*, herausgegeben von H. GÖRTLER und W. TOLLMEN (Braunschweig 1955), S. 1–12.
- [5] W. TOLLMEN, *Festschrift zum 60. Geburtstag von A. Betz* (AVA, Göttingen 1945), S. 218–224.
- [6] G. B. SCHUBAUER, NACA Rep. 527 (1935).
- [7] R. MANOHAR, Dissertation (Göttingen 1957).
- [8] H. GÖRTLER, J. Math. Mech. 6, 1–66 (1957).
- [9] L. HOWARTH, ARC, R. & M. 1632 (1934).
- [10] R. v. MISES, Z. angew. Math. Mech. 7, 425–431 (1927).
- [11] D. MEKSYN, Proc. Roy. Soc. [A] 237, 543–559 (1956).
- [12] R. COURANT, K. FRIEDRICHS und H. LEWY, Math. Ann. 100, 32–74 (1928).
- [13] G. O'BRIEN, M. HYMAN und S. KAPLAN, J. Math. Phys. 29, 223–251 (1951).
- [14] H. WITTING, *50 Jahre Grenzschichtforschung*, herausgegeben von H. GÖRTLER und W. TOLLMEN (Braunschweig 1955), S. 334–342.
- [15] S. GOLDSTEIN, Quart. J. Mech. 1, 43–69 (1948).
- [16] L. PRANDTL, Z. angew. Math. Mech. 18, 77–82 (1938).
- [17] C. B. MILLIKAN, J. aero. Sci. 3, 91–94 (1936).

### Summary

The difference method of LUCKERT-HARTREE-IGLISCH for the continuation of a boundary layer with a given pressure distribution is applied to an example to study various aspects of the method such as its adaptability to automatic computers and the possibility of reducing the numerical work by suitable transformation of the variables. The method shows the step-wise dependence of the solution on the prescribed pressure distribution more directly than, e. g., power series expansions of the Blasius-Howarth type.

(Eingegangen: 28. September 1957.)

# Verwundene Überschallflügel und Überschallflügel im Wirbelfeld

VON CARL HEINZ, Lörrach, Deutschland<sup>1)</sup>

## Einleitung

Das Potential der linearisierten Überschallströmung um einen Rechteckflügel mit beliebiger Anstellwinkel-Verteilung ist seit längerer Zeit bekannt (vgl. etwa [3]<sup>2)</sup>, S. 179). Die Strömung um einen verwundenen Rechteckflügel lässt sich als Spezialfall hieraus entwickeln, doch ist es einfacher, diese Strömung mit Hilfe der Theorie der konischen Strömung zu berechnen. Diese Theorie liefert zunächst unmittelbar die Strömung um den unendlich langen verwundenen Flügel. Der endlich lange Flügel lässt sich in üblicher Weise durch Überlagerung von konischen Singularitäten längs der Ränder des Flügels behandeln. Diese Singularitäten sind so beschaffen, dass sie den Druck ausserhalb des Flügels aufheben, während die Randbedingungen auf dem Flügel nicht gestört werden. Prinzipiell ist es möglich, auf ganz ähnliche Weise allgemeinere Flügelformen zu behandeln.

Ein Sonderfall des verwundenen Flügels ist der Flügel im Störungsfeld eines Wirbelfadens, solange der vom Flügel beeinflusste Teil dieses Wirbelfadens nicht mehr auf den Flügel zurückwirkt, das heisst, solange der Abstand des Wirbelfadens vom Flügel einen gewissen Betrag nicht unterschreitet. Für den Fall, dass der Wirbelfaden in der Ebene des Flügels liegt, lassen sich die Luftkräfte durch elementare Integrationen bestimmen. Diese Formeln wurden ausgewertet. Das Ergebnis ist in den Diagrammen 5–7 wiedergegeben.

## 1. Der unendlich lange verwundene Flügel

Wir betrachten einen unendlich langen, senkrecht zur Anströmrichtung ( $x$ -Richtung) gestellten dünnen Flügel, der mit der Überschallgeschwindigkeit  $U$  angeströmt werde und dessen Anstellwinkel  $\vartheta$  eine Funktion  $\vartheta(y)$  der zur  $x$ -Achse senkrechten Koordinate  $y$  längs der Vorderkante des Flügels sei.

Zunächst setzen wir  $\vartheta(y) = Y(y)$ ,  $-\infty < y < +\infty$ . Vom Punkte  $x = y = z = 0$  geht dann eine konische Störung aus, für die die Theorie der konischen Strömungen (vgl. etwa [1], S. 135 ff.) die Verteilung von  $u$ , das heisst

<sup>1)</sup> Mitarbeiter am Service technique de l'Armée Française.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 356.

der durch  $U$  dividierten  $x$ -Komponente der Störgeschwindigkeit

$$\beta u = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } \zeta \leq -1, \quad \zeta = \beta \frac{y}{x}, \\ \frac{1}{\pi} \arccos(-\zeta) & \text{für } -1 \leq \zeta \leq +1, \\ 1 & \text{für } +1 \leq \zeta, \end{array} \quad \beta = \sqrt{M^2 - 1}, \right\} \quad (1.1)$$

liefert. Ersetzen wir  $y$  durch  $y - \eta$  und differenzieren nach  $\eta$ , so erhalten wir

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta(y) = \delta(y - \eta), \quad -\infty < y < +\infty, \\ u = \frac{1}{x} g(\zeta'), \quad \zeta' = \beta \frac{y - \eta}{x} \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

mit

$$g(\zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } \zeta < -1, \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} & \text{für } -1 < \zeta < +1, \\ 0 & \text{für } +1 < \zeta. \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

Aus dieser Elementarlösung findet man

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta(y) = \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \delta(y - \eta) \vartheta(\eta) d\eta, \quad -\infty < y < +\infty, \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{\vartheta(\eta)}{x \sqrt{1 - \zeta'^2}} d\eta = \frac{1}{\beta \pi} \int_{\zeta'=-1}^{+1} \frac{\vartheta\left(y - \frac{x}{\beta} \zeta'\right)}{\sqrt{1 - \zeta'^2}} d\zeta'. \end{aligned}$$

## 2. Der einseitig unendliche verwundene Flügel

Schneiden wir den in Abschnitt 1 betrachteten unendlichen Flügel bei  $y = 0$  ab, so dass nur der Teil  $y \geq 0$  übrigbleibt, so haben wir für  $y \leq 0$  die Randbedingung  $u = 0$  zu erfüllen. Wir haben also die Strömung

$$u = 0 \quad \text{für } y < 0, \quad \vartheta = \vartheta(y) \quad \text{für } y \geq 0$$

zu berechnen.

Die von der Vorderkante  $x = 0$ ,  $y \geq 0$  ausgehenden Störungen werden an der Kante  $y = 0$  reflektiert. Diese Reflexionen beherrscht man mit Hilfe der konischen Strömungen ([2], [3], S. 163, Nr. 21), ( $w$  ist die durch  $U$  dividierte

$z$ -Komponente der Störgeschwindigkeit):

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \quad \text{für } \zeta \geq 0, \quad u = Y(\zeta - \tau) \quad \text{für } \zeta \leq 0, \\ \zeta &= \beta \frac{y}{x}, \quad -1 \leq \tau \leq 0, \\ u &= S_0(\zeta, \tau) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\tau(1-\zeta)}{\tau-\zeta}} & \text{für } 0 \leq \zeta \leq +1, \\ 0 & \text{für } +1 \leq \zeta. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Ersetzen wir hierin  $\zeta$  durch

$$\sigma = \beta \frac{y}{x - \xi},$$

was einer Verschiebung des konischen Zentrums auf der  $x$ -Achse entspricht, und lassen  $\tau$  ungeändert, so liefert Differentiation nach  $\xi$

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \quad \text{für } \sigma \geq 0, \quad u = -\frac{\sigma^2}{y} \delta(\sigma - \tau) \quad \text{für } \sigma \leq 0, \\ \sigma &= \beta \frac{y}{x - \xi}, \quad -1 \leq \tau \leq 0, \\ u &= S_1(\sigma, \tau) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma^2}{y} \cdot \frac{1}{\sigma - \tau} \sqrt{\frac{-\tau(1-\tau)}{\sigma(1-\sigma)}} & \text{für } 0 \leq \sigma \leq +1, \\ 0 & +1 \leq \sigma. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Solche Strömungen wollen wir längs der  $x$ -Achse überlagern, wobei wir  $\tau = -\beta \eta / \xi$  setzen (Figur 1), das heisst, wir bilden

$$u_1 = \int_{\tau=-1}^0 f(\tau) S_1(\sigma, \tau) d\tau.$$

Für  $y < 0$ ,  $\sigma < 0$ , wird dies

$$y < 0: \quad u_1 = \int_{\tau=-1}^0 f(\tau) \frac{\sigma^2}{y} \delta(\sigma - \tau) d\tau.$$

Hierbei ist, bei festem  $x$  und  $y$ ,  $\sigma$  eine Funktion von  $\tau$ . Für  $\sigma - \tau = 0$  ist

$$\sigma = \tau = \zeta' = \beta \frac{y - \eta}{x}, \quad \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\eta}{y}$$

und somit

$$y < 0: \quad u_1 = \frac{\beta}{x} \zeta' f(\zeta').$$

Diese Strömung ist aber für  $y < 0$  mit (1.2) identisch, wenn wir

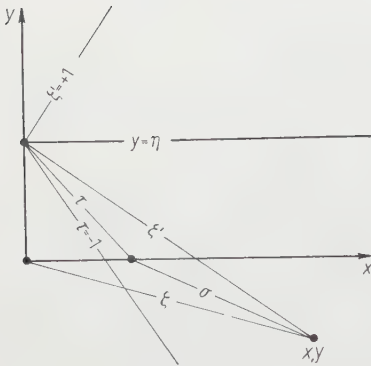
$$f(\zeta') = \frac{1}{\beta \zeta'} g(\zeta')$$

setzen. Für die Lösung von

$$u = 0 \quad \text{für } y < 0, \quad \vartheta = \delta(y - \eta) \quad \text{für } y \geq 0$$

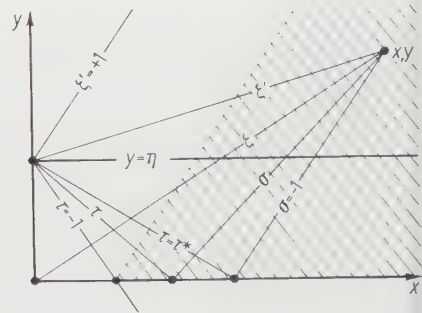
ist also

$$u = \frac{1}{x} g(\zeta') - \frac{1}{\beta} \int_{\tau=-1}^0 \frac{1}{\tau} g(\tau) S_1(\sigma, \tau) d\tau. \quad (2.3)$$



Figur 1

Strömung im Aussenbereich des Flügels.



Figur 2

Strömung auf dem Flügel.

Das Integral müssen wir noch für  $y \geq 0$  auswerten (Figur 2): Die obere Grenze  $\tau = \tau^*$  von  $\tau$  ist durch  $\sigma = +1$  bestimmt, woraus

$$\tau^* = \frac{\beta \eta}{\beta y - x}$$

folgt. Es ist also

$$u = \frac{1}{x} g(\zeta') + \frac{1}{\beta y \pi^2} \int_{\tau=-1}^{\tau^*} \frac{\sigma^2}{\tau(\sigma - \tau)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sqrt{\frac{-\tau(1 - \tau)}{\sigma(1 - \sigma)}} d\tau.$$

Das Integral ist nur für  $\tau^* > -1$  (schraffierter Bereich von Figur 2) von Null verschieden und dort gleich

$$-\frac{1}{\pi x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta'^2}}.$$

Führen wir noch

$$\omega = 2\zeta - 1$$

ein, so ist im schraffierten Bereich  $\omega < \zeta'$ , im nichtschraffierten  $\omega > \zeta'$ . Wi



haben also für (2.3)

$$u = \frac{1}{x} g(\zeta') Y(\omega - \zeta') \vartheta(\eta) \quad (2.4)$$

[vgl. auch [3], S. 179, Gleichung (13.25)].

Daraus finden wir für

$$u = 0 \quad \text{für } y < 0, \quad \vartheta = \vartheta(y) \quad \text{für } y \geq 0:$$

$$\begin{aligned} u &= \int_{\eta=0}^{\infty} \frac{1}{x} g(\zeta') Y(\omega - \zeta') \vartheta(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{\pi \beta} \int_{\zeta'=-1}^1 \frac{1}{1 - \zeta'^2} Y(\omega - \zeta') \vartheta\left(y - \frac{x}{\beta} \zeta'\right) d\zeta' \quad \text{für } y \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen

$$\zeta = \frac{1 + \omega}{2}$$

ist, wenn wir die Sprungfunktion fortlassen, die obere Grenze des Integrals

$$\begin{aligned} &\omega \quad \text{für } \frac{1 + \omega}{2} > \omega, \quad \text{das heisst } \zeta < 1, \\ &+1 \quad \text{für } \frac{1 + \omega}{2} < \omega, \quad \text{das heisst } \zeta > 1. \end{aligned}$$

Setzen wir speziell  $\vartheta(y) = 1$  für  $y \geq 0$ , so wird

$$\beta u = 1 - Y(1 - \zeta) \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\zeta},$$

die bekannte Lösung für die Unterschallkante (vgl. etwa [3], S. 62, Nr. 17).

### 3. Luftkräfte des verwundenen Rechteckflügels

Für einen Rechteckflügel (Figur 3) mit der Verteilung  $\vartheta(y) = \vartheta(y - \eta)$ ,  $-b \leq y, \eta \leq +b$  des Anstellwinkels gilt nach Abschnitt 2, wenn wir

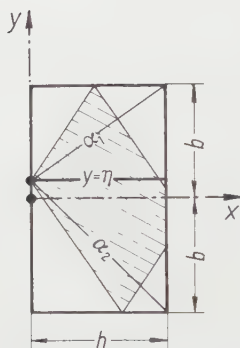
$$\begin{aligned} \zeta' &= \beta \frac{y - \eta}{x}; & \zeta_1 &= \beta \frac{y - b}{x}; & \zeta_2 &= \beta \frac{y + b}{x}; \\ \omega_1 &= 2 \zeta_1 + 1; & \omega_2 &= 2 \zeta_2 - 1 \end{aligned}$$

setzen, für die  $u$ -Verteilung

$$u^* = \frac{1}{x} g(\zeta') Y(\omega_2 - \zeta') Y(\omega_1 + \zeta'). \quad (3.1)$$

$u^*$  ist also nur in dem schraffierten Bereich von Null verschieden (Figur 3) und dort

$$u^* = \frac{1}{\pi \kappa} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta'^2}}.$$



Figur 3  
Rechteckflügel mit  $\varphi = \delta(y - \eta)$ .

Damit die von den Kanten reflektierten Störungen die jeweils gegenüberliegende Kante nicht treffen, setzen wir

$$\frac{2\beta b}{h} \geq 1 \quad (3.2)$$

voraus.

Wir berechnen Auftrieb  $A$ , Rollmoment  $M_x$  und Kippmoment  $M_y$  dieses Flügels: Allgemein ist der Druckkoeffizient

$$c_p = -2u.$$

Daraus folgt

$$A = \frac{1}{2} \rho U^2 2b h c_a; \quad c_a = \frac{2}{b h} \iint u \, dx \, dy,$$

$$M_x = \frac{1}{2} \rho U^2 2b h 2b c_{mx}; \quad c_{mx} = \frac{1}{b^2 h} \iint y u \, dx \, dy,$$

$$M_y = \frac{1}{2} \rho U^2 2b h h c_{my}; \quad c_{my} = \frac{2}{b h^2} \iint x u \, dx \, dy.$$

Elementare Integrationen liefern mit

$$u = u^*, \quad \alpha_1 = \beta \frac{b - \eta}{h}, \quad \alpha_2 = \beta \frac{b + \eta}{h};$$

$$\left. \begin{aligned}
 c_a^* &= \frac{2}{\beta b} [1 - Y(1 - \alpha_1) f_a(\alpha_1) - Y(1 - \alpha_2) f_a(\alpha_2)], \\
 f_a(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \arccos \left| \alpha - \frac{2}{\pi} \sqrt{\alpha(1 - \alpha)} \right|, \\
 c_{mx}^* &= \frac{\eta}{2b} c_a^* + \frac{h}{\beta^2 b^2} [Y(1 - \alpha_1) f_{mx}(\alpha_1) - Y(1 - \alpha_2) f_{mx}(\alpha_2)], \\
 f_{mx}(\alpha) &= -\frac{4}{3\pi} (1 - \alpha) \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}, \\
 c_{my}^* &= \frac{1}{\beta b} [1 - Y(1 - \alpha_1) f_{my}(\alpha_1) - Y(1 - \alpha_2) f_{my}(\alpha_2)], \\
 f_{my}(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\alpha} - \frac{2}{3\pi} (1 - 2\alpha) \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}.
 \end{aligned} \right\} (3.3)$$

Daraus gewinnen wir die Luftkräfte des allgemein verwundenen Rechteckflügels

$$\left. \begin{aligned}
 c_a &= \int_{-b}^{+b} c_a^*(\eta) \vartheta(\eta) d\eta, \\
 c_{mx} &= \int_{-b}^{+b} c_{mx}^*(\eta) \vartheta(\eta) d\eta, \\
 c_{my} &= \int_{-b}^{+b} c_{my}^*(\eta) \vartheta(\eta) d\eta
 \end{aligned} \right\} (3.4)$$

mit der aus (3.2) folgenden Nebenbedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1. \quad (4.5)$$

#### 4. Einseitige Beeinflussung eines Rechteckflügels durch einen geradlinigen Wirbelfaden

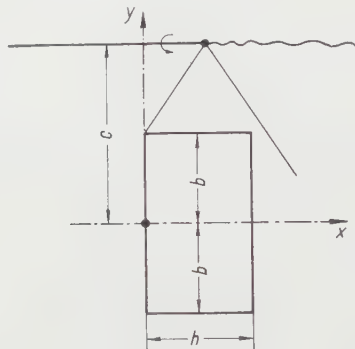
Wir betrachten einen ebenen, das heisst nicht verwundenen Rechteckflügel mit der Tiefe  $h$  und der Länge  $2b$ , wobei wieder (3.2) gelten soll. Ausserhalb des Flügels verlaufe in der Flügelsebene im Abstand  $c - b$  (Figur 4) ein Wirbelfaden. Dabei soll  $c$  so gross sein, dass der vom Flügel beeinflusste Teil des Wirbelfadens  $x \geq \beta(c - b)$  nicht mehr auf den Flügel zurückwirkt («einseitige Beeinflussung»). Dazu muss  $\beta(c - b) \geq h/2$  sein. Bei Abwesenheit des Flügels würde der Wirbel in der Ebene  $z = 0$  eine Geschwindigkeit in  $z$ -Richtung

umgekehrt proportional zu  $c - y$  hervorrufen. Dies entspricht einem verwundenen Rechteckflügel mit

$$\vartheta(y) = \frac{\Gamma' h}{c - y}.$$

Setzen wir

$$\cosh \mu_1 = 2\beta \frac{c-b}{h} + 1, \quad \cosh \mu_2 = 2\beta \frac{c+b}{h} - 1,$$



Figur 4  
Rechteckflügel im Wirbelfeld.

so drücken sich die Bedingungen (3.2) und  $\beta(c-b) \geq h/2$  durch

$$\cosh \mu_2 \geq \cosh \mu_1 \geq 2$$

aus. Es ist

$$2\beta \frac{b}{h} = \lambda = \frac{1}{2} (\cosh \mu_2 - \cosh \mu_1) + 1,$$

$$\beta \frac{c}{h} = \gamma = \frac{1}{4} (\cosh \mu_2 + \cosh \mu_1).$$

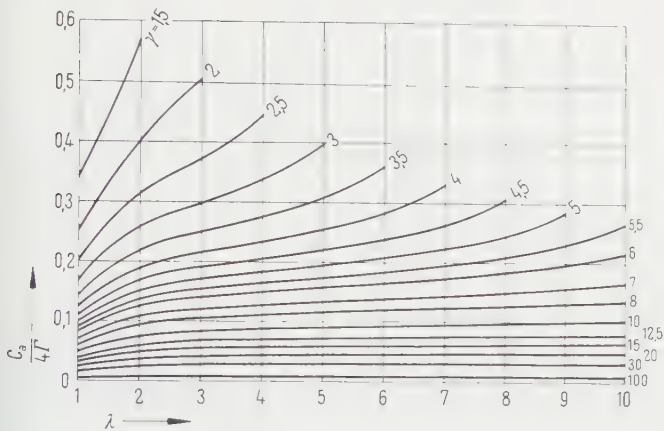
Durch Einsetzen in (3.4) folgt nach längeren elementaren Integrationen

$$c_a = \frac{4}{\lambda} \Gamma [(\mu_2 + e^{-\mu_2}) - (\mu_1 - e^{-\mu_1})],$$

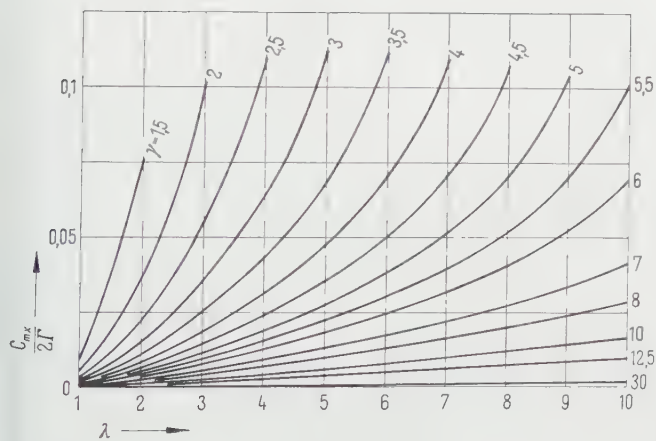
$$c_{mx} = \frac{2}{\lambda^2} \Gamma \left[ 2\gamma (\mu_2 + e^{-\mu_2} - \mu_1 + e^{-\mu_1}) + 1 - 2\lambda \right. \\ \left. - \frac{1}{3} e^{-\mu_1} (e^{-\mu_1} + 2) - \frac{1}{3} e^{-\mu_2} (e^{-\mu_2} - 2) \right],$$

$$c_{my} = \frac{2}{\lambda} \Gamma \left[ \mu_2 + \frac{1}{6} (e^{-\mu_2} + 2)^2 - \mu_1 - \frac{1}{6} (e^{-\mu_1} - 2)^2 \right].$$

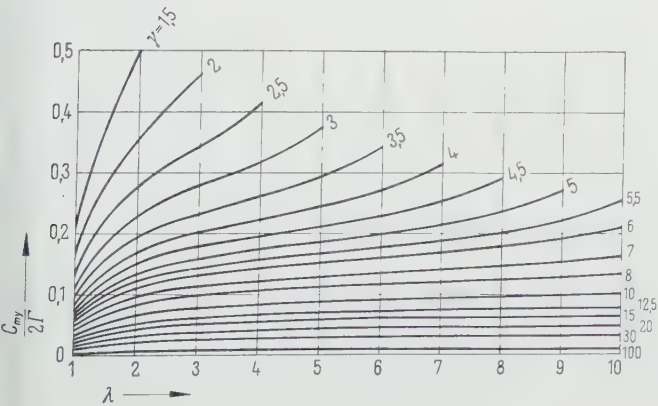
Diese Formeln sind in den Diagrammen (Figuren 5–7) numerisch ausgewertet.



Figur 5  
Auftrieb von  
Rechteckflügeln im  
Wirbelfeld.



Figur 6  
Rollmoment von  
Rechteckflügeln im  
Wirbelfeld.



Figur 7  
Kippmoment von  
Rechteckflügeln im  
Wirbelfeld.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. N. WARD, *Linearized Theory of Steady High-Speed Flow* (Cambridge University Press, 1955).
- [2] P. GERMAIN, *La théorie générale des mouvements coniques et ses applications à l'aérodynamique supersonique* (ONERA, Paris 1949).
- [3] A. F. DONOVAN und H. R. LAWRENCE, *Aerodynamic Components of Aircraft at High Speeds* (Princeton University Press, 1957).

*Résumé*

Calcul de l'écoulement supersonique linéarisé autour d'une aile rectangulaire vrillée à l'aide de la théorie des écoulements coniques. Application à un cas particulièrement simple de l'influence d'un filet tourbillonnaire sur une aile rectangulaire.

(Eingegangen: 5. Oktober 1957.)



## Tip-Clearance and Other Three-Dimensional Effects in Axial Flow Fans

By STANLEY P. HUTTON, East Kilbride, Glasgow, Scotland<sup>1)</sup>

### Introduction

The methods of using aerofoil or cascade theory for the design of conventional axial-flow fans are now well understood and widely proven by experiment. It is usually assumed that the performance of each individual section of blade is unaffected by adjacent conditions, that is, it behaves in a similar way to an aerofoil of infinite span having the same profile. This ideal condition of two-dimensional flow is seldom encountered in practice except when the whirl distribution corresponds to that in a 'free-vortex', and even a machine specifically designed to give 'free-vortex' whirl conditions will only do so when operating near its design point. Thus, there are still some difficulties in predicting the performance of the more unusual types of fan and also the off-design performance of conventional types, where flow conditions are strongly three-dimensional. In such flows, simple two-dimensional design theories cannot be applied with confidence. Although there are now many three-dimensional design theories to cover such conditions (MARBLE [9, <sup>2)</sup>], KAHANE [6], BOWEN *et al.* [2]): even the most complete mathematically, require the insertion of some practical values or coefficients relating to blade performance, which are usually based on two-dimensional test data. The main practical difficulty, therefore, is to know what effect three-dimensional flow will have on the applicability of two-dimensional wind tunnel data for predicting blade performance.

The main problem is to compute the whirl generated by the various sections of the blade, given particular inlet conditions. This can be done simply enough when the flow conditions approximate to 'free-vortex' flow and the streamlines are therefore parallel to the machine axis. However, if there are strong radial flow components present, the difficulty is not only to allow directly for these by radial equilibrium theory, but also to allow for the more indirect effect of cross-flow on the original 'two-dimensional' blade performance data. For instance, given similar inlet conditions, how are the lift and drag coefficients for an aerofoil section with cross-flow (i.e., in the spanwise direction) related to those for the same aerofoil without cross-flow? Alterna-

<sup>1)</sup> Fluid Mechanics Division, Mechanical Engineering Research Laboratory.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 370.

tively, using the cascade method of design, how is the deviation angle for a cascade section affected by cross-flow?

Another related problem is the prediction of blade performance in the boundary layer regions near the hub and, even more important, near the tips of the blades. Secondary flows and tip-clearance flows play a large part in modifying the ideal theoretical circulation distribution round the blades in such regions.

The object of this short paper, therefore, is to draw attention to some of these difficulties by quoting experimental findings from a detailed flow survey downstream of an axial-flow fan rotor giving strongly three-dimensional flow conditions. In addition to normal three-dimensional flow effects, the influence of tip-clearance was studied, including exaggerated clearances beyond the range normally encountered in practice.

### Notation

$c_1$	absolute fluid velocity at inlet to impeller (station 1);
$c_{1m}$	axial component of $c_1$ ;
$c_{1u}$	whirl component of (similar symbols with subscript 2 refer to outlet from impeller station 2);
$c_m$	mean axial velocity of fluid through impeller;
$e$	tip clearance ratio $\frac{\text{radial tip clearance}}{\text{tip radius minus hub radius}}$ ;
$i$	blade incidence. Angle between camber-line and relative flow direction at inlet of blade;
$l$	blade chord;
$r$	local radius;
$R$	tip radius of blades;
$t$	space peripherally between blades;
$u$	rotational velocity of blade at radius $r$ ;
$U$	rotational velocity at blade tip (radius $R$ );
$\alpha$	angle between absolute fluid velocity and plane of rotation;
$\beta$	angle between relative fluid velocity and plane of rotation;
$\delta$	deviation angle (i.e., angle between blade camber-line and relative fluid velocity at exit);
$\theta$	blade camber;
$\rho$	fluid density;
$\psi_r$	head coefficient at radius $r = \frac{\text{local total pressure rise}}{\rho U^2/2}$ ;
$\psi_T$	head coefficient at blade tip $= \frac{\text{static pressure rise at wall}}{\rho u^2/2}$ ;
$\psi$	mean head coefficient $= \frac{\text{mean pressure rise}}{\rho u^2/2}$ ;

$\psi_\infty$  theoretical head coefficient for infinite number of blades;

$\varphi$  mean flow coefficient =  $\frac{c_m}{U}$ ;

$\varphi_1, \varphi_2$  local flow coefficients radius (stations 1 and 2) =  $\frac{c_{1m}}{u}, \frac{c_{2m}}{u}$ .

### Experimental Apparatus

Investigations were made on a plastic axial-flow fan impeller as shown in Figure 1. The impeller design was of no special interest but had been selected

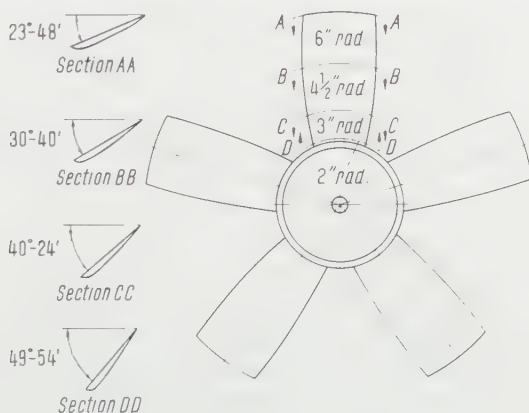


Figure 1  
Details of test impeller.

because it was known to give strong three-dimensional flows even at design point. The blades were moulded to an RAF 6E section (WILLIAMS, BROWN, and SMYTH [16:]) approximately 10% thick, which for extra strength had been slightly thickened at the trailing edge. The blades had a uniform chord of 2.2 in. (56 mm) giving a space-chord ratio  $t/l$  of approximately 1 at the hub and 3 at the tip.

The fan impeller was tested in a conventional ducting arrangement, comprising an upstream nozzle giving good inlet conditions, and a downstream shutter used to throttle the fan. Upstream and downstream of the fan impeller was a 4 in. (100.6 mm) diameter streamlined hub-fairing. Blade performance was determined from surveys of flow direction, total and static pressure made upstream and downstream of the rotor by means of a calibrated Pitot cylinder traversing the annulus. For most of the experiments, the surveys were made at:

Station 1: 1.15 in. (29.2 mm) upstream of the impeller leading edge.

Station 2: 4.53 in. (115 mm) downstream of the impeller trailing edge.

Static pressures were also measured at the wall in the vicinity of the impeller. Flow was measured by calibrating the intake nozzle by means of Pitot-cylinder traverses.

Dimensionless pressure-head, flow and velocity coefficients have been used throughout this paper. All values quoted refer to the impeller rotating at 2,000 rev/min corresponding to a mean Reynolds number of about  $1.0 \times 10^5$  based on blade chord and mean relative velocity. The impeller had originally been designed to give  $\psi = 0.15$  at  $\varphi = 0.35$ .

### *Proving Tests*

As traverses at stations 1 and 2 on two perpendicular diameters showed no asymmetry of flow, future traverses in one radial plane were taken as representative of the whole annulus.

Comparison of surveys at various stations downstream of the impeller showed that the only quantity which varied appreciably with distance downstream was the whirl angle  $\alpha$ . Changes were greatest near the hub and the tip (about 4 degree decrease per chord distance downstream) but conditions seemed to have become stabilized by station 2, 1.8 blade chords downstream of the impeller. Station 2 was therefore used for all future traverses to give representative values of downstream conditions.

These changes of  $\alpha$  within one chord of the blades suggest that in multistage machines with closely spaced blade rows, performance may be considerably affected by the axial spacing of the rotor-stator rows. There is still considerable divergence of opinion on this point, as will be seen by the claims of AINLEY and JEFFS [1], LINDSAY [8], and GOPELL [5]. This is not surprising because the effect probably depends on blading design; for the free vortex type blade, the flow should need little settling distance downstream to attain radial equilibrium whereas in this instance, which is far from two-dimensional, equilibrium is not attained until 1.8 chords downstream of the impeller. Here, therefore, is our first difficulty in the design of axial machines: that of allowing for the building up to equilibrium conditions of the vortex system downstream of the blade rows. Fortunately, in many designs the flow is nearly two-dimensional and the blade rows are not closely spaced. However, for designs with three-dimensional flow and closely spaced blade-rows, there is a serious design problem.

### **Performance of Standard Impeller**

The impeller in its original condition having a mean tip clearance of 0.020 in. (0.51 mm, clearance ratio  $c = 0.5\%$ ), which was the smallest practicable for the particular ducting used, is regarded as the 'standard' impeller in its optimum condition. Figure 2 indicates the strong three-dimensional

nature of the flow normally present for this impeller, the changes in axial velocity component as the air passes through the impeller being as much as 80% of the mean velocity. These effects increase steadily as the flow ( $q$ ) through the fan is reduced by throttling. Even near the design point ( $q = 0.3$ ), there are changes of as much as 20% in axial velocity. The static and total pressure

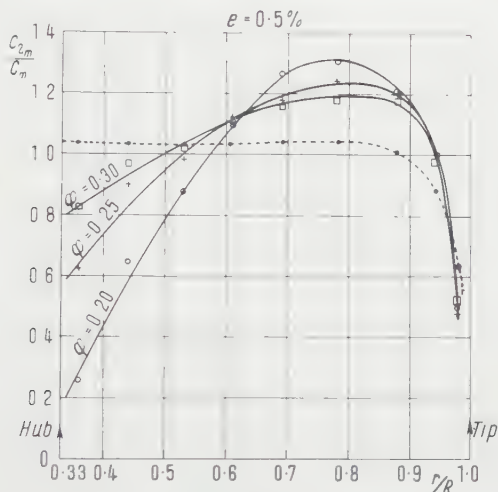


Figure 2

Axial velocity distribution at various flow rates. ----  $c_{1m}/c_m$ ; —  $c_{2m}/c_m$ .

increments across the impeller increase steadily towards the blade tips in a manner quite different from the 'free-vortex' case. Design methods have to be modified to allow for the strong three-dimensional flow, as will be discussed later.

### Tip Clearance Effects

In addition to the tests on the so-called 'standard' impeller, similar investigations were made on the same impeller with its blade tips turned down to give mean clearance ratios of  $e = 1.5, 2.5, 3.5$  and  $4.5\%$  of the blade height. Figures 3-7 show the performance of the same impeller when running at various tip clearances. For convenience, only the two extreme clearances are usually plotted, but the trends indicated are typical of those found for intermediate clearances.

In Figure 3 the downstream axial velocity distributions for  $\phi = 0.2$  are compared for the smallest and largest clearances,  $e = 0.5\%$  and  $4.5\%$  respectively. It is interesting to see that increasing the clearance considerably alters

distribution of  $c_{2m}$  not only near the blade tips but all over the annulus. In general, enlarging the clearance increases  $c_{2m}$  near the hub and decreases it near the blade tips. For instance, an increase of 1% in  $e$  may increase  $c_{2m}$  near the hub by about 15%, with a corresponding decrease near the blade tip by 7%. These effects which occur at all flows are opposite to and may tend to mask the

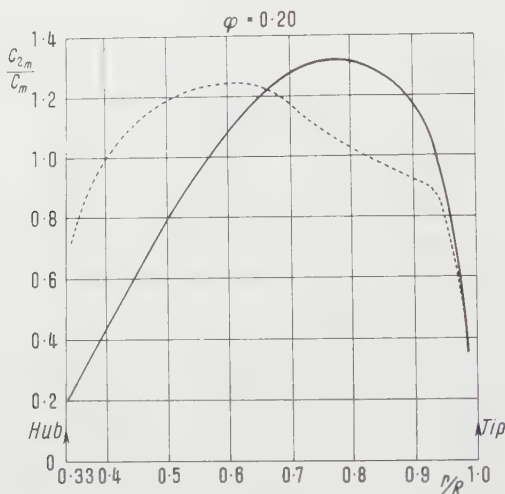


Figure 3

Effect of tip clearance on the distribution of axial velocity. Small clearance —  $e = 0.5\%$ ; large clearance ----  $e = 4.5\%$ .

centrifugal flow effects in this particular case. For this design, radial equilibrium demands an outward radial shift of the streamlines, whereas enlarging the tip clearance causes an inward shift. Increasing clearance also causes related changes in the distribution of whirl angle,  $\alpha_2$ , and whirl velocity  $c_{2u}$  downstream of the impeller. The importance of allowing for such changes is self-evident.

One very interesting and significant finding, however, is illustrated in Figure 4, where the relative outlet flow-direction,  $\beta_2$ , has been plotted against  $\varphi$  (a function on which inlet incidence depends), for all the tip clearances tested. It is seen that for any particular blade section, despite the previously noted changes in  $c_{2m}$ ,  $\alpha_2$ ,  $c_{2u}$ , caused by different tip clearances and therefore different circulation distributions, there is, within the limits of experimental scatter, a unique curve of  $\beta_2$  against  $\varphi$  for all flow conditions. This means that the relative flow leaves the blade at the same angle irrespective of the amount of cross-flow induced by varying tip-clearance effects. Thus, it seems justifiable to apply the same two-dimensional exit angle data to all three-dimensional flows and to assume that for any particular inlet incidence  $\beta_2$  is constant and predictable irrespective of the amount of three-dimensional motion.



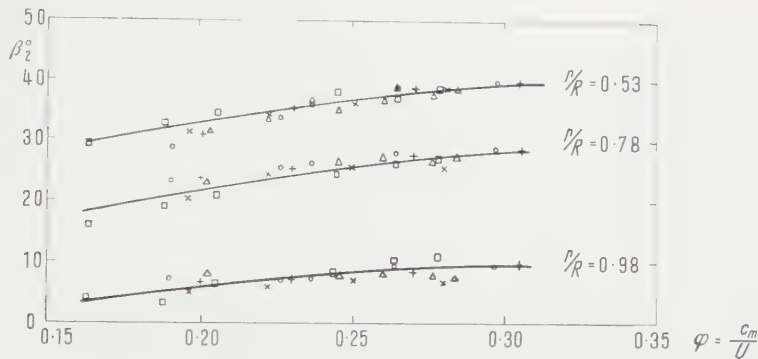


Figure 4  
Fluid outlet angles for various tip clearances.

Symbol	○	+	△	×	□	
Clearance	$e$ [%]	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5

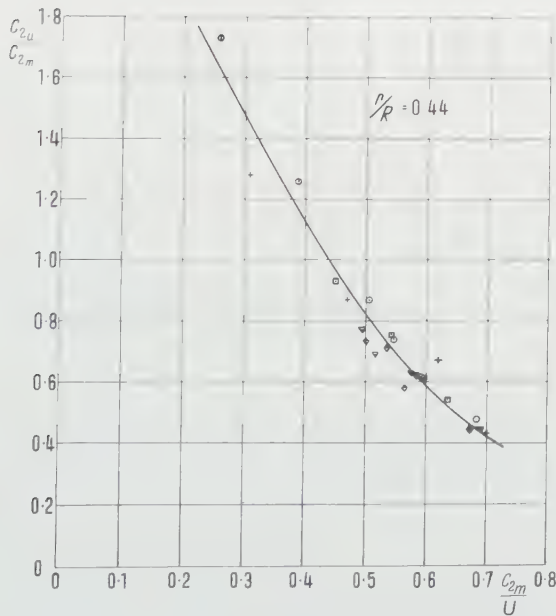


Figure 5  
Variation of whirl with axial velocity, downstream of impeller.

Symbol	○	+	□	▽	◇	
Clearance	$e$ [%]	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5

Thus, one can write

$$\frac{c_{2u}}{c_{2m}} = \frac{u}{c_{2m}} = \cot \beta_2,$$

where  $\beta_2$  is some unknown function of  $c_{2m}/u$ , and thus, a unique relation therefore exists between  $c_{2u}/c_{2m}$  and  $c_{2m}/u$ , as shown in Figure 5 for a typical blade section at  $r/R = 0.44$ . Similar findings have also been found by SADEK [13] and more will be said later in connection with the cascade method of design.

### Pressure-Rise Characteristics

The effect of tip clearance on the integrated head-flow curve is shown in Figure 6, where it is seen that the net effect is for the pressure increments

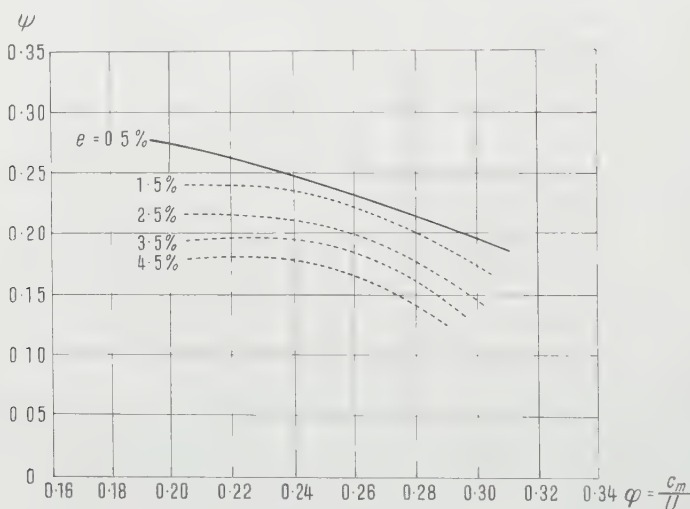


Figure 6  
Effect of tip clearance on head-flow characteristics.

across the impeller to be decreased as the clearance is enlarged. For maximum pressure rise, the clearance should obviously be as small as practicable. For instance, an increase of 1% in clearance ratio reduces  $\psi$  by as much as 10% at design point and by even more at reduced flows. The design pressure rise decreases in an approximately linear fashion with increasing clearance.

Tip-clearance may also have an important effect on the stalling characteristics. With a small clearance ( $e = 0.5\%$ ) the stall was sudden and noisy and there was a marked hysteresis on the curve of tip pressure rise  $\psi_T$  against  $\varphi$  (Figure 7); the blading would not unstall at the same flow as that at which it originally stalled. Sticking goose-down tufts on the blades and examining the

flow under stroboscopic lighting showed clearly that for the smallest clearance, the stall occurred first at the blade tips and gradually spread inwards as the flow was reduced. For larger clearances, the stall became more gradual until eventually for  $e = 4.5\%$  it could not be clearly defined on the pressure-flow curve. It was also apparent that for increasing tip clearances the stalling point

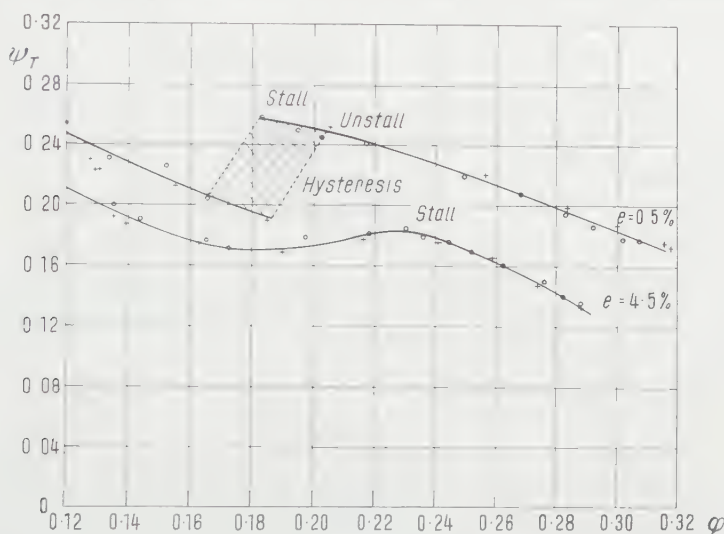


Figure 7

Effect of tip clearance on stalling and wall pressure rise. O throttling; + unthrottling.

occurred at progressively larger values of  $q$ . MARCINOWSKI [10], KAHANE [6], RUDEN [12], YOUNG [18], and others, have already drawn attention to the effect and the practical necessity of small clearances ( $e < 1.0\%$ ) but the greater detail of the present work has shown the large effect that clearance can have over the entire annulus. The flow over the whole of the blade and also the method of stalling may be radically altered. In this particular case, increases in tip-clearance change the vorticity and flow distribution downstream and induce axial and radial velocity components opposite to those caused by centrifugal effects. This is an important consideration because it implies that conventional radial equilibrium design theories should not be applied to fans having clearance ratios greater than 1%.

### The Limitations of Simple Design Methods

Although for three-dimensional flow conditions a correspondingly three-dimensional design theory should be used, it is interesting to study the limitations of the well-known simple design methods when applied to such a case.

### *Euler Theory and the 'Slip' Factor*

The classical theory of EULER gives a local head-flow relationship for a blade section of a rotor having an infinite number of blades and assuming zero initial whirl  $c_{1u}$  and  $u_2 = u$  as

$$\psi_\infty = 2 (1 - \varphi_2 \cot \beta_2). \quad (1)$$

This gives a theoretical curve of  $\psi_\infty - \varphi_2$  which is linear. Assuming that the curve for a finite number of blades is (a) also linear and (b) that it passes through the same point as the 'Euler' curve for  $\psi = 0$ , the following relationship can be written

$$\psi = \lambda \psi_\infty, \quad (2)$$

where  $\psi$  is the theoretical pressure-coefficient for  $n$  blades. Suitable values of (the 'slip' factor) can be obtained in terms of the blade geometry and the Weinig [15] cascade factor  $k$  by the well-known relation (WISLICENUS [17]):

$$\lambda = \frac{2}{\frac{t}{l} \left( \frac{2}{\pi k} \operatorname{cosec} \beta + 1 \right)}, \quad (3)$$

where  $\beta$  is the zero lift direction of the blades relative to the plane of rotation.

As a typical example, the appropriate value of  $\lambda$  has been calculated for a blade section at 0.44 of the tip radius of the impeller. It is assumed that the zero lift direction in equation (3) tends to the value  $\beta_2$  because for zero lift the flow should leave the blade tangentially and with zero deflection and therefore must approach the blade in the same direction ( $\beta_1 = \beta = \beta_2$ ).

The linear approximations to the  $\psi - \varphi$  curve predicted by the Euler theory in its classical form, and also modified for a finite number of blades by the above 'slip' factor are compared in Figure 8 with the measured values of  $\psi$  plotted against  $\varphi_2$  obtained from the flow surveys for the radial station  $r/R = 0.44$ . This example, typical of the trends found at all other blade sections across the annulus, shows that the curve predicted by 'slip' theory lies about 20–30% above the measured points. The discrepancy increases for small value of  $\varphi_2$  where the measured characteristics are no longer linear, probably because the blades are nearing the stall.

It seems therefore that the use of the Euler theory together with a 'slip' factor gives only a rough prediction of blade performance. In our case, if more correct empirical values of  $\lambda$  had been used, perhaps 0.75 of the theoretical, the results would have been sufficiently accurate for quick design calculations. However, it is not known to what extent the discrepancies in this case are caused by three-dimensional flow effects or are inherent in the simple design

method. For highly loaded blades the method is clearly unsuitable because the head-flow characteristics are not even approximately linear in practice.

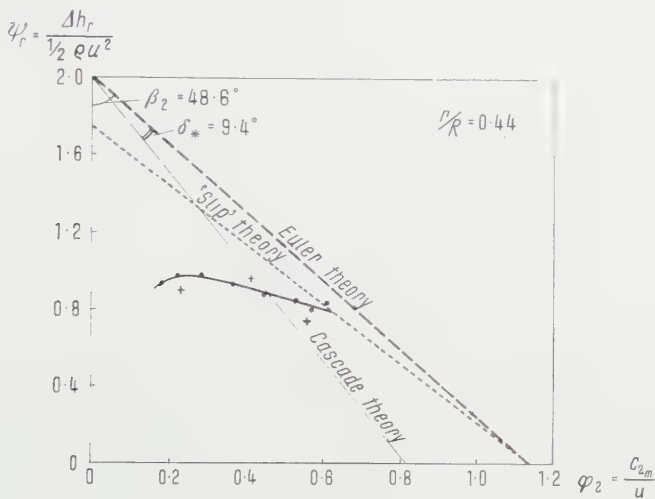


Figure 8

Comparison of theoretical and measured head-flow curves for blade section at  $T/R = 0.44$ .  
+ aerofoil theory; ● experiment.

Aerofoil Theory

For fans having blades which are not too close together ( $t/l > 1$ ) the aerofoil method of design gives good results when the flow is two-dimensional (KELLER [7], PATTERSON [11], and many others). However, when three-dimensional flow conditions occur, the method breaks down, because in its simplest form the theory does not allow for changes in axial velocity component of the fluid as it passes through the rotor. For instance, the method applied to the impeller of Figure 1 was quite useless.

In order to use aerofoil theory successfully, the change in axial velocity from  $c_{1m}$  to  $c_{2m}$  must first be known so that the mean relative velocity through the impeller can be computed. Once the magnitude and direction of the relative velocity is known, the conventional aerofoil method can be applied. This has been demonstrated by KAHANE [6] and others, calculating values of  $c_{2m}$  assuming that the fluid is in radial equilibrium a short distance downstream of the impeller.

A very convenient radial equilibrium calculation method is that of BOWEN *et al.* [2] which involves a knowledge of  $\beta_2$ . CONSTANT'S rule, despite its limitations, is usually sufficient for this purpose because a small error in  $\delta$  will not

make much difference to the value of  $c_{2m}$  computed. The distributions of  $c_{2m}$  calculated in this way agreed well with the measurements in the present case and the resulting aerofoil theory based on the mean axial velocity component  $(c_{1m} + c_{2m})/2$  gave good results in predicting the  $\psi - \varphi$  curve, as can be seen in Figure 8. In common with all other design methods tried, however, the agreement between theory and experiment was poor near the hub and near the tips of the blades. End effects in the wall boundary layers and the associated secondary flows evidently limit the use of the design method in these regions. More experimental information and improved design theories are required to cope with such problems.

### Cascade Theory

An alternative method is based on the use of 'cascade' data obtained from wind tunnel tests of cascades of blades. One of the reasons for the difference between the theoretical and actual  $\psi - \varphi$  characteristics is because the relative flow leaving the blade is inclined to the trailing edge at some angle: usually called the deviation angle,  $\delta$ . Only when the number of blades is infinite, can the relative flow direction and the blade direction at outlet be expected to coincide. In practice, therefore, the  $\psi - \varphi$  curve predicted by cascade theory must make an angle  $\delta$  with the 'Euler' curve. CONSTANT [4] propounded a simple empirical formula for predicting  $\delta^*$ <sup>3)</sup> based on two-dimensional cascade tests of compressor blades having circular arc camber-lines

$$\delta^* = 0.26 \theta \sqrt{\frac{t}{l}}. \quad (4)$$

This has since been slightly modified by HOWELL (1945) and CARTER [3] to cover blades having parabolic camber-lines and other shapes, and to include methods of predicting nominal incidence  $i_*$ . Because these methods all give very similar results, for convenience and to serve as a typical example, the values of  $\delta$  have been predicted by CONSTANT's rule. The corresponding curve is plotted in Figure 8 assuming the usual similarity between flow triangles and the  $\varphi - \psi$  diagrams. From Figure 8, it is seen that on this basis the  $\psi - \varphi$  curve predicted by cascade theory is much too steep—a general finding in compressor design.

Now, all these cascade rules are, strictly speaking, applicable only at nominal incidence although it is sometimes assumed that  $\delta$  is independent of incidence and, therefore, always equal to  $\delta^*$ . An academic weakness of this simplification is that at  $\psi = 0$  the cascade and Euler curves do not pass

<sup>3)</sup>  $\delta^*$  is deviation angle for nominal conditions defined by CONSTANT as occurring at  $8^\circ$  below stalling incidence. Nowadays nominal conditions are defined as occurring at  $0.8$  stalling incidence, the stall being taken as the point at which drag losses have risen to twice the minimum.



through the same point because the cascade theory does not give  $\delta = 0$ . This conflicts with classical theory (STEPANOFF [14]) and also practical experience which suggests that when  $\psi = 0$ ,  $\delta \simeq 0$ . In an attempt to allow for the variation of  $\delta$  with incidence, CONSTANT [4] suggested that  $\delta$  should be decreased at a rate of  $1/4^\circ$  per degree of incidence below the nominal incidence. Practical

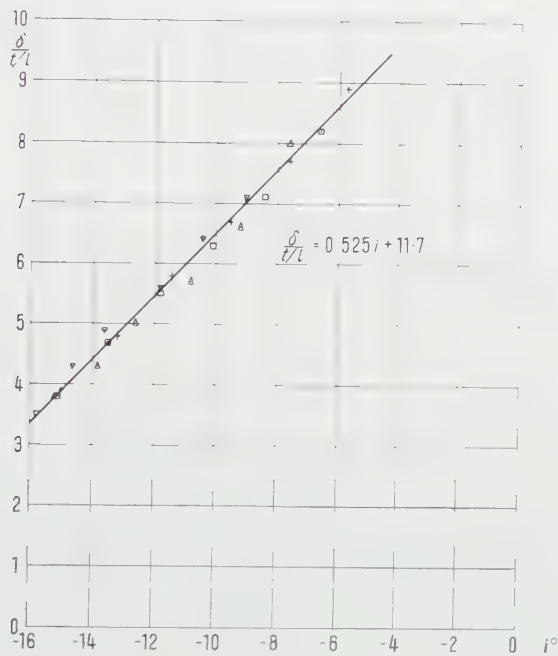


Figure 9  
Variation of deviation angle with blade spacing and inlet incidence.

Symbol	+	□	△	▽
$r/R$	0.53	0.61	0.69	0.78

values, however, in the present case indicate a much bigger variation of  $\delta$  with incidence and a different relation between  $\delta$  and  $t/l$ . For instance, for these blade sections which appear to be outside the influence of wall boundary layers, say between  $r/R = 0.5$  and  $0.8$ , the empirical relation between  $\delta$ ,  $t/l$  and  $i$  seems to be

$$\frac{\delta}{t/l} = 0.525 i + 11.7.$$

This curve plotted in Figure 9 is seen to give  $\delta/(t/l)$  within about  $\pm 0.6\%$  of experiment over the range covered. For the whole of the blades, including the boundary layer zones, it is only accurate to within about  $\pm 15\%$ . In this

particular case, therefore,  $\delta$  is proportional to  $t/l$  rather than  $(t/l)^{1.2}$  as in CONSTANT's rule and that  $d\delta/di = 0.525$  as against 0.25 as suggested by CONSTANT. It thus appears that cross-flow may possibly account for these differences and that two-dimensional cascade data cannot be applied to such a case.

Nevertheless, as Figure 5 demonstrates, there seems to be a unique relationship for particular blade geometry between the whirl component and the axial component at outlet from the blade. Therefore, for rotors it may be preferable to plot performance data in this way instead of conventional deviation or outlet angle form, because there is less influence by three-dimensional flow effects.

### Acknowledgments

This paper is published by permission of the Director of the Mechanical Engineering Research Laboratory, East Kilbride.

### REFERENCES

- [1] AINLEY, D. C., and JEFFS, R. A., *Analysis of the Air Flow Through Four Stages of Half-Vortex Blading in an Axial Compressor*, Aeronautical Research Council Reports and Memoranda 2383 (April 1946).
- [2] BOWEN, J. T., SABERSKY, R. H., and RANNIE, W. D., *Investigations of Axial-Flow Compressors*, Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. 73, 1 (1951).
- [3] CARTER, A. D. S., *The Low-Speed Performance of Related Aerofoils in Cascade*, Aeronautical Research Council Current Paper No. 29 (1950).
- [4] CONSTANT, H., *Performance of Cascade of Aerofoils*, R. A. E. Technical Note No. E. 3696 (1939).
- [5] GOPELL, W., *Untersuchung einer Axialverdichterstufe*, Versuchswesen der Maschinenfabrik Voith, Section 14 (1949).
- [6] KAHANE, A., *Investigation of Axial-Flow Fan and Compressor Rotors Designed for Three-Dimensional Flow*, National Advisory Council for Aeronautics T. N. 1652 (July 1948).
- [7] KELLER, C., *Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie*, Dissertation ETH (Zürich 1934).
- [8] LINDSEY, W. H., *The Development of the Armstrong Siddeley Mamba Engine*, J. roy. aeron. Soc. 53, 137 (1949).
- [9] MARBLE, F. E., *The Flow of Perfect Fluid Through an Axial Turbo-Machine with Prescribed Blade Loading*, J. aeron. Sci. 15, No. 8, 473 (1948).
- [10] MARCINOWSKI, H., *Einfluss des Laufradspaltes und der Luftführung bei einem Kühlgebläse axialer Bauart*, MTZ 14 (9), 259 (1953).
- [11] PATTERSON, G. N., *Ducted Fans: Design for High Efficiency*, Australian Council for Aeronautics, Report ACA-7, July, No. 7 (1944).
- [12] RUDEN, P., *Investigation of Single Stage Axial Fans*, NACA Tech. Memo. 1062 (April 1944).
- [13] SADEK, R., *The Propeller as Applied to Pumps and Fans*, Ph. D. Thesis (London University, 1952).

- [14] STEPANOFF, A. G., *Centrifugal and Axial-Flow Pumps, Theory, Design and Application* (John Wiley, New York; Chapman and Hall, London 1948).
- [15] WEINIG, F., *Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen* (Barth, Leipzig 1935).
- [16] WILLIAMS, D. H., BROWN, A. F., and SMYTH, E., *Tests in Four Airscrew Sections in the Compressed Air Tunnel*, Aeronautical Research Council R. M. 1771 (1937).
- [17] WISLICENUS, G. F., *Fluid Mechanics of Turbomachinery* (McGraw-Hill Publishing Co., New York and London 1947).
- [18] YOUNG, R. H., *Contra-Rotating Axial-Flow Fans*, J. Inst. Heating Ventilating Eng. 18, No. 187, 448 (1951).

### *Zusammenfassung*

Es wird die an einem Axialventilator durchgeführte Untersuchung der Auswirkung des Schaufelspaltes auf Laufradströmung und Leistung beschrieben. Das Laufrad, mit einem Durchmesser von 305 mm, war für ausgeprägt dreidimensionale Strömung entworfen. Die in solchen Fällen bestehenden Einschränkungen der Gültigkeit von zweidimensionalen Berechnungsunterlagen aus Windkanalversuchen werden besprochen.

Es zeigte sich, dass die radial nach aussen gerichtete Querströmung durch Zentrifugalwirkung und die nach innen gerichtete Querströmung durch Vergrößerung des Spaltspieles hervorgerufen wird. Vergrößerung der Spaltweite beeinflusst die Strömungsverhältnisse nicht nur in der Nähe der Schaufelspitze, sondern über die ganze radiale Erstreckung der Schaufel. Dadurch wird die Druckziffer verkleinert, und die Abreissbedingungen verändern sich.

Unter diesen Verhältnissen ist es wesentlich, die Änderung der Axialgeschwindigkeit im Laufrad korrekt in Rechnung zu setzen. Der wesentlichste Parameter scheint die Grösse  $c_{2m}/u$  zu sein. Dabei zeichnet sich bei gleichen Eintrittsverhältnissen, aber stark verschiedenen Querströmungen ein eindeutiger Zusammenhang zwischen  $c_{2u}/c_{2m}$  und  $c_{2m}/u$  für beliebige Schaufelgeometrien ab. Es mag daher von Vorteil sein, den aus Messungen am zweidimensionalen Windkanal erhaltenen Unterlagen in dieser Form den Vorzug vor den üblichen Einzelflügel- und Gitterparametern zu geben, die durch Querströmung merklich beeinflusst werden.

(Received: September 28, 1957.)

# Über einen Modellversuch aus dem Gebiete der Physiologie

Von EMANUEL JAQUET, Basel, Schweiz

## 1. Einleitung

Modellversuche bilden ein anerkanntes und äusserst wichtiges Hilfsmittel für die technische Forschung. ACKERET hat ihre Bedeutung schon sehr früh erkannt, denn bereits im Jahre 1920, während unserer gemeinsamen Assistentenzeit bei Prof. STODOLA, hat er die Strömung in Schaufelrädern mit Hilfe einer Gummimembran untersucht [1]<sup>2)</sup>, und im Jahre 1928 hat er bei Escher Wyss einen Modellapparat konstruiert, mit dem die Potentialströmung beliebiger Profile ermittelt werden kann [2]. Wenn bei der Durchführung solcher Modellversuche die von den Ähnlichkeitsgesetzen [3, 4] geforderten Bedingungen eingehalten werden, dann können die Ergebnisse nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ auf andere, entsprechende Objekte übertragen werden. Die geometrische Ähnlichkeit von Modell und Objekt ist nicht immer erforderlich, in vielen Fällen genügen gewisse Beziehungen auf Grund mathematischer Analogien, wie sie zum Beispiel bei mechanischen und elektrischen Schwingungen auftreten. Die Übertragbarkeit der Modellergebnisse auf das zu bauende oder uns interessierende Objekt ist in der Technik nur möglich, weil die physikalischen Vorgänge relativ einfach sind und durch mathematische Formulierungen beschrieben werden können.

In der Physiologie sind die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Der lebende Körper von Mensch oder Tier bildet ein Ganzes, das zur Erforschung seiner Funktionen nicht in beliebige Teile zerlegt werden kann. Die Anzahl der sich gegenseitig beeinflussenden Variablen ist ausserordentlich gross, und es wird nie möglich sein, die Funktionen und Reaktionen sämtlicher Organe durch mathematische Ausdrücke zu beschreiben. Es ist daher verständlich, dass die Physiologen im allgemeinen Modellversuche als untaugliche Mittel ablehnen. In gewissen Fällen allerdings können Modellversuche einen qualitativen Aufschluss über eine eng begrenzte Frage erteilen. In dieser Arbeit wird berichtet über Versuche an einem Modell, das den menschlichen Blutkreislauf nachahmen soll.

<sup>1)</sup> Jaquet AG., Fabrik für industrielle und wissenschaftliche Präzisionsapparate.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 381.

## 2. Die Problemstellung

Die synkardiale Therapie ist eine von Dr. M. FUCHS [5], Bern, ersonnene physikalische Methode zur Behandlung peripherer Kreislaufstörungen mittels Massage, die von einem Apparat, Synkardon<sup>3)</sup> genannt, automatisch gesteuert wird.

Der Leitgedanke von FUCHS ist, kurz zusammengefasst, der folgende: Durch die stossweise Fördertätigkeit des Herzens entsteht bei jeder Kontraktion eine Druckwelle, die durch die Arterien gegen die Peripherie wandert und dabei die Gefässe dehnt. Während der abklingenden Phase erfolgt die Konstriktion der Gefässe, wobei die in der Wandung gespeicherte, elastische Energie wieder an den Blutstrom abgegeben wird. In Krankheitsfällen, wo die elastischen Eigenschaften der Arterien ungenügend sind, kommt es zu mangelhafter Durchblutung der Arteriolen und Kapillaren. Wird nun um die Extremität, an der erkrankten Stelle oder in der Nähe derselben, eine Gummimanschette gelegt, die im Rhythmus des Herzens während der Gefässkonstriktion unter Druck gesetzt und dann wieder entleert wird, dann soll, nach FUCHS, sowohl der arterielle Zufluss in die Kapillaren als auch der venöse Rückfluss verstärkt werden. Der Rhythmus der pneumatischen Impulse wird durch die individuelle Herzaktionsspannung des Patienten gesteuert, und zwar dient als Steuerimpuls der elektrische Impuls, der im Elektrokardiogramm als *R*-Zacke bezeichnet wird und zeitlich mit der Herzkontraktion zusammenfällt. Die Pulswellenlaufzeit, das heisst die Zeit, welche die Pulswelle benötigt, um vom Herzen bis zur Stelle zu gelangen, wo die Manschette appliziert ist, kann am Apparat genau gemessen werden, und die Phasenverschiebung zwischen Steuerimpuls und Beginn der pneumatischen Kompression, die sogenannte Einsatzverzögerung, wird entsprechend dem gemessenen Wert der Pulswellenlaufzeit eingestellt. Die Kompressionsdauer, ebenfalls einstellbar, richtet sich nach der Pulsfrequenz, während die Druckhöhe der Kompression je nach dem vorliegenden Krankheitsfalle zu wählen ist.

FUCHS schreibt dem Synkardon die Wirkung eines «auxiliären peripheren Herzens» zu.

Die Mediziner verhielten sich zunächst sehr skeptisch gegenüber dieser Methode, denn sie bezweifelten die Möglichkeit, lediglich durch rhythmische Kompressionen den Kreislauf beeinflussen zu können. Als sich aber in zunehmendem Masse aufsehererregende klinische Erfolge einstellten und Patienten geheilt wurden, die sonst hätten amputiert werden müssen, hat sich die Methode endgültig in die Therapie eingeführt, obwohl die Wirkungsweise im Grunde noch unabgeklärt war.

Selbst wenn man den Blutkreislauf als reines Strömungsproblem auffasst in einem System von passiv-elastischen Röhren, das heisst, wenn man alle che-

<sup>3)</sup> Herstellerfirma Jaquet AG., Basel.



mischen, nervösen, aktiv-elastischen Einflüsse vernachlässigt, so versteht man trotzdem nicht ohne weiteres, wie die rhythmischen Kompressionen die zirkulierende Menge steigern können. Viele Ärzte waren der Meinung, dass eine Zirkulationsvermehrung nur durch Erhöhung des systolischen Druckes möglich sei, und da eine solche oszillographisch nicht festgestellt worden sei, trete auch keine Zirkulationszunahme auf. GOTTLOB, MAY und ROHM [6] haben versucht, die Frage mit Hilfe eines Modelles zu entscheiden. Sie liessen Wasser aus einem hochstehenden Gefäss unter konstantem Druck durch einen Gummischlauch, der am freien Ende mehr oder weniger zugeklemmt wurde, ausfliessen. Um den Schlauch wurde die Synkardon-Manschette gewickelt und rhythmisch komprimiert. Zwischen Manschette und Austritt wurden die Druckschwankungen registriert. Da die Autoren keine Zunahme der Durchflussmenge feststellten, gelangten sie zu folgendem Schluss:

«Dem Synkardon kommt die Wirkung eines ‚peripheren auxiliären Herzens‘ nicht zu. Die ausgezeichneten klinischen Erfolge werden als Ausdruck einer Gefässerweiterung angesehen. Der Mechanismus, durch den diese Erweiterung zustande kommt, ist noch nicht genau bekannt.»

Nicht nur für den Physiologen, sondern auch für den Techniker ist es klar, dass diese Versuchsanordnung ein untaugliches Modell darstellt, das die hämodynamischen Verhältnisse des Blutkreislaufes in keiner Weise berücksichtigt. Ich habe mich daher entschlossen, ein Modell zu bauen, das den physiologischen Verhältnissen möglichst entspricht.

### 3. Das Kreislaufmodell

Der von mir gemeinsam mit cand. med. H. JAQUET [7] gebaute, mit Wasser betriebene Modellapparat ist schematisch in Figur 1 dargestellt und erfüllt folgende Bedingungen:

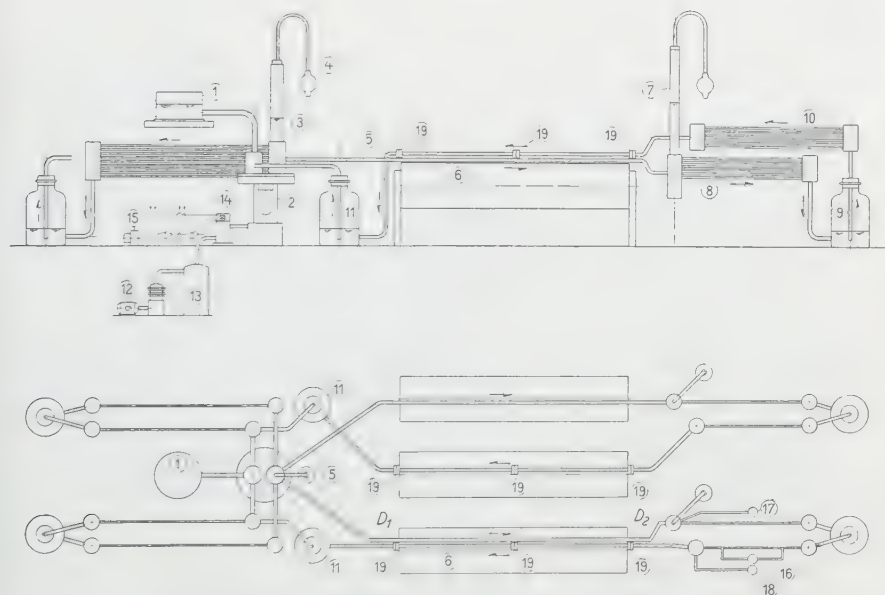
1. Der Kreislauf ist geschlossen, und die in ihm zirkulierende Flüssigkeitsmenge ist konstant.
2. Die Förderung erfolgt stossweise; die Frequenz ist regulierbar.
3. Die hydrodynamischen und elastischen Grössen sind einstellbar.
4. Die Manschetten des Synkardons werden auf dieselbe Art wie an menschlichen Extremitäten angelegt.
5. Förderstoss und Steuerimpuls des Synkardons sind synchron.

Zum besseren Verständnis werden in der Beschreibung den technischen Ausdrücken die anatomischen Namen der entsprechenden Organe beigelegt und diese letzteren der Einfachheit wegen auch später benützt. Das Modell bildet lediglich den grossen Kreislauf ab, da der Lungenkreislauf für die vorliegende Untersuchung kaum massgebende Bedeutung hat.

Aus dem Sammelbecken 1 (Vorhof) fliesst das Wasser durch ein Saugventil in einen nach unten hängenden Gummidäumling (Ventrikel), der periodisch mit



Druckluft von aussen komprimiert wird und das Wasser über ein Rückschlagventil (Aortenklappen) in den Windkessel 3 (Aorta) fördert, dessen Luftkissen (Elastizität der Aorta) regulierbar ist. Mit dieser Pumpe 2 (Herz) erhält man eine stossweise Förderung, die den physiologischen Verhältnissen sehr nahe kommt. Vom Windkessel zweigen die beiden Schläuche 5 (Beinarterien) ab,



Figur 1

Schema des Modells: 1 Sammelbecken; 2 Zirkulationspumpe; 3 Glaszylinder (Aorta); 4 Ballonpumpe; 5 Arteriae femorales; 6 Holzzylinder (Bein); 7 Windkessel; 8 Enge Röhren (Vorlauf); 9 Windkessel; 10 Enge Röhren (Rücklauf); 11 Windkessel; 12 Kompressor; 13 Druckluftwindkessel; 14 Steuerventil; 15 Synchronmotor; 16 Differentialmanometer; 17 Manometer für Arterien-  
druck; 18 Manometer für Venendruck; 19 Rückschlagklappen;  $D_1$ ,  $D_2$  Drosselstellen.

welche in die mit Schwammgummi gepolsterten Holzzylinder 6 (Beine) verlegt und an einem kleineren Windkessel 7 angeschlossen sind. Anschliessend folgt ein Bündel enger Röhren 8 aus Metall (Arteriolen), in welchen, wie im Blutkreislauf, der grösste Druckabfall stattfindet. Im Windkessel 9 (Kapillarsystem) werden die Druckschwankungen geglättet, so dass im Rücklaufbündel 10 (Venolen) eine kontinuierliche Poiseuillesche Strömung auftritt. Mit einem empfindlichen Differentialmanometer, an einem Rohr des Bündels angeschlossen, kann die zirkulierende Menge fortlaufend photographisch registriert werden. Durch die Rücklaufschläuche (Venen) fliesst das Wasser zur Pumpe zurück. Auf einem der drei Holzzylinder sind Arterie und Vene gemeinsam verlegt (physiologische Verhältnisse), auf den zwei anderen aber getrennt, um die Wir-

kung auf Arterie und Vene im einzelnen untersuchen zu können. Die pneumatisch betriebenen Manschetten werden um diese Holzzylinder geschnallt. Vom Windkessel 3 (Aorta) zweigt noch ein weiteres System von Röhren und Windkesseln ab, das dem übrigbleibenden Teil des grossen Kreislaufes entspricht. Der Apparat ist so dimensioniert, dass die hydraulischen Verhältnisse (Menge, Mitteldrücke, Druckschwankungen) im Rahmen der physiologischen Verhältnisse des Menschen liegen. Besonders wichtig war die geeignete Wahl der Gummischläuche. Mit Schläuchen von 0,5 mm Wandstärke und einem Lumen von 7 mm für die Arterie und 8 mm für die Vene haben wir am Modell Tonoszillogramme erhalten, die solchen, die am Menschen aufgenommen werden, zum Verwechseln ähnlich sind.

In die Venen konnten je 3 Rückschlagventile 19 (Venenklappen) eingebaut werden, und wir haben die Untersuchung mit und ohne Klappen durchgeführt, letztere im Hinblick darauf, dass in den Armen keine Klappen vorhanden sind und dass sie in den Beinen, in Krankheitsfällen, oft nicht mehr funktionieren. Arterien- und Venendruck wurde mit Glasplattenmanometern 17 und 18 photographisch registriert. Durch regulierbare Quetschhahnen, an der Arterie oder an der Vene, proximal an der Stelle  $D_1$  oder distal an der Stelle  $D_2$  (siehe Schema), lassen sich pathologische Zustände (zum Beispiel Okklusionen) reproduzieren.

Auf einfache Weise lässt sich nun die Wirkung aller Variablen des Synkardons (Druckstärke, Druckdauer, Einsatzverzögerung, Manschettenbreite) auf die in den Beinen zirkulierende Menge messen.

#### 4. Die Messergebnisse und ihre Deutung

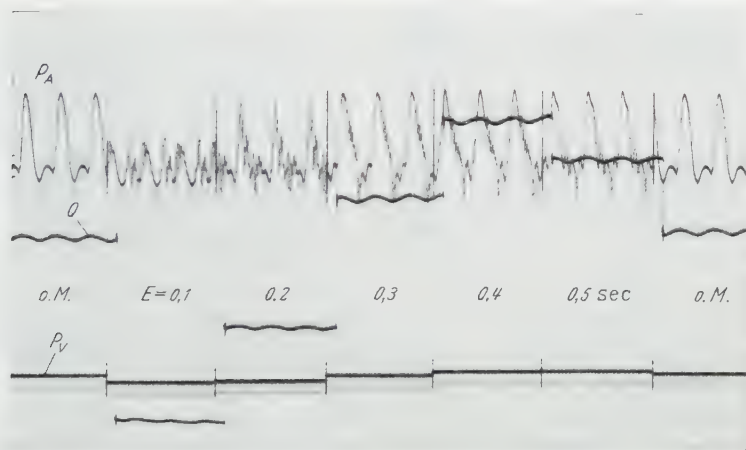
1. Wird eine *Vene ohne Klappen*, in welche die Flüssigkeit gleichmässig einströmt, rhythmisch komprimiert, dann ergibt sich, wie zu erwarten, ein pulsierender Venenstrom, aber keine Zunahme der mittleren Durchflussmenge. Unter solchen Versuchsbedingungen haben GOTTLOB und Mitarbeiter ihre Untersuchung durchgeführt.

2. Wird eine *Vene mit Klappen* rhythmisch komprimiert, dann nimmt die Zirkulation zu, entsprechend der Manschettenbreite, das heisst dem unter der Manschette liegenden Venenabschnitt. Entsprechend dem geringen Innendruck in der Vene genügt bereits ein geringer pneumatischer Druck in der Manschette, um die mittlere Durchflussmenge beträchtlich zu steigern. Die Druckdauer ist optimal, wenn sie 25–30% der Pulsperiode beträgt, während die Einstellung der Einsatzverzögerung keinen Einfluss ausübt. Aus diesem Verhalten kann man schliessen, dass die vermehrte Förderung in zentripetaler Richtung durch Auspressen zustande kommt.

3. In der *Arterie* oszilliert der Druck zwischen dem diastolischen (Minimalwert) und dem systolischen (Maximalwert). Wird eine Arterie rhythmisch, mit

zunehmender pneumatischer Druckstärke komprimiert, dann steigt die Durchflussmenge erst, nachdem der pneumatische Druck den diastolischen Wert erreicht hat, und sie strebt einem Sättigungswert zu, wenn der pneumatische Druck auf den systolischen Wert angestiegen ist.

Von grossem Einfluss ist die Einsatzverzögerung. Eine zu kleine Verzögerung vermindert die Zirkulation. Optimale Verhältnisse ergeben sich, wenn die



Figur 2

Arterienndruck  $p_A$ , Venendruck  $p_V$  (mit Klappen) ohne Massage und mit Massage der Arterie allein mittels pneumatischer Schlauchklemme bei Dauer = 0,3 und Einsatzverzögerung 0,1–0,5 s.

Einsatzverzögerung etwas grösser ist als die Pulswellenlaufzeit (Kulminationspunkt der Welle), das heisst, wenn der pneumatische Impuls einsetzt, nachdem die Pulsquelle den unter der Manschette verlaufenden Arterienabschnitt gerade durchheilt hat.

Im Gegensatz zur Vene hat die Manschettenbreite keinen Einfluss auf die Zirkulation in der Arterie. Man erhält praktisch dieselben Werte mit einer Manschette von 12 cm Breite wie mit einer pneumatisch gesteuerten Schlauchklemme von nur 0,5 cm Breite. Der Fördermechanismus kann somit nicht auf einem Auspressvorgang beruhen. Um den Mechanismus zu verstehen, ist eine feinere Analyse des Druckverlaufes in der Arterie notwendig. In Figur 2 stellt  $p_A$  den Druck im distalen Abschnitt der Arterie dar,  $p_V$  den Venendruck und  $Q$  die Durchflussmenge. Rhythmisch komprimiert wurde nur die Arterie mit der pneumatischen Schlauchklemme bei verschiedenen Einsatzverzögerungen  $E = 0,1$  bis  $0,5$  s, wobei die Pulswellenlaufzeit  $0,3$  s betrug. Die beiden äussersten Felder entsprechen dem Zustand ohne Massage. Bei zu kurzer Verzögerung,  $E = 0,1$  s, sinkt der systolische Druck unter seinen Normalwert, und die Menge

geht stark zurück. Bei zunehmender Einsatzverzögerung erreicht der Maximaldruck den systolischen Normalwert, übersteigt ihn aber nicht. Der abfallende Ast des Druckverlaufes, der bei  $E = 0,2$  s noch sehr steil ist, verflacht sich zunehmend bis zu  $E = 0,4$  s, wo der Durchfluss ein Maximum erreicht.

Wie lässt sich nun der Fördermechanismus auf Grund dieser Ergebnisse erklären? Mit der vom Herzen gegen die Peripherie fortschreitenden Druckwelle wird die Arterie erweitert und der Flüssigkeitsinhalt je Längeneinheit vermehrt. Die Druckwelle wird am Eintritt in das enge Rohrbündel, wenigstens teilweise, reflektiert und verringert infolgedessen wieder die Füllung des distalen Abschnittes. Wird nun die Arterie nach dem Durchgang der primären, aber vor der Ankunft der reflektierten Welle, komprimiert, verhindert man also die Fortpflanzung der reflektierten Welle in den proximalen Abschnitt, dann bildet der distale Abschnitt ein Reservoir, das durch die Druckwelle gefüllt worden ist und sich langsamer entleert als ohne Kompression. Der zeitliche Mittelwert des Druckes im distalen Abschnitt nimmt zu, so dass sich eine Vermehrung des Durchflusses ergibt. Die Zirkulation erreicht immer ein Maximum, wenn die Einsatzverzögerung um 0,05 bis 0,1 s grösser ist als die gemessene Pulswellenlaufzeit, was darauf hindeutet, dass der pneumatische Impuls nicht die Primärwelle beeinflusst, sondern ein retardiertes Phänomen, wie es die reflektierte Welle ist. Der Fördermechanismus in der Arterie kann somit als Druckwelleneffekt erklärt werden.

4. Physiologisch sinnvoll ist natürlich nur die gleichzeitige Kompression von Arterie und Vene. Dementsprechend ist die Zunahme der Zirkulation von der Einsatzverzögerung, der Druckstärke, der Druckdauer und, wenn die Vene Klappen enthält, von der Manschettenbreite abhängig. Bei optimaler Einstellung wurden Zunahmen von 26% des normalen Durchflusses gemessen bei Venen ohne Klappen und von 59% bei Venen mit Klappen. Dieser Zunahme im rhythmisch komprimierten Teil des Kreislaufes, durch den normalerweise 1/8 der Gesamtmenge strömt, was ungefähr der Blutmenge in einem Bein gleichkommt, entspricht eine Abnahme, die sich auf den ganzen übrigen Kreislauf verteilt.

5. Werden die Gefässe rhythmisch komprimiert bei stillstehender Zirkulationspumpe, dann entsteht eine Pulsation und eine Zirkulation, wie aus den Figuren 3 und 4 ersichtlich ist, in welchen  $p_A$  den Arteriendruck,  $p_V$  den Venendruck und  $Q$  die Durchflussmenge darstellt. Ob dieser Versuch physiologisch sinnvoll ist, das heisst, ob die synkardiale Methode bei Wiederbelebungsversuchen in Kombination mit anderen Methoden wirksam sein kann, möge dahingestellt bleiben. Wir haben diese Versuche quantitativ nicht näher verfolgt.

6. Vor kurzem ist eine Nachahmung des Synkardons unter dem Namen «Vasotron» auf dem Markt erschienen, die sich vom Synkardon dadurch unterscheidet, dass zwei Manschetten angeschlossen sind, die an derselben Extremität anzulegen sind, die eine zum Beispiel am Oberschenkel, die andere am

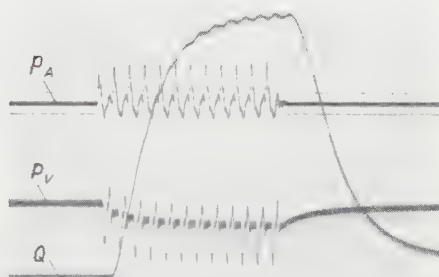


Unterschenkel. Die beiden Manschetten werden sukzessive betätigt, indem die Einsatzverzögerung jedes Impulses nach der Lage der Manschette eingestellt wird. Die Erfinder haben offenbar nur den Auspressvorgang im Auge und glauben, durch dieses Verbundverfahren die Wirkung zu steigern.



Figur 3

Zirkulationszunahme bei stillstehender Pumpe (Venen ohne Klappen).



Figur 4

Zirkulationszunahme bei stillstehender Pumpe (Venen mit Klappen).

Wir haben diese Methode am Modell mit Hilfe von zwei Synkardon-Apparaten untersucht und sind zu folgendem Ergebnis gelangt:

Im Falle klappenfreier Venen ist die Verbundmethode weniger wirksam als die einfache. Da nur die arterielle Zirkulation durch den oben geschilderten Druckwelleneffekt beeinflusst wird, muss die zweite Manschette den Vorgang irgendwie hemmen. Sind dagegen Klappen vorhanden, dann haben zwei Manschetten im günstigsten Falle dieselbe Wirkung wie eine Manschette von doppelter Breite. Das wesentlich kompliziertere Verbundverfahren dürfte somit physiologisch keinen Vorteil bieten.

## 5. Schlussfolgerungen

Es ist selbstverständlich, dass die Modellergebnisse nicht quantitativ auf den Blutkreislauf übertragbar sind. Insbesondere wird der Druckwelleneffekt im Blutkreislauf weniger deutlich auftreten, da die Querschnittreduktion der Beinarterie nicht auf eine einzige Stelle konzentriert ist wie im Modell. Das Ziel der Untersuchung kann daher lediglich in der Erklärung des Fördermechanismus erblickt werden. Ob diese Erklärung richtig ist, muss am menschlichen Kreislauf geprüft werden. Die prinzipielle Schwierigkeit dieser Prüfung besteht darin, dass es ohne operativen Eingriff nicht möglich ist, die Durchflussmenge zu messen. Auch mit Isotopen, die in die Blutbahn eingespritzt werden, konnte die Frage noch nicht in befriedigender Weise gelöst werden.

Für die Richtigkeit unserer Hypothese sprechen zwei experimentelle klinische Befunde:

1. Die synkardiale Therapie ist wirksamer bei Störungen in den Beinen als in den Armen, das heisst, Gefässe mit Klappen reagieren besser.
2. Oszillographische Aufnahmen zeigen, dass der systolische Druck durch die Massage nicht erhöht, dass aber die Form der Oszillationen wesentlich von der Einsatzverzögerung abhängt und formale Analogien mit den Modellkurven aufweist.

Ferner finden zwei klinische Befunde, die sich scheinbar widersprechen, eine Erklärung.

STIRNEMANN [8] hat am Menschen kleine Arteriolen geöffnet und gemessen, wie weit der Blutstrahl spritzt. Da die synkardialen Impulse die Spritzweite nicht beeinflussten, folgerte er, dass keine Zirkulationszunahme stattfindet. Am Modell lassen sich diese Versuchsbedingungen reproduzieren, aber da die Spritzweite nur vom systolischen Druck abhängt, der durch die Massage nicht erhöht wird, ist die Schlussfolgerung von STIRNEMANN nicht richtig, da die Menge nicht allein von der Spritzweite abhängt.

ALLGÖWER [9] hat bei einer wegen arteriosklerotischer Gangrän zur Unterschenkelamputation kommenden Patientin die Wirkung der synkardialen Massage auf die Schnittfläche untersucht. Diese äusserte sich im Einsetzen einer spritzenden Blutung aus 2 kleinen Arteriolen. Wie erklärt sich dieser Befund, der in der medizinischen Literatur oft als Experimentum crucis für die synkardiale Methode zitiert wird, aber im Widerspruch zum Befund von STIRNEMANN steht? Auch diese Verhältnisse lassen sich am Modell reproduzieren. Eine Amputation ist bekanntlich nur möglich, wenn die Blutzufuhr oberhalb der Schnittstelle künstlich gedrosselt wird oder wenn die Arterien, zum Beispiel durch Arteriosklerose, schon derart verengt sind, dass keine Verblutungsgefahr besteht. Am Modell wurde der Arterien Schlauch vom Rohrbündel getrennt und an eine Kapillare angeschlossen, die im Freien mündete. Am proximalen Eintritt in die Arterie wurde der Zufluss gedrosselt, bis das Wasser nur tropfenweise aus der Kapillare ausfloss. Wurde nun mit der Manschette, bei richtig eingestellter Einsatzverzögerung, rhythmisch komprimiert, dann spritzte das Wasser bei jedem Impuls aus der Kapillare. Komprimierte man aber mit der 0,5 cm breiten Klemme, dann trat kein Spritzen auf. Es handelt sich also in diesem Falle um einen Auspressvorgang (denn im Amputationsstumpf kann ja keine Druckwelle reflektiert werden), wobei ein Teil des Flüssigkeitsinhaltes zentripetal, der andere ins Freie verdrängt wird. Es wäre aber falsch, aus diesem Versuch zu schliessen, dass die synkardialen Impulse generell eine Steigerung des systolischen Druckes hervorrufen.

Weiter reichende Schlussfolgerungen würden, im Hinblick auf das komplexe physiologisch-pathologische Problem, eine Überschreitung der dem Modellversuch gesetzten Grenzen bedeuten. Ungeklärt bleibt vor allem die Frage der



therapeutischen Wirkung, die ihre Ursache in irgendwelchen organischen oder funktionellen Veränderungen des Kreislaufes hat. Im Modellversuch hingegen stellt sich nach Unterbruch der Massage bald wieder der Anfangszustand ein.

Wenn auch dieser Artikel etwas aus dem üblichen Rahmen dieser Zeitschrift fällt, so zeigt er zumindest, dass Strömungsprobleme auch auf ferner liegenden Gebieten zu lösen sind und dass da, wo die Verhältnisse noch nicht reif für die mathematische Erfassung sind, wie gerade in der Physiologie und Medizin, der Ingenieur nützliche Dienste leisten kann, selbst wenn seine Methoden unvollkommen sind. Der berühmte Physiologe CLAUDE BERNARD schreibt in seiner *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*:

«La Science n'avancerait jamais si l'on se croyait autorisé à renoncer aux méthodes scientifiques parce qu'elles sont imparfaites; la seule chose à faire en ce cas, c'est de les perfectionner.»

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. STODOLA, *Dampf- und Gasturbinen*, 5. Aufl. (Springer, Berlin 1922), S. 1042.
- [2] Escher-Wyss-Mitteilungen 7, 171 (1928).
- [3] R. SEELIGER, *Analogien und Modelle in der Physik*, Studium gen. I, 125 (1948).
- [4] M. WEBER, *Das Ähnlichkeitsprinzip in der Physik und seine Bedeutung für das Modellversuchswesen*, Forsch. Ing.-Wes. 11, 49 (1940).
- [5] M. FUCHS, Schweiz. med. Wschr. 75, 542 und 971 (1945).
- [6] R. GOTTLÖB, R. MAY und W. ROHM, Arch. Kreislaufforsch. 21, 70 (1954).
- [7] E. und H. JAQUET, *Untersuchungen an einem Kreislaufmodell*, Z. ges. exp. Med. 127, 631–647 (1956).
- [8] H. STIRNEMANN, *Die Medizinische* 1955, 1342.
- [9] M. ALLGÖWER, *Erfahrungen mit der synkardialen Massage*, Rev. Accid. Trav. 43, 313 (1950).

#### Summary

A device was designed for the investigation of the mode of operation of an apparatus for the treatment of disturbances of circulation. This device enables the essential flow characteristics of the large blood circulation to be reproduced. The readings obtained with the device reproduce the pressure oscillograms registered with men with a high degree of accuracy.

(Eingegangen: 25. Mai 1957.)

## Aerodynamik und Maschinenbau

Von PAUL JARAY, Wetzikon, Schweiz

Es gibt nur wenig Zweige der naturwissenschaftlichen Forschung, die einen so bedeutenden Einfluss auf den modernen Maschinenbau gewonnen haben wie die Aerodynamik.

Ihrer komplexen Natur gemäss greift sie in viele technische Gebiete hinein, aber der Maschinenbau – im weitesten Sinn – ist vermutlich der grösste Nutzniesser ihrer Erkenntnisse.

Es ist dabei zu beachten, dass die Aerodynamik noch eine relativ junge Wissenschaft ist, die in ihren Anfängen von einigen wenigen phantasiebegabten, mathematisch geschulten Köpfen – unter denen JAKOB ACKERET an massgebender Stelle zu nennen ist – entwickelt wurde. Nur der Solidität des wissenschaftlichen Fundaments ist es zu verdanken, dass trotz der kurzen Zeit der Entwicklung so enorme Fortschritte erzielt wurden und dies, obwohl die konservativen Widerstände, die die technische Industrie allem «Theoretischen» entgegenstellt, bekanntlich sehr gross sind.

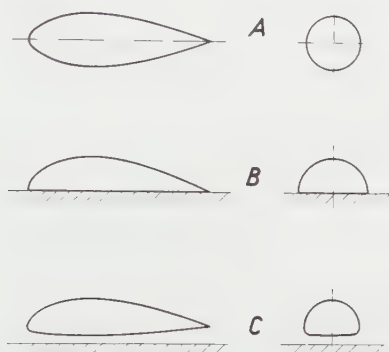
Vom Einfluss der Aerodynamik auf den Luftfahrzeugbau sei hier abgesehen. Die Aerodynamik ist eine «conditio sine qua non» für den Luftfahrzeugbau, und der Flugzeugbau, aber seinerzeit auch der Luftschiffbau, sind ja die unmittelbaren Veranlasser der aerodynamischen Forschungen [1]<sup>1)</sup>. Ohne diese hätten wir vielleicht heute noch zigarrenförmige Luftschiffe oder drahtverhauähnliche Flugzeuge. Die aus mathematischen Überlegungen und Windkanalversuchen gewonnenen Erkenntnisse sind geradezu die Voraussetzungen für die Fortschritte in der Verbesserung der Luftfahrzeuge [2].

Bei den Wasser- und Landfahrzeugen ist die Auswirkung der aerodynamischen Forschung weniger deutlich, obwohl natürlich der Schiffbau – als der viel ältere Bruder des Luftfahrzeugbaus – diesem zunächst einiges voraus hatte und dem jüngeren etliche Lehren geben konnte. Später hat der Schiffbau, besonders der Schnellbootsbau, noch mehr Lehren von der inzwischen grossgewordenen Aerodynamik zurückerhalten, aber nur zum Teil realisiert.

Hier wären beispielsweise die verbesserten Bugformen moderner Seeschiffe zu nennen, wirksamere Ruder, die Unterwasserflügel und Düsenstufen bei Gleitbooten. Natürlich gibt es auch einzelne Ansätze zur Verringerung des Luftwiderstandes der Schiffsaufbauten. Ein interessantes Intermezzo bildete ein vor etwa 35 Jahren erfolgter Versuch, die Segel, die damals noch eine wichtige Rolle spielten, durch glatte, zylindrische Rotoren zu ersetzen [3].

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 388.

Bei den Unterwasserschiffen bildeten die mit den Luftschiffen gewonnenen aerodynamischen Erkenntnisse eine noch nicht ganz ausgeschöpfte Fundgrube von Erfahrungen.



Figur 1

Einfluss der Bodennähe auf die aerodynamisch günstigste Formgebung: *A* in freier Strömung; *B* in unmittelbarer Bodennähe; *C* bei geringem Bodenabstand.

Sehr träge reagiert der Landfahrzeugbau auf die Forderungen der Aerodynamik, obwohl deutliche Ansätze zur konsequenten Anwendung ihrer Lehren, wenigstens was das Automobil betrifft, auf die Jahre 1920–1922 zurückgehen. Zu diesem Zeitpunkt lagen bereits die folgenden Merkmale einer aerodynamisch korrekten Formgebung des Automobils vor [4, 5]:

1. Einschliessung aller Maschinenteile und Nutzräume des Fahrzeugs, ebenso der Räder (soweit möglich) in einen stromlinienförmigen Halbkörper, dessen Symmetrieebene der Boden darstellt (Figur 1).

2. Umkleidung der Köpfe der Fahrer mit einem zweiten solchen Halbkörper, der sich auf dem erstgenannten befindet und auch im Grundriss stromlinienförmig gestaltet ist.

3. Seitenrissgestaltung derart, dass der Lateralschwerpunkt hinter den Körperschwerpunkt zu liegen kommt, nötigenfalls mit Hilfe von Flossen.

4. Vermeidung jeglicher vorspringender Kanten oder Teile, Druckbelüftung für die Fahrer und den Motor an den Staupunkten der Stromlinienkörper entnommen.

Obwohl diese Erkenntnisse jetzt über 35 Jahre zurückliegen, sind sie beim heutigen Automobil, bis auf einige wenige Ausnahmen, noch keineswegs völlig verwirklicht worden, ganz zu schweigen von einem Parallellauf mit der modernen Aerodynamik.

An dieser Tatsache könnte man mit einem Achselzucken vorbeigehen, wenn das Problem ausser der technischen Seite nicht auch noch zwei andere Seiten hätte. Eine volkswirtschaftliche und eine – gesundheitliche: Von dem genann-

ten Zeitpunkt, an dem diese Erkenntnisse publiziert wurden, bis heute sind, bescheiden gerechnet, einige hundert Millionen Tonnen Benzin nutzlos vergeudet worden [6, 7] und ungezählte, wahrscheinlich etliche Millionen Krankheiten infolge schleichender Kohlenoxydvergiftungen aufgetreten, verursacht durch die schwierige Belüftungsmöglichkeit des kantigen Karosserieaufbaues [8].

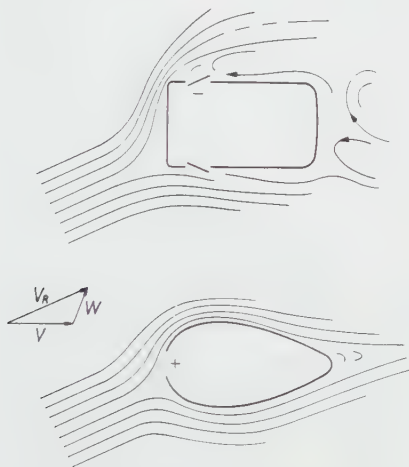
Die (auch bereits vor etwa 20 Jahren erfolgten) Untersuchungen am fahrenden Auto [9] zeigten, dass bei der konventionellen Wagenform 0,17 bis 0,36<sup>0</sup>/<sub>100</sub> Kohlenoxydgas im Wageninnern vorhanden sein kann. Dabei sind die höheren Werte keineswegs bei ganz geschlossenem Innenraum gemessen worden, sondern bei teilweise geöffneten Seitenfenstern. Nun mag es heute als erwiesen gelten, dass ein Kohlenoxyd-Luft-Gemisch mit 0,2 bis 0,4<sup>0</sup>/<sub>100</sub> CO als in höchstem Grad gesundheitsschädlich angesehen werden muss, sofern es längere Zeit, wenn auch mit Unterbrechungen, eingeatmet wird. Denn die Affinität von O<sub>2</sub> und CO zu Hämoglobin verhält sich wie 1:150 bis 1:300, und der Ersatz des im Blut aufgenommenen Kohlenoxyds durch Sauerstoff nimmt wesentlich mehr Zeit in Anspruch als die Bildung des Kohlenoxyd-Hämoglobins [10]. So kann es zu einer Speicherung des CO-Gehalts im Blut und damit zu der berüchtigten Limousinenkrankheit führen, in schweren Fällen zu bösartigen Vergiftungserscheinungen und sogar Todesfällen.

Diese Tatsachen sind lediglich auf die kantigen Formen des Wagenaufbaus zurückzuführen. Denn bei diesen tritt nur am Wagenbug, an den Anbauten sowie an der Windschutzscheibe Überdruck auf. Alle anderen Stellen der Wagenoberfläche stehen unter Unterdruck und somit auch der Wageninnenraum, wenn er – wie dies gewöhnlich der Fall ist – durch Undichtigkeiten oder etwa geöffnete Seitenfenster mit diesen Unterdruckgebieten in Verbindung steht. Eine Frischluft-Druckbelüftung erscheint (ohne besondere Einrichtungen) praktisch ausgeschlossen, besonders wenn man berücksichtigt, dass die Resultierende aus Fahrt- und Windgeschwindigkeit nur selten in der Symmetrieebene des Wagens verläuft und die Überdruckstellen am Wagen daher stets wandern (Figur 2).

Ganz anders beim aerodynamisch gut geformten Wagenaufbau. Hierbei lässt es sich erreichen, dass, abgesehen von extrem starkem Querwind aus den hinteren Quadranten oder bei sehr kleiner Fahrtgeschwindigkeit, die Staustelle nur unwesentlich wandert und daher eine verhältnismässig kleine Öffnung in der Längsmittlebene des Wagens zur Druckbelüftung ausreicht, zumal ja auch die Unterdruckwerte am stromlinienförmigen Körper wesentlich kleiner sind als beim kantigen.

Tatsächlich erreichten die Messungen an guten Stromlinienwagen in keinem einzigen Fall den Wert von 0,2<sup>0</sup>/<sub>100</sub> CO, soweit der eigene Motor dafür in Frage kam. Bei einem Standversuch mit zigarren- und zigarettenrauchenden Insassen ergab sich ein Wert von 0,22<sup>0</sup>/<sub>100</sub>, der jedoch in Fahrt nach 30 Sekunden auf 0,04<sup>0</sup>/<sub>100</sub> zurückging.

In diesem Zusammenhang ist es vielleicht nicht uninteressant, darauf hinzuweisen, dass es möglich ist, durch eine den Strömungsverhältnissen im Auspuffrohr angepasste Mehrfachdüse eine so weitgehende Verdünnung der CO-Konzentration zu erreichen, dass die Gase praktisch entgiftet das Auspuffrohr verlassen.



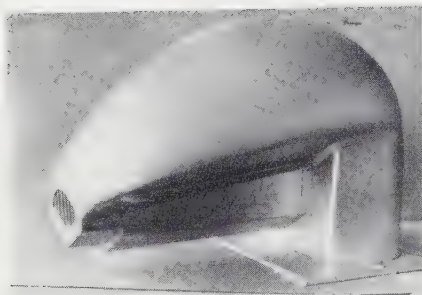
Figur 2

Idealisierte Stromlinien an Horizontalschnitten von Wagenaufbauten bei Fahrt mit Seitenwind.

Allerdings kann man auch bei kantigen Aufbauten – von Ventilatoren abgesehen – eine Fahrtwind-Druckbelüftung bewerkstelligen, obwohl es nicht ganz einfach ist, gegen die oft bedeutenden Unterdrücke im Wageninnern, ohne Belästigung der Fahrgäste durch Zugwind, aufzukommen. Die dazu nötigen Druckhutzen, die nebenbei bemerkt, ziemlich gross sein müssen und den Wagen nicht verschönern, benötigen zudem besondere, in der Art der Anemostate gebaute Diffusoren, die die Luftgeschwindigkeit so weit herabsetzen, dass Wassertropfen, Staub, Mücken usw. vor Eintritt der Luft in den Wagen abgeschieden werden (Figuren 3 und 4). Die Konstruktion solcher Druckhutzen ist ein typisches Beispiel angewandter Aerodynamik.

Bemerkenswert ist übrigens, dass die Reduktion des Luftwiderstandes bei kleineren Personenwagen weit wichtiger wäre als bei grossen Fahrzeugen – die Roll- und die Steigungswiderstände sind ungefähr dem Wagenvolumen, der Luftwiderstand aber nur seiner 0,67. Potenz (Figur 5) proportional –, aber es scheinen Anzeichen dafür zu sprechen, dass die aerodynamischen Formverbesserungen im Eisenbahn- und im Omnibusbau früher verwirklicht sein werden als im Automobilbau. Die Gründe dafür dürften allerdings nicht ausschliesslich technischer oder gar hygienischer Natur sein, sollen hier aber nicht untersucht werden.



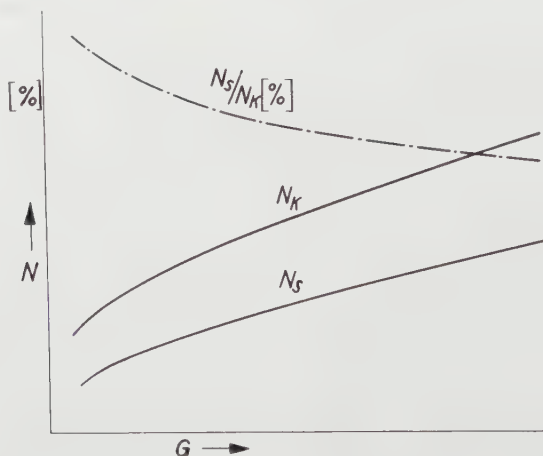


Figur 3



Figur 4

Belüftungs-Druckhutzen für Fahrzeuge mit Abscheider für Wassertropfen, Staub, Mücken usw.



Figur 5

Leistungsbedarf von Automobilen mit Stronlinienkarosserie S und mit konventionellem Aufbau K als Funktion der Wagengrösse (Totalgewicht  $G$ ) bei mittlerer, der Wagengrösse angepasster Reisegeschwindigkeit.

Das nach dem Fahrzeugbau für die Anwendung der Aerodynamik nächst-wichtige Gebiet des Maschinenbaues ist die spezielle Strömungstechnik. Sie umfasst nicht nur das enorme Feld des Rohrleitungsbaues für die verschiedenen Flüssigkeiten und Gase mit Querschnitten von Bruchteilen eines Quadratmillimeters bis zu etlichen hundert Quadratmetern, mit Geschwindigkeiten von einigen Millimetern pro Sekunde bis zu grösseren Mach-Zahlen und mit Reynolds-Werten von  $10^{-2}$  bis über  $10^8$ , sondern erstreckt sich auch auf alle möglichen Formen im Querschnitt und im Längsprofil, auf Veränderungen im Querschnitt über der Länge, auf Einbauten, zum Beispiel Absperr- oder Drossleinrichtungen, Krümmer, auf die Beschaffenheit der Wandfläche und auf



eine Reihe anderer Probleme, die mit der Art der Strömung in Zusammenhang stehen. Hierher gehört natürlich auch die Lüftungstechnik, deren Aufgaben so eng mit der Aerodynamik verbunden sind wie die der Flugtechnik, ebenso der Propeller- und Ventilatorbau, die Konstruktion der Windkanäle und der Motorenprüfstände, soweit diese Propeller oder Luftbremsen besitzen. Ferner sind hier alle Windmotoren zu nennen, angefangen von den kleinsten raschlaufenden Typen, etwa für Nebenantriebe an Luftfahrzeugen, beispielsweise



Figur 6

Windmotor für Sonderantriebe am Flugzeug.

zur Stromerzeugung oder zum Einholen von Schleppzielen (Figur 6), bis zu den grössten Langsamläufern, die die Energie im natürlichen Wind für den Antrieb etwa einer Arbeitsmaschine oder eines Dynamos benutzen [11]. Weiterhin ist an dieser Stelle das ganze Gebiet des Wasser- und Gasmotorenbaus zu erwähnen, im besondern der Turbinen-, Pumpen- und Kompressorenbau.

Selbstredend darf hier das heute bedeutsam gewordene Gebiet der Strahltriebwerke nicht unberücksichtigt bleiben, obwohl es im wesentlichen nicht mehr der Aerodynamik, die wie die Hydrodynamik das Medium als praktisch inkompressibel annimmt, zugehört, sondern der Gasdynamik.

Schliesslich gehören hierzu noch die Einrichtungen zur Aufbereitung, zur Materialsichtung, zur Entstaubung und zur hydraulischen oder pneumatischen Materialförderung, unter anderem auch beispielsweise zur Schneeschleuderung.

Besondere Kapitel für die Anwendung der Aerodynamik auf den Maschinenbau betreffen alle aerothermischen Vorgänge, zum Beispiel bei Trocknungseinrichtungen, bei den sogenannten Klimaanlagen vor allem bei der Heizung, im allgemeinen beim Wärmeübergang. So ist es bei Bremsen oder ähnlichen

Maschinenteilen, die Energie in abzuführende Wärme umsetzen, oder bei Motorenzylindern, wie ganz allgemein bei Heizkörpern schon lange üblich, die Oberfläche durch Rippen zu vergrössern. Erst ausführliche aerodynamische Studien und Versuche ermöglichten es jedoch, grundlegende Verbesserungen zu erzielen und die Verhältnisse zahlenmässig zu erfassen. Man kann heute bei richtiger Formgebung mit dem rund 15- bis 20fachen Oberflächen-Wärmeübergangswert bei gleicher Luftdichte und Geschwindigkeit gegenüber der glatten, nicht gerippten Oberfläche rechnen. Dabei zeigte es sich, dass abgesehen von der Luftdichte und -geschwindigkeit in erster Linie der Rippenabstand den Wärmeübergangswert bestimmt, während die Rippentiefe eine geringere Rolle spielt [12].

Es wären noch etliche Details des Maschinenbaus zu nennen, die von der Aerodynamik «leben», die hydraulischen Kupplungen und Getriebe, alle hydraulischen und pneumatischen Steuerungen, die Vergaser... Man könnte die Beispiele der im Maschinenbau angewandten Aerodynamik noch lange fortsetzen. Die skizzenhafte Darstellung möge aber genügen, damit der Blick von der Domäne der Aerodynamik, dem Luftfahrzeugbau, nicht allzusehr abgelenkt werde.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. JARAY, *Die Luftwiderstandsuntersuchungen und ihre bisherigen Ergebnisse*, Öst. Flug-Z. 1914, Nr. 11.
- [2] P. JARAY, *Studien zur Entwicklung der Luftfahrzeuge*, Z. Flugtech. 1920, Nr. 11 und 12.
- [3] J. ACKERET, *Das Rotorschiff* (Göttingen 1925).
- [4] P. JARAY, *Motorwagen 1922*, Nr. 29.
- [5] W. KLEMPERER, *Luftwiderstands-Untersuchungen an Automobil-Modellen*, Z. Flugtech. 1922, Nr. 14.
- [6] P. JARAY, *Grundlagen für die Berechnung des Leistungsaufwands von Kraftwagen*, Auto.-tech. Z. 1934, Nr. 4.
- [7] St. FISCHER, *Berechnungsdaten...*, Auto.-tech. Z. 1935, Nr. 1.
- [8] *Stromlinienwagen-Sonderheft*, Auto.-tech. Z. 1934, Nr. 4.
- [9] P. JARAY, *Kohlenoxydgas und Auto*, Automobil-Revue 1938, Nr. 8 und 9.
- [10] W. WIRZ, *Die Lüftung der Alpenstrassentunnel*, Strasse u. Verkehr 1942, Nr. 10.
- [11] J. ACKERET, *Untersuchungen am Modell eines Windkraftwerks*, Schweiz. Bauztg. 1939, Nr. 4.
- [12] NACA Rep. Nr. 488 (1934); 587 (1937) und 676 (1939).

#### Summary

The importance of aerodynamics in mechanical engineering is discussed. The influence on the design of vehicles, especially automobiles, is considered in detail. The danger of carbon monoxide poisoning is pointed out. This occurs in vehicles of poor aerodynamic form and is due to bad ventilation. Many advances in mechanical engineering rendered possible by the application of aerodynamics are also discussed.

(Eingegangen: 28. September 1957.)

# The Dissociation of a Pure Diatomic Gas Behind a Strong Normal Shock Wave<sup>1)</sup>

By GIANNI JARRE, Torino, Italy<sup>2)</sup>

## Symbols

$A$	mass-reaction-rate;
$C$	sound speed;
$E$	molar-internal-energy;
$h$	Planck's constant;
$h$	mass-enthalpy;
$H$	molar-enthalpy;
$k$	Boltzmann's constant;
$L$	space-constant of relaxation;
$m$	molar mass;
$M$	Mach number;
$n$	molar-density;
$p$	pressure;
$R$	universal gas constant;
$s$	mass-entropy;
$S$	molar-entropy;
$T$	absolute temperature;
$u$	speed;
$x$	distance from the shock front;
$X$	mass-fraction of atoms;
$\alpha$	non-dimensional mass-reaction-rate;
$\varepsilon$	entropy function;
$\theta$	dissociation temperature;
$\lambda$	dissociation length;
$\nu$	dissociation molar-density;
$\pi$	dissociation pressure;
$\rho$	mass-density;
$\sigma$	state;
$\varphi$	dissociation speed;

<sup>1)</sup> The research reported in this document has been sponsored in part by the Air Research and Development Command, United States Air Force, under contract AF 61(514)1124, through the European Office, A. R. D. C.

<sup>2)</sup> Politecnico di Torino.

- <sub>0</sub> upstream the shock;  
<sub>1</sub> immediately behind the shock;  
<sub>2</sub> downstream the shock;  
<sub>Z2</sub> molecular;  
<sub>Z</sub> atomic.

## Introduction

A simplified study on the dissociation of a pure diatomic gas behind a strong normal shock wave is presented.

The same problem was studied by H. A. BETHE and E. TELLER [1]<sup>3)</sup>, G. P. WOOD [2], J. S. EVANS [3], M. J. LIGHTHILL [4].

The peculiarities of the present paper are:

the recourse to a general expression of the dissociation rate, previously studied by G. JARRE [5];

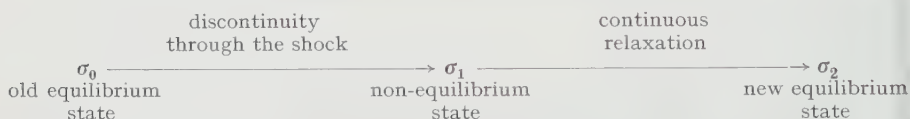
the use of simplified models either of the dissociating gas or of the shock wave;

the analysis of the space constant of relaxation.

The dissociation of a diatomic gas is an endothermic reaction with increasing volume, namely the more advanced it is, the higher the temperature and the lower the pressure: hence the dissociation is high only when the heating effect of the shock overcomes the compression effect.

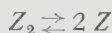
The finite reaction-rate of dissociation will be considered, but, as in [1-4], all the molecular transfer processes and the ionization effects will be neglected as well as all the internal molecular relaxations, as in [3, 4].

Thus, as in [3], the assumed scheme of the phenomenon is the following:



While in [4] the oblique shock is treated, but only from the equilibrium viewpoint, here the simpler case of a normal shock is studied. While in [1-3] the treated gas is real air, here the simpler case of a pure diatomic gas is studied.

Then the only chemical reaction behind the shock will be of the kind:



Hence the problem deals with a binary mixture of  $Z_2$ -molecules, having a molar mass  $m_{Z_2}$ , and  $Z$ -atoms, having a molar mass  $m_Z = m_{Z_2}/2$ .

The universally accepted measure of the advancement-degree of dissociation is the mass-fraction  $X$  of atoms already dissociated. Table 1 shows the composition characteristics of the mixture.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 402.

Table 1

	Mass-density $\varrho_i$	Mass-fraction $\varrho_i/\varrho$	Molar-density $n_i$	Molar-fraction $n_i/n$
$Z_2$ -molecules	$\varrho (1 - X)$	$(1 - X)$	$\frac{\varrho (1 - X)}{m_{Z2}}$	$\frac{1 - X}{1 + X}$
$Z$ -atoms	$\varrho X$	$X$	$\frac{2 \varrho X}{m_{Z2}}$	$\frac{2 X}{1 + X}$

Since the transition through the shock front is instantaneous, whilst the dissociation rate is finite, we have  $X_0 = X_1$ , and if, as we accept, the dissociation is negligible in the  $\sigma_0$ -state,

$$X_0 = X_1 = 0 . \tag{1}$$

The relaxation  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$  is characterized by greater and greater values of  $X > 0$ , to the equilibrium one  $X = X_2$ , infinitely downstream the shock front.

**Thermo-Chemical Properties of the Dissociating Gas**

The equation of state of the mixture is

$$p = n R T = (n_{Z2} + n_Z) R T = \varrho R T \frac{1 + X}{m_{Z2}} \tag{2}$$

or, in non-dimensional form, being  $X_0 = 0$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \cdot \frac{T}{T_0} (1 + X) . \tag{3}$$

The enthalpy and entropy of the mass unity of mixture, are

$$\left. \begin{aligned} h &= (1 - X) \frac{H_{Z2}}{m_{Z2}} + \frac{X H_Z}{m_Z} = \frac{(1 - X) H_{Z2} + 2 X H_Z}{m_{Z2}} , \\ s &= (1 - X) \frac{S_{Z2}}{m_{Z2}} + \frac{X S_Z}{m_Z} = \frac{(1 - X) S_{Z2} + 2 X S_Z}{m_{Z2}} . \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

$H_i(T)$  is the molar-enthalpy, bound to the internal energy  $E_i(T)$  by the known relation

$$H_i(T) = E_i(T) + R T . \tag{5}$$

$S_i(T, n_i)$  is the molar-partial-entropy, bound to the molar-total-entropy  $S_i(T, n)$  by the known relation

$$S_i(T, n_i) = S_i(T, n) - R \ln \frac{n_i}{n} . \tag{6}$$

Hence equations (4) become

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{E_{Z_2}(T)}{m_{Z_2}} + X \frac{\Delta E}{m_{Z_2}} + (1+X) \frac{R T}{m_{Z_2}}, \\ s &= \frac{S_{Z_2}(T, n)}{m_{Z_2}} + X \frac{\Delta S}{m_{Z_2}} + \frac{R}{m_{Z_2}} \left[ (1-X) \ln \frac{n_{Z_2}}{n} + 2X \ln \frac{n_Z}{n} \right], \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where  $\Delta E$  and  $\Delta S$  are the dissociation-energy and dissociation-entropy

$$\Delta E = 2 E_Z(T) - E_{Z_2}(T), \quad \Delta S = 2 S_Z(T, n) - S_{Z_2}(T, n). \quad (8)$$

Now, for the sake of simplicity, we assume:

$Z$ -atoms always having 3 translational degrees of freedom;

$Z_2$ -molecules always having 6 degrees of freedom: 3 translational + 2 rotational + 1 vibrational, viz. an always half-excited atomic vibration; this is the real behaviour of the nitrogen molecule at 1138° K, and of the oxygen molecule at 736° K.

Accepting constant numbers of degrees of freedom, we get specific heats not depending on the temperature; in particular the expression of  $E_{Z_2}(T)$  and  $S_{Z_2}(T, n)$  become, apart from inessential constants

$$E_{Z_2} = 3 R T, \quad S_{Z_2} = R \ln \frac{T^3}{n}. \quad (9)$$

Accepting a molecular freedom which is exactly double the atomic freedom, we get dissociation-energy  $\Delta E$  and dissociation-entropy  $\Delta S$  not depending on the temperature.

Hence a temperature  $\theta$  and a molar-density  $\nu$ , constant and specific of the dissociating molecule, can be defined by the following relations [5]

$$\Delta E = R \theta, \quad \Delta S = R \ln \frac{\nu}{n}, \quad (10)$$

which give to equations (7) the following form

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{R}{m_{Z_2}} [4 T + X (\theta + T)], \\ s &= \frac{R}{m_{Z_2}} \left[ \ln \frac{T^3}{n} + X \ln \frac{\nu}{n} + \ln \frac{(1+X)^{1+X}}{(1-X)^{1-X} (2X)^{2X}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Enthalpy and entropy respectively consist of 2 and 3 terms:

The first are the thermal-terms, as for homogeneous gases;

the second are the dissociation-terms, proportional to  $X$ ;

the third term of the entropy is the mixing-term (= 0 when  $X = 0$  or  $X = 1$ ), due to non-homogeneity of the gas (GIBBS' paradox).

Since the undissociated molecule has 6 degrees of freedom, its ratio of specific heats is 4/3. The sound speed and the Mach number in the  $\sigma_0$ -state are



therefore:

$$C_0 = \sqrt{\frac{4 \, \dot{p}_0}{3 \, \varrho_0}} = \sqrt{\frac{4 \, R \, T_0}{3 \, m_{Z_2}}} \, , \qquad M_0 = \frac{u_0}{C_0} = \sqrt{\frac{3 \, m_{Z_2} \, u_0^2}{4 \, R \, T_0}} \, . \tag{12}$$

The accepted simplified model of dissociating gas is substantially the same obtained, by a different way, in [4].

In order to describe the relaxation  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ , an expression of the dissociation rate is needed. According to the same hypotheses accepted to simplify the expressions of  $h$  and  $s$ , the number of  $Z_2$ -moles destroyed by dissociation in the unity of time and volume, viz. the molar-reaction-rate, has the following expression [5]:

$$\frac{k \, T}{h} \left[ \frac{n_{Z_2}}{e^{1+\theta/T}} - \frac{n_Z^2}{\nu} \right] . \tag{13}$$

$k$  and  $h$  are BOLTZMANN'S and PLANCK'S constants ( $h/k = 4.8 \times 10^{-11} \, ^\circ\text{K s}$ ). The first term corresponds to the reaction  $Z_2 \rightarrow 2 \, Z$ , the second to the reaction  $2 \, Z \rightarrow Z_2$ .

Since each  $Z_2$ -mole gives rise to two  $Z$ -moles having a mass  $m_Z = m_{Z_2}/2$ , the total mass of atoms produced in the unity of time and volume, viz. the mass-reaction-rate, becomes

$$A = m_{Z_2} \frac{k \, T}{h} \left[ \frac{n_{Z_2}}{e^{1+\theta/T}} - \frac{n_Z^2}{\nu} \right] . \tag{14}$$

The expression (13), free from empirical factors, was deduced in [5] from the theory of absolute reaction rate. The expression used in [2], developing the collisional arguments of [1], is quite different and, as the same writer shows by setting  $A = 0$ , it does not agree with the chemical equilibrium laws. This inconsistency is eliminated in [3] always in the limits of collisional theories, and having recourse to some empirical factors.

It is now convenient to introduce the following parameters, characteristic, like  $\theta$  and  $\nu$ , of the dissociating molecule:

pressure:  $\pi = \nu \, R \, \theta$ ,    speed:  $\varphi = \sqrt{\frac{R \, \theta}{m_{Z_2}}}$ ,    length:  $\lambda = \frac{h}{k \, \theta} \sqrt{\frac{R \, \theta}{m_{Z_2}}}$ .    (15)

Then, with the aid of equation (2) and of Table 1, we obtain the following useful expressions:

$$\left. \begin{aligned} h &= \varphi^2 \left[ \frac{4 \, T}{\theta} + X \left( 1 + \frac{T}{\theta} \right) \right] , \\ \varepsilon &= e^{m_{Z_2}s/R} = \frac{T^4}{\dot{p}} \left[ \frac{\pi}{\dot{p}} \cdot \frac{T}{\theta} \right]^X \frac{(1+X)^{1+X}}{(1-X)^{1-X} (2 \, X)^{2X}} , \\ A &= \frac{\dot{p}}{\varphi \, \lambda} \left\{ \frac{(1-X)/(1+X)}{e^{1+\theta/T}} - \frac{\dot{p}}{\pi} \cdot \frac{\theta}{T} \left[ \frac{2 \, X}{1+X} \right]^2 \right\} , \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

where  $\varepsilon$  is the entropy function, and the factor  $(p/\varphi \lambda)$ , like  $A$ , has the dimensions of a ratio: (mass-density)/time.

The numerical values of the characteristic parameters of the nitrogen and oxygen are given in Table 2.

Table 2

	$\theta$ °K	$\nu$ moles/cm <sup>3</sup>	$\pi$ atm	$\varphi$ cm/s	$\lambda$ cm
N <sub>2</sub>	113,700	64.91	$6.06 \times 10^8$	$5.81 \times 10^5$	$3.45 \times 10^{-10}$
O <sub>2</sub>	59,200	66.90	$3.25 \times 10^8$	$3.91 \times 10^5$	$3.18 \times 10^{-10}$

### The Shock Equations

The mass-, momentum-, energy-equations are the well-known ones:

$$\varrho u = \varrho_0 u_0, \quad p + \varrho u^2 = p_0 + \varrho_0 u_0^2, \quad h + \frac{u^2}{2} = h_0 + \frac{u_0^2}{2}, \quad (17)$$

where the properties of any  $\sigma$ -state behind the shock are written without subscript.

To get a simple first-approximation solution, two hypotheses will be employed:

*Strong shock*: upstream the shock the speed is so high as to make negligible the terms

$$p_0 < \varrho_0 u_0^2, \quad h_0 = \frac{4}{\varrho_0} p_0 < \frac{u_0^2}{2}. \quad (18)$$

*Isobaric-isenthalpic process behind the shock*: downstream the shock the speed is so low as to make negligible the terms

$$\varrho u^2 < p, \quad \frac{u^2}{2} < h. \quad (19)$$

Then equations (17) become

$$\varrho u = \varrho_0 u_0, \quad p = \varrho_0 u_0^2, \quad h = \frac{u_0^2}{2} \quad (20)$$

and express the conservation: of the mass through the shock, of the pressure and of the enthalpy behind the shock.

As a matter of fact, as is well known for homogeneous gases, the higher the upstream Mach number is, the lower the downstream Mach number; but the latter does not become zero when the former becomes infinite.

However the approximation (19) is better verified in the case of dissociating gases than in the case of homogeneous ones, because the average speed behind the shock is generally more reduced by the dissociation, as it will be shown further on.

In [1-3] the exact equations (17) are used and nearly constant values of the pressure behind the shock are found; in [4] the only approximation (18) is accepted.

The general system (3, 16, 20) with  $X_1 = 0$ , gives, for the  $\sigma_1$ -state

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{1}{8}, \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{4}{3} \frac{M_0^2}{M_0^2}, \quad \frac{T_1}{T_0} = \frac{M_0^2}{6}, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = \left(\frac{M_0^2}{12}\right)^3. \tag{21}$$

The entropy increase through the shock seems positive only when  $M_0 > 1.12$  = 3.46, and not when  $M_0 > 1$ , as one could obtain by the exact equations. This inconsistency does not follow from the approximation (19) but from (18) which requires rather high values of  $M_0$ .

Inserting the previous results in the general system (3, 16, 20) we obtain, for any  $\sigma$ -state behind the shock

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{u_1} = \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{(1+X)(1-X\theta/4T_1)}{(1+X/4)}, \quad \frac{p}{p_1} = 1, \quad \frac{T}{T_1} = \frac{(1-X\theta/4T_1)}{(1+X/4)}, \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \left(\frac{T_1}{\theta} \cdot \frac{\pi}{p_1}\right)^X \left(\frac{1-X\theta/4T_1}{1+X/4}\right)^{X+4} \frac{(1+X)^{1+X}}{(1-X)^{1-X}(2X)^{2X}}. \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

A comparison between equations (21) and (22) shows that the discontinuity  $\sigma_0 \rightarrow \sigma_1$  through the shock is completely controlled by the only parameter  $M_0$ , while the next relaxation  $\sigma_1 \rightarrow \sigma$  is completely controlled by the two parameters

$$\frac{T_1}{\theta} = \frac{T_0}{\theta} \cdot \frac{M_0^2}{6}, \quad \frac{p_1}{\pi} = \frac{p_0}{\pi} \cdot \frac{4}{3} \frac{M_0^2}{M_0^2}, \tag{23}$$

respectively describing, in non-dimensional form, the heating-effect and the compression-effect of the shock.

From equations (22) we deduce that, being  $X > 0$ , we will always have

$$T < T_1 \tag{24}$$

and, only if it is

$$T_1 < \frac{\theta}{3} \tag{25}$$

we will have

$$u < u_1, \quad \varrho > \varrho_1. \tag{26}$$

The condition (25) is not too restrictive ( $T_1 < 39,700^\circ\text{K}$  for  $\text{N}_2$ ,  $T_1 < 19,733^\circ\text{K}$  for  $\text{O}_2$ ) the ionization being already neglected. So the consequent equation (26) better justifies the approximation (19).

### The Equilibrium State Behind the Shock

The system (22) defines any  $\sigma$ -state behind the shock as a function of  $X$ . Now, to get the equilibrium  $\sigma_2$ -state, we must add the equilibrium condition

$$X_2 = \left[ 1 + \frac{4 p_1}{\pi} \cdot \frac{\theta}{T_2} e^{1+\theta/T_2} \right]^{-1/2} \quad (27)$$

obtained by setting  $A_2 = 0$  and, as already accepted,  $p_2 = p_1$ .

Equation (27) together with the isenthalpic, which, for the  $\sigma_2$ -state may be rewritten in the form

$$X_2 = 4 \frac{T_1/\theta - T_2/\theta}{1 + T_2/\theta} \quad (28)$$

defines completely the values of  $X_2$  and  $T_2$ ; successively the system (22) improves the determination of the  $\sigma_2$ -state.

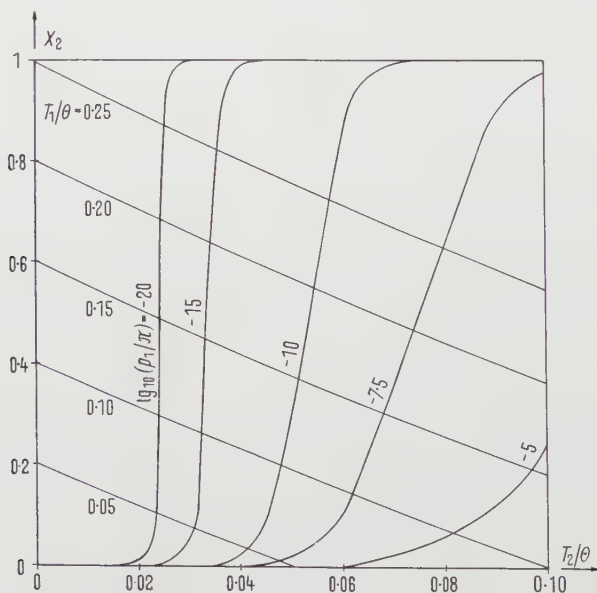


Figure 1

The characteristics  $X_2$  and  $T_2/\theta$  of the equilibrium  $\sigma_2$ -state, as functions of the heating effect  $T_1/\theta$  and the compression effect  $p_1/\pi$ .

The general solution of the system (27, 28) is graphically plotted in Figure 1, on the plane  $[T_2/\theta, X_2]$ .

The isenthalpic line (28) depends only on  $T_1/\theta$  and the more it lies to the right, the higher the value of  $T_1/\theta$ .

The isobaric-equilibrium line (27) depends only on  $p_1/\pi$  and the more it lies to the right, the higher the value of  $p_1/\pi$ .

The intersection of the specific isenthalpic and isobaric-equilibrium lines gives the  $\sigma_2$ -state, therefore depending on both parameters  $T_1/\theta$  and  $p_1/\pi$ .

Taking the plane of Figure 1 as a general plane  $[T/\theta, X]$ , the arc  $\sigma_1 - \sigma_2$  of the isenthalpic line shows the relaxation path behind the shock, as qualitatively shown in Figure 2.

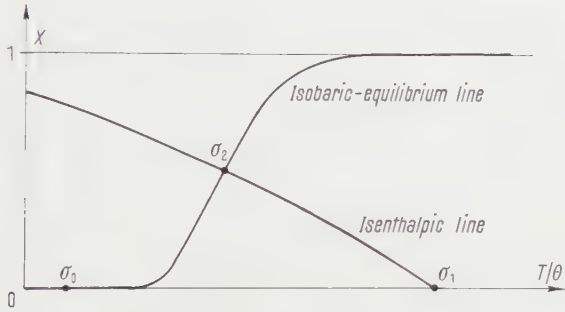


Figure 2  
 $\sigma_0 - \sigma_1$ : discontinuous transition through the shock;  
 $\sigma_1 - \sigma_2$ : continuous relaxation behind the shock.

As already said all the molecular transfer processes have been neglected. But, as proved in [1, 6], this approximation does not affect the estimate of the equilibrium  $\sigma_2$ -state.

The Relaxation Law

The previous analysis has given each  $\sigma$ -state behind the shock as a function of  $X$ , together with the equilibrium  $\sigma_2$ -state.

The relaxation law describes the  $\sigma$ -state as a function of the distance  $x$  from the shock front. This law is then given by the mass-balance of atoms produced by dissociation and removed by convection

$$A = \frac{d}{dx} (\rho_Z u) = \frac{d}{dx} (\rho u X) = \rho u \frac{dX}{dx}, \tag{29}$$

which may be rewritten in the following non-dimensional form

$$\frac{dX}{d(x/\lambda)} = \alpha, \tag{30}$$

where  $\alpha$  is the non-dimensional mass-reaction-rate

$$\alpha = \frac{A \lambda}{\rho u} = \frac{A \lambda}{\rho_0 u_0} = \frac{p}{\rho_0 u_0 \varphi} \left\{ \frac{(1 - X)/(1 + X)}{e^{1 + \theta/T}} - \frac{p}{\pi} \cdot \frac{\theta}{T} \left[ \frac{2X}{1 + X} \right]^2 \right\}. \tag{31}$$

Behind the shock we have

$$p = p_1 = \varrho_0 u_0^2, \quad \frac{p}{\varrho_0 u_0 \varphi} = \frac{u_0}{\varphi} = \frac{M_0 C_0}{\varphi} = \sqrt{\frac{4 T_0}{3 \theta} M_0^2} = \sqrt{\frac{8 T_1}{\theta}}. \quad (32)$$

Besides  $T$  and  $X$  are bound by the isenthalpic condition, which may be rewritten in the form

$$\frac{T}{\theta} = \frac{T_1/\theta - X/4}{1 + X/4}. \quad (33)$$

So the final expression of  $\alpha$ , as a function of  $X$  only, becomes

$$\alpha = \sqrt{s \frac{T_1}{\theta}} \left\{ \frac{(1-X)/(1+X)}{e^{(1+T_1/\theta)/(T_1/\theta - X/4)}} - \frac{p_1}{\pi} \cdot \frac{1+X/4}{T_1/\theta - X/4} \left( \frac{2X}{1+X} \right)^2 \right\}. \quad (34)$$

The formal solution of the system (30,34), being  $X = X_1 = 0$  for  $x = 0$ , is

$$\frac{x}{\lambda} = \int_0^X \frac{dX}{\alpha(X)}, \quad (35)$$

which, inverted, gives

$$X = X \left( \frac{x}{\lambda}; \quad \frac{T_1}{\theta}, \quad \frac{p_1}{\pi} \right). \quad (36)$$

Owing to the very complex expression of  $\alpha$ , a general analytic integration of equation (35) does not seem possible. An approximate approach will therefore be employed.

The reaction-rate  $\alpha$  decays from the non-equilibrium initial value  $\alpha_1$  to the equilibrium one  $\alpha_2 = 0$ , and it is the difference between two terms

$$\alpha = \bar{\alpha} \left( X; \frac{T_1}{\theta} \right) - \bar{\alpha} \left( X; \frac{T_1}{\theta}, \frac{p_1}{\pi} \right), \quad (37)$$

where  $\bar{\alpha}$  is the reaction-rate of the dissociation  $Z_2 \rightarrow 2Z$ , and  $\bar{\alpha}$  of the recombination  $2Z \rightarrow Z_2$ . The latter contains  $X^2$  as a factor.

The qualitative picture of the reaction-rates is shown in Figure 3. Equation (35) clearly shows that high values of  $x$  are essentially due to the lowest ones of  $\alpha$ , that is the length of the relaxation zone is essentially controlled by the final decay of  $\alpha$ .

Hence we accept the following asymptotic approximation

$$\alpha \approx \left( \frac{d\alpha}{dX} \right)_2 (X - X_2) \quad (38)$$

over the complete range  $0 < X < X_2$ . Such an approximation underrates the initial values of  $\alpha$ , viz. it overrates the lengths  $x$  in the relaxation zone, as shown in Figure 3. Inserting equation (38) into equation (35) we get

$$X \approx X_2 (1 - e^{-x/L}), \quad (39)$$



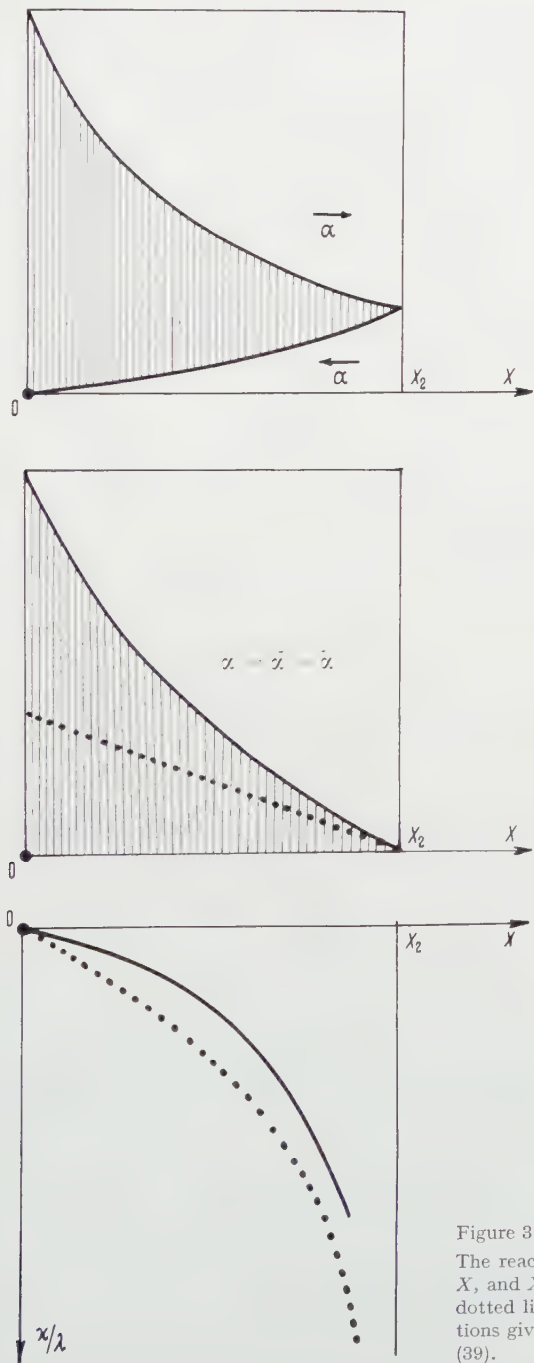


Figure 3  
The reaction rates plotted versus  $X$ , and  $X$  plotted versus  $x/\lambda$ . The dotted lines show the approximations given by equations (38) and (39).

where  $L$  is the space-constant of relaxation

$$\frac{L}{\lambda} = - \left( \frac{d\alpha}{dX} \right)_2^{-1} = \frac{X_2 (1 + X_2)^2 e^{1+\theta T_2}}{4\sqrt{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{X_2}{4} \cdot \frac{T_2}{\theta}} + \frac{X_2}{4} \left\{ 1 + \frac{X_2 (1 - X_2^2)}{8 (1 + X_2/4)} \left( 1 + \frac{\theta}{T_2} \right)^2 \right\} \right]} \quad (40)$$

Since the function  $\alpha$  and the  $\sigma_2$ -state depend on both parameters  $T_1/\theta$  and  $p_1/\pi$ , so does  $L/\lambda$ . But this explicit dependence is not analytically expressible;

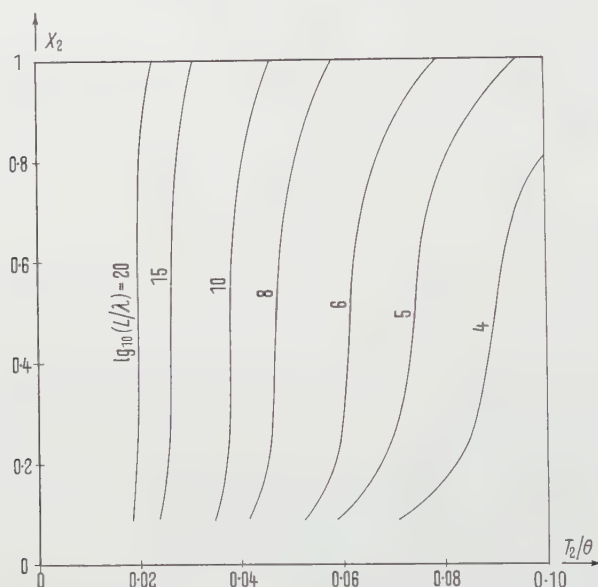


Figure 4

The space constant of relaxation as a function of the characteristics  $X_2$  and  $T_2/\theta$  of the equilibrium  $\sigma_2$ -state.

therefore equation (40), deduced using equations (28), (31), and (33), gives the dependence of  $L/\lambda$  on  $X_2$  and  $T_2/\theta$ . The function given by equation (40) is drawn in Figure 4, apart from the complex and not interesting zone  $X_2 < 0.10$ .

Excluding the limiting case  $T_2 = 0^\circ \text{K}$ !,  $L$  is always finite, viz. the function  $X(x)$  really attains the  $X_2$  equilibrium value exponentially and not more slowly.

A comparison between Figure 1 and Figure 4 shows that the  $L/\lambda$ -lines nearly go as the  $p_1/\pi$ -lines do, that is, high values of  $L$  are essentially due to low values of  $p_1$  and are nearly independent on  $T_1$ .

For a flow of nitrogen or oxygen, a space-constant  $L$  of about 1 cm corresponds to  $L/\lambda \approx 10^{10}$ , being  $\lambda \approx 10^{-10} \text{ cm}$ .

From Figure 1 and 4, such value of  $L/\lambda$  brings about  $p_1/\pi \approx 10^{-13}$ , that is  $p_1 \approx 10^{-5}$  atm being  $\pi \approx 10^8$  atm.

Hence for a Mach number  $M_0 \approx 10$ , the second equation (21) gives  $p_0 \approx 10^{-7}$  atm. Higher values of  $p_0$  give lower ones of  $L$ .

Such numerical values raise the question whether the absence of molecular transfer processes and the continuity of the medium too, were to be accepted.

Anyhow in every technical problem the length  $L$  must be compared with the length of the body producing the shock. If, as it generally will occur, one finds the former much lower than the latter, all the body behaves as wetted by a gas already in chemical equilibrium, viz. already cooled by complete dissociation.

Thus the present simplified analysis, which overrates  $L$ , will be useful for a first estimate of the phenomenon.

**Numerical Examples**

We consider two flows of pure nitrogen and oxygen, having the same initial conditions

$$T_0 = 300^\circ \text{ K}, \quad p_0 = 10^{-4} \text{ atm}, \quad M_0 = 15.$$

For both cases the system (21) gives

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{8}, \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_0} = 8, \quad \frac{p_1}{p_0} = 300, \quad \frac{T_1}{T_0} = 37.5, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 6,592.$$

Hence equations (23) and Table 2 give

	$\frac{T_1}{\theta}$	$\frac{p_1}{\pi}$
N <sub>2</sub>	0.099	$0.495 \times 10^{-10}$
O <sub>2</sub>	0.190	$0.924 \times 10^{-10}$

Inserting these values into equations (27) and (28), with the aid, for a first estimate, of Figure 1, we get:

	$X_2$	$\frac{T_2}{\theta}$
N <sub>2</sub>	0.20	0.047
O <sub>2</sub>	0.52	0.053

Then the system (22) gives:

	$\frac{u_2}{u_1}$	$\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$
N <sub>2</sub>	0.570	1.75	1	6.8
O <sub>2</sub>	0.425	2.35	1	557

In both cases the speed decays into the relaxation zone. Behind the shock the pressure has the constant value of  $3 \times 10^{-2}$  atm. In the relaxation zone the temperature decays from 11,250° K to 5,340° K for N<sub>2</sub> and from 11,250° K to 3,140° K for O<sub>2</sub>.

The ratio between the entropy increases in the relaxation zone and through the shock is

$$\frac{s_2 - s_1}{s_1 - s_0} = \frac{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}{\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_0)}$$

viz. 0.22 for N<sub>2</sub> and 0.72 for O<sub>2</sub>.

Finally equation (40) and Table 2 give:

	$\frac{L}{\lambda}$	$L$
N <sub>2</sub>	$6.57 \times 10^7$	$1.61 \times 10^{-2}$ cm
O <sub>2</sub>	$1.23 \times 10^7$	$3.91 \times 10^{-2}$ cm

Such lengths correspond to nearly 5 (for N<sub>2</sub>-molecule) and 17 (for O<sub>2</sub>-molecule) mean free paths, calculated in the  $\sigma_2$ -state.

### Concluding Remarks

The main results of the present simplified analysis are the following:

The discontinuous transition through the shock is only controlled by the upstream Mach number  $M_0$ , while the continuous relaxation behind the shock is only controlled by the heating-effect  $T_1/\theta$  and the compression-effect  $p_1/\pi$ ;

nearly only the compression-effect determines the space-constant of relaxation, or rather, its asymptotic value.

### REFERENCES

- [1] H. A. BETHE and E. TELLER, *Deviation from Thermal Equilibrium in Shock Waves*, Aberdeen Proving Ground, BRL Rep. No. X-117 (1945).
- [2] G. P. WOOD, *Calculation of the Rate of Thermal Dissociation of Air Behind Normal Shock Wave at Mach Number of 10, 12 and 14*, NACA TN 3634, Washington (April 1956).

- [3] J. S. EVANS, *Method for Calculating Effects of Dissociation on Flow Variables in the Relaxation Zone Behind Normal Shock Waves*, NACA TN 3860, Washington (December 1956).
- [4] M. J. Lighthill, *Dynamics of a Dissociating Gas*, Part I: *Equilibrium Flow*, J. Fluid Mech. 2, part 1 (January 1957).
- [5] G. JARRE, *On the Dissociation Rate of a Diatomic Gas*, Lab. Mecc. Appl. Politecnico di Torino, TN 2 (July 1957). Italian transl. in publ.: Rend. Acc. Naz. Lincei, Classe Sc. Fis., Mat., Roma (1957).
- [6] R. COURANT and K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience Publishers 1948).

### *Zusammenfassung*

Die Arbeit behandelt das Problem der Dissoziation eines reinen diatomischen Gases durch einen starken geraden Verdichtungsstoss. Mit Hilfe einiger vereinfachender Annahmen und eines theoretischen Ausdruckes für die Dissoziationsgeschwindigkeit wird eine analytische Darstellung der Resultate erzielt. Der Einfluss der Erhitzung und der Kompression durch den Stoss wird eingehend diskutiert.

(Received: November 29, 1957.)

# The Development of a Laminar Wing Type Turbine Bucket

By HANS KRAFT, Schenectady, N. Y., USA<sup>1)</sup>

Progress in the aerodynamic design of turbine elements is slow. A number of factors contribute to this situation.

The principal working elements of the turbines are stationary and rotating cascades. Cascade theory is a very special branch of aerodynamic theory. It is not very attractive since in most cases it leads to transformations which are not easily handled and which almost always lead to difficult and long drawn-out computation. The turbine generally calls for strong deflections of the fluid stream. This deflection eliminates the use of easy simplification by resort to the concept of small perturbations. To make matters worse, high deflection means that in most cases the effect of variable density must be considered. The theory of the compressible cascade still is to be developed.

Hence the efforts for a proper development of the aerodynamics of the turbine demand a very large effort which usually only the builder of large turbines is able to support.

On the other hand, the stakes in the large turbine are high. Even small improvements in aerodynamic performance will yield handsome returns to the turbine user. Thus much work can and is being done for this aerodynamic improvement. However, changes in large and very large units must be made with caution. In no case can a chance be taken which might lower performance. Thus any expected aerodynamic gain must be checked and double checked by experiment before it is introduced into general design.

These factors which contribute to the slow pace of aerodynamic design are often not entirely understood by the non-turbine man. The following description of an aerodynamic improvement may illustrate the situation.

The profiles forming the rotating cascade of an impulse turbine are still called buckets proclaiming their ancient ancestry from the water wheel. Thus while the aerodynamicists talk of blades, profiles and vanes, the turbine man may be allowed to talk of his 'buckets'.

The bucket in the impulse turbine has hardly, if at all, been changed since CHARLES CURTIS invented the impulse turbine around 1900. Its contour is based on a one-dimensional impulse concept. Since the pressure does not change while the fluid medium moves through the bucket passage, the velocity

---

<sup>1)</sup> General Electric Company, Large Steam Turbine-Generator Department.



remains constant. For this reason the profile is formed to provide a passage of constant cross section. The conventional method for the design of turbine stages is based on the velocity diagram representing one-dimensional flow. This type of calculation arrives at a tangential force from impulse considerations. It is only when the actual pressure distribution over the bucket is considered that a two-dimensional theory becomes necessary. Very simple

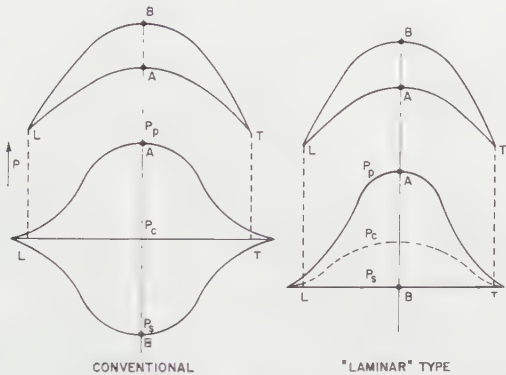


Figure 1  
Schematic pressure characteristics for impulse buckets.

considerations of this nature make it clear that there must necessarily be a difference in pressure between suction and pressure flank of the bucket. A constant cross section of the flow passage must be expected to provide a constant pressure along a mean streamline while a pressure drop followed by a pressure rise must be expected on the suction flank and the opposite behavior on the pressure flank. The situation is shown schematically on Figure 1. It should be noted that, for simplicity sake, the stagnation points at entrance and exit are not considered in the figure. The picture thus more nearly gives the conditions on a bucket with cusp at entrance and exit. A consideration of this picture suggests that a difficult situation exists as the flow must overcome a fairly steep pressure rise as it moves from the center of the suction flank towards the exit. Indeed, careful measurements of the flow vector issuing from a running turbine stage have indicated that, at least near the root, the vector direction indicates at least temporary separation from the suction surface. Such separation will, of course, diminish the minimum pressure reached and thus lower the tangential force.

This consideration suggested quite readily a means to eliminate such separation. If the passage can be so designed that the pressure on the suction flank remains constant, then a separation can hardly be expected. The boundary layers along the flanks, especially that along the pressure side, will then

automatically assure a slight pressure drop. Thus, in parallel with the thinking about the laminar airplane wing, it must be expected that a separation along the suction flank cannot take place until, near the trailing edge, the fluid will attempt to approach something like a stagnation point. Indeed it may even be expected that the boundary layer on the suction flank will remain laminar to a large degree. The convex curvature of the wall is sharp and the boundary

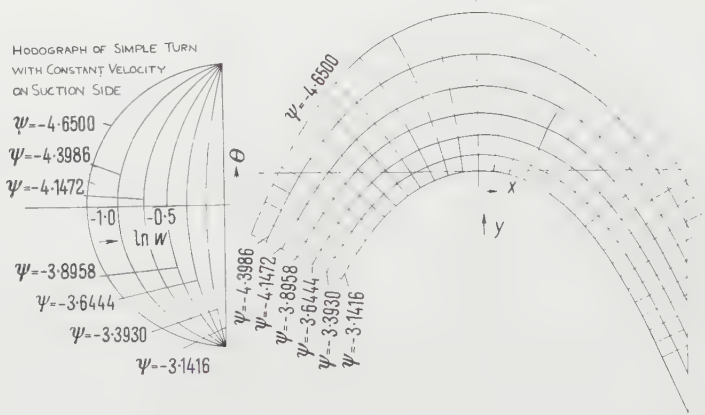


Figure 2

Simple two-dimensional turn (incompressible) computed by means of two singular hodographs.

layer is quite thin. Both factors help retard transition. The design of such a bucket would immediately help in another direction. It would make it possible to space the buckets further apart, thus decreasing the friction area, making the bucket carry more load, hence requiring fewer buckets.

The problem called for an aerodynamic design of such a cascade for given entrance and leaving vectors retaining constant pressure on the suction flank.

The original design was made shortly after the laminar wing had proved itself. At that time a good calculating method for this type of cascade was not available. Some work was, however, under way and some partial solutions were available.

The flow relative to the turbine bucket is below Mach number 0.5. Thus the computation can be made for the incompressible medium. It had been realized that the use of the hodograph plane presents a good opportunity to prescribe velocity along a contour, especially a constant velocity. Such a procedure is not, in fact, much different from the well-known 'free streamline' technique. Figure 2 shows an exceedingly simple representation of a flow turning through a prescribed angle with one streamline remaining at constant velocity. The hodograph of such a flow is merely a flow from source to sink in

the rectangular logarithmic hodograph coordinates 'ln W' (log of the velocity) and the angle  $\theta$ . The singularities, source and sink, are located on the ordinate prescribed by the velocity which is desired as the constant velocity and they are spaced apart in the  $\theta$ -direction by the distance  $(\theta_1 - \theta_2)$  representing the desired stream deflection. Thus the equation of this pattern is given by the simple equation

$$F = \varphi + i \psi = \ln \frac{z + i A_1}{z - i A_2},$$

with the denotation

$$z = \ln W + i \theta;$$

$$W = \text{absolute value of velocity} = \sqrt{u^2 + v^2};$$

$$\theta = \text{negative stream angle};$$

$$A_1, A_2 = \text{angle of approach and departure.}$$

In the case in question

$$A_1 = 0.489 = 28^\circ; \quad A_2 = 0.419 = 24^\circ.$$

As is seen, this is a bucket with a very small degree of reaction. The choice was made as a concession to tradition which prescribed a small narrowing of the channel from entrance to exit. Since the hodograph transformation is a transformation resulting in the conjugate velocity  $u - iv$ ,  $\theta$  is to be taken as the negative of the actual stream angle. To be commensurate with  $\theta$  the value of  $W$  appears as a ratio to a desired velocity at a given place, preferably at upstream or downstream infinity. The streamlines are the familiar harmonic circles adequately spaced.

This flow pattern translated into the physical  $(x, y)$ -plane gives the actual streamlines. The usual formulas

$$x = \int \frac{\cos \theta}{W} d\theta, \quad y = \int \frac{\sin \theta}{W} d\theta$$

are employed.

Figure 3 shows an extension of the method towards the design of an actual bucket. Here eight source and eight vortex singularities ( $i \ln z$ ) were used to generate the profile which, however, has cusps at entrance and exit.

Actually, as the art of this calculation had not yet progressed to furnish finite entrance and exit edges, a pattern as shown in Figure 2 was used for the design. Within the pattern a desired width (axial dimension) and conforming to that, a tangential spacing (pitch) was delineated. The flow pattern then was gradually changed by flux plotting technique until realizable entrance and exit edges were obtained. These edges had to, of course, fit themselves into the overlaying rule that the velocity along the convex flank was maintained as constant as possible. It appeared that this procedure was quite difficult and

time-consuming. Large changes in the velocity gradient would appear for relatively minor changes in contour. The prescriptions for cascade flux plotting given in WEINIG's book [2]<sup>2)</sup> were quite helpful. The final bucket shape, thus obtained, is shown in Figure 4 together with the equivalent cascade of conventional design. The pitch (spacing) of the new bucket is larger than that of the conventional.

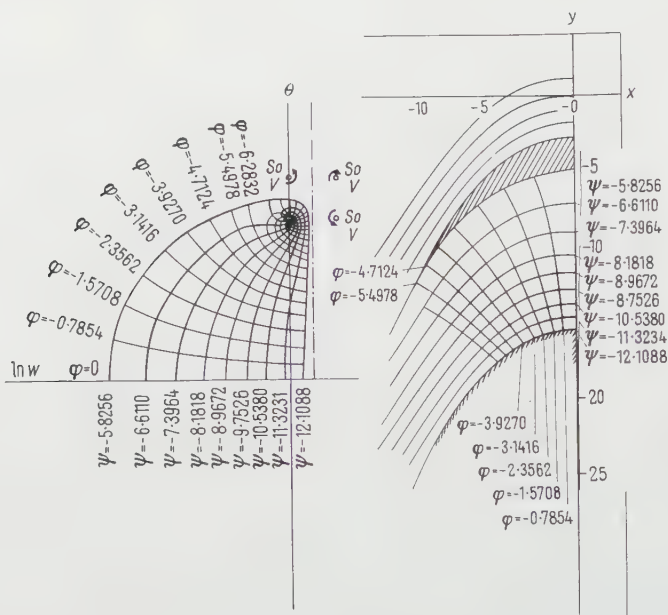


Figure 3

Bucket cascade computed by means of sixteen singular hodographs.  $60^\circ - 60^\circ$  bucket turn.

In the meantime this 'hodograph synthesis' as it is called has been developed to a standard calculation, using the IBM-704. A description of it will appear within twelve months.

As was to be expected, the resulting flow channel is wider in the center than at either entrance or exit. Entrance and exit edge were only slightly rounded.

In the turbine the bucket must be adapted to the radial pressure rise which results from the strong tangential component.

The flow ahead of the bucket tends to approach a free vortex, the more so the more one succeeds to approach truly potential flow conditions. Thus buckets, except those in stages of small radial height, are adapted to a radial angle variation (free vortex design). Since this leads to an increase of reaction from

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 421.

root to tip there was immediately also designed a modification of this bucket with a rather blunt entrance nose. It was obtained by further modifying the flux plot of the bucket to a blunt entrance. This also was a tedious procedure. It seemed to show that the flow pattern into such a bucket is not too closely determined. This might mean that the viscous forces in the stagnation boundary layer probably decide the actual location of the forward stagnation point.

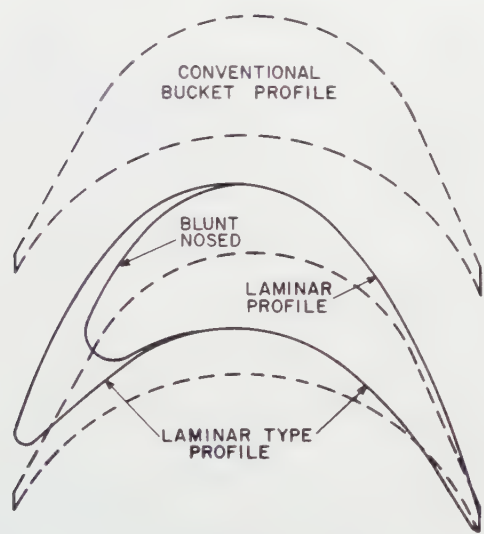


Figure 4  
Comparison of computed laminar type profiles with conventional shape.

For this reason the design of this blunt nosed section was perhaps not carried through as meticulously as that of the 'sharp' nosed section.

It is of some interest to mention here that the calculation of a high curvature cascade will always run into the requirement for rather unusual accuracy. Whether one uses conformal transformation, distributed singularities or flux plotting, this situation always appears. Whoever actually has computed cascades is familiar with this situation.

The bucket profiles thus obtained were first subjected to rigorous cascade testing.

The first set of experiments was made on cascade models of two and one half times normal turbine size. Three profiles were made and tested by full three-dimensional impact traverse. Figure 5 illustrates such a setup. The flow approaches the model at the desired angle. The model itself consisted of a number of profiles which was large enough to assure that those in its center

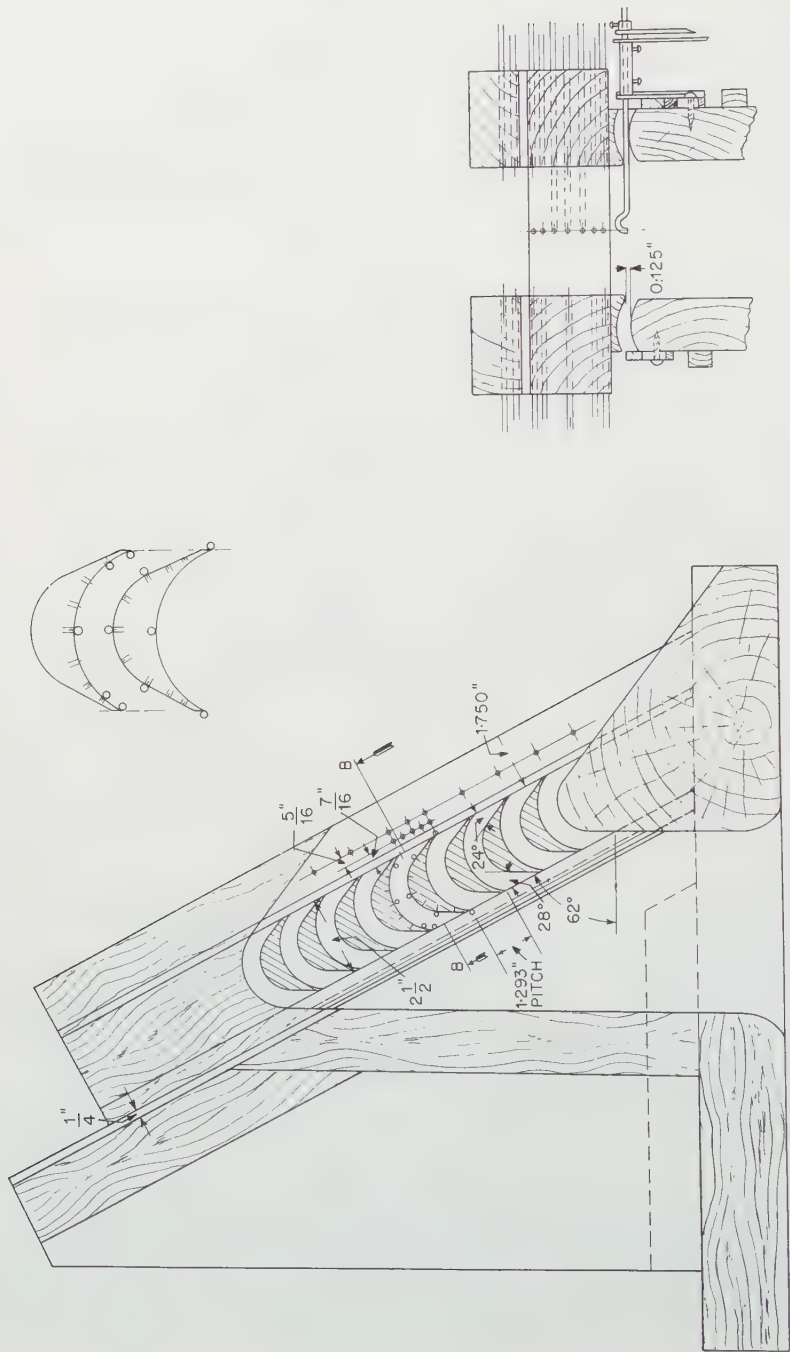


Figure 5  
Test setup for first cascade test (conventional bucket setup).



which were traversed were not affected by end effects. Since there is a large disparity in length of approach wall from one end of the model to the other, openings were provided to bleed off the end wall boundary layers of the approach section. Still the model would have to receive a rather thick approach boundary layer at the sidewalls of the passage (representing the radial end walls). To eliminate this condition controllable slots were provided at the sides

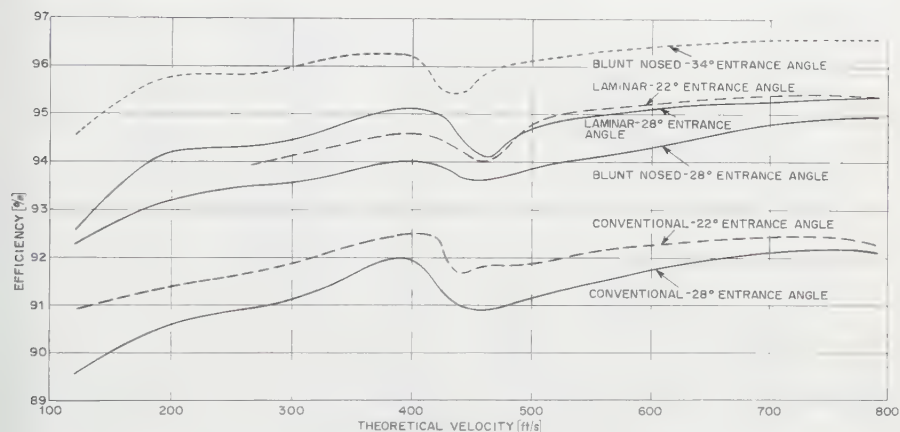


Figure 6

Comparison of efficiency characteristics of conventional, laminar and blunt-nosed laminar bucket.

of the model and a carefully calculated amount of flow removed. A large number of static pressure openings were provided to check on the pressure distribution and to assure that the traversed openings were free from tangential variation. Three models were tested, one with the conventional profile and two with the new profiles. The efficiency results are shown on Figure 6. Efficiency is given by

$$\eta = \frac{\int \rho W^3 dA}{W_{th}^2 \int \rho W dA},$$

where

$W$  is the velocity computed from impact tube measurement  $\Delta P$ ;

$W_{th}$  the theoretical velocity calculated from pressure ratio;

$\rho$  the variable density computed from  $\Delta P$ ;

$A$  the cross sectional area of passage at exit;

$\Delta P$  the total pressure measured at inlet minus total pressure at exit.

It is assumed that the impact tube is insensitive to angle over a large enough range and that the static pressure variation at the exit is of the same

order of magnitude for the three models. This simplification will, if any error due to it should be significant, work to the disadvantage of the new designs which have the wider spacing. The method of traversing is essentially the same as described in [1]. The location of the pressure measurements can be seen on Figure 5. Figures 6 and 7 give a comparison of the efficiencies thus measured at three different entrance angles. Both figures show that the efficiency of the

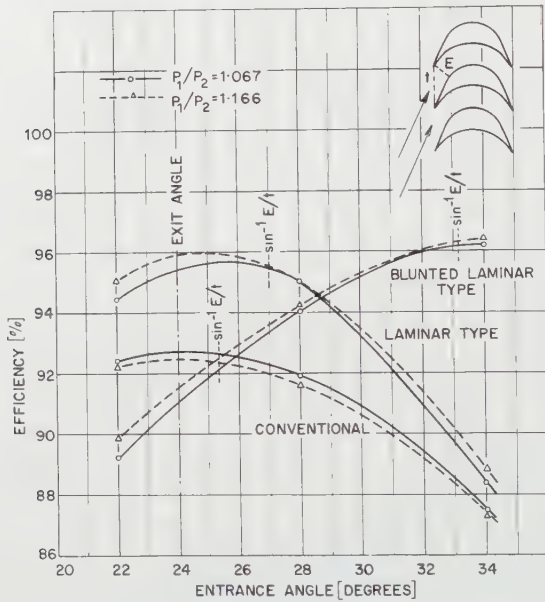


Figure 7

Efficiency variation of three buckets with entrance angle.

two new designs is a good deal better than that of the conventional. At optimum approach angle the loss of the new design is somewhat more than half that of the old section. This is a remarkable gain. In a turbine the relative velocity to the bucket is about one half of that of the nozzle. In consequence, talking roughly, bucket energy is about one fourth of the nozzle energy, which for true impulse is the energy of the stage. Thus the gain of roughly 4% must be divided by four when measured against the turbine energy. Still the order of magnitude of the expected gain is between  $\frac{1}{2}$  and 1%. This is, in turbine language, a remarkable gain. At about 450 ft/s there is a local minimum for all profiles. This is attributed to a Reynolds number effect. Very probably there is a transition on the concave wall since close investigation of the boundary layer on the convex wall fails to find transition to any noticeable amount.

The highest efficiency is recorded for the blunt nosed profile at 34° entrance angle. At this angle there is already some reaction and hence the efficiency gain here cannot be entirely attributed to the profile shape. An interesting comparison is given by Figure 8. It shows the static pressure along the convex wall as a function of the distance along the wall. The curve for the laminar profile appears very much as calculated. The pressure is gently dropping only

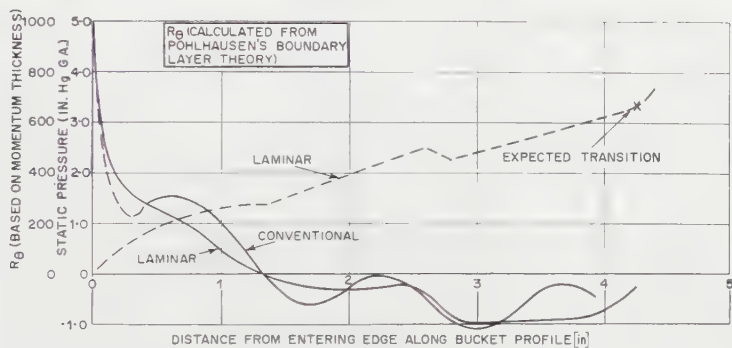


Figure 8

Pressure along suction flank of conventional and laminar profile (dashed line: Momentum thickness Reynolds number for laminar profile).

to rise near the very end of the profile as some approximation to a stagnation point is attempted. Experiments have proved that the wakes behind such trailing edges are vortex streets. Hence the pressure in the vicinity of the edge is not steady-state and varies between full separation and a complicated potential configuration. There is a sudden change in characteristics around 2.6'' from the nose. This seems to indicate some kind of burble on the concave side. Indeed the velocity at which these pressures were measured is slightly above that where the Reynolds number disturbance is located. The characteristic of the conventional profile is not so easily understood. While after stagnation the pressure attempts to drop to the negative values which potential theory would describe this is prevented by a pressure rise, due to some separation which apparently later is suppressed by the passage through the exit throat after which there is again a pressure rise towards exit pressure. It must be born in mind that in this comparison the laminar bucket is loaded very much more severely than the conventional. In the light of this the difference in efficiency is well born out by the pressure characteristic. The figure also shows a curve giving the boundary layer Reynolds number arrived at from a boundary layer calculation. POHLHAUSEN's theory was used. Expected transition is very close to the trailing edge (97%). An equivalent computation for the conventional profile indicated transition at about 85% of the surface.

These findings seemed important enough to carry through a full scale program:

A more elaborate cascade investigation was made on a model of actual dimensions.

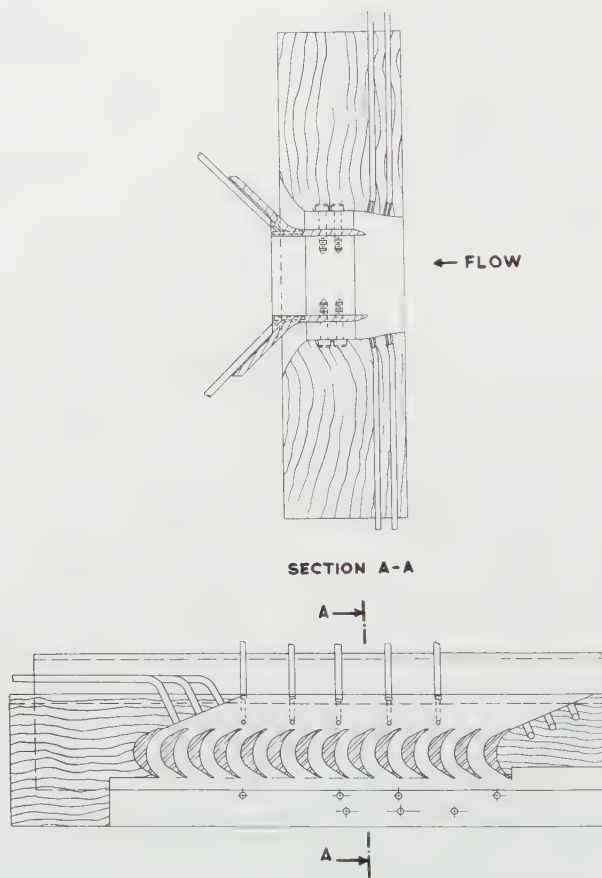


Figure 9

Test setup for second, refined cascade test.

A wheel was built with these buckets and tested on a single stage air turbine which is carefully instrumented.

Finally three regular stages were built and tested on a special three-stage experimental steam turbine.

None of these tests showed anything which differed materially from the first findings. This is not the place to go into them in detail. For completeness sake they are discussed here shortly:

*Cascade Tests*

The test setup for this experiment is shown in Figure 9. It provides splitter plates as end walls for the bucket passages, thus assuring a boundary layer flow only from the passage entrance. It was already mentioned that this model was built in the size of the bucket as it would be first used in the turbine, i.e., 1/2.5 the size of the first model. The results are shown in Figures 10 and 11.

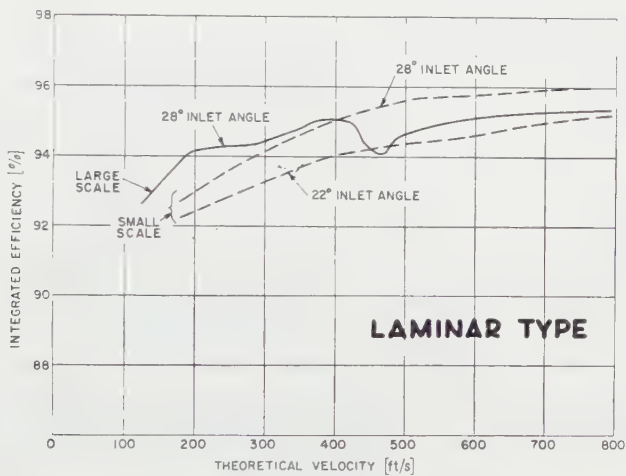


Figure 10

Comparison of efficiency characteristics of two cascade tests (blunt-nosed laminar type).

They show some little variation from the original test. It is, however, small as far as efficiency level is concerned. The experiments were made at the same pressure ratios as used with the large model. Thus the Reynolds number of the flow is 40% of that of the earlier test. The lower values at the lower end of the small model can be explained in this manner. Otherwise there are some differences in the characteristics which can be explained by the thinner end wall boundary layer and there are some differences which are not as yet fully explained. Since efficiency still showed essentially the former level, the step to the more elaborate running test in a turbine was justified.

*Air Turbine*

This air turbine consists of one full nozzle cascade and one wheel. It is essentially a low Reynolds and low Mach number device. It is used primarily for detailed studies of the behavior of the single stage and it is very convenient when used for trying out new ideas. The results of the tests are shown in

Figures 11 and 12. On account of the low Reynolds number prevailing in this turbine, the level of efficiency is not high. What is of importance is the comparative performance of the stages. Figure 12 gives such a comparison at a ratio: bucket exit area to nozzle exit area equal to 1.8. This is impulse condition. A so-called speed curve (efficiency versus velocity ratio) is shown at a radial leakage clearance of 0.02" and also the efficiency variation as this

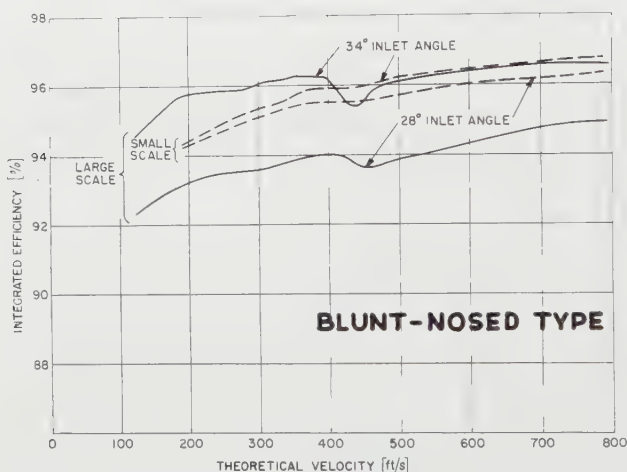


Figure 11

Comparison of efficiency characteristics of two cascade tests (straight laminar type).

clearance is varied. The laminar type bucket is consistently superior by a comfortable  $\frac{1}{2}\%$  which is the amount which had to be expected in view of what has been said before about the relative energy in the impulse stage. Figure 13 gives the same comparison at an area ratio of 1.4, which is a partial reaction stage. Here the superiority of the laminar design is greater since the bucket carries more of the stage energy. In this test the blunted laminar bucket also was entered. It is remarkably better than the impulse type laminar bucket which at this reaction is at some disadvantage. As expected, this stage is much more sensitive to clearance variation. In view of these favorable answers the final, rather expensive, test on an actual three-stage steam turbine was decided upon.

### *Steam Turbine*

This turbine is also a developmental installation. Its design represents conditions prevailing in the early intermediate stages of a turbine where radial pressure and angle variation have begun to be important. Hence the profiles



have radial angle variation to fit these conditions. A picture of the turbine with a conventional blading is shown on Figures 14 and 15. The laminar blading is adapted to the same turbine geometry and flow conditions. The results of the experiments are shown on Figure 15. They give the laminar bucket design a superiority of better than 1% in performance. It should be born in mind

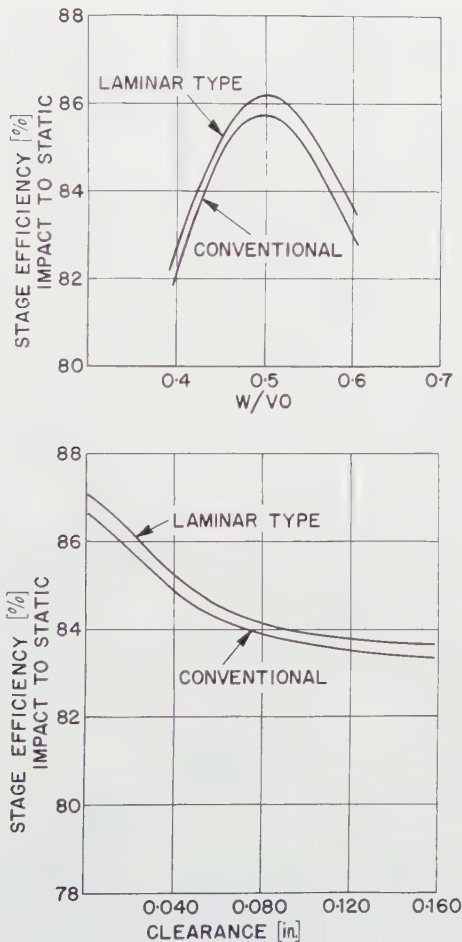


Figure 12

Air turbine efficiency comparison:  $\frac{\text{area buckets}}{\text{area nozzles}} = 1.8.$

Variation with velocity ratio (at tip clearance = 0.020") and with tip clearance at velocity ratio for peak efficiency.

that the difference around  $w/v_0 = 0.5$  is primarily important. The much larger differences at higher velocity ratios are less significant. As explained before, this difference, while appearing small to the layman, represents important progress for turbine design. The laminar type of bucket is now performing in a large number of turbines and is a regular item in turbine design.

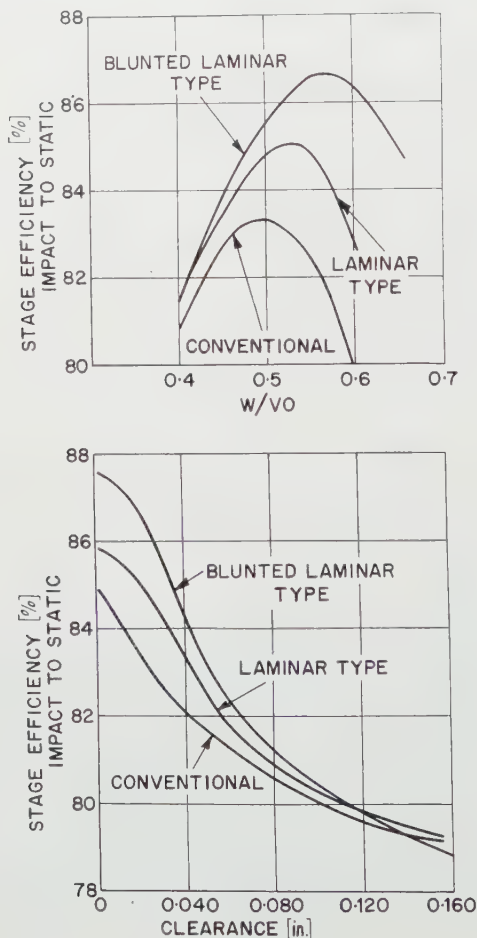


Figure 13

$$\text{Air turbine efficiency comparison: } \frac{\text{area buckets}}{\text{area nozzles}} = 1.4.$$

Variation with velocity ratio (at tip clearance = 0.020") and with tip clearance at velocity ratio for peak efficiency.

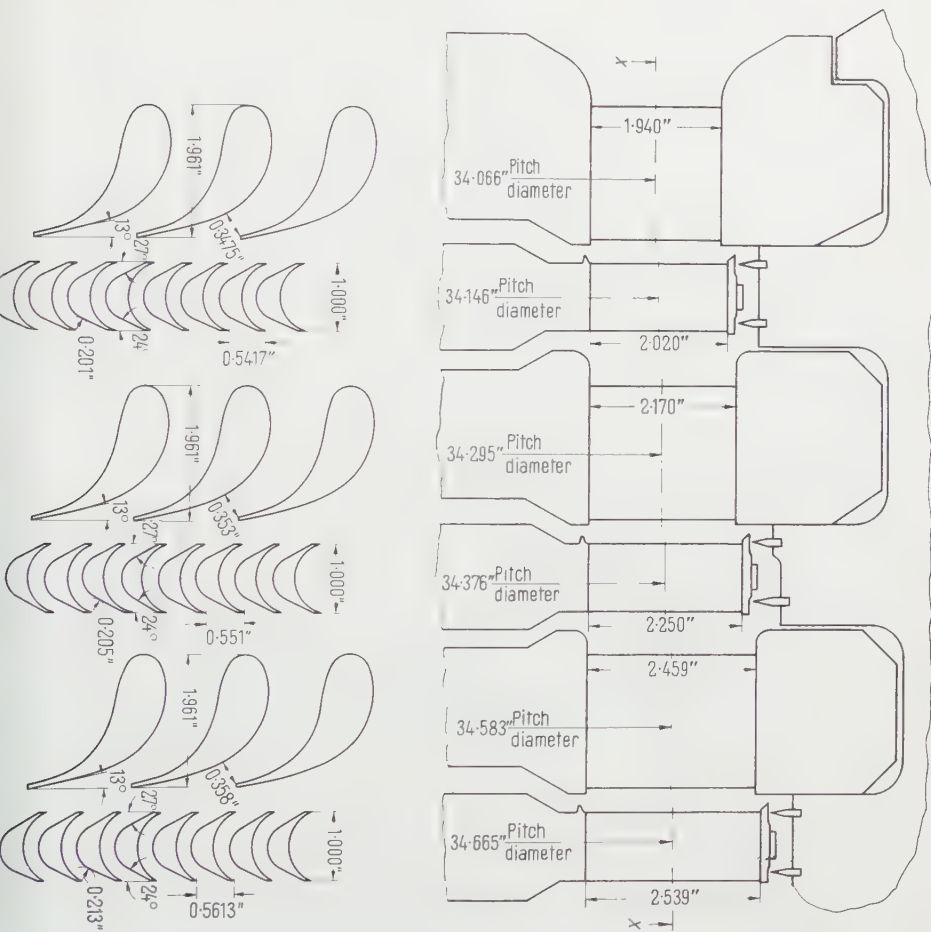


Figure 14

Stream path diagram for three-stage steam turbine test (case of a conventional bucket).

It was the objective of this presentation to take the reader through the steps which are necessary to pass a scientific idea through the various steps of 'applicable' physics to—in the end—actually 'applied' physics.

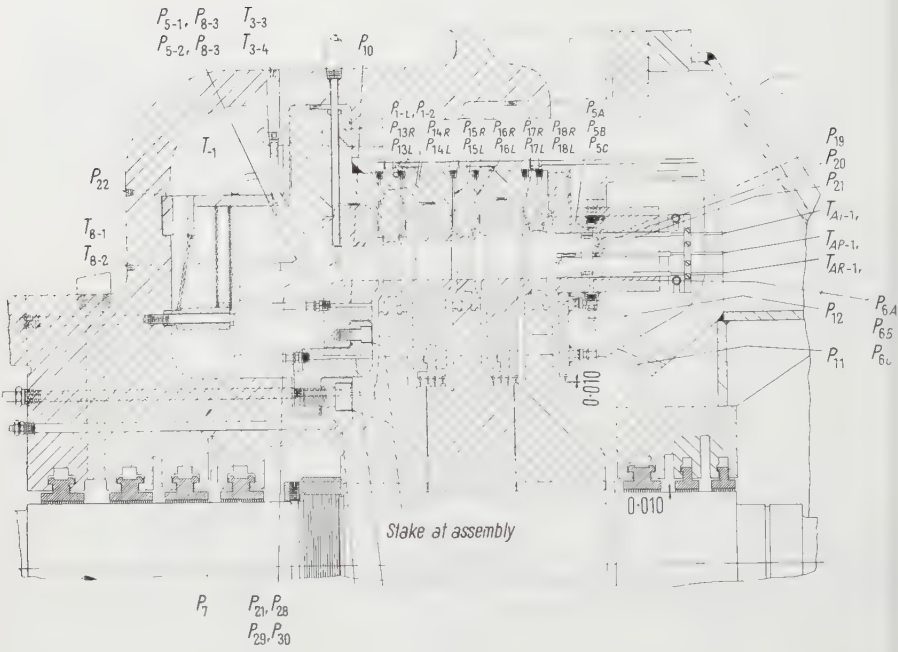


Figure 15  
Cross section of experimental steam turbine.

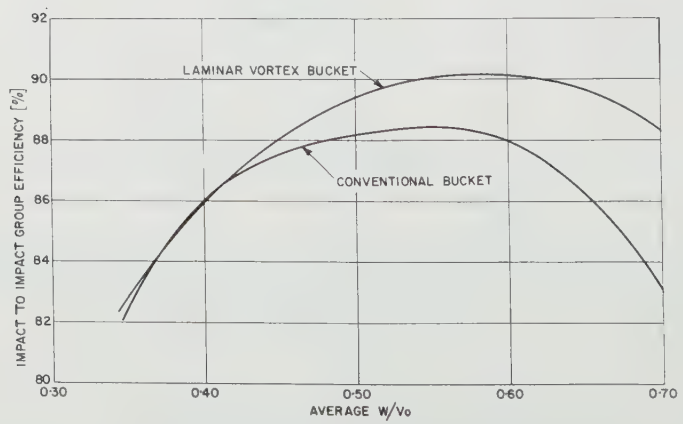


Figure 16  
Efficiency comparison resulting from steam turbine test.

## REFERENCES

- [1] H. KRAFT and T. M. BERRY, *Automatic Integrating Pressure Traverse Recorder for Study of Flow Phenomena in Steam Turbine Nozzles and Buckets*, Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. 1940 (August).
- [2] F. WEINIG, *Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen* (Barth, Leipzig 1935).
- [3] H. KRAFT, *Aerodynamic Lattice Calculations Using Punched Cards*, Proceedings. Scientific Computation Forum (International Business Machines Corporation, New York 1948), p. 60.
- [4] C. R. FAULDERS and E. G. COLE, *Interferometer Study of a Flow Through a Turbine Cascade*, Report, Gas Turbine Laboratory, Massachusetts Institute of Technology.
- [5] C. R. FAULDERS, *An Interferometer Investigation of the Flow Through a Cascade of Turbine Nozzle Blades*, Amer. Soc. mech. Engrs. 1952.
- [6] K. POHLHAUSEN, *Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht*, Z. angew. Math. Mech. 1, 252 (1921).

*Zusammenfassung*

In Analogie zum Gedankengang, der zur Einführung des Laminarflügels führte, wurde eine Leitschaufel für eine Gleichdruckturbine konstruiert. Die Methode für die Originalkonstruktion beruhte auf einer Kombination von Singularitäten in der Hodographenebene und einem Netzverfahren in der  $(x, y)$ -Ebene. Die Schaufel wurde im Gitterversuch, in einer einstufigen Luftturbine und schliesslich in einer dreistufigen Dampfturbine genau geprüft. Sie ergab einen Gewinn am Wirkungsgrad zwischen einem halben und einem Prozent. Sie wurde daraufhin im Turbinenbau eingeführt. Ein völlig automatisches Hodographenverfahren zur Berechnung dieser Schaufeln ist in stetigem Gebrauch. Es wird bald veröffentlicht werden.

(Received: October 1, 1957.)

# Some Problems in Design and Operation of Blowdown Wind Tunnels

By JULIUS LUKASIEWICZ, Ottawa, Canada<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

In his 1935 Volta Congress paper [1]<sup>2)</sup> Professor ACKERET gave a comprehensive review of various types of high speed wind tunnel designs and described in some detail the continuous, closed circuit type driven by a multi-stage axial compressor, which he first introduced in Zürich. The Ackeret type installation has since seen phenomenal development, culminating in transonic and supersonic facilities having 16 ft square test sections, using over 200,000 h. p. in drive power and providing the ultimate in model size and test flexibility [2]. It is interesting to note that some design refinements recently used in large, continuous high speed tunnels, were incorporated by ACKERET in the first design. For example, a diffuser-injector test-section bypass was provided in the Zürich tunnel for operation in the upper Mach-number range.

More recently, the evolution of high-speed-wind-tunnel design has been towards relatively large, intermittent installations of blow-down type, which appear to combine economy with high performance and, using modern instrumentation methods, are capable of attaining high outputs of test data [3, 4]. However, their design has advantages as well as difficulties, some of which were envisaged by ACKERET in 1935, when he wrote [1]: *'From the point of view of economy, direct operation with high pressure air would be more advantageous, but it has the drawback, however, that the pressure and temperature change during the test. A pressure regulator would remove the first difficulty, but the temperature would still fall since any throttling process would have no effect on it.'*

Solutions of these and other problems, which arise from the mode of operation and the wide Mach-number range of blowdown wind tunnels, are the subject of this paper. Some experimental results obtained with a 5 in. square blowdown tunnel built as a model of a projected 5 ft square facility are reported.

## 2. Model Tunnel

The NAE 5 in.  $\times$  5 in. wind-tunnel installation is shown in Figure 1. During a tunnel run air, stored at 20 ata in a cylindrical vessel, expands and discharges

<sup>1)</sup> National Aeronautical Establishment.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 436.



through the pressure control valve into the settling chamber and then through contraction and a supersonic and/or a transonic section into the diffuser and atmosphere. The perforated transonic section (not shown in Figure 1) can be either interchanged with the supersonic section or can be put in series with it.

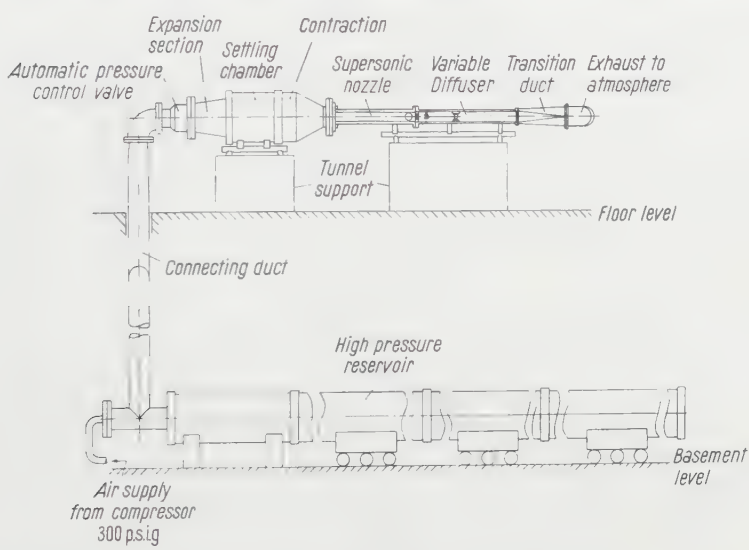


Figure 1  
NAE 5 in. × 5 in. model blowdown wind tunnel installation.

Of the tunnel proper, all components are of standard design with the exception of settling chamber and diffuser, which have to meet special requirements discussed below. The tunnel is capable of operation at Mach numbers from 0.2 to 4; the actual upper limit is set by air condensation.

### 3. Stagnation Temperature Control

In order to prevent, in the course of a tunnel run at a constant stagnation pressure, Reynolds number variation and undesirable effects on instrumentation, it is necessary to maintain stagnation temperature at a substantially constant value. Furthermore, if heat is added upstream of the pressure control valve, the running time may be appreciably lengthened.

In the model tunnel installation temperature control is achieved by filling the air storage vessel with tin cans. The method, originally proposed and tested by the North American Aviation [5], is effective in appreciably limiting the temperature drop but, with a cylindrical tank configuration, results in relatively large pressure losses.

Table 1  
*Characteristics of Model Air Storage – Tin Can-Temperature-Stabilization System*

Air reservoir. . . . .	length 60 ft, inner diameter 1.92 ft, volume 173 ft <sup>3</sup> , inside surface area 365.3 ft <sup>2</sup> , wall thickness 0.5 in.
Tin cans . . . . .	height 2.6 in., diameter 3 in., one end open
Can surface area loading . . . . .	25.6 ft <sup>2</sup> /ft <sup>3</sup>
Can weight loading . . . . .	6.74 lb/ft <sup>3</sup>
Loading ratio . . . . .	3.8 ft <sup>2</sup> /lb

The characteristics of the model tunnel temperature stabilization system are given in Table 1 and its performance in Figure 2. The NAE tests covered

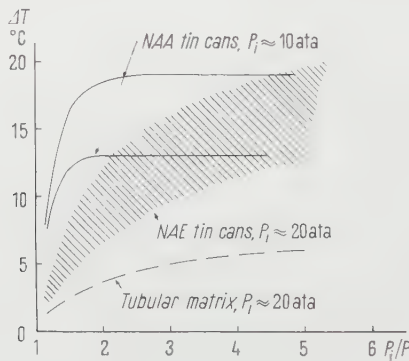


Figure 2  
Temperature drop  $\Delta T$  with tin can and tubular heat storage matrices.  $P_i$  = initial pressure.

a wide range of Reynolds number, from 2,000 to 25,000 (based on the ratio of reservoir volume to total surface area of cans and on mass flow per unit reservoir cross-sectional area), but showed no consistent variation. Depending on mass flow, the temperature drop amounted to from 12 to 19°C for a five-fold drop in pressure at the reservoir exit. The corresponding isentropic temperature drop would equal about 110°C.

From comparison with results of tests carried out initially with a one quarter volume reservoir similarly filled with tin cans it was ascertained that temperature drop could be accurately correlated, at the same mass flow, in terms of pressure ratio  $P_i/P$  or running time per unit volume, thus allowing to estimate the full scale performance.

In Figure 2 are included results of NAA tests [5] at two mass flows, made with a 26 ft diameter sphere filled with tin cans to a loading of about 17 lb/ft<sup>3</sup> <sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup> A loading of about 7 lb/ft<sup>3</sup> is used in the full scale NAA installation [5].

Comparison with the NAE data (6.74 lb/ft<sup>3</sup> loading) would indicate a somewhat poorer temperature stabilization performance, likely compensated by a much smaller pressure loss.

The pressure losses in the NAE cylindrical reservoir were measured over a range of mass flows and were found to be between 33  $q_E$  and 27  $q_E$  per foot of the reservoir length, where  $q_E$  is the dynamic pressure at the reservoir exit.

While the above described system provided satisfactory temperature control for the model tunnel, it would have been uneconomical for use with the full scale facility, on account of large pressure losses and overall cost. Instead, the performance obtainable with a heat storage matrix of similar average weight and surface loadings, but consisting of thin-wall metal tubes, partly filling the last of three cylindrical air vessels connected in series, was estimated and found favourable.

Table 2  
*Characteristics of Air Storage-Tubular Matrix Temperature Stabilization System*

Air reservoir. . . . .	3 in series, each 140 ft long, 11.5 ft diameter, total volume 44,000 ft <sup>3</sup>
Tubes . . . . .	outside diameter 0.75 in., wall thickness 0.015 in., length 90 ft each
Tubular matrix . . .	length 90 ft, located in downstream end of last tank, weight 332,000 lb, volume occupied 9350 ft <sup>3</sup> , surface area (inside of tubes only) 514,000 ft <sup>2</sup> , weight loading 35.5 lb/ft <sup>3</sup> , surface area loading 55 ft <sup>2</sup> /ft <sup>3</sup>
Average (based on 44,000 ft <sup>3</sup> ) loading .	surface area 11.7 ft <sup>2</sup> /ft <sup>3</sup> , weight 7.54 lb/ft <sup>3</sup> , loading ratio 1.55 ft <sup>2</sup> /lb

The characteristics of this type of heat storage matrix are given in Table 2 and the calculated temperature drop is shown in Figure 2. The matrix itself is much denser than the one consisting of tin cans, so that, with an average weight loading of 7.54 lb/ft<sup>3</sup> it occupies only 21% of the storage volume. Assuming that only the inner tube surfaces are effective in heat transfer, the average surface loading of the tubular matrix is only 42% of that obtainable with tin cans. In spite of this a much smaller temperature drop, of about one half of the smallest measured with tin cans, was calculated, with matrix pressure losses amounting to only 0.32  $q_E$  per foot of matrix length or 0.1  $q_E$  per foot of reservoir length. The matrix Reynolds number, based on the tube diameter, was about 110,000 for the case considered.

- The above examples indicate that:
- (i) a high degree of temperature stabilization can be attained provided the heat storage matrix has a large average surface area/weight ratio and
  - (ii) tangential (to the air flow) orientation of the matrix surfaces if preferable to a random one.

## 4. Stagnation Pressure Control

### 4.1 Model Valve

The primary purpose of the pressure control valve is to maintain tunnel stagnation pressure at a constant, preselected value while the tunnel is running at a constant Mach number and the air expands in the storage reservoirs. The only available control variable is the valve flow area and therefore a design

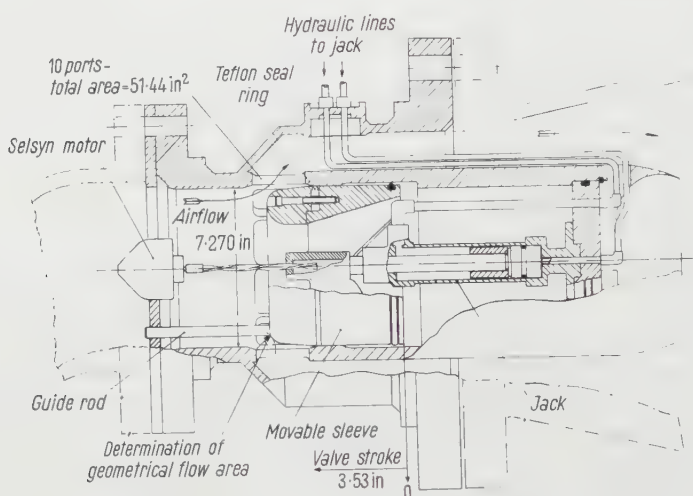


Figure 3  
Pressure control valve.

which provides wide range of flow areas and a suitable, from the control point of view, relationship between the actuator motion and valve opening, is required.

The pressure control valve developed for the model tunnel is shown in section in Figure 3. The cylindrical valve port area is adjusted by means of an internal sleeve actuated by a hydraulic jack. The air issues from the valve through an annular opening around the sleeve and jack housing into the settling chamber.

### 4.2 Valve Flow Characteristics

The critical design conditions in operation of a pressure control valve are reached at the end of a tunnel run, when the valve has fully opened. At this instant the minimum storage pressure at which the tunnel will continue to run at the specified mass flow is determined by the valve size and its flow characteristics.

The minimum choking pressure ratio and the coefficient of discharge (or ratio of effective to geometrical flow area) were experimentally determined for the model valve shown in Figure 3. The procedure adopted was to run the tunnel at stagnation pressure and Mach number selected so as to cause the valve to remain fully open over an appreciable portion of the tunnel run. The wind tunnel nozzle served as a flow meter and continuous measurements of pressures upstream and downstream of the valve, the tunnel stagnation pressure and nozzle throat pressure were taken.

Conditions in which the valve, fully opened, is only just choked, were determined from plots of valve pressure loss coefficient  $\Delta P_v/P_s$  and mass flow against upstream valve pressure  $P_s$ . The minimum pressure loss for choked valve flow was found to be  $0.17 P_s$  (46% of the sonic dynamic head) and the discharge coefficient to equal 0.7. The geometrical flow area of 26 in<sup>2</sup> on which the discharge coefficient was based was obtained by drawing a circle with its centre on the upstream face of the ports and tangent to the nose of the movable sleeve, as indicated in Figure 3.

#### 4.3 Valve Size

Assuming for the moment the flow through the valve-wind tunnel nozzle system to be free of losses when the valve is fully open, the Mach number in the valve would merely depend on the ratio of valve flow area to the tunnel nozzle throat area. For example, for a valve having the fully open area equal to the tunnel working section area, the Mach number at the valve would be equal to less than 0.06 for a Mach number 4 nozzle and, in the actual case, because of the low velocity in the valve, the losses would be small. The highest Mach number would be reached at the valve (Mach number of one for this particular valve size) with the tunnel nozzle set for Mach number one operation and the losses would then reach the maximum. It is therefore apparent that, from the point of view of selection of the valve size, tunnel operation at sonic speed is significant. Since losses increase with the valve Mach number, the first question that arises is, would it be worthwhile to ensure subsonic valve flow at all tunnel Mach numbers?

In order to gain some quantitative indication, consider two valves: one, which is just choked at the end of the tunnel run and another, which has *double* the effective flow area of the first valve, and hence a maximum Mach number of about 0.3. Let the required pressure ratios across the two valves be 1.2 and 1.03, corresponding to about 50% loss of dynamic head in each case, i. e., to the experimentally determined values. Also, let the maximum storage pressure be 20 ata and the tunnel stagnation pressure — 2 ata. Under these conditions, the increase in the running time (for a given storage volume) or the decrease in the storage volume (for a given running time) due to the use of the



larger valve would amount to about 2%. This small gain would most likely be offset by increase in the cost of the valve and its controls, both items being expensive in relation to the storage vessels.

Let us consider then a third valve, only *half* the size of the first one. At the critical design point this valve would operate at double the pressure of the first one, i. e., at 4.8 ata, and would be overchoked. This would result in a decrease of running time of 14% or would require, for the same running time, an increase in the storage volume or pressure of 16%. It would thus appear that the use of overchoked rather than subsonic valves might be advantageous. Under such conditions, the valve pressure losses are insignificant. Moreover, the reduction of the storage pressure range over which the installation operates is desirable from the point of view of valve controls and temperature stabilization; the former are also favourably influenced by the reduction of the valve size.

#### 4.4 Valve Controls

A fully automatic, electro-hydraulic valve control system has been developed for the model tunnel by Dr. J. A. TANNER of the NAE's Instruments and Control Systems Laboratory. Since the relationship between valve position and storage pressure required for maintaining a constant stagnation pressure is a

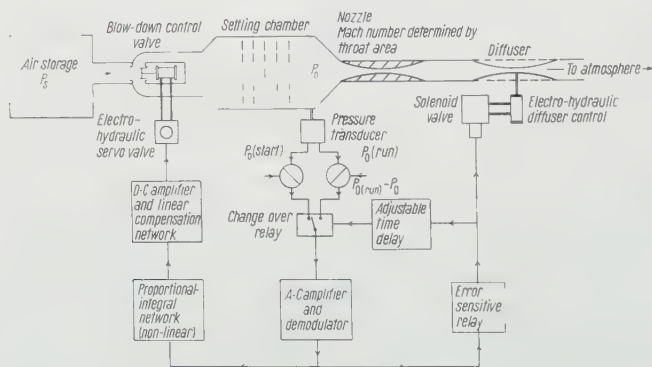


Figure 4

Block diagram of pressure control system.

complex one and depends on Mach number, stagnation and storage pressures, an open loop control system would require complicated programming. It was therefore decided to use feedback technique and to control the flow directly.

The system is outlined in the block diagram of Figure 4. Settling chamber pressure  $P_0$  is measured by a reluctance type transducer and compared with a reference source representing the desired pressure. The resulting signal is



amplified and fed to an electro-hydraulic servo-valve which, in turn, controls the delivery of hydraulic fluid to the power piston operating the wind-tunnel valve. Thus pressure difference, or error, controls the rate of opening of the wind-tunnel valve, a function which provides an integration process in the control loop. While the tunnel is in operation, however, the storage pressure  $P_s$  decreases at a rate dependent on the flow and in so doing imposes a ramp

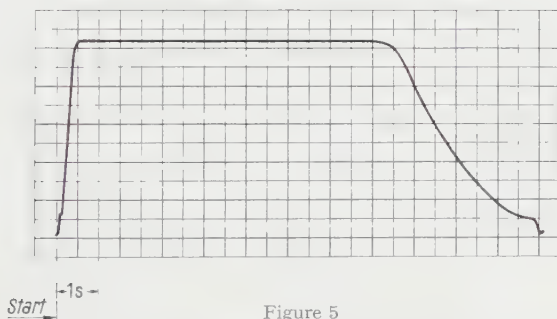


Figure 5

Typical stagnation pressure record.

Mach number 1.2,  $P_0 = 36$  psia, initial storage pressure 265 psia.

disturbance on the control system. In order to reduce the resulting dynamic pressure error to zero, it is necessary to incorporate two stages of integration in the loop. The second stage of integration in the NAE system is introduced in the form of a proportional-integral network.

At high Mach numbers, in order to obtain longer tunnel runs, the starting sequence for the tunnel involves closing the diffuser throat and lowering the pressure from starting to running value<sup>4</sup>). As the settling chamber pressure approaches the desired starting value, the error decreases to zero causing the error relay to release. In releasing, this relay operates the diffuser throat and then a short interval later the changeover relay which switches the set pressure from the starting to the running value. The starting operation is completed in 2 s.

A feature of this control system is the non-linear characteristic designed into the proportional-integral network for the purpose of shaping the transient response of the system during the starting period. The effectiveness of this method of transient shaping may be judged from the settling chamber pressure record shown in Figure 5. This method of transient shaping also reduces the effect of variations in system parameters on transient performance.

With regard to the performance of the overall control system, settling chamber pressure can be maintained constant to within  $\pm 0.5\%$  of the desired running value.

<sup>4</sup>) See Table 3.

## 5. Flow Stabilization in the Settling Chamber

### 5.1 Design of Stabilizing Devices

Another problem, particular to the blowdown wind tunnel, is the design of the settling chamber. Irrespective of the valve design, at small valve openings the air issues into the settling chamber as a supersonic jet and dissipates its kinetic energy in shock waves and turbulence. In order to achieve a sufficiently uniform velocity distribution and reduce turbulence to an acceptable level at

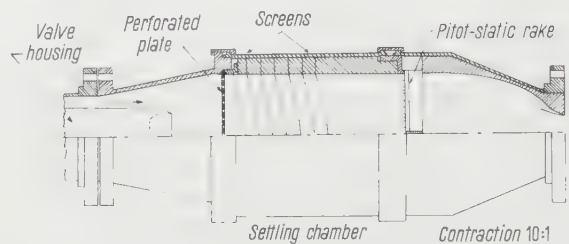


Figure 6  
Settling chamber and contraction.

the entrance to the contraction section, suitable flow stabilizing devices have to be installed upstream.

The design of the model tunnel settling chamber is shown in Figure 6 and is similar to that developed by the NAA [5]. The valve is followed by a 21 degrees conical diffuser attached to the cylindrical settling chamber which contains a perforated plate and seven wire screens. Since it was estimated that the flow in the diffuser would in any case separate, a fairing was not fitted to the valve housing but instead a cusp section was used, Figure 6, to facilitate mixing.

The perforated plate had an average porosity of 36% and was designed to produce a pressure drop of 10 dynamic heads. The seven wire screens were chosen to have about  $2q$  pressure drop each for maximum effectiveness [6, 7]. In order to keep the scale of turbulence relative to the tunnel size approximately the same in the full scale and model tunnels, the screen wire diameter was reduced by a factor of about 12 from the full scale design. Thus screens of 0.003 in. wire diameter with 105 wires per inch giving an estimated pressure drop of  $2.16q$  were used [8]. The screen spacing was 2 in. or 657 wire diameters.

### 5.2 Static Measurements

The dynamic head distribution at the contraction entry was measured on two diameters (at right angles) using inclined water manometers. A maximum variation of a random character of  $\pm 6\%$  in the dynamic head was recorded,

representing less than 0.015% of the stagnation pressure. These, and the dynamic measurements, were made with 1.2 test section Mach number, corresponding to a velocity of about 64 ft/s at the contraction entry.

5.3 Dynamic Measurements

Pitot and static pressures were measured upstream of the perforated plate and at the contraction entry using strain-gauge, diaphragm type transducers

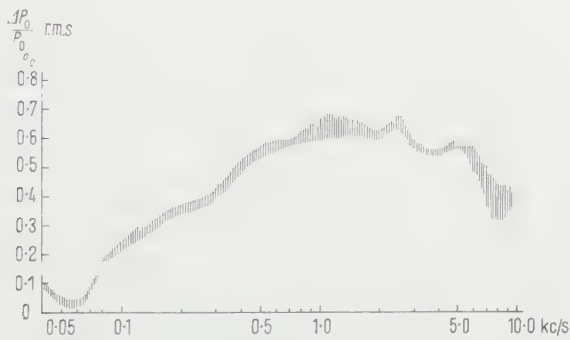


Figure 7  
Spectrum of stagnation pressure fluctuations at the contraction entry.  $P_0 \approx 25$  psia, test section  $M = 1.2$ .

having a flat response up to 11 kc/s. With the transducer connected by means of an appreciable length of tubing, large static and Pitot pressure fluctuations, amounting to several percent, were registered upstream of the perforated plate.

By calibration of various tubing-transducer assemblies against a standard microphone, the effects of tubing were found to be appreciable, particularly at higher frequencies. They were eliminated by taking magnetic tape records of Pitot pressure with the transducer located in the center of the contraction entry, the bare diaphragm facing directly the airstream. The frequency spectrum of the oscillations, as obtained from several runs with a Brüel & Kjaer analyser over 1/3 octave bands is shown in Figure 7 in terms of r. m. s. percentage variation of stagnation pressure. The fluctuations were negligibly small ( $< 0.1\%$ ) at low frequencies and reached a maximum of  $0.7\%$  between 1 and 5 kc/s. From oscillograph records it was ascertained that no large oscillations were present at still lower frequencies. The total r. m. s. fluctuations

$$\left[ - \left( \int_0^t \Delta P_0^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right]$$

were measured and found to amount to about  $2.25\% P_0$ .

### 5.4 Pressure Drop

The pressure drop across the perforated plate-screen assembly was measured over a range of mass flows and found to equal about 27 velocity heads at the contraction entry, i. e., to be somewhat larger than the design figure.

## 6. Diffuser Design

### 6.1 Requirements

In a blowdown wind tunnel of the type here considered, which operates over a range of speeds from low subsonic to high supersonic, the diffuser has to fulfill a number of distinct functions, including:

- (i) control of subsonic Mach number;
- (ii) provision of suction to
  - (a) control the boundary layer on perforated transonic section walls and
  - (b) generate supersonic flow;
- (iii) efficient compression at high supersonic speeds;
- (iv) compensation of Mach number variation with changes in model incidence.

For both (i) (particularly to obtain low subsonic Mach numbers) and (iii), a variable throat diffuser is required. Requirement (ii) could be satisfied by running at a sufficiently high pressure to blow-off the boundary layer and the main flow to atmosphere. However, if no other alternative were provided, only operation at high stagnation pressures (e. g., over 3 ata at 1.4 Mach number) would be possible. It is therefore desirable to equip the variable diffuser with adjustable entry flaps which would form, together with the downstream edges of the transonic section walls, ejector slots.

The flaps can also be used to generate supersonic flow [(ii) (b) above], obtainable otherwise by means of a supersonic nozzle if located upstream of the transonic section. Also, flaps can be effective in maintaining, in the transonic range, constant Mach number with changes in model attitude, thus fulfilling requirement (iv).

### 6.2 Model Tunnel Diffuser

A diffuser meeting the above requirements was constructed for the model tunnel and its performance investigated. The diffuser geometry, chosen to provide flexibility for transonic operation and good efficiency at supersonic speeds, is shown in terms of the working section height  $h$  in Figure 8. Ejector configuration can be varied over wide ranges of slot width, on two or four sides and, by controlling the position of flap hinges on the movable diffuser walls, the area around the model support strut can be adjusted as required.

6.3 Supersonic Performance

The minimum starting and stopping pressure ratios and the corresponding optimum contraction ratios (i. e., ratios of nozzle exit to diffuser throat area) were determined at Mach numbers of 2, 3 and 4 and the results are given in Table 3. They were obtained with model support strut (Figure 8) in position but without sting and model. The measured performance agreed well with the one estimated on the basis of [9].

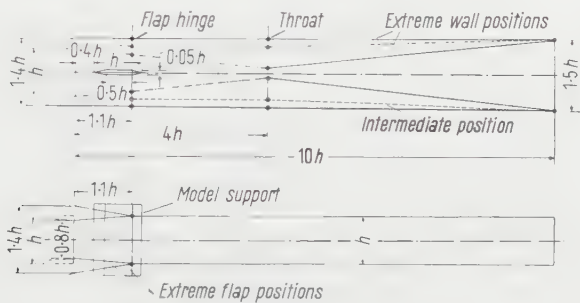


Figure 8  
Variable diffuser geometry.

Table 3  
Diffuser Performance

Mach number . . . . .		2	3	4
Minimum starting pressure ratio . . . . .		1.52	3.52	8.5
Minimum stopping pressure ratio	constant geometry .	1.42	3.05	7.8
	variable geometry .	—	2.8	5.8
Optimum contraction ratio	starting . . . . .	—	1.28	1.47
	variable geometry .	—	1.7	2.54

6.4 Performance of Diffuser Flaps

The effectiveness of diffuser flaps in generating trans- and supersonic flow is indicated in Figure 9, in which Mach number in the perforated test section is plotted against total slot area (expressed as percentage of working section area  $h^2$ ). The slots were formed by deflecting the two flaps on the variable walls of the diffuser, the other two remaining closed. The variable diffuser walls were fully opened at the flap hinges and at the diffuser throat. The perforated walls (26% porosity, 0.026 in. hole diameter, 0.028 in. wall thickness) were  $3h$  long with porosity initially linearly increasing over a distance  $h$ , and were set either



parallel or each at 0.5 degree convergence to the tunnel centerline. The tests were run at a stagnation pressure of 1.8 ata, with the transonic section fitted directly to the contraction.

With the above configuration, the highest Mach number was obtained for a given flap opening, up to about 1.25 at 26% flap slot, with perforated walls set parallel. It was ascertained that the upper Mach number limit was due to

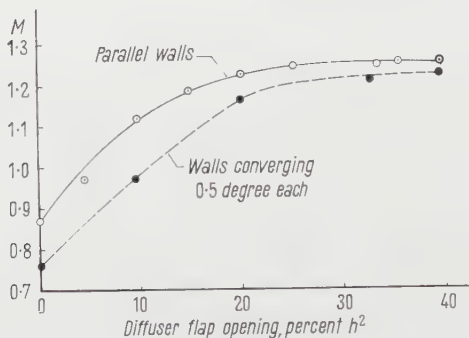


Figure 9

Generation of supersonic flow by means of diffuser flaps.

flow restriction around the model support. Removal of the model support (5% blockage, cf. Figure 8) increased the maximum Mach number by about 0.04 with flaps fully open (40%).

From Figure 9 the effectiveness of flaps appears to taper off at Mach numbers in excess of about 1.1, as would be expected in view of increasingly large mass flow required to be removed as the Mach number increases. In fact, when plotted on the mass flow basis, the flap characteristics are approximately linear.

## 7. High Speed Data Handling System

The development of high speed instrumentation has been largely responsible for the present popularity of large, blowdown high-speed wind tunnels. One type of a suitable instrumentation system, which is being developed in a number of laboratories, is based on the use of fast-response, self-balancing chart potentiometers fitted with digitizers. The basic elements of one of several channels of the system, described in more detail in [10], are shown in Figure 10.

The self-balancing chart potentiometers have a full scale response time of 0.25 s and can follow D.C. inputs, obtained, for example, from model balance by moving the model through its incidence range in a time of the order of 5 to 20 s.



Analogue outputs in the form of pen traces on charts are available simultaneously with the tunnel run and are most useful as direct visual checks.

Data reduced to coefficient form may be obtained in two different ways.

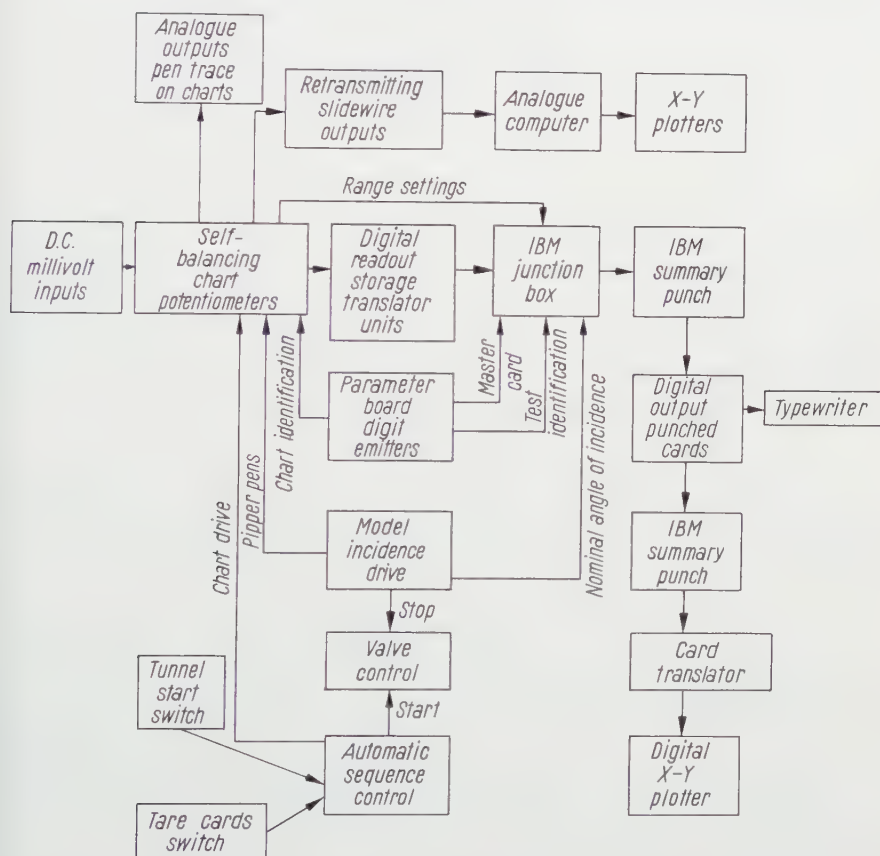


Figure 10

Schematic of a high speed wind tunnel data handling system.

When use is made of re-transmitting slidewires and an analogue computer, plots of final coefficients are available simultaneously with tests. This method is particularly useful and sufficiently accurate when the calculations involved are relatively simple.

With the second method, the raw data, as obtained by potentiometers, are digitized and recorded by an IBM summary punch simultaneously with test and are later processed by a digital computer to printed and/or graphical form.

With this method simultaneous information from 10 potentiometer channels (3 digits per channel) and incidence drive can be registered every 0.65 s when punched in decimal form and every 0.16 s when in decimal binary code. Also, all constants required for data reduction are fed directly into the punched cards from the parameter board, so that manual transcription is completely eliminated.

As indicated in Figure 10, the data handling system is connected to the tunnel controls and operates automatically during a wind tunnel run.

## 8. Conclusions

We have touched upon a number of problems particular to the blowdown type wind tunnels and reported on solutions adopted in one particular case. Indications are that, with the aid of modern control and instrumentation techniques, these problems can be satisfactorily dealt with and advantage taken of benefits – envisaged more than twenty years ago – of blowdown wind tunnel design.

## Acknowledgment

The contributions of Messrs. C. D. LONG, D. B. NAZZER, P. PRICE, J. A. TANNER, N. B. TUCKER, and R. WESTLEY in the design and operation of the 5 in model blowdown tunnel installation are gratefully acknowledged.

## REFERENCES

- [1] J. ACKERET, *High Speed Wind Tunnels*, Proceedings, Fifth Volta Congress, Rome (1935), NACA TM 808 (1936).
- [2] J. M. WILD, *Arnold Engineering Development Center*, Mech. Eng. 79 (1), 8 (1957).
- [3] A. FERRI and S. M. BOGDONOFF, *Design and Operation of Intermittent Supersonic Wind Tunnels*, AGARDograph No. 1 (1953).
- [4] J. LUKASIEWICZ, *Development of Large Intermittent Wind Tunnels*, J. Roy. aero. Soc. 59, 259 (1955).
- [5] W. DANIELS, jr., *Design and Development of North American Aviation Tri-sonic Wind Tunnel*, AGARD (Brussels 1956).
- [6] A. R. COLLAR, *The Effect of a Gauze on the Velocity Distribution in a Uniform Duct*, A.R.C. R. & M. 1867, HMSO (London 1939).
- [7] G. K. BATCHELOR, *On the Concept and Properties of the Idealized Hydrodynamic Resistance*, Australian Council for Aeronautics, Report ACA-13 (1945).
- [8] W. J. D. ANNAND, *The Resistance to Air Flow of Wire Gauzes*, J. Roy. aero. Soc. 57, 507 (1953).
- [9] J. LUKASIEWICZ, *Diffusers for Supersonic Wind Tunnels*, J. aero. Sci. 20 (9), 617 (1953).
- [10] J. LUKASIEWICZ, J. A. VAN DER BLIEK, and J. G. SCOTT, *High Speed Systems of Wind Tunnel Data Handling*, AGARD (Rome 1956).

*Résumé*

On rapporte sur la construction et la performance d'un modèle de 12,5 cm  $\times$  12,5 cm d'une soufflerie à rafale. En particulier, on discute les résultats expérimentaux sur le contrôle de la température et pression d'arrêt, la stabilisation de la veine dans la chambre de tranquillisation et la performance d'un diffuseur réglable utilisé aux nombres de MACH élevés et pour réaliser des vitesses transsoniques dans la veine d'essai à parois perforées.

On donne une description d'un système rapide associé servant au dépouillement des résultats.

(Received: October 1, 1957.)

## On the Boundary Layer at Perforated Walls<sup>1)</sup>

By PAUL F. MAEDER and HANS U. THOMMEN, Providence, R. I., USA<sup>2)</sup>

### 1. Introduction

In recent years perforated walls have been used extensively in transonic wind tunnel test sections to eliminate choking and reduce tunnel wall interference [1]<sup>3)</sup>. If these test sections are to be incorporated in the original design of large wind tunnel installations it becomes important that some way be found to predict the characteristics of the boundary layer at such a wall. The efficiency of the tunnel diffuser depends greatly on the flow conditions at its entrance. For instance if a solid wall were used the relative thickness of the boundary layer entering the diffuser would decrease with increasing Reynolds number, and thus wind tunnel size, causing the diffuser to be much more efficient in a full scale installation than in a small, scaled down, pilot tunnel. If, on the other hand, an open test section is employed, no appreciable Reynolds-number effects can be detected in the mixing layer of the free jet [2, 3, 4], and thus the boundary layer of the flow entering the diffuser is geometrically similar in pilot and full scale installations, causing a much smaller gain of efficiency with size. Thus the boundary layer at a perforated wall, which is partly open and partly closed, needs investigation.

Some preliminary experimentation [3] with wall configurations as employed in transonic test sections indicated that the openings of the perforated wall greatly influence the boundary layer, introducing an instability of the free turbulence type. It was found that the flow near such a wall resembles more closely that encountered in free jets than the boundary layer flow along a solid wall.

It appears that in discussing the viscous flow phenomena encountered with perforated walls one should distinguish clearly between three possible regimes.

(a) If the holes of the perforated plate are very small any flow through them will occur in accordance with the laws of slow viscous motion. The inherent damping of this motion will be sufficient to prevent the free turbulence type of instability. Such walls are properly classified as 'porous walls' and may find application in boundary layer suction.

<sup>1)</sup> Part of this research was sponsored by the Air Research and Development Command under Contract AF 18(600)-1330 and part by the ARO, Inc., under Subcontract T-306.

<sup>2)</sup> Brown University.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 452.

(b) If the hole diameter is still small compared to the thickness of the wall boundary layer but large enough so that the cross-flow pressure loss due to viscous action is insignificant, an instability causing a free turbulence mixing layer may develop. At some distance from the wall, still inside the boundary layer, the disturbance from the individual holes will, however, be averaged and can be treated mathematically as some mean flow caused by an imaginary mean boundary at the location of the actual wall.

(c) If the hole diameter is large compared to the boundary layer thickness at the wall, each hole has to be treated individually, considering the past history of the boundary layer flow.

This paper is concerned with the second regime described above, which adequately applies to the greatest portion of currently used or proposed transonic test section walls. First a simple theory, based on PRANDTL's mixing length hypothesis, is developed. The results of this theory are then compared with low speed experiments performed on various partly open walls.

A related problem has been treated in [6] by considering the effects of injection into a turbulent boundary layer on a flat plate. This latter approach, however, was intended only for very small injection or suction masses such as would be of interest in the consideration of transpiration cooling.

2. Conical Turbulent Shear Flow

A. General Formulae

Consider a turbulent mixing zone as described in Figure 1 for mixing along a perforated wall (Figure 1a) or for a free jet (Figure 1b). If we assume that the turbulent mixing is caused by inherent instability of free boundary flow independent of Reynolds number (similarity of turbulence scale), as indeed has been observed in free jets, then we may write, by virtue of similarity:

$$u = u \left( \frac{y}{x} \right) = u(\eta), \quad v = v \left( \frac{y}{x} \right) = v(\eta). \tag{1}$$

$\eta - \eta_1$  will denote the boundary between the mixing zone and the main stream  $U_\infty$ ,  $\eta - \eta_w$  the perforated wall and  $\eta - \eta_2$  the free boundary of the open jet.

The fluid must satisfy the equation of motion for turbulent mean flow

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{2}$$

and the continuity equation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

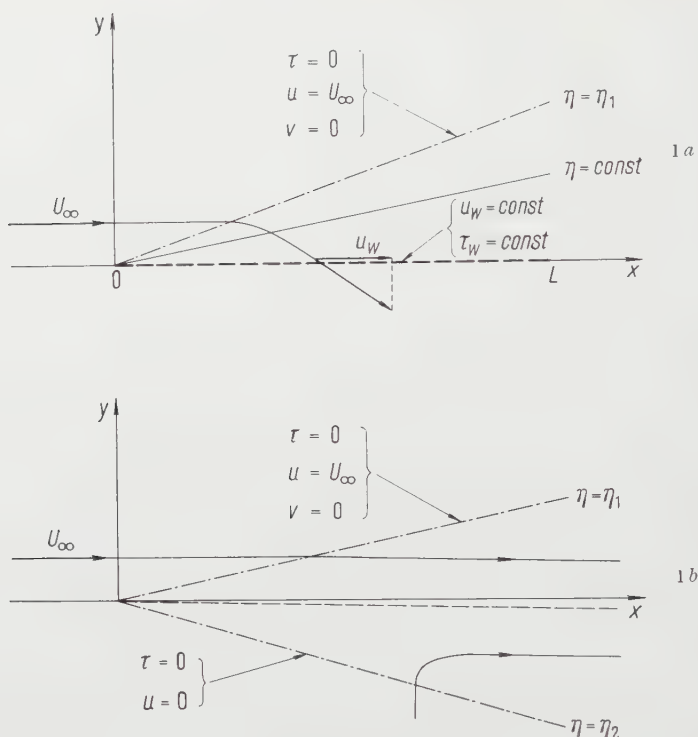


Figure 1

*a* Mixing along perforated wall; *b* mixing in open jet.

Equation (3) allows the introduction of a stream function  $\psi$  such that

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Considering equation (1) we may write

$$\psi = U_{\infty} x F(\eta). \quad (5)$$

From which follows

$$u = U_{\infty} F'(\eta), \quad v = U_{\infty} [\eta F'(\eta) - F(\eta)]. \quad (6)$$

The turbulent shear stress shall be given by PRANDTL's hypothesis

$$\tau = \frac{\rho}{2} \lambda^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (7)$$

If the mixing length  $\lambda$  is chosen proportional to the width  $x \eta_1$  of the flow



affected by mixing, i. e.,

$$\lambda = \kappa \times \eta_1, \quad (8)$$

then the constant of proportionality  $\kappa$  has been found to vary only slightly for a great variety of problems (for free jet mixing  $\kappa = 0.288$ , while for the wake behind a body  $\kappa = 0.293$ ). Hence a value of  $\kappa = 0.290$  shall be used in the following. Upon introduction of equations (6) to (8) into the equation of motion, equation (2), the differential equation

$$F''(\eta) [F(\eta) + (\kappa \eta_1)^2 F'''(\eta)] = 0 \quad (9)$$

follows. Since  $F''(\eta) = 0$  is a trivial solution, equation (9) simplifies to

$$F(\eta) + (\kappa \eta_1)^2 F'''(\eta) = 0. \quad (9a)$$

Introducing the new variable  $\xi = \eta / (\kappa \eta_1)^{2/3}$  the constant coefficient in equation (9a) becomes unity, i. e.,

$$F(\xi) + F'''(\xi) = 0. \quad (9b)$$

The general solution of equation (9b) is

$$F(\xi) = C_1 e^{-\xi} + 2 e^{\xi/2} \left[ C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \xi + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \xi \right]. \quad (10)$$

The coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  and  $C_3$  are determined by the boundary conditions at the mixing boundary  $\eta = \eta_1$ . They are

$$\left. \begin{aligned} \eta = \eta_1: \quad & \xi = \xi_1 = \frac{\eta_1^{1/3}}{\kappa^{2/3}}, \\ & u = U_\infty, \quad F'(\xi_1) = \kappa^2 \xi_1^2, \\ & v = 0, \quad F(\xi_1) = \kappa^2 \xi_1^3, \\ & \tau = 0, \quad F''(\xi_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Evaluating the constants with the aid of equations (11) gives finally

$$\left. \begin{aligned} & \frac{3}{\kappa^2 \xi_1^2} F(\xi) = (\xi_1 - 1) e^{\xi_1 - \xi} + e^{-(\xi_1 - \xi)/2} \\ & \times \left[ (1 + 2 \xi_1) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} (\xi_1 - \xi) - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} (\xi_1 - \xi) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

### B. Turbulent Mixing Along a Perforated Wall

In the case of a perforated wall, the penetration  $\eta_1$  of the turbulent layer into the main stream is determined as a function of the constant mean shear

stress  $\tau_w$  along the (imaginary) wall  $\eta = \eta_w$  by the boundary conditions

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_w, \\ u &= u_w = \frac{U_\infty}{\kappa^2 \xi_1^2} F'(\xi_w), \\ \tau &= \tau_w = \frac{q_\infty}{(\kappa \xi_1)^2} F''(\xi_w) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

or

$$\sqrt{\frac{\tau_w}{q_\infty}} = \frac{1}{\kappa \xi_1} F''(\xi_w),$$

where  $q_\infty = \rho U_\infty^2/2$ .

In the following only walls parallel to the main stream will be considered ( $\eta_w = \xi_w = 0$ ) although convergent and divergent walls can be treated in a similar way without difficulty [5].

A perusal of the equation shows that it is of advantage to develop  $F''(\xi_w = 0)$  into a Taylor series about  $\xi = \xi_1$

$$F''(\xi_w = 0) = F''(\xi_1) - \xi_1 F'''(\xi_1) + \frac{1}{2!} \xi_1^2 F^{IV}(\xi_1) - + \dots$$

Using the relation  $F^{(n+3)}(\xi) = -F^{(n)}(\xi)$  which follows directly from the differential equation this simplifies to

$$F''(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_1^{3n}}{(3n)!} \left\{ F''(\xi_1) + \frac{\xi_1}{3n+1} F'(\xi_1) - \frac{\xi_1^2}{(3n+1)(3n+2)} F'(\xi_1) \right\}.$$

Introducing the values at  $\xi_1$  from equation (11) then yields

$$F''(0) = \kappa^2 \xi_1^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{(3n+2)!} \xi_1^{3n}.$$

Hence,

$$\frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{q_\infty}} = \frac{\eta_1}{\kappa^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{(3n+2)!} \left( \frac{\eta_1}{\kappa^2} \right)^n. \quad (13)$$

If only the first two terms are retained this simplifies to

$$\frac{\tau_w}{q_\infty} = \frac{\eta_1^2}{4\kappa^2} \left[ 1 + \frac{\eta_1}{15\kappa^2} \right]^2. \quad (13a)$$

The quantity  $Q$  leaving the test section is obtained from the stream function

$$Q = \psi = U_\infty \kappa F(\xi_w = 0).$$

Developing  $F(0)$  also a Taylor series about  $\xi = \xi_1$ , the same procedure gives

$$F(0) = \kappa^2 \xi_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{(3n+1)!} \xi_1^{3n}$$

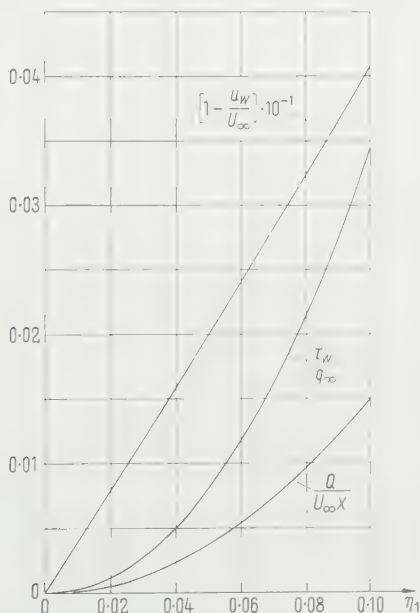


Figure 2  
Mixing along partly open wall.

or, retaining only the first three terms,

$$\frac{Q}{U_\infty x} = \frac{\eta_1^2}{8 \kappa^2} \left[ 1 + \frac{\eta_1}{105 \kappa^2} \right]. \quad (14)$$

Finally, the velocity  $u_w$  along the imaginary boundary is found in a similar way with

$$F'(0) = \kappa^2 \xi_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1)(3n+2) - \xi_1^3}{(3n+2)!} \xi_1^{3n}.$$

Again retaining only the first three terms

$$\frac{u_w}{U_\infty} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\eta_1}{\kappa^2} - \frac{1}{144} \left( \frac{\eta_1}{\kappa^2} \right)^2. \quad (15)$$

In Figure 2  $\tau_w/q_\infty$ ,  $Q/U_\infty x$  and  $u_w/U_\infty$  are plotted as function of  $\eta_1$ .

### C. The Open Jet Mixing

At the open jet boundary  $\eta = \eta_2$  the boundary conditions are

$$\left. \begin{aligned} \eta = \eta_2: \quad \xi = \xi_2 &= \frac{\eta_2}{(\kappa \eta_1)^{2/3}}, \\ u &= 0, \quad F'(\xi_2) = 0, \\ \tau &= 0, \quad F''(\xi_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

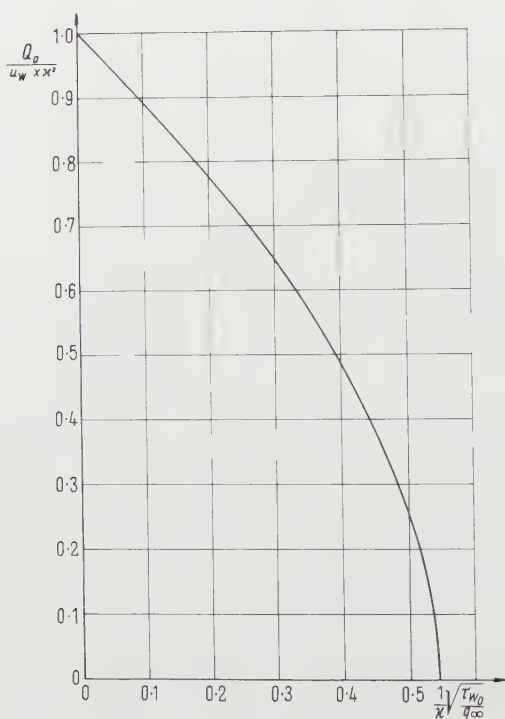


Figure 3  
Mixing in open jet.

The problem has been solved by TOLLMEN [7] and again in a simplified manner in [5]. The result is summarized in Figure 3, which gives the relation between the quantity  $Q$  that passes through a line  $\eta = \eta_0$  and the shear stress  $\tau$  along this line. The figure has been labeled with the notation that will be used in the next section.

3. The Mean Shear Stress at the Perforated Wall

The mean shear stress  $\tau_w$  at the perforated wall will now be calculated from the wall details (Figure 4). At the open portions of the wall we will expect open jet mixing with the corresponding shear stress  $\tau_0$  as calculated in section 2 C.

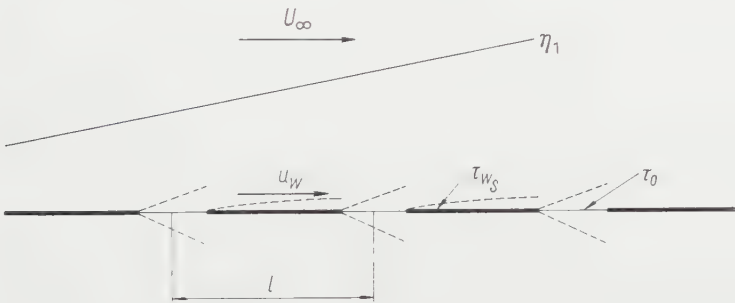


Figure 4  
Wall details.

This shear stress will be a function of the quantity  $Q_0$  leaving through the opening, where

$$Q_0 = \frac{Q}{\sigma}$$

and  $\sigma$  = ratio of open to total boundary.

Hence,

$$\frac{Q_0}{u_w x x^2} = \frac{1}{\sigma x^2} \cdot \frac{Q}{U_\infty x} \cdot \frac{U_\infty}{u_w} \tag{17}$$

Now

$$\frac{1}{x} \sqrt{\frac{\tau_0}{q_w}} = f \left\{ \frac{Q_0}{u_w x x^2} \right\} \quad \left( q_w = \frac{\rho}{2} u_w^2 \right)$$

is given in Figure 2 and both  $Q/U_\infty x$  and  $u_w/U_\infty$  are functions of  $\eta_1$  given by equations (14) and (15), and Figure 2 so that if  $\eta_1$  is known, all quantities are determined.

At the solid portions of the wall the shear stress  $\tau_{ws}$  will depend on the Reynolds number  $Re_w$  referred to the mean length of the wetted area

$$Re_w = (1 - \sigma) l \frac{u_w}{\nu} \tag{18}$$

where  $l$  is the distance between the centers of two successive overlapping holes.

Using the drag coefficient of the flat plate

$$\left. \begin{aligned} c_D &= 0.074 Re_w^{-1/5} && (\text{turbulent}), \\ c_D &= 1.328 Re_w^{-1/2} && (\text{laminar}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

and

$$\tau_{w_s} = \frac{\rho}{2} u_w^2 c_D = q_w c_D, \quad (20)$$

the mean shear stress at the wall is then obtained as

$$\tau_w = \sigma \tau_0 + (1 - \sigma) \tau_{w_s}$$

and

$$\frac{\tau_w}{q_\infty} = \sigma \left( \frac{u_w}{U_\infty} \right)^2 \frac{\tau_0}{q_w} + (1 - \sigma) \left( \frac{u_w}{U_\infty} \right)^2 c_D, \quad (21)$$

where

$$c_D = c_D(Re_w),$$

or, if we introduce the Reynolds number

$$Re_\infty = \frac{U_\infty}{u_w} Re_w = (1 - \sigma) l \frac{U_\infty}{\nu}, \quad (22)$$

referred to the free stream velocity  $U_\infty$  and the wall details,

$$c_D = c_D(Re_\infty, \eta_1).$$

In Figure 5 the penetration  $\eta_1$  is plotted as a function of  $Re_\infty$  for several opening ratios  $\sigma$  for both laminar and turbulent boundary layers at the solid portions of the perforated wall. The critical  $Re_w$  has been assumed to be  $Re_{w_{crit}} = 3 \times 10^5$ . Thus, for a given  $Re_\infty$ ,  $\eta_1$  can be determined from Figure 5 and  $Q/U_\infty x$  from Figure 2. The quantity  $Q/U_\infty x$  is equivalent to the ratio of the mass passing through a perforated wall area which equals the tunnel cross-sectional area to the mass entering the tunnel

$$\frac{\Delta m}{\dot{m}} = \frac{Q}{U_\infty x} \cdot \frac{S}{A},$$

where  $\dot{m}$  is the massflow through tunnel;  $\Delta m$  the massflow through perforated walls;  $S$  the area of perforated wall surface;  $A$  the tunnel cross-sectional area.

## 4. Experimental Investigation

### A. Description of Equipment

The experiments were performed in the Brown University subsonic wind tunnel. The tunnel is of the open circuit type with a  $55.9 \times 81.3$  cm test section at atmospheric pressure. In the test section a side wall opening of



50.8 cm by 55.9 cm accommodated the two different wall configurations which were tested.

A slotted wall with eight transverse slots of 2.54 cm width at intervals of 6.35 cm ( $\sigma = 0.4$ ) was made of 0.95 cm thick aluminium sheets with rectangular edges. The upstream edge of the first slot was 49.5 cm from the beginning of the test section.

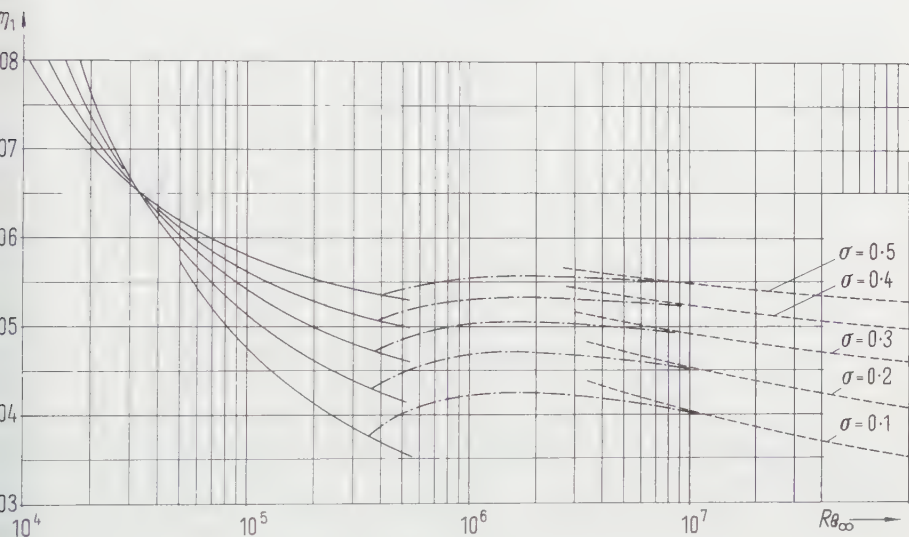


Figure 5

Penetration  $\eta_1$  of mixing zone. — Laminar boundary layer; ---- turbulent boundary layer; - · - transition, laminar-turbulent.

A perforated wall was made of a 0.127 cm thick brass sheet with 0.794 cm diameter holes arranged in a staggered hexagonal pattern with  $\sigma = 0.50$ .

Both walls had a total length of  $L = 47.0$  cm. The test walls were open to atmospheric pressure and the opposite wall was inclined in such a way, that the pressure along the test section axis was constant.

The pressure measurements were made with a Betz-type water manometer with direct readings accurate to 0.1 mm of water. The boundary layer profiles were obtained with a single total pressure probe flattened to read a minimum of 0.38 mm from the wall. Distances from the wall were measured with a micrometer head.

Boundary layer profiles were measured at intervals of 2.54 cm, beginning at the leading edge of the partly open wall and continuing over the solid portion downstream of this wall.

The tunnel was run at a constant air speed of 35.35 m/s, which corresponds to a Reynolds number of

$$Re_{\infty} = 24,300 \text{ per cm.}$$

### B. Test Results

The test results are presented in Figures 6 to 8 and the theoretical values are summarized in the table.

	Slotted wall	Perforated wall
$\sigma$	0.40	0.50
$l/L$	0.1351	0.0193
$Re_{\infty}$	$9.26 \times 10^4$	$1.103 \times 10^4$
$\eta_1$	0.0566	0.0790
$u_w/U_{\infty}$	0.772	0.680
$Q/U_{\infty} x = \delta^*/x$	$0.480 \times 10^{-2}$	$0.933 \times 10^{-2}$
$\tau_w/\rho U_{\infty}^2$	$0.520 \times 10^{-2}$	$1.050 \times 10^{-2}$
$y_1/\delta^*$	11.80	8.47

A derivation similar to that given in Section 2 B gives for the velocity profile in the mixing zone

$$\frac{1 - \frac{u}{U_{\infty}}}{1 - \frac{u_w}{U_{\infty}}} = \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{\eta}{\eta_1} \right) \left( 1 - \frac{\eta}{\eta_1} \right)^2.$$

As will be shown later, the displacement thickness  $\delta^*(x)$  of the mixing zone and the quantity leaving the test section are related as follows:

$$\frac{\delta^*}{x} = \int_0^h \left( 1 - \frac{u}{U_{\infty}} \right) d\eta = \frac{Q}{U_{\infty} x},$$

where  $h$  is the tunnel height.

In Figure 6 the velocity profiles measured at 3 stations  $\xi = x/L$  ( $L$  = length of the partly open wall section) are plotted versus  $y/\delta^*$  and compared with the theory. The near coincidence of the measured points in Figure 6 indicates the similarity of the experimental profiles, but these profiles disagree considerably with the theoretical prediction. This can partly be attributed to the fact that at the beginning of the partly open wall section there already exists a (turbulent) boundary layer, while the theory assumes uniform flow in this region.

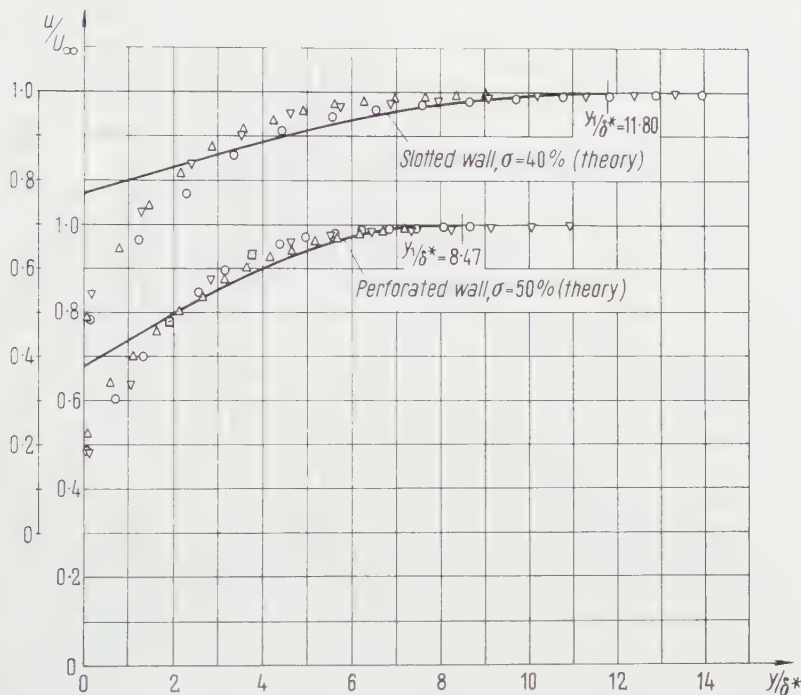


Figure 6

Velocity profiles.  $\nabla \xi = 0.324$ ;  $\circ = 0.649$ ;  $\triangle = 0.973$ ;  $\square =$  coinciding points  $\nabla$  and  $\circ$ .

If  $m(x)$  is the mass leaving the test-section per unit length at station  $x$  and

$$m'(x) = \frac{m(x)}{\rho U_\infty}$$

then the continuity equation yields the mass leaving the test section between  $\xi' = 0$  and  $\xi' = \xi$  as

$$\int_0^\xi m'(\xi') d\xi' = \frac{1}{L} \int_0^h \left[ \left( \frac{u(y)}{U_\infty} \right)_0 - \left( \frac{u(y)}{U_\infty} \right)_\xi \right] dy = \frac{1}{L} [\delta^*(\xi) - \delta^*(0)],$$

while the theoretical value is given by

$$\int_0^\xi m'(\xi') d\xi' = \left( \frac{Q}{U_\infty x} \right) \xi = \left( \frac{\delta^*}{x} \right) \xi.$$

In Figure 7 the measured displacement thickness  $\delta^*(\xi)/L$  is plotted versus  $\xi = x/L$ , and is compared to the theoretical value  $(\delta^*/x) \xi$  increased by the measured value  $\delta^*(0)/L$ . The figure shows that the agreement is very good.

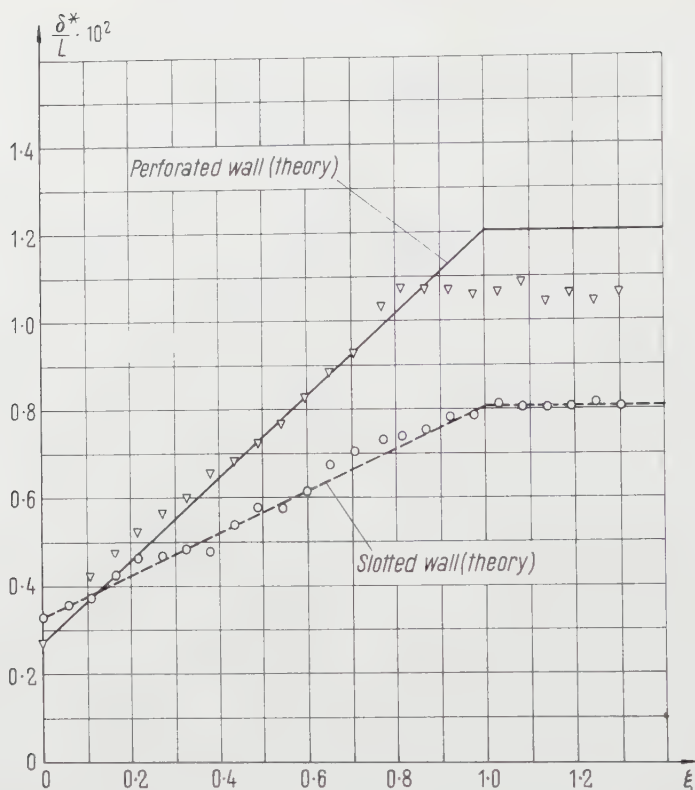


Figure 7

Mixing zone displacement thickness.

The shear stress  $\tau_w$  along the wall can be calculated from the momentum equation. Let  $M(x)$  be the momentum flux in  $x$ -direction at station  $x$

$$M(x) = \rho U_\infty^2 \int_0^h \left( \frac{u(y)}{U_\infty} \right)^2 dy$$

and  $\Delta M(x)$  the momentum flux due to the mass leaving the test section

$$\Delta M(x) = \int_0^x m(x') u_w(x') dx'.$$

Then the momentum equation gives

$$-\int_0^x \tau_w(x') dx' = M(0) - M(x) - \Delta M(x).$$

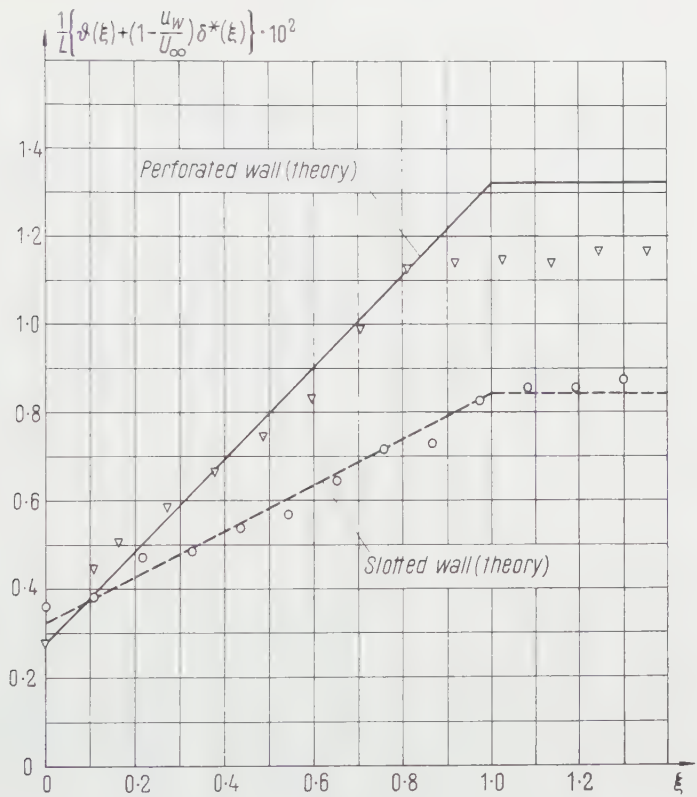


Figure 8  
Mixing zone momentum thickness.

Since the velocity  $u_w$  at the imaginary homogeneous perforated wall cannot be measured, it will be replaced by the constant theoretical value. It is then found that

$$-\int_0^{\xi} \frac{\tau_w(\xi')}{\rho U_\infty^2} d\xi' = \frac{1}{L} \left\{ \vartheta(\xi) - \vartheta(0) + \left(1 - \frac{u_w}{U_\infty}\right) (\delta^*(\xi) - \delta^*(0)) \right\},$$

where  $\vartheta$  is the momentum thickness

$$\vartheta = \int_0^h \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy.$$

In Figure 8 the measured function

$$\frac{1}{L} \left\{ \vartheta(\xi) + \left( 1 - \frac{u_w}{U_\infty} \right) \delta^*(\xi) \right\}$$

is plotted versus  $\xi$  and compared with the theoretical curve

$$- \int_0^\xi \frac{\tau_w(\xi')}{\rho U_\infty^2} d\xi' = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} \xi (\cdot \text{const}),$$

where the constant has approximately the measured value of

$$\frac{1}{L} \left\{ \vartheta(0) + \left( 1 - \frac{u_w}{U_\infty} \right) \delta^*(0) \right\}.$$

The figure indicates that the slope of the measured curves, i. e.,  $-\tau_w/\rho U_\infty^2$  agrees well with the theory.

### C. Conclusions

In the derivation the constant of proportionality  $\kappa$  for the mixing length  $\lambda$  has been chosen initially and has not been used as a parameter to adjust theory to experiment, as is often done in similar problems.

The experimental evidence indicates that the turbulent mixing theory gives a good estimate of the characteristics of the flow along a perforated wall. Near the end of the perforated wall, however, the measurements deviate from the theory (Figures 7 and 8). In this region, the pressure does not remain constant (see, e. g., [4]) and the theory no longer applies.

### REFERENCES

- [1] P. F. MAEDER and A. D. WOOD: *Transonic Wind Tunnel Test Sections*, Z. angew. Math. Phys. 7, 177 (1956).
- [2] W. F. DURAND, *Aerodynamic Theory*, Vol. III, Div. G.
- [3] P. F. MAEDER and J. F. STAPELTON, *Investigation of the Flow Through a Perforated Wall*, Technical Report WT-10, Division of Engineering, Brown University (May, 1953).
- [4] P. F. MAEDER and J. F. HALL, *Investigation of Flow Over Partially Open Wind Tunnel Walls*, Technical Report WT-19, Division of Engineering, Brown University (December, 1955).
- [5] P. F. MAEDER, *Turbulent Mixing Along Perforated Walls*, Division of Engineering, Brown University (July, 1954).
- [6] J. H. CLARKE, H. R. MENKES and P. A. LIBBY, *A Provisional Analysis of Turbulent Boundary Layers with Injection*, J. aeron. Sci. 22, 255 (April, 1955).
- [7] W. TOLLMIEH, *Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge*, Z. angew. Math. Mech. 4, 468 (1926).



*Zusammenfassung*

Für Windkanalversuche im Geschwindigkeitsgebiet der schallnahen Strömungen werden seit einigen Jahren perforierte oder geschlitzte Kanalwände verwendet. Frühere experimentelle Untersuchungen [3] haben angedeutet, dass die Grenzschicht entlang solchen Wänden der turbulenten Mischzone in einer freien Strahlgrenze gleicht. Diese Beobachtung legt die Annahme affiner Geschwindigkeitsprofile und linear anwachsender Mischzonenbreite nahe (Figur 1). Wird die Prandtlsche Mischlänge für die turbulente Schubspannung der Mischzonenbreite proportional gesetzt, dann resultiert eine konstante Schubspannung entlang der perforierten Wand. Diese kann abgeschätzt werden, wenn man die perforierte Wand als eine Folge von soliden Wandstücken und freien Strahlgrenzen betrachtet (Figur 4) und damit eine mittlere Wandschubspannung berechnet. Mit dieser ist dann auch die aus dem Kanal entweichende Luftmenge bestimmt. Versuche mit einer perforierten und einer quergeschlitzten Wand bestätigen die theoretischen Voraussagen.

(Received: November 13, 1957.)

## On the Structure of Supersonic Flow<sup>1)</sup>

By RICHARD E. MEYER, Providence, R. I., USA<sup>2)</sup>

If viscosity and heat conduction be neglected, the supersonic motion of a perfect gas is a radiation process, that is, the equations representing the mechanism of motion are of the hyperbolic type. A feature of such equations is that proper boundary or initial conditions prescribed on surfaces of finite extent determine the solution only in a finite portion of space, beyond which it can be continued in an arbitrary manner. This seems to suggest that the study of the structure of supersonic flow is limited to the consideration of such restricted portions of space, much in contrast to the study of the structure of incompressible flow, for example. The limitation is not entirely necessary, however. It is the purpose of this note to unify some of the known facts regarding the structure in the large of steady, two-dimensional, shockfree supersonic flow and to present new results and points of view.

Closely analogous results hold for the one-dimensional, unsteady motion of a perfect, inviscid gas, and the considerations outlined in the following may also be extended to steady, axially symmetrical, supersonic flow and other hyperbolic problems in two independent variables.

### Uniqueness

The differential equations governing the steady, two-dimensional, irrotational, homentropic, supersonic flow of a perfect gas possess two families of characteristics with the respective slopes [1]<sup>3)</sup>

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu), \quad (\text{'plus' Mach lines}), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu), \quad (\text{'minus' Mach lines}) \quad (2)$$

in the flow plane, where  $x, y$  denote cartesian coordinates,  $\theta$  the local stream direction and  $\mu$  the local Mach angle. It will be assumed in the following that pressure and velocity are continuous functions of  $x, y$ . The facts concerning uniqueness for Cauchy and characteristic boundary conditions are then as

<sup>1)</sup> This work was sponsored by the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command of the United States Air Force under Contract AF 49(638)232.

<sup>2)</sup> Brown University.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 461.

follows [2]. Proper boundary values on a non-characteristic line segment of finite length determine a unique solution in the characteristic quadrangle of which the line segment is a 'diagonal'. Proper boundary values on a plus Mach line segment of finite length and a minus Mach line segment of finite length, such that the segments have an end point in common, determine a unique solution in the Mach quadrangle of which the segments form two sides.

These two types of boundary conditions are by no means the only ones arising physical problems. But in any case, if a solution is determined in a



Flow Plane.

region *R* of the flow plane (see the figure), then it is determined throughout the smallest Mach quadrangle enclosing *R*, for the boundary of *R* consists of Cauchy and Mach line segments on which proper boundary values are determined.

Beyond this Mach quadrangle, however, the solution is not determined by the given solution in *R*, and may indeed be continued in an arbitrary manner. None the less, the continuation of the solution has certain properties which are invariant in the sense that they are independent of the manner of continuation. An obvious example are the characteristics themselves, for the continuation of the solution must contain lines which are the geometric continuation of the Mach lines in *R*, and which retain the characteristic property of those Mach lines wherever the continued solution represents supersonic flow.

**Focusing Equations**

If *p*, *ρ*, *q* and *ω* denote respectively the pressure, density, velocity magnitude and Prandtl angle (defined by

$$d\omega = -(\rho q^2 \tan \mu)^{-1} dp \tag{3}$$

and  $\omega = 0$  when  $\beta$  takes its sonic value), then the differential equations governing the flow are equivalent [1] to (1), (2) together with

$$\alpha \equiv \theta + \omega = \text{const on plus Mach lines}, \quad (4)$$

$$\beta \equiv \theta - \omega = \text{const on minus Mach lines}. \quad (5)$$

For a study of the structure of the solutions it is best to choose the characteristic variables  $\alpha, \beta$  as independent variables, so that (1), (2) become

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = h_\beta \cos(\theta - \mu), \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = h_\beta \sin(\theta - \mu), \quad (6)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = h_\alpha \cos(\theta + \mu), \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = h_\alpha \sin(\theta + \mu). \quad (7)$$

Here  $h_\beta$  is the ratio of the length of a plus Mach line element in the flow plane to  $d\beta$ , and similarly for  $h_\alpha$ . In fact, (6), (7) present the flow problem in the form of a Riemannian geometry with unknown metric tensor, to be determined from the equations of motion and boundary conditions. It is not helpful, however, to employ the tensor notation ( $g_{11} = h_\alpha^2$ , etc.); a basic feature of the physical problem is that a direction, namely the stream direction, is distinguished at every point, so that  $\theta$  and  $(\theta + \pi)$  are distinguished and (6), (7) define not only the magnitudes but also the *signs* of  $h_\alpha$  and  $h_\beta$ .

Cross-differentiation of (6), (7) yields differential equations for  $h_\alpha, h_\beta$  as functions of  $\alpha, \beta$ , which are called focusing equations since the variation of  $h_\alpha$  and  $h_\beta$  describes the convergence and divergence of neighbouring Mach lines. With

$$m(\omega) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{d\mu}{d\omega} \right) \operatorname{cosec} 2\mu = \frac{\gamma + 1}{8 \sin \mu \cos^3 \mu}, \quad (8)$$

$$f(\omega) = \exp \left\{ 2 \int m \cos 2\mu d\omega \right\} = [ \{ (\gamma - \cos 2\mu)^\gamma (\sin \mu)^{-\gamma-1} \}^{1/(\gamma-1)} \sec \mu ]^{1/2} \quad (9)$$

and

$$U = \frac{h_\alpha}{f}, \quad V = \frac{h_\beta}{f}, \quad (10)$$

the focusing equations may be written [3]

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = m V, \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = -m U. \quad (12)$$

By (10), (11) may also be written in the form

$$\frac{\partial U}{h_\beta \partial \beta} = \frac{m}{f}, \quad (13)$$

and it can be shown [4] that this equation is indeed valid provided only that  $U$  exists, even if  $U^{-1}$  and  $V$  or  $V^{-1}$  do not;  $\partial/h_{\beta} \partial\beta$  represents, by (6), differentiation with respect to length, in the flow plane, in the plus Mach direction taken in the sense making an acute angle with the local stream direction. An analogous equation is valid for  $V$ .

Wave Fronts

The assumed continuity of pressure and velocity as functions of  $x, y$  implies that of the Mach angle  $\mu$  and, by (8), (9), of  $m$  and  $f$ , as long as the flow is supersonic ( $0 < \mu < \pi/2$ ). It follows from (13) that  $U$  is a continuously differentiable function of length along plus Mach lines<sup>4)</sup>. Discontinuities of  $U$  may, however, occur across the plus Mach lines, and if a square bracket denotes the jump of the quantity inside,

[U] = const along plus Mach lines (14)

by (13). Thus  $[U]$  is a quantitative invariant property of plus characteristics. The steepening or decay of the jumps of pressure gradient and streamline curvature, for instance, follow from (3) to (5), (7), (9) and (10), and this illustrates the physical significance of the 'propagation function'  $f$ .

As shown in Appendix 1, the uniqueness theorem implies the following Lemma. If the solution at any point  $(x, y)$  is supersonic and determined uniquely by data prescribed on a boundary line lying entirely in the supersonic part of the flow, then both Mach lines through  $(x, y)$  must meet this boundary line where data are prescribed. It follows that any jump of  $U$  must be introduced either directly by the boundary conditions, or by the process that a jump of  $V$  so introduced is reflected from a boundary line segment on which, not  $U$  itself, but only a relation between  $U$  and  $V$  is prescribed<sup>5)</sup>. In any case,  $[U]$  as a function of  $\alpha$  can be read directly off the boundary conditions.

The jump concept can be extended and given more physical meaning. If the solution is known in some finite region  $R$ , it may be continued analytically (i.e., so that the pressure and velocity components have continuous partial derivatives of all orders with respect to  $x, y$ ) into any adjacent region  $S$  (see figure). The solution so defined in  $S$  may be regarded as representing a natural continuation of the pressure wave, or interaction of pressure waves, in  $R$ . If boundary conditions are prescribed so as to determine the solution in  $S$  uniquely, and if the analytically continued solution does not satisfy these boundary conditions, then the proper solution in  $S$  may be regarded as representing

4) To any statement concerning  $U$  there corresponds a dual statement concerning  $V$ , with the roles of the characteristics families interchanged, and vice versa. For brevity, the dual statements will be omitted.

5) E. g., a streamline the shape of, but not the pressure distribution on, which is prescribed.

the interaction of the original pressure wave with a new wave introduced by the new analytic element in the boundary conditions for the region  $S$ . The difference between the proper solution and the analytically continued solution at any point in  $S$  may be distinguished by a square bracket and regarded as the contribution of the new wave to the solution in  $S$ . By the uniqueness theorem, the border  $B$  between  $R$  and  $S$  (see figure) must, of course, be a Mach line; assume it to be a plus Mach line,  $\alpha = \alpha_0$ . Then from (12) and (11), for  $|\alpha - \alpha_0| \ll 1$ ,

$$[V] = 0 \left( \int_{\alpha_0}^{\alpha} [U] d\alpha \right)$$

and to a first approximation,  $[U]$  is a function of  $\alpha$  only. Thus (14) gives the contribution of the new wave at least in a strip of Mach lines near the wave front  $B$ . This strip need not be narrow in the flow plane - in fact, this 'wave front approximation' provides a method of obtaining uniform first-order theories of gas dynamical problems for which a complete solution is difficult to obtain [5, 6].

### Branch Lines

A line in the flow plane at which the mapping of this plane into the characteristic  $(\alpha, \beta)$ -plane has a fold is called a branch line. As shown in Appendix 2, it must be a plus (or minus) Mach line which is either a wave front across which  $U$  (or  $V$ ) changes sign, or a line along which  $U^{-1} \equiv 0$  (or  $V^{-1} \equiv 0$ )<sup>6</sup>.

The branch property is therefore an invariant property of characteristics. It follows that this property can be 'removed' by a transformation to a different characteristic variable  $\alpha'(\alpha)$  [or  $\beta'(\beta)$ ]. This implies, in turn, that the singular part,  $U^*$ , of  $U(\alpha, \beta)$  must be a function of  $\alpha$  only<sup>4</sup>), and by the Lemma of the preceding section,  $U^*(\alpha)$  must therefore be identical with the singular part of the boundary conditions! (Or at least, if the singularity of  $U$  is introduced by the boundary conditions only indirectly, by reflexion of a singularity of  $V$  from a boundary on which only a relation between  $U$  and  $V$  is prescribed,  $U^*(\alpha)$  is deducible directly from the singular part  $V^*(\beta)$  of the explicit boundary data.)

A region in the flow-plane in which  $\alpha = \text{const}$  is called a plus simple wave, and it is covered by branch lines  $U^{-1} = 0$ , by (7). A region in which both  $\alpha$  and  $\beta$  are constant is a region of uniform flow, by (3) to (5). Except in such regions,  $x$  and  $y$  are continuous functions of  $\alpha$  and by (7), any singularity of  $U$  must be integrable, as a function of  $\alpha$ .

<sup>6</sup>) A line  $1/U = 0$  is called branch line also when  $U$  does not change sign across it, since a local degeneration, even if no fold, of the mapping occurs and the line possesses all the other properties of branch lines. This restricted branch property may be the property of only one side of a Mach line, if  $U$  is discontinuous<sup>4</sup>).



The local properties of the mapping near a branch line have been discussed by several authors [7, 8, 4, 9].

### Limit Lines

A line in the characteristic plane at which the mapping of that plane into the flow plane has a fold is called singular line, since the solution predicts two different velocities at the same point  $(x, y)$ . The image of a singular line in the flow plane is called limit line, since it represents a bound for the extent of the region in which the solution can correspond to physical reality. By (6), (7) and (9), (10),  $U$  or  $V$  must change sign across a singular line, and since a singular line  $U = 0$  or  $V = 0$  is not, in general, a characteristic line, by (11) and (12), the singularity of the mapping is an essential one which cannot be removed by transformation to other characteristic variables.

Moreover, if a supersonic solution be extended far enough in the flow plane, then any Mach line that is not a branch line must meet a limit line (unless vacuum is approached on the Mach line)<sup>7)</sup>. The situation envisaged in the theorem is that any solution, originally defined in a finite region  $R$  (see figure), is extended in an arbitrary manner, but so as to remain supersonic. It will be noted that the theorem, but for the proviso regarding approach to vacuum, would be the analogue of LIOUVILLE'S theorem that the constant is the only analytic function regular throughout the whole plane. In this sense, therefore, the limit type singularities of supersonic flow are an analogue of the more familiar singularities that define the structure of incompressible potential flow.

Singular lines may be lines on which  $U = 0$ <sup>4)</sup>, or lines across which  $U$  changes sign discontinuously<sup>8)</sup>, and any one singular line may be composed of segments of either type of line. Moreover a segment of singular line  $U = 0$  may coincide with a segment of a coordinate line  $\beta = \text{const}$  in the characteristic plane so that, by (7), the corresponding segment of limit line in the flow plane degenerates to a point, the 'centre' of a wave. If a limit line starts or ends in a supersonic region, it must do so at a highly singular point of the mapping, no example of which seems to have been found to date.

The local properties of the Mach line pattern near limit lines have been studied by several authors [10, 8, 4, 9]. The most significant one is perhaps that the pressure gradient is infinite where  $U = 0$  or  $V = 0$ , by (3) to (7) and (9), (10), so that the neglect of viscosity and heat conduction in the equations of motion cannot be strictly justified. The connection between limit lines and shocks was first conjectured by RIEMANN [11]. More recently, MAHONY [12] has shown that, if a shock be represented as a line of discontinuity of pressure

<sup>7)</sup> This is the theorem actually proved in [4]. Whether the proviso regarding approach to vacuum is indeed necessary, is not yet known.

<sup>8)</sup> Such wave fronts may be distinguished from the branch type wave fronts by the help of the boundary conditions.

etc. in an inviscid flow, then a shock starting or ending inside a region of otherwise homentropic, supersonic flow must do so at a limit point at which the pressure rises in the local stream direction. And conversely, if a limit line with rise of pressure in the stream direction occurs in a continuous, supersonic solution of the equations of homentropic flow, then a shock discontinuity can be fitted into that solution in just one way so as to obtain an approximation to a physically realizable flow; experiment [13] indicates, moreover, that this represents indeed an approximation to the observed flow.

The best-known example of a limit point associated with fall of pressure in the stream direction is the centre of a Prandtl-Meyer expansion. More generally, the occurrence of a limit line with pressure falling in the stream direction, indicates that the streamline through a limit point separates the part of the solution that can correspond to physical reality from the part containing the limit line.

### Appendix

1. Assume that a solution is determined uniquely in a region of the flow plane by boundary values prescribed on some line  $L$ ; as shown in the first section, it must then be determined in a Mach quadrangle. Suppose that the plus Mach line through a point  $P$  in this quadrangle does not meet  $L$ . There must then be a point  $Q$  on the minus Mach line through  $P$  such that the plus Mach line through  $Q$  meets  $L$ , but no plus Mach line passing between  $Q$  and  $P$  does. The occurrence of an arbitrary jump  $[U]$  on any Mach line passing between  $Q$  and  $P$  is then compatible with the differential equations and boundary conditions, whence the solution cannot be determined at  $P$ . An analogous argument holds with the roles of the Mach line families interchanged, and the lemma follows.

2. Assume first that the mapping of the characteristic plane into the flow plane is regular at the branch line. Then by (1), (2), (4) and (5),

$$A = \sin(\theta - \mu) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \cos(\theta - \mu) \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

or

$$B = \sin(\theta + \mu) \frac{\partial \beta}{\partial x} - \cos(\theta + \mu) \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

must change sign and remain bounded. By (6), (7), (9) and (10),

$$AU = -(f \sin 2\mu)^{-1} < 0$$

and bounded, for  $0 < \mu < \pi/2$ , so if  $A$  changes sign, it must do so at a wavefront across which  $U$  is discontinuous or at a line on which  $U^{-1} = 0$ . Now, if  $U$  is bounded at any point, then it remains so on the plus Mach line through that

point, by (13), (8) and (9), for  $0 < \mu < \pi/2$ , so a line  $U^{-1} = 0$  is either a plus Mach line or lies in a simple wave region where  $U^{-1} \equiv 0$ .

It remains to consider the case where singularities of branch and limit type coincide. This may occur on a wave front [9] across which  $U$  is discontinuous but non-zero and bounded, and such a front is a plus Mach line. If both  $U$  and  $V$  are continuous, only limit type singularities of the mapping can occur. Finally, if  $U^{-1}$  and  $V$  are continuous, a simultaneous singularity of both mappings can occur only where  $U^{-1} = V = 0$ , that is, either at a plus Mach line  $U^{-1} = 0$  or in a simple wave  $U^{-1} \equiv 0$ .

REFERENCES

[1] L. HOWARTH, *Modern Developments in Fluid Dynamics, High-Speed Flow* (Oxford 1953).  
[2] H. LEWY, *Math. Ann.* 97, 179 (1928).  
[3] J. J. MAHONY and R. E. MEYER, *Phil. Trans. [A]* 248, 467 (1956).  
[4] R. E. MEYER, *Phil. Trans. [A]* 242, 153 (1949).  
[5] R. E. MEYER, *Quart. J. Mech. appl. Math.* 5, 270 (1952).  
[6] J. J. MAHONY, *The Internal Flow Problem in Axi-Symmetric Supersonic Flow*, Aero. Res. Lab. Melbourne Rep. [A] 101 (1957).  
[7] M. J. LIDTHILL, *Proc. Roy. Soc. [A]* 191, 321 (1947).  
[8] J. W. CRAGGS, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 44, 360 (1948).  
[9] P. M. STOCKER and R. E. MEYER, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 47, 518 (1951).  
[10] W. TOLLMIEH, *Z. angew. Math. Mech.* 21, 140 (1941).  
[11] B. RIEMANN, *Gesammelte Werke* (Leipzig 1876), p. 144.  
[12] J. J. MAHONY, *Phil. Trans. [A]* 248, 499 (1956).  
[13] N. H. JOHANNESSEN, *Phil. Mag.* 43, 568 (1952).

Zusammenfassung

Die im Grossen invarianten Eigenschaften von Wellenfronten, Zweig- und Grenzlinien in der ebenen, stetigen, wirbelfreien und isentropischen Strömung idealer Gase werden diskutiert.

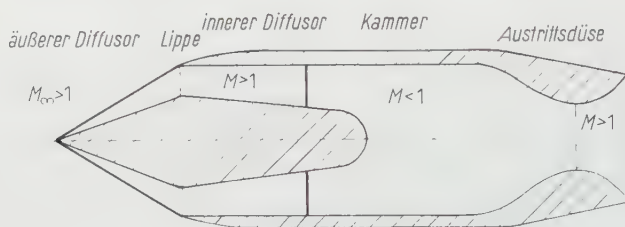
(Received: Dezember 16, 1957.)

# Die Pulsationen von Stossdiffusoren

Von KLAUS OSWATITSCH und INGOLF TEIPEL, Aachen, Deutschland<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Schon bei den ersten Versuchen mit Stossdiffusoren traten Pulsationen auf, sobald die Durchflussmenge so stark gedrosselt wurde, dass die Luft nicht mehr mit Überschallgeschwindigkeit in das Diffusorinnere einströmen konnte [1]<sup>2)</sup>. Der Vorgang sei an Figur 1 erläutert, wobei mit der Beschreibung des statio-



Figur 1

Stossdiffusor im Normalbetriebszustand.

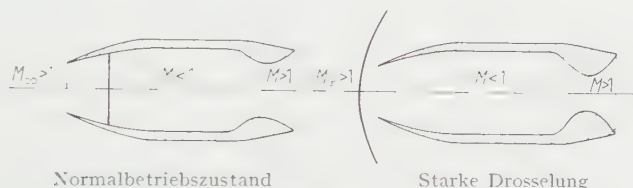
nären Vorgangs begonnen werden soll. Die mit einer Überschall-Mach-Zahl  $M_\infty$  anströmende Luft wird zunächst im «äusseren Diffusor» in einem oder in mehreren schiefen Stössen und allenfalls auch zum Teil stetig isentrop verdichtet. Dabei sei angenommen, dass kein Stoss unterhalb der Diffusorlippe eindringt, so dass die Luft im wesentlichen mit einer über den Eintritts- (Lippen-)Querschnitt konstanten Überschall-Mach-Zahl eintritt. Damit ist die Durchflussmenge für den «inneren Diffusor» gegeben. Sie ist aber auch gegeben durch die Austritts-Laval-Düse. Durch diese tritt eine dem Ruhedruck in der Kammer proportionale Menge aus. Ist die Austrittsdüse hinreichend geöffnet, so muss sich vor ihr ein Ruhedruck einstellen, welcher Austritts- und Eintrittsdurchsatz gleichmacht. Das geschieht in der Weise, dass sich im Unterschall-Diffusor ein senkrechter Stoss vom geforderten Ruhedruckverhältnis einstellt.

Vor diesem «Abschlußstoss» wirkt der innere Diffusor auf die Überschallströmung beschleunigend. Wird die Austrittsöffnung gedrosselt, so muss der

<sup>1)</sup> Institut für Theoretische Gasdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 477.

Ruhedruck steigen, weil die Durchflussmenge im stationären Fall festliegt. Der Abschlußstoss rückt also in Richtung kleinerer Verluste, das heisst stromaufwärts. Das ist so lange möglich, bis der «Abschlußstoss» im theoretischen Optimalpunkt der Drosselung – im Lippenquerschnitt – steht. Den Strömungszustand mit Überschallgeschwindigkeit im Eintrittsquerschnitt und Abschlußstoss im Inneren bezeichnet man als Normalbetriebszustand.



Figur 2  
Pitot-Diffusor.

Wird die optimale Drosselung überschritten, so wird der Abschlußstoss aus dem Diffusorinneren verdrängt, die Luft tritt mit Unterschallgeschwindigkeit durch den Lippenquerschnitt ein, und der Durchsatz sinkt ab. Es ist zweckmässig, den optimalen Betriebszustand als «kritisch» zu bezeichnen. Bei stärkerer Drosselung spricht man nach R. HERMANN [3] von «unterkritischer», im Normalbetriebszustand von «überkritischer» Strömung. Im «unterkritischen» Zustand treten bei Stossdiffusoren der Bauart von Figur 1 die anfangs erwähnten, in der anglo-amerikanischen Literatur als «buzz» bezeichneten Pulsationen auf. Sie führen zu einem starken Leistungsabfall des Diffusors. Ihre Vermeidung ist deshalb von hohem praktischem Interesse.

Der Vorgang wurde bereits weitgehend experimentell untersucht. Nach ROSÉN [2], der den Vorgang filmte, sind hochfrequente und niederfrequente Schwingungen zu unterscheiden. Die Rechnungen unserer Arbeit beziehen sich jedoch auf die wichtigeren niederfrequenten Pulsationen von einigen hundert Hertz und auf Versuche, welche R. HERMANN [3] in seinem Buch wiedergibt.

Von den theoretischen Untersuchungen sind als erfolgreichste jene von STERBENTZ-EVVARD [4] und STERBENTZ-DAVIDS [5] zu nennen, welche die Diffusorkammer als Helmholtzschen Resonator auffassen. Das dort ermittelte Kriterium für die Pulsationen ist mit unserem nahe verwandt, doch beziehen sich unsere Annahmen nur auf die Vorgänge im Eintrittsquerschnitt, während die Strömung im Inneren ohne eine andere Voraussetzung als jene der Reibungslosigkeit berechnet wird. Die Vermeidung weiterer vereinfachender Annahmen ist natürlich mit einem Verzicht auf analytische Behandlung verbunden. Sie gewährt jedoch eine gute Anschaulichkeit der Beispiele.

Die Schwingungsvorgänge im Stossdiffusor sind nahe verwandt mit dem bereits im Jahre 1929 beschriebenen Hartmannschen Oszillator [6], dessen



theoretische Behandlung jedoch noch aussteht. Es handelt sich dabei um eine Pitot-Rohr-artige Öffnung, auf welche ein Überschallstrahl vom Durchmesser der Rohröffnung aufprallt.

Wichtig ist für das folgende, dass ein Pitot-Diffusor (Figur 2) in einer hinreichend ausgedehnten Überschallparallelströmung keine Pulsationen zeigt, sei es, dass der Abschlußstoss sich im Inneren befinde (Normalbetriebszustand) oder dass er wie beim Pitot-Rohr vor die Eintrittsöffnung gedrückt ist (starke Drosselung). Nach diesem kurzen historischen Überblick sei zu einer theoretischen Erklärung des Vorganges übergegangen.

## 2. Modellvereinfachungen

Für eine physikalische Erklärung des Pulsationsvorganges und eine daran anschliessende Berechnung ist die Feststellung wichtig, dass sich der instationäre Vorgang im inneren Diffusor auf einer bedeutend grösseren Wegstrecke abspielt als im äusseren Diffusor. Ganz abgesehen davon, dass letzterer nur einen kleinen Teil der Gesamtlänge des Apparates ausmacht, wird in vielen Fällen nur ein Teil des äusseren Diffusors von den Schwingungsvorgängen erfasst, wie die Versuche zeigen. Auch beim Pitot-Diffusor, wo ja ein äusserer Diffusor fehlt, ist im Extremfalle der Abstand der «Kopfwelle» von der Lippe nur klein im Verhältnis zur Gesamtlänge.

Die für einen stationären Zustand erforderliche Einstellzeit ist ein bestimmtes Vielfaches jener Zeit, welche eine Schallwelle braucht, um das vom instationären Vorgang erfasste Gebiet zu durchlaufen und dadurch die instationären Zustandsunterschiede auszugleichen. Das bedeutet für die Diffusorpulsationen, dass die Schwingungen des ganzen Systems im wesentlichen durch die instationären Vorgänge im Inneren des Antriebes bedingt sind. Damit stimmt die Annahme von STERBENTZ und EVVARD [4] durchaus überein, die Kammer als Oszillator aufzufassen. Die Vorgänge am äusseren Diffusor sind dagegen im wesentlichen «quasistatisch», weil ihnen – bedingt durch die Länge und damit durch die Schwingungszeit des inneren Systems – Zeit für einen weitgehenden quasistatischen Ausgleich zur Verfügung steht.

Die Beispielrechnungen beziehen sich im folgenden nur auf die Strömungsvorgänge im Inneren. Der äussere Diffusor geht bei diesen Rechnungen nur durch die Koppelung von Strömungsgeschwindigkeit und thermischen Zustand ein, welche er dem Eintrittsquerschnitt aufprägt. Diese Koppelung sei als «Eintrittskennlinie» bezeichnet (Figuren 6 und 8). Sie ist für die Art des äusseren Diffusors typisch. Würde die Eintrittskennlinie dem Versuch entnommen werden, so bestünden die einzigen Näherungen in der Annahme einer instationären, reibungsfreien Fadenströmung. Man könnte also die Vorgänge mit beträchtlicher Genauigkeit berechnen. Die Vereinfachungen beziehen sich also im grossen und ganzen nur darauf, dass bei der Festlegung der Eintritts-



kennlinie von quasistatischen Vorstellungen ausgegangen wird. Dabei ist es durchaus möglich, dass es immer einen entsprechenden Diffusor gibt, dessen Form im allgemeinen aber nicht oder nur näherungsweise angegeben werden kann. Eine quasistatische Kennlinie stellt zwar eine gewisse Vergrößerung dar, welche aber bei genügend grossen Kammern sicher nur geringfügig ist. Dadurch erkaufte man sich gleichzeitig einen besseren Einblick in die Vorgänge.

Die einfachsten Verhältnisse weist der *Pitot-Diffusor* auf. Wegen der Annahme quasistatischer Strömung muss für ein ideales Gas konstanter spezifischer Wärme die Ruhetemperatur  $T_0$  konstant sein, solange das Gas in den inneren Diffusor einströmt. Sie ist durch den Energiesatz gegeben:

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{W^2}{2} \quad (1)$$

( $c_p$  spezifische Wärme bei konstantem Druck,  $\kappa$  Verhältnis der spezifischen Wärme,  $T$  absolute Temperatur,  $p$  Druck,  $\varrho$  Dichte,  $s$  Entropie der Masseneinheit,  $W$  Geschwindigkeit, 0 Index für den Ruhezustand).

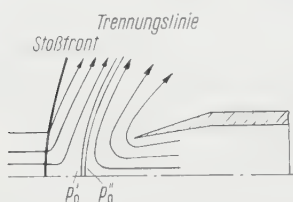
Im Normalbetriebszustand (Figuren 1 und 2) sind die Zustände im Eintrittsquerschnitt immer bekannt. Bei starker Drosselung bleibt beim Pitot-Diffusor die Entropie bei abnehmender Stromdichte im Eintrittsquerschnitt konstant, oder sie nimmt wegen der Wölbung der Kopfwelle vielleicht geringfügig ab. Damit ist die Kennlinie für das Einströmen (konstante Ruhetemperatur und Entropie) gewonnen.

Für ein Ausströmen aus dem Eintrittsquerschnitt entgegen der Anströmrichtung ist eine gesonderte Überlegung erforderlich. Wenn ein solches Ausströmen beim Pitot-Diffusor auch keine Bedeutung haben mag, so spielt es doch beim Stossdiffusor eine Rolle und kann gleich für den letzteren Fall mitbehandelt werden. Wegen der Annahme quasistatischer Strömung gilt wieder für jeden Stromfaden vor dem Eintrittsquerschnitt Gleichung (1), nur kann der Ruhezustand des aus dem Inneren kommenden Gases (mit zwei Strichen gekennzeichnet) ein anderer sein als der Ruhezustand des ankommenden Gases ( $T_0'' \neq T_0$ ). Dasselbe gilt für die Entropie. An der Stelle, wo die ankommende und die rückströmende Luft aufeinanderprallen, muss gleicher Ruhedruck herrschen (Figur 3). Bezeichnet man den Ruhezustand der anströmenden Luft hinter dem Stoss mit einem Strich ( $p'_0$ ,  $T'_0 = T_0$ ,  $s'_0$ ), so gilt  $p''_0 = p'_0$ . Aus dem bekannten Zusammenhang zwischen Entropie, Temperatur und Druck folgt dann:

$$\frac{T''_0}{T_0} = e^{(s''_0 - s'_0)/c_p} \quad (2)$$

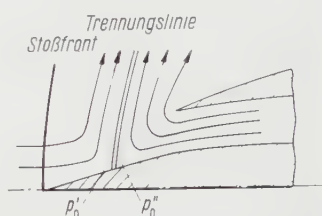
Dabei ist die Entropie  $s''_0$  gleich jener im Austritts'', die Entropie  $s'_0$  hingegen wegen des Stosses ungleich jener im Anströmgebiet. Beim Pitot-Diffusor ist die Entropie  $s'_0$  hinter dem Stoss, im wesentlichen unabhängig von der nun negativen Stromdichte im Eintrittsquerschnitt, durch den senkrechten Stoss gegeben.

Die Ermittlung der Eintrittskennlinie eines Stossdiffusors ist schwieriger und quantitativ ohne Versuche kaum möglich. Durch das Stromaufwärtsdrücken des Abschlußstosses auf den äusseren Diffusor treten dort Grenzschichtablösungen ein, und die Stosskonfiguration des äusseren Diffusors wird geändert. Beides wirkt im allgemeinen im Sinne eines Entropieanstieges bei



Figur 3

Rückströmung aus dem Eintritt.



Figur 4

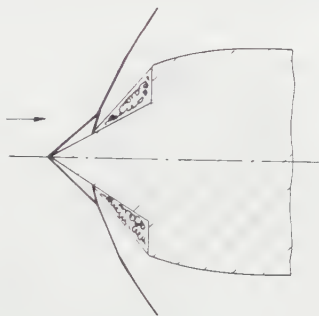
Stossdiffusor mit starker Rückströmung.

abnehmender Stromdichte im Eintritt. Wählt man als Abszisse eine der Stromdichte und als Ordinate eine dem Druckrückgewinn verwandte Grösse, so entspricht dies einer positiven Kennlinienneigung (Figur 6). Für die Strömungsvorgänge im inneren Diffusor kommt es aber nur auf die Kennlinie an und nicht darauf, ob die Entropievermehrung durch Ablösung oder durch Erhöhung der Stossverluste bedingt ist. Freilich kann bei Ablösung ein sehr unhomogenes Material von Totwasser am Zentralkörper und gesunder Strömung an der Lippe in das Innere eindringen. Dieses dürfte sich jedoch im Unterschalldiffusor bald durchmischen, so dass ein Rechnen mit Mittelwerten über den Querschnitt auch bei Ablösung ein brauchbares Bild liefert.

Figur 9–04 im Buche von HERMANN [3] gibt ein deutliches Bild eines Ruhedruckabfalles im äusseren Diffusor durch Grenzschichtablösung. Es ist von uns in Figur 5 wiedergegeben. Im Längsschnitt des achsensymmetrischen Diffusors zeigt sich ein keilförmiges «totes» Gebiet, welches durch eine nahezu gerade Linie von der gesunden Strömung abgetrennt ist. Diese Linie erstreckt sich von einem Punkt der Kegeloberfläche zur Diffusorlippe und erzeugt auf diese Weise eine Strömung an einem geknickten Kegel mit einer Stosskonfiguration, deren theoretisch ermittelte Form sich ausgezeichnet mit jener der Schlieraufnahme deckt. Dies zeigt, dass die Annahme quasistatischer Strömung hier erfüllt ist. Wahrscheinlich handelt es sich um eine Extremlage der Pulsation. Damit ist der Punkt verschwindender Stromdichte der Eintrittskennlinie für diesen Diffusor gegeben. Hierbei herrscht eine dem toten Gebiet entsprechend hohe Entropie.

Bei den Rechnungen wird als Variable nicht die Stromdichte, sondern die Funktion  $W p^{1,2}$  gewählt. Diese Grösse tritt nämlich in den Verträglichkeitsbedingungen der von uns gewählten Charakteristikenmethode auf und unter

scheidet sich im übrigen von der Stromdichte nur um einen Entropiefaktor. Mit dem Optimalpunkt und dem Punkt von Figur 5 besitzt man also die Entropie für zwei bestimmte Stromdichten. Die Kennlinie für die Zwischenzustände wurde einfach als linear angenommen (Figur 6). Zusammen mit der Ruhetemperatur nach Gleichung (1) hat man zwei Bindungen für 3 Variablen und



Figur 5

Ablösungsgebiet vor dem Diffusoreintritt.

kann mit der Charakteristikenbedingung, welche die Rechnung im inneren Diffusor liefert, den jeweiligen Eintrittszustand ausrechnen.

Typische Beispiele für Ausströmzustände haben sich schon bei den allerersten Versuchen gezeigt. Bei höheren Mach-Zahlen mit starken Aufladungen des Diffusorinneren kann die Kopfwelle bis an die Kegelspitze des äusseren Diffusors weggeblasen werden. Es ergibt sich dann etwa das Bild von Figur 4. Man erkennt, dass der Ruhedruck an der Trennungslinie weit unter jenem des Normalbetriebszustandes liegen kann. Doch kommt es dabei ganz wesentlich auf die Anström-Mach-Zahl und die Form des äusseren Diffusors an.

Das Verhältnis der Ruhetemperaturen von Anströmung und Rückströmung  $T'_0 - T_0$  und  $T''_0$  folgt aus Gleichung (2) mit denselben Überlegungen wie beim Pitot-Diffusor. Nur ist die Entropie hinter dem Stoss nicht bekannt, weil dieser nicht notwendig wie beim Pitot-Rohr ein im wesentlichen senkrechter Stoss sein muss. Es ist vielmehr erforderlich, abhängig von der Anströmmenge oder abhängig von  $Wp^{1/\kappa}$ , eine bestimmte Stosskonfiguration und damit eine bestimmte Entropie  $s'_0$  vor der Trennungslinie anzunehmen oder aus dem Experiment zu ermitteln. Damit kann aber  $s'_0$  aus Gleichung (2) eliminiert werden, und man erhält  $T''_0/T_0$  als Funktion von  $Wp^{1/\kappa}$  und  $s''_0$ , wobei die Entropie der Luft beim Ausströmen stets gegeben ist. Die Kennlinien lässt man bei  $Wp^{1/\kappa} = 0$  stetig ineinander übergehen. Es ist durchaus denkbar, dass Kennlinien bei  $Wp^{1/\kappa} = 0$  ein Minimum des Ruhedruckes aufweisen, weil im Ablösungsgebiet ein wesentlich kleinerer Ruhedruck herrschen kann als hinter einem senkrechten Stoss in der Anströmung.

### 3. Erklärung der Pulsation, Stabilitätskriterium

Ganz ähnlich wie ein beidseitig oder einseitig offenes Rohr ist auch ein durchströmtes Rohr veränderlichen Querschnittes zu Luftschwingungen fähig. Sehen wir einmal von der Kopfwelle beim Pitot-Diffusor (Figur 2) mit starker Drosselung ab und betrachten wir nur den inneren Diffusor. Angenommen, es sei gerade gedrosselt worden, so dass die einströmende Menge nicht mehr voll durch die Laval-Düse abzuströmen vermag, so wird der Druck in der Diffusorkammer durch die sich ansammelnde Luft ansteigen, eine Druckwelle wird mit Schallgeschwindigkeit stromaufwärts wandern und im Eintritt einen Überdruck erzeugen. Dieser liegt wie der Druck im Inneren über dem Wert stationären Durchflusses der neuen Drosselstellung. Die Eintrittsmenge wird deshalb zu einem Betrag herabgemindert, welcher unter dem stationären Wert liegt. Sobald sich diese Zuflussminderung in der Diffusorkammer bemerkbar macht, was wieder mit Schallgeschwindigkeit stromabwärts signalisiert wird, fängt der Kammerdruck an zu sinken. Er sinkt jedoch unter den stationären Wert, weil das Erreichen des stationären Wertes im Eintritt wieder erst verspätet bekannt wird. Dann erhöht sich der Zufluss, steigt mit der Zeit aber über den stationären Wert, weil sich inzwischen die Unterdrucke in der Kammer gemeldet haben. Dies führt schliesslich wieder zu Überdrucken in der Kammer. Das Spiel wiederholt sich periodisch, weil die Meldungen des Kammerzustandes dauernd zu spät am Eintrittsquerschnitt eintreffen.

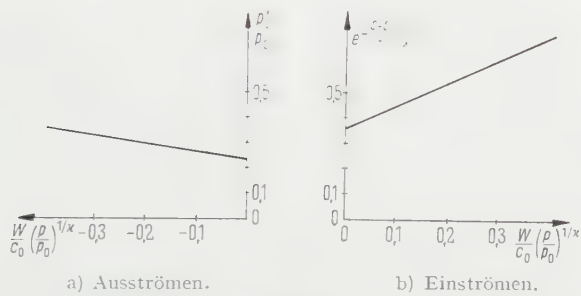
Im Normalbetriebszustand ist etwas Ähnliches nicht möglich, weil die Menge festliegt und eine Meldung zum Eintrittsquerschnitt nur dann geschieht, wenn die Störung so kräftig ist, dass der Abschlußstoss stromaufwärts herausgejagt wird.

Die Kopfwelle ändert beim Pitot-Diffusor an dem Pulsationsbild nichts Wesentliches, nur senkt sie das allgemeine Druckniveau. Die Schwingung stirbt jedoch genau so wie die Schwingung einer Pfeife ab, wenn sie nicht immer wieder angeregt wird, weil die Energie durch Reibung und durch akustische Abstrahlung aufgezehrt wird. Bei gleichbleibendem Druckrückgewinn im äusseren Diffusor, also beispielsweise beim Pitot-Diffusor starker Drosselung, bleiben die Pulsationen daher aus.

Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn die Verluste durch Ablösungserscheinungen oder durch die Änderung der Stosskonfiguration im äusseren Diffusor mit abnehmender Eintrittsmenge ansteigen und mit zunehmender Eintrittsmenge abfallen. Bei einer solchen Eintrittskennlinie (Figur 6) befindet sich der innere Diffusor bei herabgesetzter Eintrittsmenge auf überhöhtem Druckniveau. Die Eintrittsmenge wird dadurch stärker gedrosselt als bei gleichbleibenden äusseren Verlusten. Umgekehrt wird die Eintrittsmenge aber auch stärker erhöht als bei einem Pitot-Diffusor, weil sich das Innere in dieser

Stadium auf einem gegenüber dem äusseren Diffusor gesenkten Druckniveau befindet. Eine Eintrittskennlinie nach Figur 6 regt die Pulsationen also an.

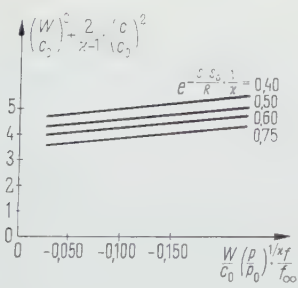
Die Strömungsverhältnisse werden allerdings noch dadurch etwas kompliziert, dass der innere Diffusor mit Luft unterschiedlicher Entropie versorgt



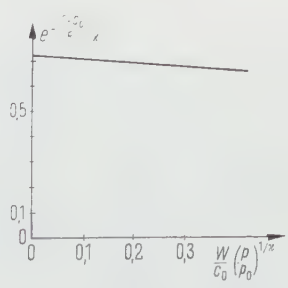
Figur 6  
Eintrittskennlinien (periodischer Fall).

wird. Doch ist aus diesem Umstand keine dämpfende Wirkung zu erwarten, weil gerade zur Zeit überhöhter Zufuhr auch die Luftentropie erniedrigt wird, was im stationären Sinn einem erhöhten Ruhedruck entspricht. Bei erniedrigter Zufuhr ist es wieder gerade umgekehrt.

Nach diesen Überlegungen ist also bei leicht abfallender Eintrittskennlinie (Figur 8) keine Pulsation zu erwarten. Bei ansteigender Eintrittskennlinie (Figur 6) müssen hingegen Pulsationen auftreten. Für beide Fälle wurde ein Beispiel durchgerechnet.



Figur 7



Figur 8

Eintrittskennlinien (periodischer Fall), Ausströmen.

Eintrittskennlinie (aperiodischer Fall).

Das hier formulierte Stabilitätskriterium ist wohl jenem von STERBENTZ und EVVARD [4] verwandt, doch nicht mit ihm identisch. Unser Kriterium und unsere Vereinfachungen beziehen sich nämlich nur auf die Verhältnisse im



Eintrittsquerschnitt, während sich das Kriterium in [4] auf den Gesamtdruckrückgewinn bezieht. Dagegen umfasst unser Kriterium bei äusseren Diffusoren ohne Reibungsverluste jenes von FERRI und NUCCI [7]. Das Eindringen eines Geschwindigkeitssprunges durch den Eintrittsquerschnitt ist nämlich mit erhöhten Verlusten dort verbunden.

Bei Strömungen mit Verbrennung liegen die Verhältnisse nicht viel anders, wenn man von den möglichen Verbrennungspulsationen absieht. Bei Unterschallströmung im Eintrittsquerschnitt und positiver Neigung der Eintrittskennlinie ist wieder mit Pulsationen zu rechnen. Die Form der Pulsation kann allerdings wesentlich dadurch geändert werden, dass der Verbrennungsvorgang unter dem Einfluss der Pulsationen in der Kammer steht.

#### 4. Charakteristikenverfahren

Die Berechnung der Strömungsvorgänge wurde mit einem Charakteristikenverfahren für eindimensionale, instationäre Strömung vorgenommen. Da die Strömung im allgemeinen nicht isentrop verlief, mussten die Verträglichkeitsbedingungen von [7] auf Anisentropie erweitert werden. Sie lauten damit:

$$\mp \left[ \frac{\partial \left[ \frac{W}{c_0} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa} \frac{f}{f_\infty} \right]}{\partial t} \right]_{\xi, \eta} + \frac{f}{f_\infty} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa} \frac{c_0}{c} \left[ \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{W^2}{c_0^2} + \kappa \cdot 1 \cdot \frac{c^2}{c_0^2} \right)}{\partial t} \right]_{\xi, \eta} - \frac{f}{f_\infty} \cdot \frac{1}{\kappa - 1} \cdot \frac{c}{c_0} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa} \left[ \frac{\partial \frac{s}{c_p}}{\partial t} \right]_{\xi, \eta} = 0 \quad (1)$$

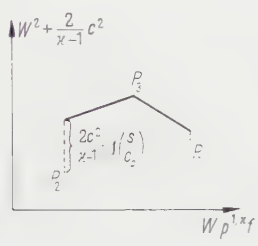
( $f$  Querschnitt,  $c$  Schallgeschwindigkeit,  $t$  Zeit).

$\xi = \text{const}$  und  $\eta = \text{const}$  sind die beiden Mach-Linien. Die Zustandsgrössen sind durch die entsprechenden Ruhegrössen im Anströmgebiet dimensionslos gemacht. Mit  $f_\infty$  ist der Eintrittsquerschnitt gekennzeichnet, wenn kein Kegel vorhanden wäre. Das Verifizieren dieser Gleichungen und eine eingehende Darstellung der Methode wird demnächst in einer gesonderten Arbeit wiedergegeben. Die erste der unter dem Differentialzeichen stehenden Variablen ist eine mit einem Entropiefaktor multiplizierte Durchflussmenge, die zweite die stationäre Energiekonstante und die dritte die Entropie. Für die schrittweise Berechnung ist es zweckmässig, das Entropieglied mit der Energiegrösse zusammenzuziehen. Die Differenzengleichungen lassen sich dann so schreiben:

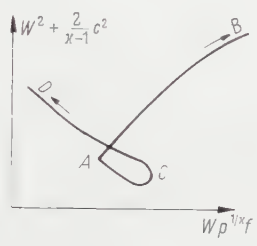
$$\mp \left[ \Delta \left( \frac{W}{c_0} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa} \frac{f}{f_\infty} \right) \right]_{\xi, \eta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{f_\infty} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa} \left( \frac{c_0}{c} \right) \left[ \Delta \left( \frac{W^2}{c_0^2} + \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \frac{c^2}{c_0^2} \right) - \frac{2}{\kappa - 1} \left( \frac{c}{c_0} \right)^2 \Delta \left( \frac{s}{c_p} \right) \right]_{\xi, \eta} = 0$$



In einer Zustandsebene sei als Abszisse  $W p^{1/\kappa} f$  und  $W^2 + 2 c^2/(\kappa - 1)$  als Ordinate gewählt. Die Entropie kann man sehr gut vorausschätzen, wenn man die Teilchenbahnen mit einzeichnet. So ergibt sich gegenüber dem isentropen Fall eine Verschiebung der Ausgangspunkte nur in der Ordinatenrichtung (Figur 9).



Figur 9  
Zustandsebene.



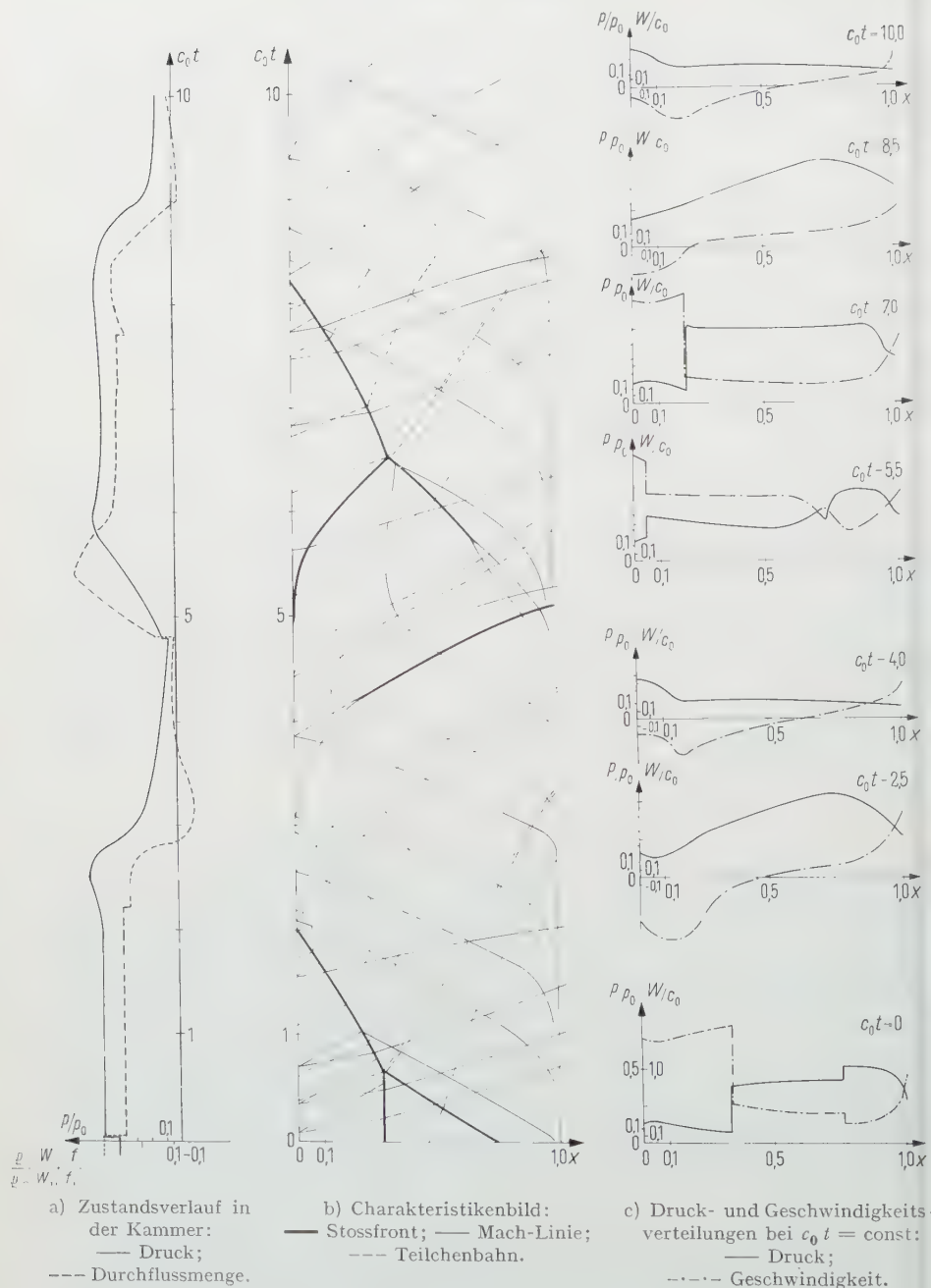
Figur 10  
Stosspolare.

Die einzelnen Stosszustände werden mit den Stosspolaren berechnet. Sie haben in den Zustandsdiagrammen besonderes Aussehen (Figur 10). Vor dem Stoss soll eine bestimmte positive Strömungsgeschwindigkeit bestehen. Der rechtsläufige Stoss liegt dann auf dem eindeutigen Ast  $AB$ . Ein linksläufiger Stoss kann entweder mit der Strömung fortgetragen werden – dafür gilt der Kurventeil  $AC$  – oder er schwimmt gegen die Strömung, dann muss der Zustand auf  $CD$  gesucht werden. Im Punkte  $C$  ist der Stoss stationär geworden.

Für die Stossverzweigung wurde auf ein Druck-Geschwindigkeits-Diagramm zurückgegangen.

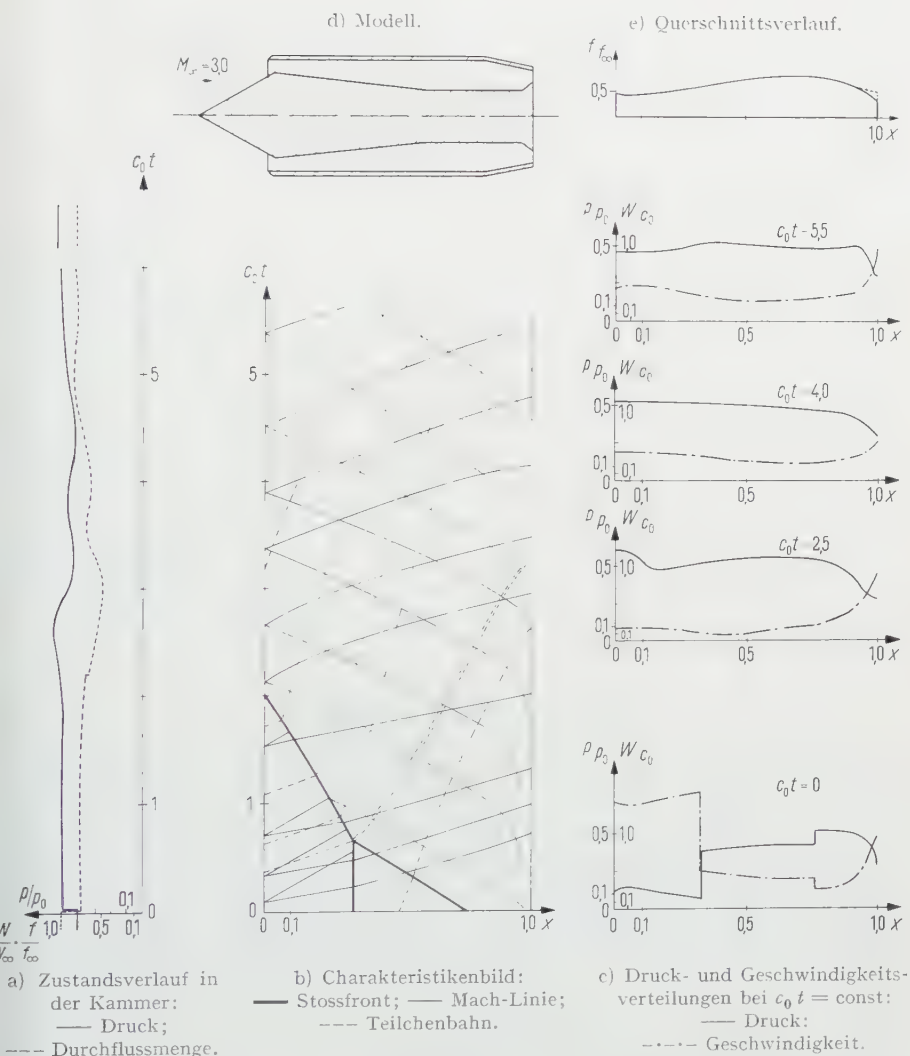
### 5. Beschreibung des Drosselvorganges

In den Beispielen soll ein Stossdiffusor mit der Mach-Zahl  $M_\infty = 3,0$  angeströmt werden. Zuerst hatte sich ein stationärer Zustand eingestellt. Im Diffusorinneren stand ein starker Abschlußstoss. Plötzlich wird die Austritts-Laval-Düse gedrosselt. Es entsteht dadurch eine Störung, die sich stromaufwärts fortpflanzt. Der neue Querschnittsverlauf ist in Figur 12 stark ausgezogen, während die gestrichelte Kurve für den Normalbetriebszustand gilt. Die Rechnung beginnt in einem Zeitpunkt, in dem die Störung, die sich zu einem Stoss aufteilte, in der Diffusorkammer angekommen ist (Figuren 11 und 12). In dem Charakteristikenbild ist bei dem Zeitmaßstab das gleiche Längenmass wie bei der Abszisse zu wählen. Die Einheit ist jedoch kleiner. In der Laval-Düse hat sich wieder ein stationärer Zustand eingespielt, so dass man nun drei im wesentlichen stationäre Gebiete unterscheiden kann: Das erste Gebiet, eine Überschallströmung (sie reicht von der Lippe des Diffusors bis zu dem Abschlußstoss), das zweite, eine Unterschallströmung (sie schliesst sich daran an



Figur 11

Der periodische Fall.



Figur 12  
Der aperiodische Fall.

bis zur instationären Störung), und das dritte eine quasistationäre Strömung bis zur Laval-Düse. Da die instationäre Welle schwach bleibt – ihr grösstes Druckverhältnis beträgt 1,34 – kann man zu Beginn isentrop rechnen. In diesem Anfangsstadium besteht der instationäre Vorgang lediglich in einer stromaufwärts laufenden Stosswelle, die zwei praktisch stationäre Strömungen

aneinanderkoppelt. Die Richtigkeit dieser Annahme für die Anfangsbedingungen bestätigt sich durch die anschliessenden Rechenschritte. Bemerkenswert ist, dass der Druckrückgewinn über jenem vor der Drosselung der Laval-Düse liegt.

Trifft die instationäre Störung auf den Abschlußstoss, so vereinigen sie sich zu einem einzigen Stoss, der nach links aus dem inneren Diffusor herausläuft. Von dem Tripelpunkt des Zusammenstosses geht ein Expansionsfächer von geringem Ausmass und eine Unstetigkeitslinie aus. An dieser Unstetigkeitslinie, die eine Teilchenbahn darstellt, haben Druck und Geschwindigkeit die gleichen Werte, hingegen springt die Entropie. Die Konstruktion in der Zustandsebene vereinfacht sich dadurch, dass die Abszisse  $W p^{1/\kappa} f$  über die Trennungslinie hinweg erhalten bleibt. Daher kann man genau so rechnen wie bei stetigen Entropieänderungen; es tritt eine Verschiebung in der Ordinatenrichtung auf.

Mit wachsender Zeit wird der resultierende Stoss etwas schwächer. Die dadurch entstehenden Entropieunterschiede sind gering. Man hat es auch hier mit quasistationären Vorgängen zu tun. Hinter der Unstetigkeitslinie ist ebenfalls ein quasistationäres Gebiet und noch dazu Isentropie vorhanden. Wenn der Stoss hinausgewandert ist, muss für das Charakteristikenproblem eine Randbedingung eingeführt werden, die durch die Kennlinie gegeben ist.

## 6. Der periodische Fall

Zunächst soll der periodische Fall beschrieben werden, bei dem es zum «Brummen» kommt (Figur 11). Nachdem sich der Stoss draussen befindet ( $c_0 t = 2,0$ ), strömt noch kurze Zeit Luft ein. Der Druckberg in der Kammer, der sich durch die Stösse ausgebildet hat, hat sich verstärkt und bewirkt eine starke Rückströmung (vgl. Teilchenbahnen). Für diesen Fall wird der Ast der Eintrittskennlinien bei negativen Geschwindigkeiten gebraucht (Figur 6). Dazu wird Gleichung (2) umgeschrieben, indem man das Entropieglied aufteilt.

$$T_0'' = T_0' \left( \frac{p_0'}{p_0} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} e^{(s_0'' - s_0)/c_p}.$$

$T_0'$  und die  $e$ -Potenz sind bekannt. In der Kennlinie wird das Ruhedruckverhältnis  $p_0'/p_0$  in Abhängigkeit von  $W p^{1/\kappa}$  dargestellt. Für die Rechnung kann man alles in ein Diagramm einzeichnen, da mit dem Ruhedruck eine Beziehung zwischen den ersten zwei Variablen in der Verträglichkeitsbedingung gegeben ist. Als Parameter erscheint eine Entropiegrösse (Figur 7). Da der engste Querschnitt nicht der Lippenquerschnitt in dem gerechneten Beispiel und damit die optimale Drosselstellung nicht der kritische Zustand war, musste der Eintrittszustand als Ausgangspunkt in den Kennlinien gewählt werden.

Nachdem die Luft aus der Diffusorkammer ausgeströmt ist, hat sich dort ein Unterdruck gegenüber der Anströmung ausgebildet. Es strömt Masse ein, die auf den ersten Teilchenbahnen hohe Entropie besitzt. Auf einem sehr schmalen Streifen schwimmt das Totwassermaterial durch den gesamten Diffusor.

Tritt die Unstetigkeitslinie in Gebiete, in denen der Querschnitt rasch abnimmt, kann eine quasistationäre Strömung nicht mehr aufrechterhalten bleiben. Die senkrechte Mach-Linie, bei der die Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit ist, wird aus der Laval-Düse herausgeschwemmt. Nachdem sich die grossen Entropieunterschiede ausgeglichen haben, stellt sich im engsten Querschnitt wieder Schallgeschwindigkeit ein. Für die Berechnung ausserhalb des Gehäuses wurde der Querschnitt in einem kurzen Bereich konstant gelassen.

Wie aus den Teilchenbahnen zwischen der ersten Unstetigkeitslinie und der Teilchenbahn mit schlechtem Ruhedruckrückgewinn hervorgeht, kehrt sich die Strömung im Diffusorinnern eine gewisse Zeit um. Es ist eine Teilchenbahn eingezeichnet, bei der dies für eine längere Zeit der Fall ist, die aber schliesslich durch die Laval-Düse läuft. Durch den rechtsläufigen Stoss wird der innere Mechanismus nicht geändert. Er hebt das Druckniveau an, das durch die Rückströmung sehr niedrig geworden war.

Bei der Einströmung wird die Eintrittskennlinie in Figur 6b verwendet. Die Geschwindigkeit steigt sehr schnell an. In der Nähe des theoretischen Optimalpunktes für die Drosselung (etwa  $c_0 t = 5,0$ ) muss der Stoss wieder hereinwandern. Damit tritt die stationäre Überschallströmung im Einlauf ein. Gleichzeitig staut sich am Ende der Kammer vor der Laval-Düse die durchströmende Menge, so dass ebenfalls dort ein Stoss entsteht. Dieser Stoss erweist sich als grösser als der zur Zeit  $c_0 t = 0$  auftretende. An der Stelle, wo die beiden linksläufigen Stösse aufeinandertreffen (auch der neue Abschlußstoss ist linksläufig!), ist derselbe Druck wie in der ersten Periode erreicht. Der resultierende Stoss hat also dieselbe Stärke wie nach der ersten Stossinterferenz. Dadurch sind im Gebiet zwischen Stoss und Unstetigkeitslinie fast die gleichen Zustände wiederhergestellt. Die Ortskoordinaten sind etwas geändert gegenüber den früheren Werten. Hinter der Unstetigkeitslinie haben sich dagegen verschiedene Zustände eingestellt, die durch die neue Stosskonfiguration bedingt sind. Aus diesem Grunde ist der Entropiesprung jetzt etwas grösser.

Oberhalb des neuen und des alten Tripelpunktes ist das Charakteristikenbild sehr ähnlich. Bei Vergleichen muss man berücksichtigen, dass nicht sich völlig entsprechende Mach-Linien und Teilchenbahnen eingetragen sind. Trotzdem kommt die gleichartige Tendenz sehr gut zum Ausdruck. Der Strömungsmechanismus führt neuerdings zu einer Ausströmung, die sich nach etwa gleicher Zeit wieder umkehrt.

Um den periodischen Vorgang deutlich erkennen zu lassen, sind rechts neben dem Charakteristikenbild Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen zu ver-



schiedenen Zeitpunkten aufgetragen. Der Abstand vom zweiten Diagramm ab beträgt eine Viertelperiode. Wenn man das dritte und siebte Bild betrachtet, so erkennt man eine gute Übereinstimmung zwischen den Zustandsgrößen. Die Entropie ist wegen des gleichstarken Stosses identisch. Die Bedingungen von  $c_0 t = 4,0$  sind bei  $c_0 t = 10,0$  wiederhergestellt. Die Abweichungen sind so geringfügig gegenüber den maximal auftretenden Werten, dass an einem periodischen Ablauf bei weiterer Rechnung nicht gezweifelt werden kann. Es ist bemerkenswert, dass der Vorgang nach rund  $3/2$  Schwingungen bereits periodisch geworden ist. Aus diesen Ergebnissen errechnet sich bei einer Länge des Diffusors von 27,15 cm eine Frequenz von ungefähr 200 Hz. Für einen ähnlichen Fall hat HERMANN etwa 165 Hz gemessen.

Von Bedeutung ist ebenfalls der Druck und die Durchflussmenge in der Diffusorkammer. Beide Werte wurden für  $x = 0,735$  berechnet und über der Zeit aufgetragen (Figur 11a). Wie aus den Kurven ersichtlich ist, macht sich die Rückströmung bis in die Kammer bemerkbar. Die Sprünge rühren teils von Stößen, teils von Unstetigkeitslinien her. Als mittleren statischen Druck erhält man  $p/p_0 = 0,350$ , und für den Mittelwert des Durchsatzes, der auf die Anströmung bezogen ist, ergibt sich

$$\frac{\varrho}{\varrho_\infty} \cdot \frac{W}{W_\infty} \cdot \frac{f}{f_\infty} = 0,570.$$

## 7. Der aperiodische Fall

Unter aperiodischem Fall soll das gedämpfte Einpendeln in einen neuen stationären Zustand verstanden werden. Erst durch die Verschiedenheit der Eintrittskennlinien ändert sich der Mechanismus. Für die Einströmung soll die Eintrittskennlinie mit zunehmender Masse auch zunehmende Entropie ergeben (Figur 8). Ausgangspunkt für die Kennlinie ist wieder der Zustand hinter dem im Lippenquerschnitt befindlichen Stoss.

Hierbei kommt es überhaupt nicht mehr zu einer Rückströmung. Durch die gesündere, einströmende Menge wird der Ruhedruck am Einlauf grösser als in der Diffusorkammer. Nach und nach stellt sich eine Druckverteilung ein, die einer stationären gleicht. Dieser Zustand wird erst dann erreicht, wenn die Masse mit der hohen Entropie, die durch die Stösse hervorgerufen wird, durch die Laval-Düse hindurchgeströmt ist. In diesem Beispiel müsste man am besten noch einige Zeit weiterrechnen, bis sich die Pendelungen ausgeglichen haben. In einer Zustandsebene kann man sehr gut schon den stationären Punkt erkennen.

Zur rechten Seite des Charakteristikenbildes sind Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen zu den gleichen Zeiten wie beim periodischen Fall eingezeichnet. Schon bei  $c_0 t = 2,5$  – das erste Diagramm ist wegen der Anfangsbe-



dingungen identisch – sieht man einen wesentlichen Unterschied, besonders in dem Verlauf der Geschwindigkeit. Bei  $c_0 t = 4,0$  treten die Abweichungen deutlicher auf.

Anhand der Zustandsverläufe in der Diffusorkammer erkennt man die Pendelungen. Die stationären Werte sind am Ende der Kurven angedeutet.

## 8. Zusammenfassung

Die Ergebnisse zeigen sehr anschaulich die Bestätigung des aufgestellten Pulsationskriteriums. Danach kommt es zu einem periodischen Vorgang, wenn die Verluste am äusseren Diffusor mit zunehmendem Durchsatz durch den Lippenquerschnitt abnehmen. Hingegen stellt sich ein neuer stationärer Zustand ein, wenn die Verluste am äusseren Diffusor mit abnehmendem Durchsatz zunehmen. Der Charakter der verwendeten Eintrittskennlinien ist wohl richtig, wenn auch ihr quantitativer Verlauf besser aus Versuchen entnommen wird. Im Fall des Brummens würde man nach einer weiteren Periode im Rahmen der Rechengenauigkeit keine Unterschiede mehr erkennen können. Obwohl der erste Tripelpunkt der Stösse durch die Anfangsverteilung völlig beeinflusst ist, ist der stromaufwärtswandernde Abschlußstoss nach dem zweiten Tripelpunkt nahezu mit jenem nach dem ersten identisch.

Bei dem aperiodischen Fall ist der stationäre Zustand bei  $c_0 t = 5,0$  schon weitgehend erreicht, obgleich die von  $c_0 t = 2,0$  ausgehende letzte Teilchenbahn mit der hohen Entropie noch nicht in der Düse angelangt und damit noch nicht einmal völlig isentrope Strömung erreicht ist.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. OSWATITSCH, *Der Druckrückgewinn bei Geschossen mit Rückstossantrieb bei hohen Überschallgeschwindigkeiten* (Göttingen 1944); Nachdruck: DVL, Bericht Nr. 49.
- [2] J. ROSÉN, Film über Stossdiffusorpulsationen (gezeigt in der Diskussion des Seminars für Windkanaltechnik und Aerodynamik, Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm 1954).
- [3] R. HERMANN, *Supersonic Inlet Diffusers and Introduction to Internal Aerodynamics* (Minneapolis, Honeywell Reg. Comp., 1956).
- [4] W. H. STERBENTZ und J. C. EVVARD, *Criteria for Prediction and Control of Ramjet Flow Pulsations*, NACA-TN 3506.
- [5] W. H. STERBENTZ und J. DAVIDS, *Amplitude of Supersonic Diffuser Flow Pulsations*, NACA-TN 3572.
- [6] J. HARTMANN, *Modus Operandi of the Air-Jet Pulsator* ([Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete] Aachen 1929), S. 169 ff.
- [7] A. FERRI und L. N. NUCCI, *The Origin of Aerodynamic Instability of Supersonic Inlets at Subcritical Conditions*, NACA-RM L50K30.
- [8] K. OSWATITSCH und I. TEIPEL, *Verträglichkeitsbedingungen für instationäre Strömung*, Z. angew. Math. Mech. (in Druck.)

*Summary*

The pulsations inside heavily throttled shock diffusers are calculated assuming certain relationships between the entry mass flow and the pressure recovery in the entry cross-section. It is then be shown that pulsations can only arise if the losses due to the external compression increase with decreasing entry mass flow. In the inverse case, with heavy throttling a new stationary flow condition sets in with reduced throughput.

(Eingegangen: 9. Oktober 1957.)

## Couche limite tridimensionnelle<sup>1)</sup>

Lame hélicoïdale en viration uniforme, dans un fluide au repos  
Fluide en viration uniforme sur pale hélicoïdale fixe

Par ADALBERT OUDART, Paris, France<sup>2)</sup>

### 1. Introduction

#### 1.1 *Origine et nature du travail exposé*

1.11 Le sujet de cette communication a fait l'objet d'une collaboration extérieure de l'O.N.E.R.A. et fait suite à une note de M. MAURICE ROY parue en 1949 aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences [1]<sup>3)</sup>.

Je veux remercier ici M. MAURICE ROY, directeur général de l'O.N.E.R.A., tout particulièrement pour l'autorisation qu'il m'a donnée de présenter cette communication.

1.12 Il s'agit ici de couche limite tridimensionnelle, en particulier de la couche limite développée sur une lame hélicoïdale par viration uniforme dans un fluide, et aussi de la couche limite d'un fluide en viration uniforme sur une plaque hélicoïdale.

Dans les deux cas, le mouvement du «fluide parfait» n'est pas changé, mais la viscosité provoque des couches limites.

#### 1.2 *Principes de la méthode (figure 1)*

Les principes de la méthode ont été donnés dans ma note des «Comptes rendus» du 5 octobre 1953 [2]. Ils consistent dans:

1.21 La prévalence de l'écoulement primaire de couche limite sur l'écoulement secondaire: l'écoulement primaire est l'écoulement le long des lignes de courant relatif du fluide parfait; l'écoulement secondaire est l'écoulement perpendiculaire à ces lignes de courant.

1.22 L'introduction de polynômes d'approximation (posés à priori du 4<sup>e</sup> et du 3<sup>e</sup> degré respectivement).

1.23 L'introduction d'une généralisation du critère de décollement, que SEARS avait donné seulement pour le cylindre dérapé.

On considérera seulement des couches limites laminares.

<sup>1)</sup> Communication au Congrès de la GAMM à Hambourg (23-27 avril 1957).

<sup>2)</sup> Centre d'études supérieures de mécanique.

<sup>3)</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie, page 489.

### 1.3 Analyse, critique et confrontations expérimentales

La méthode et les principes ont fait l'objet d'une analyse et d'une critique de E. A. EICHELBRENNER. M. EICHELBRENNER a joué un rôle fondamental dans la mise au point et dans la mise en œuvre, dans l'application aux ellipsoïdes et aussi dans les confrontations expérimentales.



Figure 1

Lignes de courant, équipotentielles et ligne de décollement sur un ellipsoïde incliné ([8] figure 1).

Les recherches de M. WERLE dans le tunnel hydraulique de l'O.N.E.R.A. ont montré (à la mesure de la validité du principe de prévalence et de la méthode de KÁRMÁN-POHLHAUSEN) l'intérêt de la méthode et son succès.

Un film très intéressant a été exécuté: ce film a été montré à Stuttgart et à Karlsruhe; des photographies ont également été envoyées dans diverses universités.

### 1.4 Vue d'ensemble sommaire

L'intérêt des résultats obtenus pour l'ellipsoïde de révolution incliné de  $10^\circ$  sur le vent, m'a conduit à utiliser cette méthode de prévalence aux deux problèmes de couche-limite posés.

Le but du travail était d'examiner si le fait tridimensionnel peut provoquer le décollement dans ces deux cas fondamentaux.

De plus, à la demande de MM. MAURICE ROY et ROBERT LEGENDRE, j'ai développé un examen «à postériori» des conditions de validité de la méthode.

### 1.5 Le problème de U.T. Bödewadt

Le choix de profils de vitesse  $P_4$  et  $P_3$  «à priori» peut donner des résultats assez peu satisfaisants pour les profils de vitesse eux-mêmes, par exemple dans le cas du mouvement giratoire d'ensemble d'un fluide au-dessus d'un plan immobile.

Une phrase de SCHLICHTING [4] sur la résolution du problème par BÖDEWADT «d'une manière vraiment pénible» m'a conduit à appliquer ici cette méthode de résolution simplifiée mais grossière.

Avec les profils  $P_3$  et  $P_4$  on ne retrouve pas naturellement les oscillations obtenues par BÖDEWADT [5]. Cependant, les ordres de grandeurs des principaux résultats sont respectés; par exemple:



Nous introduirons donc le «principe de prévalence».

2.32 *Equations de base.* Les équations de base sont

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \varrho \left( u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \varrho \left( u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varrho \omega^2 r, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Ces équations justifiées par M. E. A. EICHELBRENNER pour le cas de l'écoulement irrotationnel externe restent à justifier pour un écoulement rotationnel externe; mais il n'y a pas là de danger redoutable.

Le principe de prévalence conduit à supprimer les termes soulignés.

2.33 *Écoulement primaire de couche limite* [équations (3) et (5)]. C'est l'écoulement de BLASIUS; d'où, par la méthode de KÁRMÁN-POHLHAUSEN

$$\frac{u}{u_e} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{n}{\delta} \quad (6)$$

et

$$\delta = 5,83 \sqrt{\frac{\nu s}{u_e}} = 5,83 \sqrt{\frac{\nu \theta}{\omega}}, \quad (7)$$

$\delta$  ne dépend pas du rayon et il en est de même du profil  $u/u_e$ .

2.34 *Écoulement secondaire* [équation (4)]. On obtient

$$w = -\frac{\omega^2 r \delta^2}{4\nu} \eta (\eta - 1)^2. \quad (8)$$

Il y a afflux vers l'axe

$$Q = -\frac{(5,83)^3}{120} \varrho \omega^2 r \frac{r^{1/2} l^{5/2}}{\cos \beta u_0^{3/2}}, \quad (9)$$

soit

$$Q \approx -\frac{5}{3} \varrho l^3 \omega R^{-1/2} \frac{\omega r}{u_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega r}{u_0}\right)^2}, \quad (10)$$

avec

$$R = \frac{u_0 l}{\nu}. \quad (11)$$

## 2.4 Recherche de la ligne de décollement

2.41 On applique le critère de SEARS tel que je l'ai généralisé: «La ligne de décollement est l'enveloppe<sup>4)</sup> des lignes de courant limites pariétales.»

<sup>4)</sup> M. E. A. EICHELBRENNER a montré qu'il s'agit en général d'une ligne de courant pariétale singulière bornant le domaine.



2.42 On obtient ainsi l'équation différentielle de la ligne de décollement

$$\frac{ds}{dr} = -K \frac{u_0^2 + \omega^2 r^2}{\omega^2 s} \quad \text{avec} \quad K = \frac{8}{(5,83)^3}. \quad (12)$$

En posant

$$t = \left( \frac{\omega r}{u_0} \right)^2 \quad \text{et} \quad z = -\frac{1}{K} \left( \frac{\omega s}{u_0} \right)^2 \quad (13)$$

et avec

$$t = t_0 \quad \text{pour} \quad r = 0 \quad (14)$$

on obtient la famille de translation

$$z = \ln t + t - (\ln t_0 + t_0). \quad (15)$$

2.43 *Les lignes de courant limites pariétales n'ont donc pas d'enveloppe*: On ne trouve pas de ligne de décollement.

### 2.5 Remarque

Pour  $s = r = c$  et  $\omega c = u_0$  on obtient

$$\left( \frac{w}{u_e} \right)_{max} = \frac{1,26}{2} = 0,63.$$

Les conditions d'application du principe de prévalence ne sont pas remplies: la question de validité de la méthode se pose donc.

## 3. Lame hélicoïdale en viration uniforme dans un fluide

### 3.1 Définition du problème (figure 3)

On considère maintenant une plaque hélicoïdale dont la composante de vitesse parallèle à  $O$  est  $-\vec{V}$  et dont la vitesse de rotation est  $\vec{\omega}$ .

La trajectoire de chaque point de la plaque est une hélice pour laquelle on a

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \eta r}{h} = -\frac{\omega r}{V} \quad (1)$$

et la plaque elle-même est formée avec des hélices qui s'appuyent sur un rayon  $MZ$ .

### 3.2 Écoulement relatif hors de la couche limite

La vitesse relative du fluide par rapport à la plaque est

$$V, -\omega r.$$



Par application du principe de prévalence, ces équations deviennent

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0, \quad (5)$$

$$v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_s}{\partial n} = \nu \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \quad (6)$$

avec l'équation (4) pour l'écoulement secondaire.

3.33 *Écoulement primaire de couche limite.* C'est encore l'écoulement de BLASIUS et l'on a

$$\frac{v_s}{V} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{n}{\delta} \quad (7)$$

et

$$\delta = 5,83 \sqrt{\frac{\nu s}{V}}. \quad (8)$$

3.34 *Écoulement secondaire de couche limite.* On obtient

$$v_r = \frac{\omega^2 \delta^2 \nu}{4 \nu} \eta (\eta - 1)^2. \quad (9)$$

Il y a reflux venant de l'axe

$$Q = \frac{5}{3} \omega \varrho l^3 R^{-1/2} \frac{\omega r}{V} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega r}{V}\right)^2} \quad (10)$$

avec

$$R = \frac{V l}{\nu}. \quad (11)$$

### 3.4 Recherche de la ligne de décollement

On retrouve le résultat suivant: *Les lignes de courant limites pariétales n'ont pas d'enveloppe.* On ne trouve pas de ligne de décollement.

### 3.5 Remarques

On retrouve les mêmes conclusions avec inversion du flux axial.

La concordance des valeurs provient seulement des approximations de calcul; elle est seulement approchée et nullement réciproque.

## 4. Validité des résultats

### 4.1 Objet de cette section

Comme il a été dit au paragraphe 2.5, il y a une question de validité des résultats: c'est l'objet de cette section.

## 4.2 Méthode utilisée

4.21 On fait une confrontation globale par une méthode intégrale, des termes des équations aux dérivées partielles.

4.22 *Principe.* On considère les 3 cas suivants:

- 1° L'écoulement le long d'une plaque plane infiniment mince;
- 2° la plaque hélicoïdale en viration dans un fluide au repos;
- 3° le fluide en viration sur une plaque hélicoïdale fixe.

Les raisonnements qui conduisent à la relation globale de KÁRMÁN donnent, avec  $A$  plus grand que  $\delta$

$$\int_0^A \frac{\partial v_s^2}{\partial s} dn + (v_s v_n)_A + T_1 = -\nu \left( \frac{\partial v_s}{\partial n} \right)_0 + \int_0^A \nu \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} dn \quad (1)$$

avec

1° pour la plaque plane

$$T_1 = 0;$$

2° pour la plaque hélicoïdale avec un fluide immobile

$$T_1 = \int_0^A \frac{v_r \sin \beta}{r} (v_s \sin \beta - 2 \omega r) dn + \int_0^A v_r \frac{\partial v_s}{\partial r} dn;$$

3° pour le fluide sur plaque hélicoïdale fixe<sup>5)</sup>

$$T_1 = \int_0^A w \frac{\partial u}{\partial r} dn.$$

De même, on a

$$\int_0^A \frac{\partial v_s}{\partial s} dn + (v_n)_A + T_2 = 0 \quad (2)$$

avec

1° pour la plaque plane

$$T_2 = 0;$$

2° pour la plaque hélicoïdale avec un fluide immobile

$$T_2 = \int_0^A \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) dn;$$

<sup>5)</sup>  $v_r$  et  $v_s$  sont remplacés par  $w$  et  $u$ .

3° pour le fluide sur plaque hélicoïdale fixe<sup>5)</sup>

$$T_2 = \int_0^A \frac{\partial u}{\partial r} dn.$$

On a ensuite

$$V \int_0^A \frac{\partial v_s}{\partial s} dn - \int_0^A \frac{\partial v_s^2}{\partial s} dn + V T_2 - T_1 = \nu \left( \frac{\partial v_s}{\partial n} \right)_0 - \int_0^A \nu \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} dn. \quad (3)$$

On confrontera pour l'approximation prandtlienne le dernier terme du second membre avec le premier, et de même  $T_2 - T_1$  à l'ensemble des deux autres termes du premier membre pour l'approximation résultant du principe de prévalence.

Ainsi, c'est une méthode intégrale.

#### 4.3 Résultats pour l'approximation prandtlienne

La méthode intégrale donne pour la plaque plane le rapport

$$R = \frac{14}{R_x} \quad \text{avec} \quad R_x = \frac{u_\infty x}{\nu}. \quad (4)$$

$R$  est l'«erreur intégrale» relative dans la méthode de KARL POHLHAUSEN quand on néglige le terme  $\partial^2 u / \partial x^2$  vis-à-vis du terme  $\partial^2 u / \partial y^2$ .

Pour  $R_x \geq 1400$ , l'erreur est inférieure à  $\varepsilon = 1/100$ .

#### 4.4 Résultats pour les deux mouvements de viration

On suppose que la plaque hélicoïdale a une profondeur constante; cette profondeur  $C$  est mesurée le long des hélices.

La figure 5, où  $\varepsilon$  est une limite supérieure de l'erreur relative intégrale, donne les résultats de cette confrontation pour diverses valeurs de  $\varepsilon$ .

### 5. Conclusions finales

#### 5.1 Expressions générales

- Dans l'écoulement d'un fluide en viration sur un hélicoïde considéré comme fixe, il existe un courant radial centripète.
- Dans le mouvement de viration d'une plaque hélicoïdale, il existe un courant radial centrifuge.
- Ces deux courants ont, pour le même hélicoïde et les mêmes vitesses, la même grandeur dans les approximations faites. En fait, une méthode plus fine apporterait une certaine différence.

- d) Les lignes de courant limites pariétales ont la même inclinaison mais de signe contraire.

En fait, une méthode plus fine apporterait aussi une certaine différence.

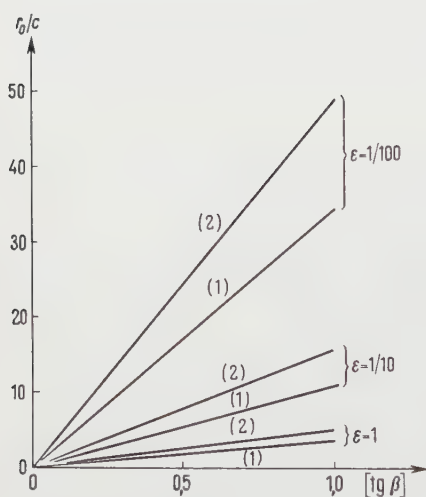
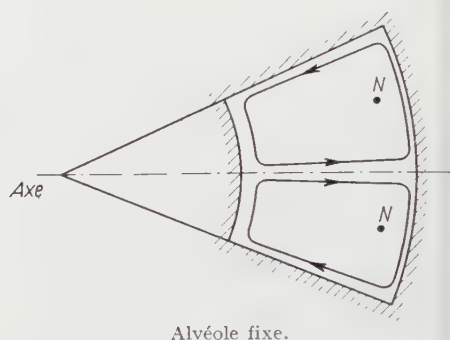
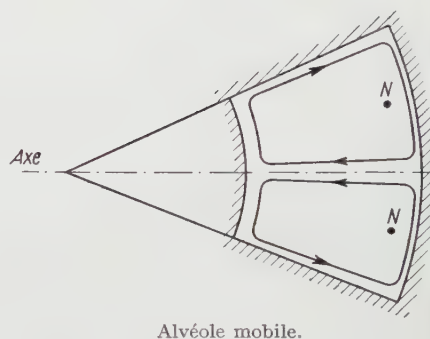


Figure 5

Confrontation des termes par une méthode intégrale.



Alvéole fixe.



Alvéole mobile.

Figure 6

Alvéoles fixes et en rotation.

- e) La méthode ne fournit pas de décollement; c'est ici une présomption d'autant plus forte que l'allongement de la plaque pour une pente marginale donnée de celle-ci est plus grande.
- f) Dès lors, la méthode nous conduit à penser que le décollement laminaire pour un profil donné représente une condition ferme pour le décollement tridimensionnel d'une plaque hélicoïdale de même profil.

### 5.2 Supputation (figure 6)

Quand on pense à une alvéole limitée par 2 cylindres et 2 plaques hélicoïdales, on peut alors supputer l'existence de 2 tourbillonnements secondaires.

La figure 6 en donne le schéma dans les deux cas.



Naturellement, les deux tourbillonnements sont entraînés par la vitesse générale, et l'inversion du passage d'une roue fixe à une roue mobile doit diminuer leur importance.

Naturellement, le schéma laminaire est loin de se réaliser.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] MAURICE ROY, *Couche limite laminaire sur l'hélicoïde en viration uniforme*, C. r. Acad. Sci. 228, 1994-6 (1949).
- [2] ADALBERT OUDART, *Couche limite tridimensionnelle*, C. r. Acad. Sci. 237, 697-8 (1953).
- [3] E. A. EICHELBRENNER et A. OUDART, *Méthode de calcul de la couche limite tridimensionnelle - Application à un corps fuselé incliné sur le vent*, O. N. E. R. A. publication n° 76 (1955).
- [4] HERMANN SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie* Braun (1951), p. 148-52.
- [5] U. T. BÖDEWADT, *Die Drehströmung über festem Grunde*, Z. angew. Math. Mech. 20, 241-53 (1940).

### Zusammenfassung

Es handelt sich um die Grenzschicht an einer schraubenförmigen Platte bei gleichförmigem Eindringen in eine Flüssigkeit, sowie um die Grenzschicht in einer Flüssigkeit bei Umströmung einer schraubenförmigen Platte.

In beiden Fällen würde die Bewegung einer reibungslosen Flüssigkeit durch die Platte nicht geändert werden; durch die Reibung entstehen aber Grenzschichten.

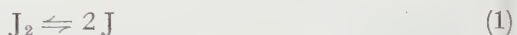
Das Verfahren gibt keine laminare Ablösung; doch handelt es sich dabei nur um eine Vermutung, die aber um so wahrscheinlicher ist, je grösser bei gegebener Randneigung das Seitenverhältnis der Platte ist.

(Reçu: le 25 juin 1957.)

# Zur Thermodynamik dissoziierter Gleichgewichtsgemische in äusseren Kraftfeldern

VON WOLFGANG PAULI, Zürich, Schweiz<sup>1)</sup>

1. In der Herleitung der Formeln für das chemische Gleichgewicht in der phänomenologischen (nicht-statistischen) Thermodynamik nach der Methode von VAN'T HOFF tritt dadurch eine Schwierigkeit auf, dass im allgemeinen die getrennten Phasen instabil sind. Um die Ideen zu fixieren, soll im folgenden die Dissoziation des molekularen Joddampfes in den einatomigen Zustand durch die Reaktion



im Gleichgewicht betrachtet werden. Da reversible Prozesse zu ihrer Realisierung im Prinzip unendlich lange Zeit brauchen, ist die Trennung des Gemisches in Teilgase durch semipermeable Wände im Sinne der klassischen Thermodynamik nur verwertbar, wenn zugleich die Reaktion durch «Dekatalysatoren» unterbunden wird. Andernfalls wird auf beiden Seiten der Wand die Reaktion (1) wieder einsetzen und zur Wiederherstellung des Gleichgewichtes führen, ehe eine reversible Trennung vollzogen ist.

In der statistischen Thermodynamik ist die Situation insofern geändert, als diese die thermodynamischen Funktionen mit Hilfe der Zeitgesamtheit auch für Zustände mit endlicher Lebensdauer definiert. Die kanonische Gesamtheit garantiert die Unabhängigkeit des thermischen Gleichgewichtes von den Geschwindigkeiten der Reaktionen, die bei seiner Einstellung eine Rolle spielen.

Es schien mir jedoch von Interesse, ob man mit geeigneten Annahmen über stabile Gleichgewichtszustände allein auskommen kann, um die bekannten Formeln für das Gleichgewicht, zum Beispiel im Falle der Dissoziation eines zweiatomigen Moleküls in Atome, wie in (1) herzuleiten. Es ergab sich, dass das in der Tat der Fall ist, wenn man die Änderung der Reaktionswärme in einem auf Moleküle und Atome verschieden wirkenden Kraftfeld geeignet benützt.

Im Falle des Joddampfes ist hierfür ein Magnetfeld geeignet, da die Jodmoleküle diamagnetisch, die Jodatome aber paramagnetisch sind. Vernachlässigt man den Diamagnetismus der Jodmoleküle, so ist die Änderung der freien Energie  $F$  im äusseren Magnetfeld für  $N_1$  freie Grammatome gegeben

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

durch

$$F_1(H) = F_1(0) - \frac{1}{2} N_1 \chi(T) H^2, \tag{2}$$

wobei der Atommagnetismus  $\chi$  im allgemeinen temperaturabhängig ist. Dies bedingt eine Herabsetzung der Dissoziationswärme und damit eine Verschiebung des Gleichgewichtes zugunsten der Atome im äusseren Magnetfeld.

Im folgenden Abschnitt 2 werden die reversiblen Kreisprozesse bei konstanter Temperatur und konstantem Druck untersucht, die bei Kommunikation eines Gefässes im Magnetfeld mit einem Gefäss ohne Magnetfeld entstehen. Es ist dabei nur nötig, anzunehmen, dass die allgemeinen hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen im äusseren Feld, welche bei konstanter Temperatur die Gibbsschen chemischen Potentiale enthalten, durch die Existenz der chemischen Reaktion nicht verändert werden. Semipermeable Wände werden dabei nicht verwendet.

Der Abschnitt 3 behandelt den Sonderfall idealer Gase, in welchem der Zusammenhang der Temperaturabhängigkeit der Gleichgewichtskonstante der Partialdrucke mit der Reaktionswärme besonders übersichtlich wird.

Die Behandlung allgemeinerer Reaktionen mit analogen Methoden, die nur Gleichgewichtszustände verwendet, ist ebenfalls möglich, doch wird sie weniger elegant und durchsichtig als in dem hier behandelten Fall einer einfachen Dissoziation.

2. Wir verwenden im folgenden dasjenige Gibbssche Potential  $\Phi$  für das Gleichgewichtsgemisch, dessen Differential bei fester Substanzmenge gegeben ist durch

$$d\Phi = - M dH - S dT + V dp. \tag{3}$$

(Werden die Arbeitsleistungen an den Quellen des Magnetfeldes mitberücksichtigt, so ist bekanntlich die Arbeit  $- H dM$  und nicht  $- M dH$ . Für die im folgenden betrachteten Kreisprozesse heben sich diese Arbeitsbeträge jedoch fort.)

Die freie Energie  $F$  ist gegeben durch

$$F = \Phi - p V = \Phi - p \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{H, T}.$$

Die Gibbsschen chemischen Potentiale  $\mu_k$  für ein Gemisch werden gewöhnlich durch

$$(d\Phi)_{P, T, H} = (dF)_{V, T, H} = \sum_k \mu_k dN_k \tag{4}$$

definiert, worin  $N_k$  die Molzahlen (bzw. Grammatomzahlen) sind.

Aus Homogenitätsgründen gilt ferner für  $dN_k = N_k d\lambda$ ,  $d\Phi = \Phi d\lambda$ , so dass auch

$$\Phi = \sum_k \mu_k N_k. \tag{5}$$

Die Gleichsetzung des Differentials von (5) mit der Summe aus (3) und (4) ergibt die von GIBBS angegebene Formel<sup>2)</sup>

$$d\Phi = \sum_k N_k d\mu_k. \quad (6)$$

Für reversible Zustandsänderungen bei festem  $H$  und  $T$  und fester Substanzmenge gilt daher

$$V dp = \sum_k N_k d\mu_k. \quad (6a)$$

In einem äusseren Kraftfeld mit der freien potentiellen Energie  $E_{pot}^k(x)$  pro Mol (bzw. Grammatom) der  $k$ -ten Komponente, gilt

$$\mu_k = \mu_k(0) + E_{pot}^k(x), \quad (7)$$

wenn  $\mu_k(0)$  das chemische Potential bei Abwesenheit des äusseren Feldes bedeutet. Zum Beispiel entspricht die Annahme (2) im Falle der Jodatome (Index 1)

$$\mu_1 = \mu_1(0) - \frac{1}{2} \chi(T) H^2, \quad (7a)$$

während die Vernachlässigung des Diamagnetismus der Jodmoleküle (Index 2) der Beziehung

$$\mu_2 = \mu_2(0) \quad (7b)$$

entspricht.

Die Gültigkeit der von GIBBS<sup>3)</sup> im Falle eines ortsabhängigen Kraftfeldes bei ortsunabhängiger Temperatur für beliebige Gemische angegebene Gleichgewichtsbedingung

$$\mu_k = \mu_k(0) + E_{pot}^k(x) = \text{const} \quad (8)$$

bildet die Grundlage der folgenden Überlegung<sup>4)</sup>.

<sup>2)</sup> J. W. GIBBS, *Collected Papers*, Bd. 1, Nr. 3: *On the Equilibrium of Heterogenous Substances* (Longmans, Green & Co., New York, London und Toronto 1928), S. 88, Gl. (97).

<sup>3)</sup> J. W. GIBBS, *Collected Papers*, Bd. 1, Nr. 3: *On the Equilibrium of Heterogenous Substances* (Longmans, Green & Co., New York, London und Toronto 1928), S. 144 f. Siehe speziell Gleichung (234), S. 146, die Bedingungen  $\mu_1 + g h = \text{const}, \dots, \mu_n + g h = \text{const}$  im Schwerfeld, worin  $h$  = Höhe und die  $\mu_k$  pro Masseneinheit definiert sind.

<sup>4)</sup> Die Gibbssche Gleichung (6a) garantiert dafür, dass als Folge von (8) die Gesamtkraft pro Volumeneinheit gleich

$$\text{grad } p = \sum_k \frac{N_k}{V} \text{grad } \mu_k(0)$$

wird, wie es sein muss.

Für ideale Gase (siehe Abschnitt 3) wird

$$\frac{N_k}{V} \text{grad } \mu_k(0) = \text{grad } p_k,$$

wenn  $p_k$  der Partialdruck der Komponente  $k$  bedeutet, so dass die Gleichgewichtsbedingung (8) in diesem Fall der Unabhängigkeit der Teilgase entspricht.

*Im Falle des Vorhandenseins der Reaktion (1) werden wir nämlich die Gleichung (4) und (6) nur für solche Variationen  $dN_k$  und  $d\mu_k$  als gültig voraussetzen, für welche auch der variierte Zustand ein Gleichgewichtszustand ist, so dass  $dN_1$  und  $dN_2$ , ebenso  $d\mu_1$  und  $d\mu_2$  in (4) und (6), dann nicht mehr als unabhängig vorausgesetzt werden dürfen.*

Es wird jedoch genügen, vorauszusetzen, dass in Gefässen mit ortsabhängiger Feldstärke die allgemeinen hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen (8) mit der Einstellung eines chemischen Gleichgewichtes an jedem Ort verträglich sein müssen. An jedem Ort wird sich als Funktion von Druck und Temperatur als Folge der Reaktion selbst eine bestimmte Gleichgewichtskonzentration von freien Atomen zu Molekülen einstellen, und diese wird zugleich die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung (8) mit (7a), (7b) befriedigen. Durch (5) und (8) sind dann auch in diesem Fall  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  einzeln bis auf eine additive Temperaturfunktion [siehe unter (17)] definiert.

Wir denken uns nun ein Gefäss, in welchem die Feldstärke  $H$  herrscht mit Gesamtdruck  $\bar{p}$  und Temperatur  $T$ , mit einem anderen Gefäss, in welchem die Feldstärke 0 und der Druck  $p$  mit gleicher Temperatur  $T$  herrscht, durch eine kommunizierende Röhre verbunden. In dieser möge die Feldstärke stetig zu Null absinken. In beiden Gefässen seien Stempel, welche das Volumen der Gefässe zu verändern gestatten. Durch Verschiebung der Stempel ist es möglich, auf reversible Weise bei konstantem Druck und konstanter Temperatur das ganze Gas aus dem einen Gefäss in das andere zu bringen. Dabei ist der Prozess unendlich langsam zu führen, so dass in jedem Moment das chemische Gleichgewicht sich einstellt, welches dafür sorgt, dass in beiden Gefässen die relative Konzentration von  $J_2$  und von  $J$  konstant bleibt. (Von einer Unterbindung der Reaktion ist also keine Rede.) Die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung

$$\bar{\mu}_1(H) = \bar{\mu}_1(0) - \frac{1}{2} \chi(T) H^2 = \mu_1, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 \quad (9)$$

sorgt dann von selbst dafür, dass die Konstanz des Druckes im einen Gefäss • auch die Konstanz des Druckes im andern Gefäss zur Folge hat.

Schliesslich ist auf reversiblen Wege das ganze Gas aus dem Gefäss mit der Feldstärke  $H$  (Druck  $\bar{p}$ , Volumen  $V$ ) in das andere Gefäss mit Feldstärke 0 (Druck  $p$ , Volumen  $V$ ) übergeführt. Die geleistete Arbeit ist

$$A = pV - \bar{p}\bar{V}. \quad (10)$$

Es ist ferner

$$\bar{\Phi} = \Phi, \quad (11)$$

da  $p$ ,  $\bar{p}$  und  $T$  konstant bleiben und dies bekanntlich gerade ausdrückt, dass die Entropieänderung der Systeme durch die der Wärmereservoirs gerade

kompensiert wird. (Es gilt auch

$$\Phi = E - TS + pV, \quad \bar{\Phi} = \bar{E} - T\bar{S} + \bar{p}\bar{V},$$

wenn  $E, \bar{E}$  die zugehörigen Energien sind, daher

$$\Delta\Phi = \Delta E - T\Delta S + p\Delta V, \quad \Delta\bar{\Phi} = \Delta\bar{E} - T\Delta\bar{S} + \bar{p}\Delta\bar{V},$$

so dass  $\Delta\Phi = \Delta\bar{\Phi}$  gleichbedeutend ist mit

$$T(\Delta S - \Delta\bar{S}) = \Delta E + p\Delta V - (\Delta\bar{E} + \bar{p}\Delta\bar{V}) = (\delta Q - \delta\bar{Q}).$$

Man kann diesen reversiblen Prozess auch zu einem reversiblen isothermen Kreisprozess ergänzen. Man gehe im Gefäss der Feldstärke 0 nach Entkopplung mit dem anderen Gefäss isotherm zu benachbarten Werten  $p + dp, V + dV$  über. Arbeitsleistung

$$\delta A = p dV. \quad (10a)$$

Dann führe man das Gas wieder reversibel in das andere Gefäss mit Feldstärke  $H$  zurück. Arbeitsleistung

$$A' = A + d(pV) - d(p\bar{V}) = A + p dV + V dp - \bar{p} d\bar{V} - \bar{V} d\bar{p}. \quad (10b)$$

Schliesslich entkopple man wieder die Gefässe und gehe im Gefäss mit der Feldstärke  $H$  von den Werten  $\bar{p} + d\bar{p}, \bar{V} + d\bar{V}$  der Variablen isotherm zu den Werten  $\bar{p}, \bar{V}$ , zurück. Arbeitsleistung

$$\delta' A = -\bar{p} d\bar{V}. \quad (10c)$$

Die Summe der Arbeitsbeträge (10), (10a), (10b), (10c) muss nach dem zweiten Hauptsatz verschwinden, was die Bedingung

$$V dp = \bar{V} d\bar{p} \quad (12)$$

liefert, die bei festem  $T$  und  $H$  auch aus (11) gemäss (3) folgt.

Nach (6a) kann man das auch schreiben

$$N_1 d\mu_1 + N_2 d\mu_2 = \bar{N}_1 d\bar{\mu}_1 + \bar{N}_2 d\bar{\mu}_2. \quad (13)$$

Aus (9) folgt nun

$$d\mu_1 = d\bar{\mu}_1, d\mu_2 = d\bar{\mu}_2; \quad (14)$$

ferner ist, wenn  $Z$  die Gesamtzahl der Jodatome bedeutet,

$$N_1 = Z(1 - 2c), N_2 = Zc, \quad \bar{N}_1 = Z(1 - 2\bar{c}), \bar{N}_2 = Z\bar{c}, \quad (15)$$

da die Änderung der Teilchenzahlen und der Konzentration  $c$  der Moleküle durch die Reaktion  $J_2 \rightleftharpoons 2J$  entstanden ist.



Einsetzen von (14) und (15) in (13) gibt

$$(-2 d\mu_1 + d\mu_2) (c - \bar{c}) = 0. \quad (16)$$

Die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung (9) sorgt dafür, dass  $c \neq \bar{c}$ , so dass folgt

$$d\mu_2 = 2 d\mu_1$$

oder

$$\mu_2 = 2 \mu_1 + f(T), \quad (17)$$

worin  $f(T)$  eine reine Temperaturfunktion (unabhängig vom Druck) ist. Dies ist die Bedingung der Verträglichkeit der hydrostatischen Gleichgewichtsbedingung (9) mit der thermodynamischen Bedingung (12) des chemischen Gleichgewichtes bei fester Temperatur.

Hinsichtlich des Auftretens der additiven Temperaturfunktion in (17) ist zu beachten, dass die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung (8) oder (9)  $\mu_1$  und  $\mu_2$  nur bis auf zunächst willkürliche additive Temperaturfunktionen definiert. Einsetzen von  $d\mu_2 = 2 d\mu_1$  in (6) gibt für  $dT = 0$

$$d\Phi = Z d\mu_1 = \frac{1}{2} Z d\mu_2.$$

Wir definieren die in  $\mu_2 - 2 \mu_1$  verbleibende additive Temperaturfunktion durch die Festsetzung

$$\mu_2 - 2 \mu_1 = f(T) = 0, \quad (17a)$$

$$\Phi = Z \mu_1 = \frac{1}{2} Z \mu_2, \quad (18)$$

die mit Gleichung (5) im Einklang ist.

Für das Gefäß im Magnetfeld folgt aus (9) und (11)

$$\bar{\Phi}(T, \bar{p}, H) = \frac{1}{2} Z \bar{\mu}_2(T, \bar{p}) - Z \bar{\mu}_1(T, \bar{p}, H) = Z [\mu_1(T, \bar{p}, 0) - \frac{1}{2} \chi H^2],$$

wobei die Gleichgewichtskonzentration der Moleküle als Funktion von  $T$  und  $\bar{p}$  ausgedrückt gedacht ist.

3. Die bisherigen Betrachtungen zeigen die Anwendbarkeit der hier angewandten Methode für beliebige Substanzen. Andererseits ist es auch instruktiv, wie die hierbei noch nicht spezialisierte Abhängigkeit der chemischen Potentiale von anderen Variablen sich in Beispielen konkret gestaltet. Hierzu eignet sich der Fall, dass für das betrachtete Gas, sowohl im einatomigen wie im zweiatomigen Zustand die *idealen Gasgesetze* als gültig vorausgesetzt werden.

In diesem Fall bietet sich bekanntlich der Begriff Partialdruck als naturgemäß dar. Dieser ist für Atom- bzw. Molekülgas gegeben durch die Zustands-

gleichung

$$p_1 = \frac{R T}{V} N_1 = \frac{R T}{V} Z (1 - 2 c), \quad (19)$$

$$p_2 = \frac{R T}{V} N_2 = \frac{R T}{V} Z c. \quad (20)$$

Der Gesamtdruck ist

$$p = p_1 + p_2 = \frac{R T}{V} Z (1 - c).$$

Also

$$p_1 = p \frac{1 - 2 c}{1 - c}, \quad p_2 = p \frac{c}{1 - c}. \quad (21)$$

Die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung (8) wird für ortsunabhängiges  $T$  einfach der Barometerformel entsprechend

$$R T \log p_1 - \frac{1}{2} \chi H^2 = \text{const}, \quad p_2 = \text{const}, \quad (22)$$

$$p_1 = C e^{+\frac{1}{2} \chi H^2 / R T}; \quad (22a)$$

die chemischen Potentiale werden

$$\mu_1(0) = R T \log p_1 + f_1(T), \quad \mu_2 = R T \log p_2 + f_2(T); \quad (23)$$

und das Resultat (17a), (18)  $\mu_2 = 2 \mu_1$  lässt sich schreiben

$$\frac{p_2}{p_1^2} = K(T), \quad (24)$$

$$R T \log K = -f_2(T) + 2 f_1(T). \quad (25)$$

In dem Gefäß mit der magnetischen Feldstärke  $H$  wird

$$\frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_1^2} = \bar{K}(T), \quad (24a)$$

$$R T \log \bar{K}(T) = R T \log K(T) - 2 \frac{\chi}{2} H^2. \quad (26)$$

Das Resultat (18) lässt sich mit der *Nebenbedingung* (24), (25) auch schreiben

$$\Phi = Z c [R T \log p_2 + f_2(T)] + Z (1 - 2 c) [R T \log p_1 + f_1(T)],$$

worin für  $p_1$  und  $p_2$  (21) einzusetzen ist. Vermöge der Nebenbedingung gilt dann formal

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial c} \right)_{p, T} = 0. \quad (27)$$

Die thermodynamische Relation

$$\frac{E + p V}{T^2} = - \left( \frac{\partial}{\partial T} \right)_p \cdot \left( \frac{\Phi}{T} \right) \quad (28)$$

ergibt sodann

$$\frac{E + pV}{T^2} = -Zc \frac{d}{dT} \cdot \frac{f_2(T)}{T} - Z(1-2c) \frac{d}{dT} \cdot \frac{f_1(T)}{T}.$$

Der Vergleich der Fälle  $c = 0$  und  $c = 1/2$  ergibt für  $Z = 2$  die Interpretierbarkeit von

$$Q_p = T^2 \frac{d}{dT} \cdot \left( \frac{-2f_1(T) + f_2(T)}{T} \right) \quad (29)$$

als Dissoziationswärme pro Mol bei konstantem Druck. Der Vergleich mit (25) zeigt, dass

$$\frac{d}{dT} \log K = - \frac{Q_p}{RT^2}. \quad (30)$$

Entsprechend gilt im zweiten Gefäß

$$\frac{d}{dT} \log \bar{K} = - \frac{\bar{Q}_p}{RT^2}. \quad (30a)$$

Aus dem Vergleich mit (26) ergibt sich

$$\bar{Q}_p = Q_p + 2 \frac{1}{2} H^2 T^2 \frac{d}{dT} \cdot \frac{\chi(T)}{T}, \quad (31)$$

woraus die Herabsetzung der Dissoziationswärme im Magnetfeld hervorgeht. Für das Curiesche Gesetz  $\chi(T) = C/T$  folgt aus (31)

$$\bar{Q}_p = Q_p - 2 \frac{C}{T} H^2.$$

Damit sind die bekannten thermodynamischen Eigenschaften des Gleichgewichtsgemisches vollständig abgeleitet.

Zum Schluss möchte ich meinem langjährigen Freund und kritischen Berater in thermodynamischen Fragen, Herrn O. STERN, meinen herzlichen Dank aussprechen für aufklärende und ermutigende Diskussionen über das Thema dieser Arbeit.

### Summary

For the example of the dissociation of iodine molecules into atoms, a method is given for the treatment of the thermochemical equilibrium, which differs from VAN'T HOFF's classic method by using only stable equilibrium states without any devices for changing the velocity of the reaction. Instead, the postulate is applied that the general hydrostatic condition of the equilibrium in external magnetic fields for constant temperature (GIBBS) must be compatible with the thermodynamic condition for the chemical equilibrium. The known properties of the mixture in equilibrium have been derived and the specialization for the validity of the laws of ideal gases is also given.

Eingegangen: 19. Juli 1957.)

# Einige Messresultate von konisch zugespitzten Zylindern in Überschallströmung

VON ZBIGNIEW PLASKOWSKI, Zürich, Schweiz<sup>1)</sup>

Das Verhalten von Rotationskörpern in der Überschallströmung bildete das Thema einer theoretischen und experimentellen Untersuchung, die einer Gruppe von Diplomanden am Institut für Aerodynamik der ETH zur Aufgabe gestellt wurde. Die Verbindung der beiden Aspekte – Theorie und Experiment – bei den Aufgabenstellungen für Studierende ist ein Beispiel für die pädagogische Tätigkeit des Jubilars. Sein besonderes Anliegen ist seit ehedem die Ausbildung von Ingenieuren, die, theoretisch vorbereitet, das Experimentelle kennenlernen und es verstehen. Dafür schulden die Schüler und Mitarbeiter ihrem Lehrer ganz besonderen Dank, der mit diesem Aufsatz zum Ausdruck kommen möge.

Für die vorliegenden Betrachtungen hat der Verfasser Messungen, die an konisch zugespitzten Kreiszylindern in der Überschallströmung durchgeführt wurden<sup>2)</sup>, ausgewertet und die Resultate einem Vergleich mit theoretischen Ansätzen unterzogen.

## 1. Bezeichnungen

### a) Geometrie der Modelle

$D$	maximaler Modelldurchmesser = $2 R$ ;
$F = \frac{\pi}{4} D^2$	Modellhauptspant, hier gleich Heckfläche;
$r = r(x)$	örtlicher Modellradius;
$x$	Modellabszisse, von der Kegelspitze aus gerechnet;
$\theta_K$	halber Öffnungswinkel der Konen;
$L_K$	Länge des Konus;
$L_Z$	Länge des zylindrischen Teils;
$L = L_K + L_Z$	totale Modelllänge;
$n$	Formparameter, hier $1 - \frac{D/L}{4 \operatorname{tg} \theta_K}$ ;

<sup>1)</sup> Institut für Aerodynamik an der ETH.

<sup>2)</sup> Die Messungen wurden während der Diplomarbeiten im Wintersemester 1957/58 durch die Herren cand. Ing. P. BÜTTIKER, E. GRAF, P. HAAS und M. KOLPIN ausgeführt.

$d$  Durchmesser des Modellhalters an der Durchgangsstelle durch die Heckfläche.

b) *Ungestörte Anströmung in der Meßstrecke*

- $p_\infty$  statischer Druck;
- $p_0$  Ruhedruck;
- $\varrho_\infty$  Luftdichte;
- $x$  absoluter Wassergehalt der Luft (g Wasser/kg Luft);
- $a_\infty$  Schallgeschwindigkeit;
- $V$  Anströmgeschwindigkeit;
- $q = \frac{\varrho_\infty}{2} V^2$  nomineller Staudruck;
- $M = \frac{V}{a_\infty}$  Mach-Zahl;
- $Re = \frac{V L}{\nu}$  Reynolds-Zahl, auf die Modelllänge bezogen.

c) *Atmosphäre*

$p_B$  atmosphärischer Luftdruck.

d) *Modell-Anstellung*

$\alpha$  geometrischer Anstellwinkel gegenüber der Anströmrichtung.

e) *Aerodynamische Beiwerte (dimensionslos)*

- $C_N = \frac{N}{q F}$  Normalkraft-Beiwert, senkrecht zur Modellachse, nach Messung;
- $(C_N)_r = C_{KN} + \Delta C_N$  Normalkraft-Beiwert, rechnerisch nach Ansätzen;
- $C_{KN} = \frac{8}{\pi} K_N \sin \alpha$  potential-theoretischer Normalkraft-Beiwert für einen angestellten Konus;
- $K_N$  tabellarisierte Werte nach KOPAL [1]<sup>3)</sup>;
- $\Delta C_N = \frac{\Delta N_o}{q F}$  Beiwert des Normalkraftanteils  $\Delta N_o$  infolge der zähen Queranströmung;
- $c_{w,z}$  Widerstandsbeiwert eines senkrecht angeströmten Zylinders;
- $C_T = \frac{T}{q F}$  Tangentialkraft-Beiwert, parallel zur Modellachse, nach Messung;

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 508.

- $C_{KT} = 2 K_D$  potential-theoretischer Widerstandsbeiwert eines axial-symmetrisch angeströmten Konus;  
 $K_D$  tabellarisierte Werte nach KOPAL [2];  
 $C_{p_i} = \frac{p_\infty - p_i}{q}$  Druckkoeffizient ( $i = 1, 2, 3$  und 4: Druckmeßstellen auf der Heckfläche);  
 $C_H = \frac{T_H}{q F} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 C_{p_i}$  Beiwert der Heckkraft  $T_H$ , parallel zur Modellachse, nach Messung;  
 $\Delta C_T = C_T - C_H$  Beiwert der Tangentialkraft abzüglich der Heckkraft, nach Messung.

### Derivative

$$C'_N = \frac{dC_N}{d\alpha}, \quad C'_{KN} = \frac{dC_{KN}}{d\alpha};$$

- Index 0 Werte für die Nullanstellung (bei Beiwerten und Derivativen).

## 2. Messungen

Es wurden drei Rotationskörper untersucht, deren Spitzen aus je einem Konus und die Fortsetzungen aus einem Zylinder bestehen. Alle drei Körper besitzen den gleichen Aussendurchmesser  $D = 25$  mm, die gleiche Gesamtlänge  $L = 250$  mm und somit den gleichen Schlankheitsgrad  $D/L = 0,10$ . Sie unterscheiden sich voneinander durch den (halben) Öffnungswinkel der Konen  $\theta_K$  und durch die Länge  $L_Z$  des zylindrischen Teils:

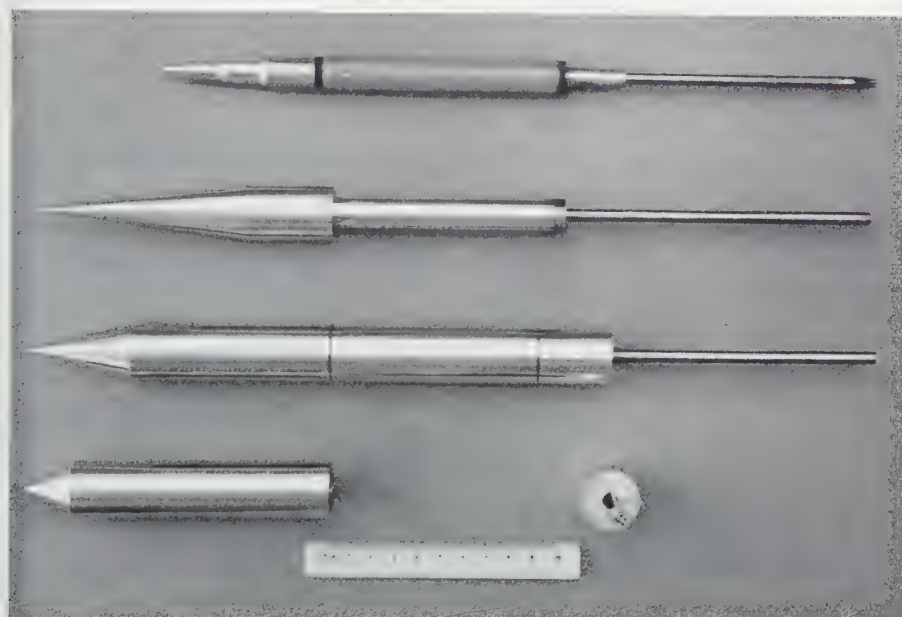
Körper	Halber Öffnungswinkel $\theta_K$	$\frac{L_Z}{L}$	$\frac{L_Z}{D} = 10 \frac{L_Z}{L}$
I	7,5°	0,620	
II	15°	0,813	
III	30°	0,913	

Die Messungen umfassten Dreikomponentenwägungen mit Hilfe der Dehnungsmeßstreifen sowie Heckdruckmessungen. Die Modelle wurden an Haltern aufmontiert, deren Durchmesser  $d$  im Falle der Kraftmessungen 7,5 mm ( $d/D = 0,30$ ) und bei den Heckdruckmessungen 5,5 mm ( $d/D = 0,22$ ) betrugen (Figur 1). Die Durchführungsöffnungen in den Heckflächen ergaben einen kleinen Ringspalt um die Halter herum. Dadurch wurde eine ungestörte



Wägung der Kräfte gesichert und eine eventuelle Beeinflussung der Grenzschicht am Modell durch die Grenzschicht am Halter verhindert.

Für die Heckdruckmessungen wurde ein separater Heckteil mit vier Druckanschlüssen von je 1 mm Bohrung verwendet. Die Druckanschlüsse wurden in



Figur 1

Aufbau der Modelle. Von oben nach unten:

Modellhalter mit Waageneinrichtung für die Dehnungsmeßstreifen (gebaut von der Firma Contraves AG, Zürich); Vorderteil des Körpers I mit dem halben Öffnungswinkel  $\theta_K = 7,5^\circ$ ; Körper II mit  $\theta_K = 15^\circ$  in seinen Bestandteilen; Vorderteil des Körpers III mit  $\theta_K = 30^\circ$  (links) und Heck für Druckmessungen (rechts); 10-cm-Maßstab.

einer Entfernung  $2R/3$  von der Modellachse angebracht. Durch diese Anordnung versuchte man, dem mittleren Heckdruck möglichst nahe zu kommen. Wie leicht zu zeigen ist, würde bei einer linearen Druckverteilung über den Radius die Druckanzeige in  $2R/3$  den äquivalenten Mitteldruck der Kreisfläche ergeben. Diese Regel gilt für einen nach aussen linear zu- wie abnehmenden Druck.

Die Messungen wurden durchgeführt im Überschallkanal des Institutes [3] bei folgenden mittleren Betriebsdaten:

$$M \approx 1,67, \quad Re \approx 0,63 \cdot 10^6, \quad p_0 \approx \frac{1}{5} p_B, \quad p_\infty \approx \frac{1}{25} p_B,$$

$$x \cong 1 \text{ g Wasser/kg Luft.}$$

Einen messtechnischen Extremfall stellte die Kraftmessung am Körper III dar. Bei diesem stumpfen Körper ( $\theta_K = 30^\circ$ ) lagen die Tangentialbelastungen an der Zulässigkeitsgrenze der verwendeten Waage (vgl. die Streuungen der Messpunkte für den Körper III in den Kurvenblättern), so dass man genötigt war, den Kanal stark zu evakuieren. Deshalb erfolgte diese Messung bei etwas anderen Betriebsdaten:

$$M \approx 1,674, \quad Re \approx 0,55 \cdot 10^6, \quad p_0 \approx \frac{1}{6} p_B \quad \text{und} \quad p_\infty \approx \frac{1}{30} p_B.$$

Der Betriebszustand im Kanal war nach jeweiliger Einstellung sehr stabil, so dass man angenehmerweise mit zeitlich konstanten Kanalwerten für alle Messpunkte innerhalb einer Messung rechnen konnte. Diese Eigenschaft des Institutskanals dürfte im wesentlichen auf seinen günstigen Querschnittsverlauf und auf die grossen rotierenden Massen des Axialkompressors und des Gleichstrommotors zurückzuführen sein.

### 3. Messresultate

#### A. Kraftmessungen

Die ausgewerteten Resultate der Wägungen sind für alle drei Körper in Figur 2 dargestellt. Die üblichen dimensionslosen Beiwerte der Normalkräfte  $C_N$  und der Tangentialkräfte  $C_T$  sind in Funktion des Modell-Anstellwinkels  $\alpha$  gegenüber der Anströmung aufgetragen.

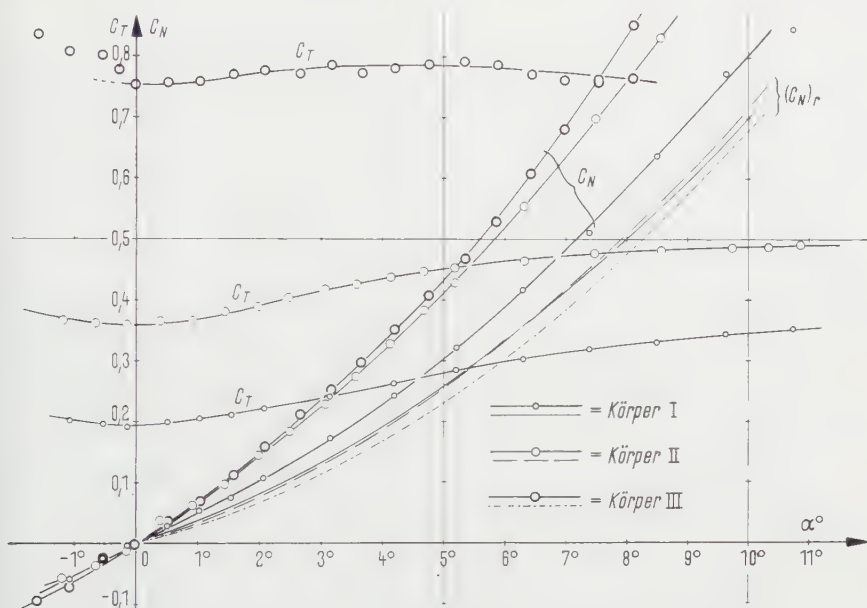
Dasselbst sind zum Vergleich die rechnerischen Normalkraft-Beiwerte  $(C_N)_r$  eingezeichnet, die nach folgenden Ansätzen bestimmt wurden [Formel siehe unter *Bezeichnungen*, Punkt e)]:

- a) Der potential-theoretische Anteil der Normalkraft wird vom Konus allein geliefert, und er ist durch einen umgerechneten Beiwert  $C_{KN}$  für die schräge Überschallanströmung der Konen nach KOPAL erfasst.
- b) Die Auswirkung der Zähigkeit auf die Normalkraft wird nach bekannter Widerstandsbetrachtung [4] für die transversale Anströmungskomponente  $V \sin \alpha$  abgeschätzt und in Form eines Beiwertes  $\Delta C_N$  berücksichtigt:

$$\Delta C_N = \frac{\Delta N_0}{q F} = \frac{2}{F} \sin^2 \alpha \int_0^L c_{w,z}(x) r(x) dx.$$

Will man global einen mittleren Zylinder-Widerstandsbeiwert  $\overline{c_{w,z}}$  für den ganzen Körper verwenden, so lässt sich  $\Delta C_N$  vereinfachen:

$$\Delta \overline{C_N} = \frac{4 n}{\pi (D/L)} \overline{c_{w,z}} \sin^2 \alpha,$$



Figur 2

Normalkraft-Beiwerte  $C_N$  (nach Wägung) und  $(C_N)_r$  (rechnerisch), sowie Tangentialkraft-Beiwerte  $C_T$  (nach Wägung) in Funktion des Anstellwinkels  $\alpha$  für Körper I, II und III.

Messdaten: Körper I,  $M = 1,667$ ,  $Re = 0,634 \cdot 10^6$ ;  
 Körper II,  $M = 1,677$ ,  $Re = 0,630 \cdot 10^6$ ;  
 Körper III,  $M = 1,674$ ,  $Re = 0,552 \cdot 10^6$ .

Messkurven = ausgezogen mit den Messpunkten darauf.

wobei der Formfaktor  $n$  aus der Geometrie bestimmt wird:

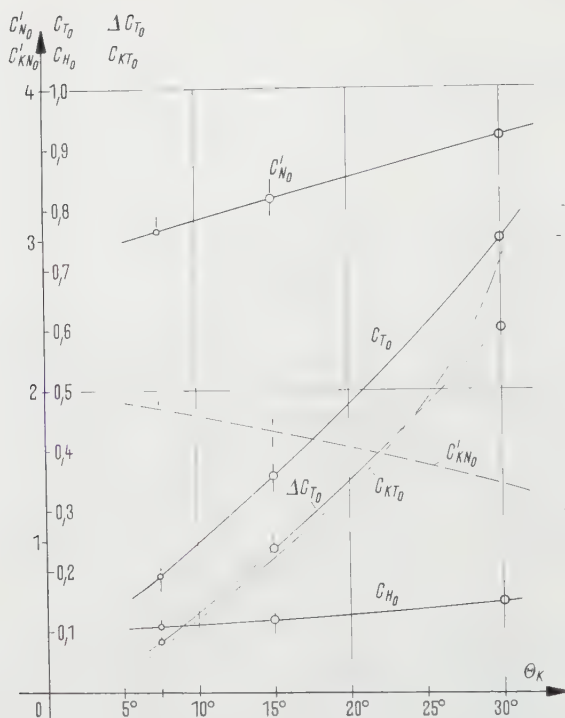
$$n = \frac{2}{D L} \int_0^L r(x) dx.$$

Für die hier betrachteten Körperformen wird  $n$  besonders einfach:

$$n = 1 - \frac{D/L}{4 \tan \theta_K} \begin{cases} \text{Körper I: } n = 0,8101; \\ \text{Körper II: } n = 0,9067; \\ \text{Körper III: } n = 0,9567. \end{cases}$$

In Anlehnung an VAN DYKE [4] wird zur Berechnung von  $\Delta C_N$  ein Wert  $\overline{c_{w,z}} = 1,2$  gewählt.

Einen weiteren Vergleich zwischen Messung und Theorie vermittelt Figur 3. Darin sind die Resultate für die Nullanströmung bei verschiedenen Öffnungswinkeln der Konen dargestellt.



Figur 3

Einfluss des halben Öffnungswinkels  $\theta_K$  der Konen auf die aerodynamischen Kraftbeiwerte und ihre Winkelderivativen bei Nullanstellung  $\alpha = 0$ .

Tangentialkraft-Beiwerte:  $C_{T_0}$  total, nach Wägung;  $C_{KT_0}$  für Konen allein, potential-theoretisch, umgerechnet nach KOPAL;  $C_{H_0}$  aus den Heckdruck-Messungen;  $\Delta C_{T_0} = C_{T_0} - C_{H_0}$  = nach Messungen; Normalkraft-Derivative:  $C'_{N_0}$  total, nach Wägung;  $C'_{KN_0}$  für Konen allein, potential-theoretisch, umgerechnet nach KOPAL.

Auf Grund beider Figuren lässt sich für die betrachteten Verhältnisse ( $M \cong 1,67$ ; Konen mit  $\theta_K = 7,5^\circ$ ,  $15^\circ$  und  $30^\circ$ ; Anstellwinkelbereich  $\alpha = 0^\circ \div 10^\circ$ ) etwa folgendes bemerken:

a) Vergrößerung der Öffnungswinkel der Konen ruft laut Experimenten eine Zunahme der Kräfte und der Derivaten hervor. In bezug auf die Tangentialkräfte bei der Nullanstellung stimmt dieses Verhalten mit der Theorie sehr schön überein, und die theoretischen Zahlenwerte liefern bis zu einem gewissen  $\theta_K$  recht brauchbare Resultate [vgl. den Verlauf  $\Delta C_T = f(\theta_K)$  in Figur 3, bis zu  $\theta_K \approx 25^\circ$ ]. Selbstredend müssen dabei die Oberflächenreibung und die Heckdrücke separat betrachtet werden. Der relative Anteil der Heckdrücke ist bei spitzen Konen sehr gross.

b) Bei den vorliegenden Körperformen bilden die Konen nur einen Teil der gesamten Körperlänge. Für die Bestimmung der Normalkräfte genügt daher die elementare theoretische Betrachtung nach veränderlichem Querschnitt (also nur Konus beitragend) nicht mehr. Die Anbringung einer mittleren Korrektur für den Normalkraftanteil der zähen Queranströmung am ganzen Körper lässt die rechnerischen Werte näher an die Versuchsergebnisse herankommen, erfasst sie jedoch nicht vollkommen. Auffallend sind die Unterschiede zwischen den Normalkraft-Derivaten  $C'_{N_a}$  (gemessen) und  $C'_{KN_a}$  (rechnerisch) bei Nullanstellung. Für diese liefert nämlich die Widerstandsbetrachtung der Queranströmung keinen Beitrag ( $IC'_{N_a} = 0$ ). Eine diesbezügliche Verbesserung der Übereinstimmung scheint die sogenannte gemischte Theorie («hybrid theory») nach VAN DYKE ([4], S. 174) zu versprechen.

c) Ein weiterer experimenteller Hinweis auf die Gründe für die festgestellten Abweichungen konnte aus den Schlierenbildern entnommen werden. Darin beobachtete man unter anderem folgende Erscheinungen:

am Körper II ( $\theta_K = 15^\circ$ ): eine leichte Krümmung der Verdünnungswellen an der Übergangsstelle Konus-Zylinder, welche mit wachsendem Anstellwinkel zunimmt;

am Körper III ( $\theta_K = 30^\circ$ ): analog wie beim Körper II, nur noch intensiver. Ausserdem bildet sich mit zunehmendem Anstellwinkel eine merkbare Krümmung des immer noch (da  $M = 1,67$ ) anliegenden Stosskegels um die Spitze aus.

Demgegenüber werden theoretisch nach TAYLOR-MACCOLL konstante Strömungszustände auf den erzeugenden Geraden der Kegelflächen am und hinter dem Stoss vorausgesetzt ([2], S. VII, und [1], S. XII).

### B. Heckdrücke

In Figur 4 sind für alle drei Körper die mittleren Heckdruck-Beiwerte  $C_H$  in Funktion des Anstellwinkels  $\alpha$  dargestellt. Laut der Vorzeichendefinition [vgl. unter *Bezeichnungen*, Punkt e)] geben sie den relativen Unterdruck auf der Heckfläche gegenüber dem statischen Druck der ungestörten Anströmung an.

Man wird hierbei bemerken:

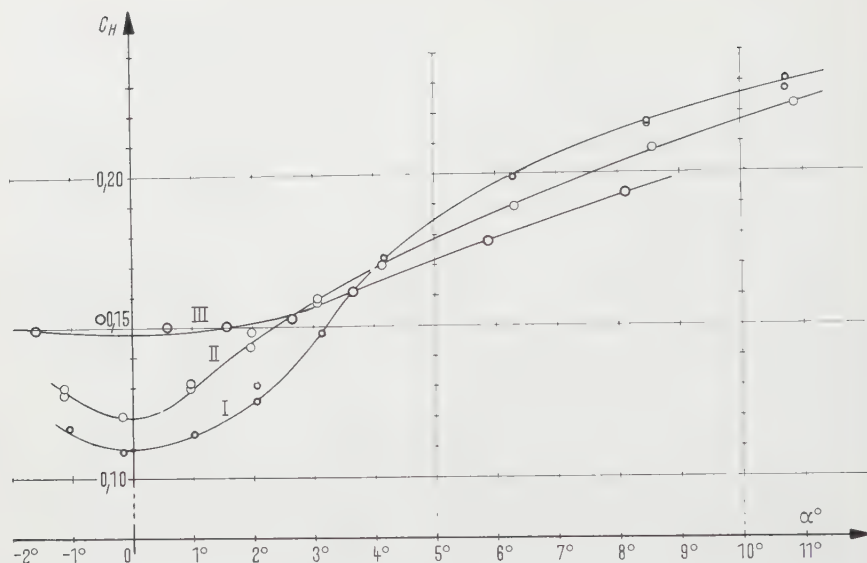
a) Stärkere Zuspitzung der Konen bewirkt:

bei Nullanstellung: eine Verminderung des Heckwiderstandes;

bei grösseren Anstellwinkeln ( $\alpha > 4^\circ \div 5^\circ$ ): eine Vergrösserung der Unterdrücke am Heck.

b) In einem engen Anstellwinkel-Bereich ( $\alpha \approx 4^\circ$ ) sind die mittleren Heckdrücke für alle drei Körper praktisch gleich gross ( $C_H \approx 0,16 \div 0,17$ ). In dieser Gegend weisen die Kurven für die spitzen Konen einen Wendepunkt auf.

Um dieses Druckverhalten am Heck besser zu überblicken, sind in Figur 5 die Unterdruck-Koeffizienten  $C_p$  für die einzelnen Meßstellen 1  $\div$  4 über dem Mittelwert  $C_H$  aufgetragen. Bemerkenswert daran sind folgende Tatsachen:



Figur 4

Heckkraft-Beiwerte  $C_H$  in Funktion des Anstellwinkels  $\alpha$  für Körper I, II und III, nach den Druckmessungen an den Heckflächen. Messdaten bei den Heckdruck-Messungen:

Körper I,  $M = 1,684$ ,  $Re = 0,649 \cdot 10^6$ ;  
 Körper II,  $M = 1,683$ ,  $Re = 0,645 \cdot 10^6$ ;  
 Körper III,  $M = 1,673$ ,  $Re = 0,654 \cdot 10^6$ .

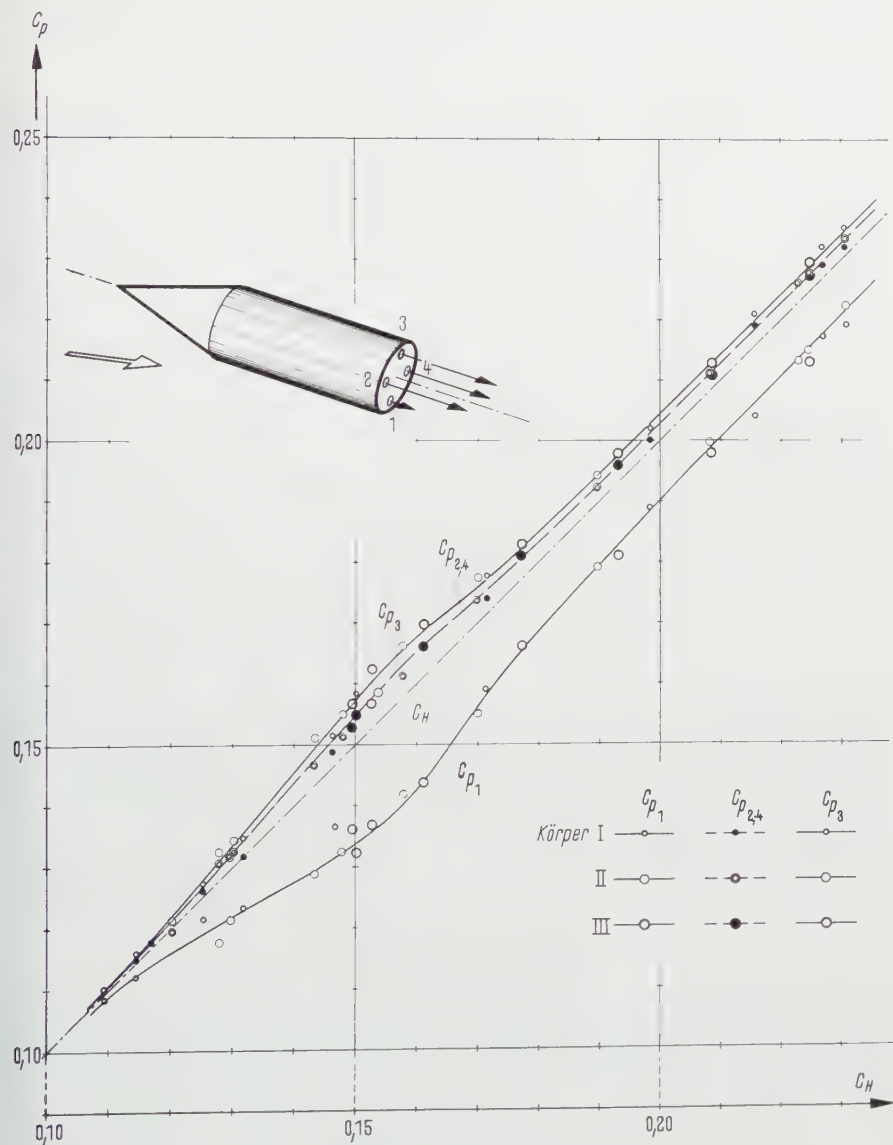
a) Die gleichnamigen Messpunkte  $C_p(C_H)_{i-\text{const}}$  [ $i = 1 \div 4$ ] liegen praktisch auf je einer und der gleichen Kurve für alle drei Körper, obwohl sie in Abhängigkeit von der Körperform bei verschiedenen Anstellwinkeln auftreten.

b) Die grössten Unterschiede zwischen den Heckdrücken druckseitig (Druckanschluss Nr. 1) und denjenigen saugseitig (Druckanschluss Nr. 3) kommen bei  $C_H \approx 0,16$  vor, also beim gleichen Wert, bei dem ungefähr die Wendepunkte und die Schnittpunkte der Kurven  $C_H(\alpha)$  liegen.

c) Die Unterschiede zwischen den Drücken ( $C_p$ ) an einzelnen Meßstellen und ihrem Mittelwert ( $C_H$ ) scheinen eine gewisse Regelmässigkeit in dem hier erfassten  $C_H$ -Bereich zu befolgen. So dürfte für die in Figur 3 aus den Messpunkten gemittelten Kurven annähernd zutreffen, dass die Differenzen  $(C_{p_3} - C_H) \approx 1,5 (C_{p_2} - C_H)$  und die Summen  $\{(C_{p_3} - C_H) + 2(C_{p_2} - C_H)\} = (C_H - C_{p_1})$  sind. Dabei sind theoretisch und auch praktisch  $C_{p_2} \cong C_{p_4} \cong C_{p_{2;4}}$  gleich.

d) Die Heckkraft-Resultierenden liegen exzentrisch und haben die Tendenz, den Anstellwinkel des Körpers zu vergrössern. Die destabilisierenden Momente von der Heckkraft her sind am grössten bei dem markanten Wert





Figur 5

Unterdruck-Koeffizienten  $C_p$  für die Druckmeßstellen  $i = 1 \div 4$  in Korrelation zu ihrem jeweiligen Mittelwert  $C_H$  bei den Körpern I, II und III. Die eingezeichneten Kurven geben die interpolierten Verläufe  $C_p(C_H)$  für folgende Stellen auf der Heckfläche an (von oben nach unten):

Druckanschluss Nr. 3 (saugseitig) =  $C_{p_3}$ ; Druckanschlüsse Nr. 2 und 4 (horizontale

Mittellinie) =  $C_{p_{2,4}}$ ; Mittelwert  $C_H = 45^\circ$ -Gerade; Druckanschluss Nr. 1 (druckseitig) =  $C_{p_1}$ .

$C_H \approx 0,16$ , sie nehmen gegen die Nullanstellung ab, und bei starker Anstellung bleiben sie vom Anstellwinkel annähernd unabhängig.

Die Modellgrößen schränken die Zahl der anzubringenden Druckanschlüsse auf vier ein. Demnach sind die dargelegten Resultate eine etwas rohe Schätzung. Um exakte Auskünfte zu erhalten, würde man gern Messungen von radialen Druckverteilungen am Heck in Betracht ziehen.

Abschliessend möchte der Verfasser seinen Institutskollegen, den Herren Dipl.-Ing. H. SPRENGER und Dipl.-Ing. A. HAERTER, für ihren bereitwilligen, von gemeinsamer Absicht getragenen Beistand bei Ausarbeitung dieser Publikation herzlich danken.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Z. KOPAL, *Tables of Supersonic Flow Around Yawing Cones*, Tech. Rep. No. 3., MIT (Cambridge, Mass., 1947).
- [2] Z. KOPAL, *Tables of Supersonic Flow Around Cones*, Tech. Rep. No 1., MIT (Cambridge, Mass., 1947).
- [3] J. ACKERET, Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH in Zürich, Nr. 8 (Verlag Leemann, Zürich 1943).
- [4] M. D. VAN DYKE, *First- and Second-Order Theory of Supersonic Flow Past Bodies of Revolution*, J. aero. Sci. 18, 177 (1951).

#### Summary

Some experimental results of force and base pressure measurements at  $M \approx 1,67$  on conically pointed cylindrical bodies are presented and compared with the theory of supersonic flow around cones by TAYLOR-MACCOLL, tabulated by KOPAL, also considering the viscous drag forces due to cross flow. Base pressure measurements are roughly analyzed.

(Eingegangen: 19. Dezember 1957.)

## Magneto-Gasdynamic Channel Flow

By EDWIN L. RESLER jr. and WILLIAM R. SEARS, Ithaca, New York, USA<sup>1)</sup>

### Introduction

In another paper [1<sup>2)</sup>] we have considered the prospects of the application of magneto-gasdynamics principles to aeronautics and have concluded that the electromagnetic body force may affect gas flows in important practical ways. We emphasized that this phenomenon can be used to effect significant departures from the usual laws of gasdynamics, and mentioned in particular the possibility of accelerating a gas, flowing through a channel or pipe, to extreme speeds. In the present note we wish to present this work on channel flows in more detail.

The conclusions of our previous paper were based, in the first place, on some estimates of the probable magnitudes of electrical conductivity in air, practical magnetic-field strengths, and other pertinent physical parameters. Some data were presented, for example, concerning the conductivities of air and of air 'seeded' with potassium at various temperatures. We also concluded, by an examination of the relative magnitudes of terms of the equations of motion, that viscous effects have the same significance in magneto-aerodynamics that they do in classical aerodynamics; namely, that they are generally negligible, at the Reynolds numbers of practical aerodynamics, except in boundary layers, wakes, and analogous restricted areas, and except as these phenomena impose gross effects (such as separation) on the flow pattern.

### Equations of Motion

As we pointed out in [1], the familiar equations of gasdynamics are modified, to include electromagnetic effects, only by addition of the electrical body force to the momentum equation and the Joule heating to the energy equation:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho \mathbf{q}) = 0, \quad (1)$$

$$\varrho \frac{D\mathbf{q}}{Dt} + \operatorname{grad} p = \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \text{viscosity terms}, \quad (2)$$

$$c_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\varrho^{-1}}{Dt} = \frac{j^2}{\sigma \varrho} + \text{viscous dissipation} + \text{other heat added}. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Graduate School of Aeronautical Engineering, Cornell University.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 518.

Here the symbols  $\rho$ ,  $p$ ,  $\mathbf{q}$ , and  $c$ , denote the density, pressure, velocity, and specific heat of the gas;  $\mathbf{j}$  is the current-density vector,  $\sigma$  the electrical conductivity,  $\mathbf{H}$  the magnetic field vector,  $t$  the time, and  $D/Dt$  the usual convective derivative. The simple statement of the energy equation, (3), is possible because we neglect the effects of temperature and field strength on electromagnetic parameters (dielectric constant and permeability) of the fluid; thus we neglect electromagnetic contributions to the internal energy of the fluid. Equation (3) then becomes a simple statement that the heat added to each fluid particle, whether released by Joule heating or dissipation or transferred from adjoining particles, appears in the particle in the familiar thermodynamic forms: internal energy or mechanical work.

Together with these relations, one must have a relation between the electric current and the field vectors. In the present application this relation is OHM's law,

$$\mathbf{j} = \sigma [\mathbf{E} + \mathbf{q} \times \mathbf{H}] \quad (4)$$

(where  $\mathbf{E}$  denotes the electric field vector). To complete the set, one also has the electro-magnetic field equations, which can be written as

$$4\pi\mathbf{j} = \text{curl } \mathbf{H}, \quad (5)$$

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (6)$$

It will be noted that we assume the total current density to be given by equation (4). In doing so we neglect the current attributable to the transport of net charge density at the fluid velocity  $\mathbf{q}$ , since this current is small compared to the term retained<sup>3</sup>). Similarly, we have neglected the 'displacement current' in writing equation (5). The two effects commonly described by this terminology are explained in [2] and elsewhere. We neglect them both because (a) the separation of charges in the gas (polarization) involves negligible flux of charges, and (b) the significant time scale of magneto-aerodynamics is determined by  $L/q$  and the displacement current is proportional to the rate of change  $dE/dt$ , thus it is relatively small<sup>4</sup>).

Equations (1) to (6) constitute the fundamental statements of our investigation. We can obtain the energy equation (3) in more useful form, how-

<sup>3</sup>) The ratio of this neglected term to the term retained in equation (4) is found to be of the order of magnitude  $q/\sigma L c^2$ , where  $L$  is a typical length characterizing the flow pattern and  $c$  the velocity of light. This ratio can be written as  $q^2/c^2 R_m$ , where  $R_m$  is the 'magnetic Reynolds number' defined in [1].

<sup>4</sup>) The ratio of this term to the conduction current of equation (4) is also found to be of the order of magnitude  $q/\sigma L c^2$ .

ever, by combining it with equations (2) and (4); the result is

$$\left. \begin{aligned} c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q^2/2}{\partial t} + \dot{p} \frac{\partial \varrho^{-1}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla h_0 \\ = \frac{1}{\varrho} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \text{viscosity terms} + \text{other heat added}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where  $h_0$  denotes the stagnation enthalpy,  $c_p T + q^2/2$ . This equation assumes a particularly significant form for steady flow, where the first three left-hand terms are absent, for the left-hand side then becomes the convective rate of increase of the stagnation enthalpy. Thus  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}/\varrho$  is the total rate at which energy is added to the flow, per unit mass, by electromagnetic effects.

Channel Flow

Consider now the steady flow of an electrically conducting gas through a pipe or channel of cross-sectional area  $\mathcal{A}(x)$ , and suppose that magnetic and electric fields are applied externally, at right angles to one another, across the channel. We are particularly interested in how effectively the gas flowing through the channel can be accelerated and decelerated by use of fields in this manner.

If the channel area changes slowly along its length, we can make the familiar approximation of quasi-one-dimensional gasdynamics; i.e., we can discuss mean values of fluid properties at each station  $x$ . Neglecting viscosity and heat transfer, the equations of motion then become

$$\varrho u \mathcal{A} = \text{const}, \tag{8}$$

$$\varrho u u' + p' = \sigma (E - u H) H, \tag{9}$$

$$c_p \varrho u T' + \varrho u^2 u' = \sigma (E - u H) E + Q, \tag{10}$$

$$p = R \varrho T, \tag{11}$$

where  $E$  and  $H$  are the field strengths applied at the boundaries of the channel,  $Q$  denotes heat added (other than Joule heating) to the stream, and the primes denote differentiation along the channel (with respect to  $x$ ).

It is easy to calculate the acceleration  $u'$  from these equations. We first eliminate the temperature  $T$  by combining the energy equation (10) with the gas law (11). The resulting equation then involves both  $p'$  and  $q'$ , which can be eliminated by use of equations (9) and (8), respectively. The formula obtained for the acceleration is then

$$u' = \frac{\frac{u}{\mathcal{A}} \mathcal{A}' - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{Q}{p} - \frac{\sigma H^2}{p} \left(u - \frac{E}{H}\right) \left(u - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{E}{H}\right)}{M^2 - 1}. \tag{12}$$

Here  $\gamma$  is the ratio of specific heats and  $M^2$  denotes  $u^2/\gamma R T$ .

The form assumed by this equation when magneto-aerodynamic effects are absent ( $\sigma = 0$ ) is familiar in gasdynamics. In particular, when no heat is added ( $Q = 0$ ), equation (12) becomes the well-known isentropic channel formula, which states that subsonic flows ( $M < 1$ ) are decelerated and supersonic flows ( $M > 1$ ) accelerated in a channel of increasing area. The heat addition term is also familiar; it indicates that subsonic flows are accelerated and supersonic flows decelerated when heat is added in a constant-area channel.

The magneto-aerodynamic term is more interesting in the present investigation. Its contribution to the acceleration  $u'$  can be made positive for any Mach number by suitable choice of the ratio  $E/H$ . This ratio is recognized as the speed at which the velocity-induced field strength  $u H$  becomes equal to the applied field strength  $E$ . Below this speed the body force itself is in the direction to accelerate the flow; above this speed, to decelerate it. Let this speed be denoted by the symbol  $u_3$ ; then the net magneto-aerodynamic contribution to the acceleration can be made positive at supersonic speeds only if the local flow speed  $u$  lies between  $u_3$  and  $(\gamma - 1) u_3/\gamma$ , which we shall call  $u_1$ . Conversely, at subsonic speeds the acceleration is negative when  $u$  lies between  $u_1$  and  $u_3$ , and is positive when  $u$  is outside this interval.

The speed  $u_1$  is that value at which the effect of the body force is just compensated by the effects of electromagnetic energy addition to the flow.

According to equation (12), the acceleration  $u'$  becomes infinite at  $M = 1$  unless the numerator also vanishes there. In discussing channel flows, therefore, it will be necessary to be able to predict the behavior of  $M(x)$ . A formula for  $M'$  is easily obtained from equations (10) and (12); viz.,

$$M' = \frac{1}{M^2 - 1} \left\{ \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) M \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{1 + \gamma M^2}{2} \cdot \frac{Q}{a p} - \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \frac{\sigma H^2}{a p} (u - u_3) (u - u_2) \right\}, \quad (13)$$

where  $a$  denotes  $\sqrt{\gamma R T}$  and

$$u_2 = \frac{1 + \gamma M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} u_1. \quad (14)$$

The magneto-gasdynamic effect on  $M$  can now be stated qualitatively as follows: At supersonic speeds,  $M$  increases with  $x$  as long as  $u$  lies between  $u_2$  and  $u_3$ , and decreases when  $u$  lies outside this interval. At subsonic speeds the trends are reversed. Comparing this rule with the one stated for  $u'$ , above, we see that there is a range of speeds in which the speed  $u$  and Mach number  $M$  have opposite trends, namely the range between  $u_1$  and  $u_2$ .



It is easy to verify that  $u_2/u_1$  is a monotonic function of  $M$  and that the behavior of  $u_2$  can be summarized as follows:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{u_1}{2} & \text{at} & \quad M = 0, \\ u_2 &< u_1 & \text{when} & \quad M < 1, \\ u_2 &= u_1 & \text{when} & \quad M = 1, \\ u_2 &> u_1 & \text{when} & \quad M > 1, \\ u_2 &= u_3 & \text{at} & \quad M = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Equations (12) and (13) may be employed to discuss, at least qualitatively, the behavior of channel flows in general. They cannot be integrated in general, however, because the flow situation always depends on its past history. In this respect the problem is more like that of viscous channel flow than classical inviscid gasdynamics. We now consider two particular cases in detail; viz., a constant-density channel and a constant-area channel.

### *Constant-Density-Channel*

In this example we assume that the cross-sectional area varies at exactly the rate that is required to keep the density constant. This case is chosen not so much for its practicality as to illustrate further the significances of the speeds  $u_1$  and  $u_3$ , which appear in the results. Naturally this solution will be one of the infinitely many solutions for incompressible flow; however this particular solution has gasdynamic significance, which the others do not, because it satisfies equations (10) and (11).

Elimination of  $T$  from equation (10) by use of the gas law (11) yields

$$\frac{c_p}{R} u p' + \varrho u^2 u' = \sigma (E - u H) E. \quad (16)$$

Upon substitution of  $p'$  from equation (9), this becomes, after a little simplification,

$$u^2 u' + \frac{\sigma \gamma H^2}{\varrho} u^2 - \frac{(2\gamma - 1) \sigma H E}{\varrho} u + \frac{(\gamma - 1) \sigma E^2}{\varrho} = 0. \quad (17)$$

This differential equation can conveniently be expressed in terms of the speeds  $u_1$  and  $u_3$  defined farther above:

$$dx = -\frac{\varrho}{\gamma \sigma H^2} \cdot \frac{u^2 du}{(u - u_1)(u - u_3)}. \quad (18)$$

The integral, for constant  $\sigma$ ,  $E$ , and  $H$ , if  $u = u_0$  where  $x = 0$ , is

$$x = \frac{\varrho}{\sigma E H} \left\{ (u_3 - u_0)(u_0 - u) + u_3^2 \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \frac{u - u_1}{u_0 - u_1} - \ln \frac{u - u_3}{u_0 - u_3} \right] \right\}. \quad (19)$$

Further examination of the situation shows that for this case the pressure  $p$  and temperature  $T$  always increase with  $x$ . If  $u_0 > u_3$ , then  $u$  approaches  $u_3$  as  $x$  goes to infinity. The velocity  $u_3$  is approached from below as  $x$  goes to infinity if  $u_1 < u_0 < u_3$ , and for  $u_0 < u_1$ ,  $u$  goes to zero at a finite  $x$  which can be found from equation (19). Solving for  $dh_0/dx$ , one finds that energy is being extracted from the flow when  $u > u_3$  and added to the flow if  $u < u_3$ , as expected.

### Constant-Area Channel

Our second example is a straight pipe of constant area ( $\mathcal{A}' = 0$ ) without heat addition ( $Q = 0$ ). The equations of motion can be integrated for this case, yielding an expression of the form  $M(u)$ , i.e., a relation between the Mach number and velocity. Unfortunately it is not easy to interpret this result to give the variation of velocity and Mach number along the length of the pipe, which is our major interest here. The integration has been carried out by ROSA [3], and the conclusions of the present investigation, based on equations (12)–(14), have been checked against his graphs. In those cases where ROSA's results extend into the same ranges of parameters, the results are in agreement.

For the straight pipe, the forms of equations (12) and (13) suggest consideration of a series of distinct cases, characterized by the initial value of the speed,  $u_0$ , relative to the values  $u_1$ ,  $u_2$ , and  $u_3$ , and the initial Mach number  $M_0$ . Taking into account the inequalities listed in (15), one finds that the number of possible cases is eight, as follows:

$$1. M_0 > 1$$

$$2. M_0 < 1$$

$$\text{and A. } u_1 < u_2 < u_3 < u_0; \quad \text{and A. } u_2 < u_1 < u_3 < u_0;$$

$$\text{B. } u_1 < u_2 < u_0 < u_3; \quad \text{B. } u_2 < u_1 < u_0 < u_3;$$

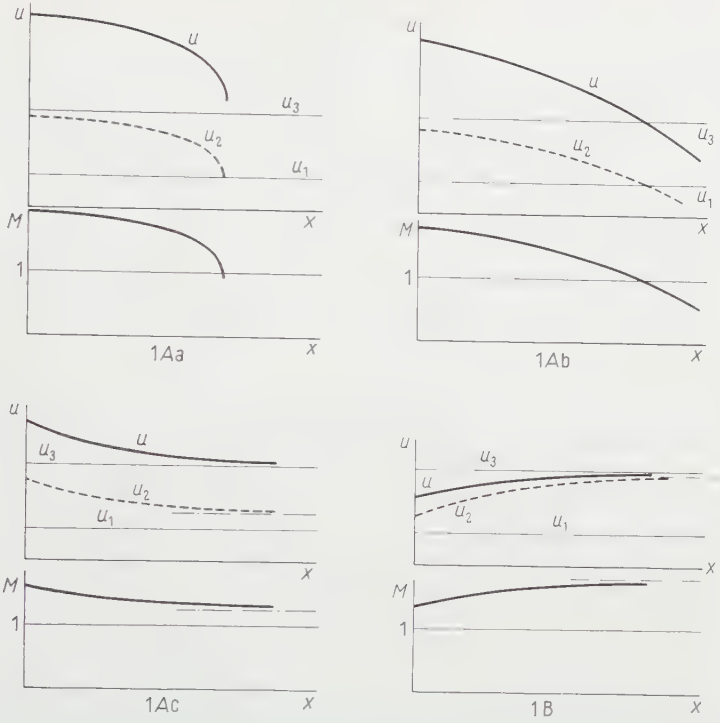
$$\text{C. } u_1 < u_0 < u_2 < u_3; \quad \text{C. } u_2 < u_0 < u_1 < u_3;$$

$$\text{D. } u_0 < u_1 < u_2 < u_3; \quad \text{D. } u_0 < u_2 < u_1 < u_3.$$

Let us consider these eight cases in order.

$$1 \text{ A. } M_0 > 1 \text{ and } u_1 < u_2 < u_3 < u_0.$$

This is a case of magneto-gasdynamics deceleration. Both  $u'$  and  $M'$  are initially negative. If  $M_0$  is sufficiently close to 1, the deceleration increases catastrophically, according to equation (12), and the duct is choked. This case is sketched qualitatively in Figure 1Aa. On the other hand, for other initial conditions,  $u$  may decrease monotonically toward  $u_3$  while  $M$  decreases toward an asymptotic value greater than 1 (Figure 1Ac). There is a particular set of initial conditions for which  $M$  reaches 1 and  $u$  reaches  $u_3$  simultaneously; it is then theoretically possible for the flow to decelerate smoothly through sonic conditions as sketched in Figure 1Ab.



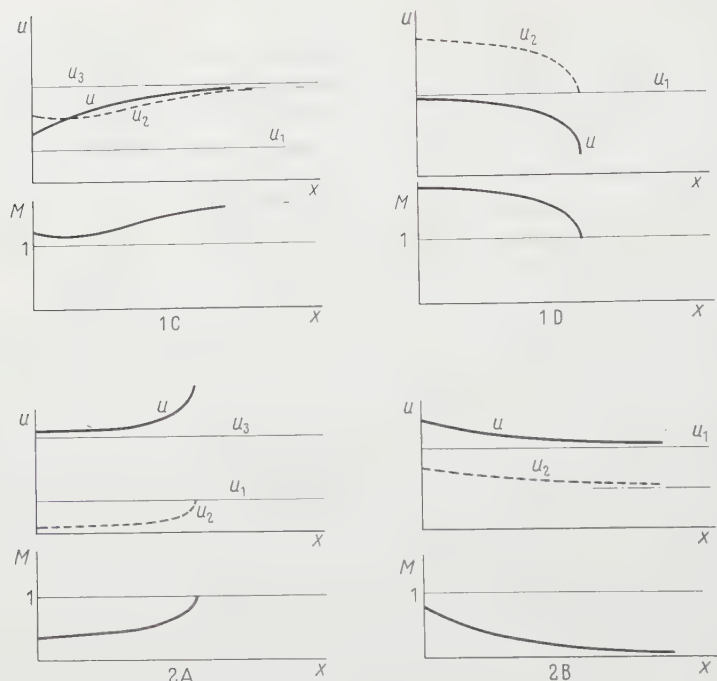
Sketches showing the behavior of the speed  $u$ , Mach number  $M$ , and the quantity  $u_2$ , as functions of the distance along the duct,  $x$ , for various initial conditions, in a duct of constant area. The constants  $u_3$  and  $u_1$  denote  $E/H$  and  $[(\gamma - 1)/\gamma] E/H$ , respectively.

This smooth deceleration may be impossible for reasons of stability, which have not been investigated to date. This case is analogous to that of a reversed Laval nozzle, in which smooth deceleration is possible according to steady-flow equations but is actually unstable.

Were this deceleration through  $M = 1$  to occur, the flow would become case 2B, which is discussed below. It is a case of monotonic deceleration toward the asymptotic state  $u = u_1$ ,  $M = 0$ ; i.e., a case of continuous deceleration and temperature rise.

1 B.  $M_0 > 1$  and  $u_1 < u_2 < u_0 < u_3$ .

Here the initial tendencies of both  $u$  and  $M$  are positive. Although  $u_2$  increases, it certainly cannot become equal to  $u$ , for  $M' = 0$  at such an intersection while  $u'$  is positive. Thus  $u$  must tend continually toward  $u_3$  (and  $j$  toward zero) while  $M$  approaches an asymptotic value. This case is sketched in Figure 1B. The asymptotic state is one without magneto-gasdynamics effects.



Sketches showing the behavior of the speed  $u$ , Mach number  $M$ , and the quantity  $u_2$ , as functions of the distance along the duct,  $x$ , for various initial conditions, in a duct of constant area. The constants  $u_3$  and  $u_1$  denote  $E/H$  and  $[(\gamma - 1)/\gamma] E/H$ , respectively.

$$1\ C. \quad M_0 > 1 \text{ and } u_1 < u_0 < u_2 < u_3.$$

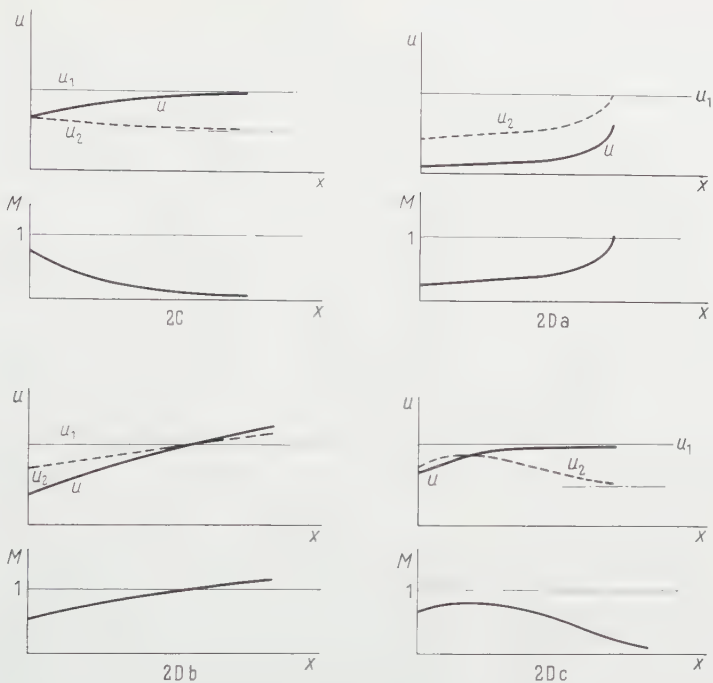
Initially  $u' > 0$  while  $M' < 0$ . Thus  $u$  surely coincides with  $u_2$ , which is decreasing from its initial value as shown in Figure 1C. This crossing reverses the sign of  $M'$  and the case is transferred to 1B, above.

$$1\ D. \quad M_0 > 1 \text{ and } u_0 < u_1 < u_2 < u_3.$$

Here  $u'$  and  $M'$  are both initially negative. As  $M$  approaches 1, the deceleration increases without limit, for the numerator of equation (12) is certainly non-zero. This is another case of choking. The flow cannot pass through the sonic condition, for if it did it would become case 2D, which involves positive rather than negative tendencies for both  $u$  and  $M$ . This case is sketched in Figure 1D.

$$2\ A. \quad M_0 < 1 \text{ and } u_2 < u_1 < u_3 < u_0.$$

This is another case of magneto-gasdynamic choking. The initial tendencies of both  $u$  and  $M$  are upward; thus  $u'$  increases catastrophically as  $M$  approaches 1 (Figure 2A).



Sketches showing the behavior of the speed  $u$ , Mach number  $M$ , and the quantity  $u_2$ , as functions of the distance along the duct,  $x$ , for various initial conditions, in a duct of constant area. The constants  $u_3$  and  $u_1$  denote  $E/H$  and  $[(\gamma - 1)/\gamma] E/H$ , respectively.

2 B and 2 C.  $M_0 < 1$  and  $u_2 < u_1 < u_0 < u_3$   
and  $u_2 < u_0 < u_1 < u_3$ , respectively.

The initial value of  $M'$  is negative in both of these cases while  $u'$  is negative if  $u_0 > u_1$  and positive if  $u_0 < u_1$ . In either case the speed  $u$  approaches  $u_1$  asymptotically while  $M$  approaches zero. In both cases  $u_2$  approaches the value  $u_1/2$ , so that  $u$  and  $u_2$  never become equal; moreover, there is no possibility of  $M$  reaching 1. These are both cases where the flow speed approaches a constant value while the gas temperature increases indefinitely. They are sketched in Figures 2B and 2C.

2 D.  $M_0 < 1$  and  $u_0 < u_2 < u_1 < u_3$ .

The initial values of  $u'$  and  $M'$  are positive. This is the counterpart of case 1A, for there are again three possible results depending on initial values. They are, respectively, choking (Figure 2Da), smooth acceleration (Figure 2Db), and approach to an asymptotic state (Figure 2Dc).

Choking occurs if  $M_0$  is sufficiently close to 1, so that the acceleration  $u''$  becomes infinite. Again there is a special choice of initial values that makes  $u$  reach the value  $u_1$  exactly at  $M = 1$ ; this permits smooth acceleration through sonic, and the flow becomes that of case 1B, which, it will be recalled, accelerates toward  $u_3$ . The third possibility, which occurs when  $u_0$  is closer to  $u_2$ , involves crossing of the  $u$  and  $u_2$  curves (Figure 3Dc), thus reversal of sign of  $M'$ , and subsequent asymptotic behavior as in case 2C.

Summarizing these various possibilities, one may say that the possibilities afforded by ordinary gas flow have been enormously increased by magneto-gasdynamical effects. Even in a straight duct we find possibilities of choking and of smooth acceleration and deceleration, even through sonic speed. In all cases that do not choke, the final velocity is an asymptotic value established by the ratio  $F/H$ , but it would seem possible to make this value quite large. The case 2Db, in particular, seems to deserve further study, for it is a 'magneto-gasdynamical nozzle' of constant cross-sectional area.

#### REFERENCES

- [1] E. L. RESLER jr. and W. R. SEARS, *The Prospects for Magneto-Aerodynamics*, J. aero. Sci. 25, No. 4, 235-245, 258 (1958).
- [2] G. JOOS, *Theoretical Physics* (Stechert, N. Y., 1934), p. 314-315.
- [3] R. J. ROSA, Part I: *Shock Wave Spectroscopy*; Part II: *Engineering Magneto-Hydrodynamics*, Ph. D. Thesis (Cornell University, 1956). Available from University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Michigan.

#### Zusammenfassung

Die Gleichungen für die «quasi-eindimensionale» Strömung eines elektrisch leitenden Gases werden im Falle eines Stromfadens mit veränderlichem Querschnitt hergeleitet, wobei die Strömung unter dem Einfluss eines elektrischen und magnetischen Feldes steht. Obwohl kein allgemeines Integral angegeben werden konnte, ergeben sich interessante Folgerungen für die Beschleunigung der Strömung und für die Änderung der Mach-Zahl. Zum Beispiel kann in gewissen Geschwindigkeitsbereichen eine Überschallströmung «magneto-gasdynamisch» auch bei konstantem Strömungsquerschnitt beschleunigt werden.

Bei variablem Querschnitt sind die Gleichungen für einen besonderen Fall integriert worden; das Ergebnis dieser Integration kann als weiteres Beispiel für die Veranschaulichung der Wirkung einer elektromagnetischen Energiezufuhr dienen. Die auch bei konstantem Querschnitt bestehenden mannigfaltigen Möglichkeiten werden für verschiedene Anfangsbedingungen diskutiert, wobei Fälle sich zeigen, bei denen Beschleunigungen und Verzögerungen mit Durchgängen durch die Schallgeschwindigkeit auftreten sowie auch neue Fälle von «Blockierungen» sich offenbaren.

(Received: October 1, 1957.)



# On Magneto-Aerodynamic Boundary Layers

By VERNON J. ROSSOW, Moffett Field, Calif., USA<sup>1)</sup>

## Introduction

When the speed of aircraft increases to Mach numbers of about 15 and higher, the molecules dissociate to atomic species and ionization of the air occurs. The air is then a very hot fluid and a good conductor of heat and electricity. If steady flight at such speeds is to be feasible, some means must be sought to alleviate the high rate of transfer of heat to the aircraft surface. The possibility of doing so with a transverse magnetic field was studied in [1]<sup>2)</sup>. This note is an extension of that paper and considers a particular variation in the electrical conductivity with the temperature of the air.

It is assumed that for the local region of the boundary layer the fluid is incompressible and has a constant viscosity. The differential equations governing the flow field then reduce to a simple form whereby the effect of the transverse magnetic field is found as a perturbation on the Blasius boundary-layer solution. Although the results do not correspond exactly to a physically realistic case, an estimate is obtained for the magnitude of the effect of the transverse magnetic field on the skin friction and heat transfer.

## 1. Variation of Electrical Conductivity with Temperature

For the cases considered in [1] it was assumed that the magnetic field strength or magnetic induction,  $B_0$ , was constant throughout the flow field over the flat plate. This may be considered a suitable model for the local region of the flow disturbance wherein the magnetic lines of force could be designed to be approximately straight and parallel. The electrical conductivity,  $\sigma$ , was taken to be either a constant, or to be proportional to the velocity decrement in the boundary layer. A better approximation might be to assume that the electrical conductivity is some function of the local temperature,  $T$ . An empirical relation of this form can be found from the data given in [2], and the approximate expression given in [3] as

$$\sigma = \frac{n e^2 I_e}{m_e U_e} \approx 3 \times 10^{-16} n \frac{N_0}{N}, \quad (1)$$

<sup>1)</sup> National Advisory Committee for Aeronautics, Ames Aeronautical Laboratory.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 527.

where  $n$  is the number of free electrons per cubic centimeter,  $N_0$  and  $N$  are the number of particles per cubic centimeter at sea level and the altitude to be considered. The quantities  $e$ ,  $l_e$ ,  $m_e$ , and  $U_e$  are the charge, mean free path length, mass and average velocity of the electron. If the values of  $n$  taken from the tables of [2] are inserted into equation (1), the resulting values for

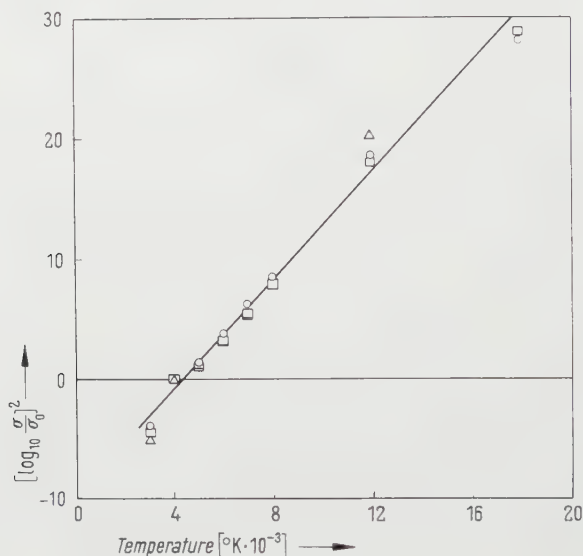


Figure 1

Electrical conductivity of air [2]:  $\circ$   $\rho/\rho_0 = 1$ ;  $\square$   $\rho/\rho_0 = 1/10$ ;  $\triangle$   $\rho/\rho_0 = 1/100$ .

the electrical conductivity can be represented by the expression (Figure 1)

$$\left(\log_{10} \frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2 = (0.00222) (T - 4300),$$

or

$$\sigma = \sigma_0 e^{0.1084 \sqrt{T-4300}} \quad \text{for } T > 4300, \quad (2a)$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{-0.1084 \sqrt{4300-T}} \quad \text{for } T < 4300, \quad (2b)$$

where  $T$  is the temperature in  $^{\circ}\text{K}$ , and  $\sigma_0$  is the electrical conductivity at  $4000^{\circ}\text{K}$  and at the pressure outside of the boundary layer. The local air density is denoted by  $\rho$  and that at sea level by  $\rho_0$ .

## 2. Transverse-Magnetic Field Fixed Relative to the Plate

### *Velocity Profile*

The flow field could be thought to correspond to the boundary layer on a wing (represented as a flat plate) which carries its own magnetic field and is moving through the air at high speed (Figure 2). Since the magnetic field is

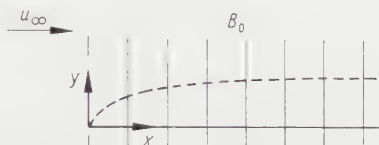


Figure 2

Magnetic field fixed relative to plate.

fixed relative to the surface, the fluid experiences two forces which retard its motion; that due to the kinematic viscosity,  $\nu$ , and that due to the motion of the electrically conducting fluid across the magnetic lines of force.

If the electromagnetic-force terms are combined with the Navier-Stokes equations and the usual boundary-layer approximations are made, the differential equation describing the flow field is

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\sigma B_0^2}{\rho} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3)$$

where the secondary effects of the magnetic induction are ignored [1]. The boundary conditions are

$$u = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = \infty.$$

A solution is obtained by introducing a stream function according to the method of [4]

$$\psi = \sqrt{u_\infty \nu x} \left[ f_0 + \sqrt{m x} f_1 + m x f_2 + (m x)^{3/2} f_3 + \dots \right] \quad (4)$$

with the velocity components given by  $u = \partial\psi/\partial y$  and  $v = -\partial\psi/\partial x$ . The quantities,  $f_0, f_1, f_2, \dots$  are functions of the dimensionless distance,

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}.$$

The dependence on temperature of  $\sigma$  is transferred to a dependence on velocity by substituting as a first approximation the cold-wall temperature solution for the Blasius boundary layer (see, e.g. [5]),

$$T_0 = T_\infty + \frac{u_\infty^2}{2 C_p} \cdot \frac{u}{u_\infty} \left( 1 - \frac{u}{u_\infty} \right), \quad (5)$$

where  $T_\infty$  is the temperature of the plate and of the fluid far from the plate. If equations (2) and (5), and the derivatives of equation (4) are introduced into equation (3), the following ordinary differential equations result when terms containing the same power of  $m\bar{x} = \sigma_0 B_0^2 x/\rho u_\infty$  are equated

$$f_0''' + \frac{1}{2} f_0 f_0'' = 0, \quad (6)$$

$$f_2''' + \frac{f_0}{2} f_2'' - f_0' f_2' + \frac{3f_0'}{2} f_2 - f_0' e^{0.1084 [T_\infty - 4300 + (u_\infty^2/2 C_p) f_0' (1-f_0')]^{1/2}} = 0. \quad (7)$$

The odd numbered terms  $f_1, f_3, \dots$  involving  $\sqrt{m\bar{x}}$  are zero. The solution to equation (6) is the Blasius incompressible boundary-layer solution for no magnetic field. The form of the exponential requires one to choose specific values for  $T_\infty$  and  $u_\infty^2/2 C_p$ . The wall and free-stream temperature will be taken as 300 °K so that the electrical conductivity will nearly vanish at and far from

Table 1  
Magnetic Field Fixed Relative to Plate

$\eta$	$a$			$b$	
	$f_2$	$f_2'$	$f_2''$	$\frac{T_2}{u_\infty^2/2 C_p}$	$\frac{T_2'}{u_\infty^2/2 C_p}$
0	0	0	-3.240	0	-1.216
0.2	-0.065	-0.648	-3.240	-0.157	-0.354
0.4	-0.259	-1.296	-3.240	-0.141	0.514
0.6	-0.583	-1.943	-3.239	0.049	1.392
0.8	-1.037	-2.592	-3.237	0.416	2.279
1.0	-1.620	-3.238	-3.195	0.961	3.147
2.0	-5.801	-4.152	1.973	3.401	-0.395
3.0	-8.868	-2.071	1.730	2.074	-1.484
4.0	-10.211	-0.752	0.910	0.806	-0.955
5.0	-10.625	-0.180	0.298	0.192	-0.321
6.0	-10.709	-0.028	0.057	0.029	-0.059
7.0	-10.720	-0.004	0.006	0.004	-0.005
8.0	-10.722	-0.001	0	0.002	0

the wall. The quantity  $u_\infty^2/2 C_p$  will be chosen as  $1.85 \times 10^4$  °K which corresponds to roughly a free-stream Mach number of 40. The numerical solution to equation (7) using these values is tabulated in Table 1a and yields the first-order effect of the influence of the magnetic field. Several velocity profiles are shown in Figure 3a. The skin-friction coefficient and the displacement thickness are

$$c_f = \frac{0.664 - 6.480 m\bar{x} + \dots - \dots}{\sqrt{Re_x}}, \quad (8)$$

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu \bar{x}}{u_\infty}} (1.73 + 10.72 m\bar{x} \dots - \dots), \quad (9)$$

where  $Re_x = u_\infty x/\nu$ .

The fluid crossing the magnetic lines of force causes a reaction on the unit generating the magnetic field. This contributes a drag force to the wing given by

$$\begin{aligned} \frac{F}{\text{unit area}} &= \int_0^\infty \sigma B_0^2 u \, dy \\ &= \sigma_0 B_0^2 \sqrt{u_\infty \nu x} \int_0^\infty (f_0' + m x f_2' + \dots) e^{0.1084 [T_\infty - 4300 + (u_\infty^2/2 C_p) f_0' (1-f_0')^{1/2}]} d\eta. \end{aligned}$$

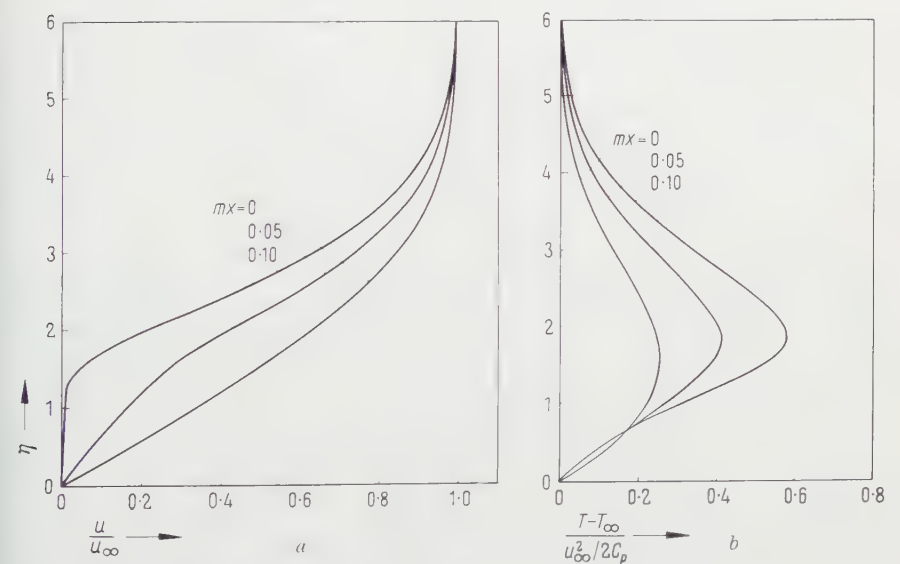


Figure 3  
Effect of magnetic field when fixed relative to plate ( $T_\infty = 300^\circ \text{K}$ ,  $u_\infty^2/2 C_p = 1.85 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ )  
 $a$  velocity profile;  $b$  temperature profile.

Temperature Profile

If the usual boundary-layer approximations are made, the transport of thermal energy is described by the equation (Prandtl number  $= C_p \mu / k = 1$ )

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \cdot \frac{u^2}{C_p} = \nu \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{C_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]. \tag{10}$$

The boundary conditions for this case are

$$T = T_\infty \quad \text{at} \quad y = 0 \quad \text{and at} \quad y = \infty.$$

The ordinary differential equations describing the effect of the magnetic field are found by introducing the expressions (2), (5), the derivatives of equation

(4), and the temperature function

$$T = T_0 + \sqrt{m x} T_1 + m x T_2 + (m x)^{3/2} T_3 + \dots \quad (11)$$

When the terms containing the same power of  $m x = \sigma_0 B_0^2 x / \rho u_\infty$  are equated, the following ordinary differential equations are found ( $T_1 = T_3 = \dots = 0$ ),

$$T_0'' + \frac{f_0}{2} T_0' + \frac{u_\infty^2}{C_p} (f_0'')^2 = 0, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} T_2'' + \frac{f_0}{2} T_2' - f_0' T_2 + \frac{3}{2} f_2 T_0' \\ + \frac{u_\infty^2}{C_p} \{ 2 f_0'' f_2'' + (f_0')^2 e^{0.1084 [T_\infty - 4300 + (u_\infty^2 / 2 C_p) f_0' (1 - f_0')]^{1/2}} \} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

etc.

The solution to equation (12) is that first found by POHLHAUSEN (see, e.g. [5])

$$T_0 = T_\infty + \frac{u_\infty^2}{2 C_p} [1 - (f_0')^2]. \quad (14)$$

The numerical integration of equation (13) (tabulated in Table 1b) yields the effect of the magnetic field on the temperature distribution in the boundary layer for the condition when  $u_\infty^2 / 2 C_p = 1.85 \times 10^4$  °K and  $T_\infty = 300$  °K. The curves in Figure 3b illustrate the effect for several values of the parameter  $m x$ . The heat transfer coefficient is given by

$$h = \frac{k (\partial T / \partial y)_{y=0}}{u_\infty^2 / 2 C_p} = \frac{\rho u_\infty C_p}{2 \sqrt{Re_x}} (0.664 - 2.432 m x + \dots). \quad (15)$$

### 3. Transverse-Magnetic Field Fixed Relative to the Fluid far from the Plate

The magnetic lines of force move past the plate at the free-stream velocity and tend to sweep along any air slowed by the viscous action of the air on the surface (Figure 4). The boundary layer on the wing of an aircraft flying over one of the magnetic poles of the earth would be a case similar to the mode analyzed in this section.

The differential equations for this case differ from equations (3) and (10) in only one term and are written as

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (u - u_\infty) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (16)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - (u - u_\infty)^2 \frac{\sigma B_0^2}{\rho C_p} = \nu \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (17)$$

The ordinary differential equations expressing the first-order effect of the magnetic field on the velocity and temperature distribution, found in the same



way as described in the previous case, are

$$f_2''' + \frac{f_0}{2} f_2'' - f_0' f_2' + \frac{3 f_0''}{2} f_2 + (1 - f_0') e^{0.1084 [T_\infty - 4300 + (u_\infty^2/2 C_p) f_0' (1 - f_0')^{1/3}]} = 0, \quad (18)$$

$$T_2'' + \frac{f_0}{2} T_2' - f_0' T_2 + \frac{3 f_0'' f_2 u_\infty^2}{4 C_p} (1 - 2 f_0') + \frac{u_\infty^2}{C_p} \{ 2 f_0'' f_2' + (1 - f_0')^2 e^{0.1084 [T_\infty - 4300 + (u_\infty^2/2 C_p) f_0' (1 - f_0')^{1/3}]} \} = 0. \quad (19)$$

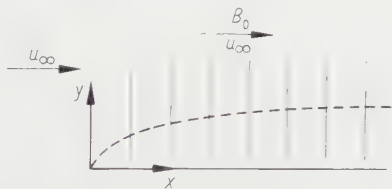


Figure 4  
Magnetic field fixed relative to fluid far from plate.

The numerical solution to these equations is tabulated in Table 2 and profiles for several values of  $m x$  are shown in Figure 5.

Table 2  
*Magnetic Field Fixed Relative to Fluid far from Plate*

$\eta$	$a$			$b$	
	$f_2$	$f_2'$	$f_2''$	$\frac{T_2}{u_\infty^2/2 C_p}$	$\frac{T_2'}{u_\infty^2/2 C_p}$
0	0	0	3.382	0	5.529
0.2	0.068	0.676	3.381	1.016	4.632
0.4	0.271	1.353	3.380	1.853	3.744
0.6	0.609	2.028	3.378	2.515	2.876
0.8	1.082	2.703	3.369	3.006	2.040
1.0	1.690	3.374	3.278	3.332	1.154
2.0	5.839	3.918	-2.001	1.067	-3.672
3.0	8.745	1.983	-1.624	-0.809	-0.360
4.0	10.038	0.728	-0.877	-0.558	0.510
5.0	10.440	0.174	-0.290	-0.157	0.249
6.0	10.520	0.026	-0.056	-0.023	0.053
7.0	10.531	0.002	-0.006	-0.002	0.006
8.0	10.532	0	0	0	0

The skin friction and heat-transfer coefficients and the displacement thickness are

$$c_f = \frac{0.664 + 6.764 m x - \dots + \dots}{\sqrt{Re_x}}, \quad (20)$$

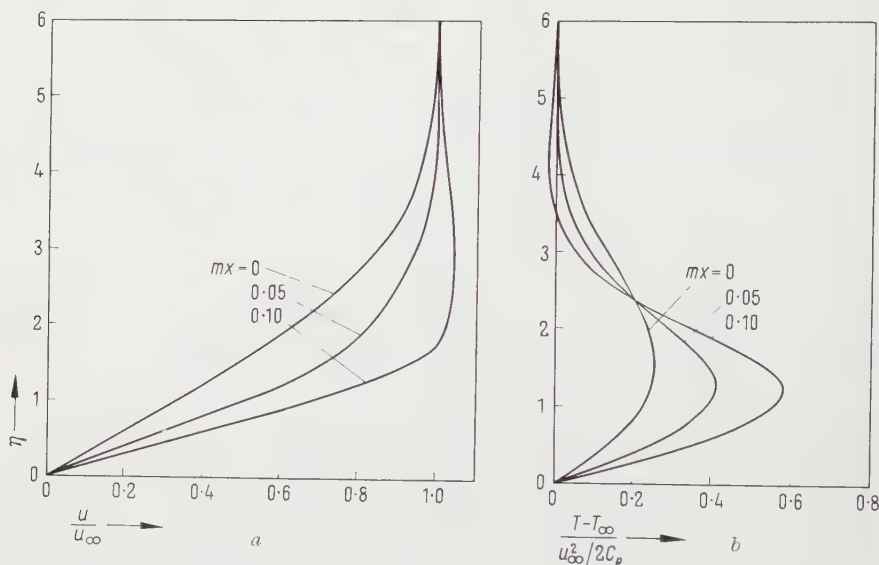


Figure 5

Effect of magnetic field when fixed relative to the fluid far from the plate ( $T_\infty = 300$  K,  $u_\infty^2/2 C_p = 1.85 \times 10^4$  °K).  $a$  velocity profile;  $b$  temperature profile.

$$h = \frac{\rho u_\infty C_p}{2 \sqrt{Re_x}} (0.664 + 11.058 m x - \dots + \dots), \quad (21)$$

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} (1.73 - 10.53 m x + \dots - \dots). \quad (22)$$

The magnetic field changes the skin friction and heat transfer more than in the cases considered in [1]. The reason lies in the values chosen for  $\sigma_0$  and in the high energy of the free stream ( $M \approx 40$ ) which results in a high electrical conductivity in a portion of the boundary layer. As in the previous paper the skin friction and heat transfer are reduced when the magnetic field is fixed relative to the plate and increased when it is fixed relative to the fluid. The sum of the drag due to the viscous and magnetic forces on the fluid, however, exceeds the viscous drag in the nonmagnetic case.

When the magnetic parameter is about 1/10, a sizable effect of the magnetic field will be realized. As a typical case consider a free-stream density of 1/1000 of the sea-level value,  $x$  as 2 m, together with a free-stream Mach number of 40. A magnetic parameter of 1/10 then requires a magnetic field strength of about 7800 G.

## REFERENCES

- [1] VERNON J. ROSSOW, *On Flow of Electrically Conducting Fluids Over a Flat Plate in the Presence of a Transverse Magnetic Field*, NACA TN 3971 (1957).
- [2] F. R. GILMORE, *Equilibrium Composition and Thermodynamic Properties of Air to 24,000 °K*, RM-1543, The RAND Corporation (August 24, 1955).
- [3] SYDNEY CHAPMAN and T. G. COWLING, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 1952).
- [4] L. HOWARTH, *Steady Flow in the Boundary Layer Near the Surface of a Cylinder in a Stream*, R. & M. No. 1632, British A. R. C. (July 1934).
- [5] H. SCHLICHTING, *Grenzschicht-Theorie* (G. Braun, Karlsruhe, Germany, 1951).

*Zusammenfassung*

Der Einfluss eines senkrecht zur Schicht stehenden magnetischen Feldes auf die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in einer Grenzschicht wird für einen Sonderfall der Änderung der elektrischen Leitfähigkeit von Luft untersucht. Die Wirkung des magnetischen Feldes auf den Reibungswiderstand und den Wärmeübergang wird bei relativ zur Platte und zur Flüssigkeit in grosser Entfernung von der Platte festgehaltenem Magnetfeld ermittelt.

(Received: September 6, 1957.)

# Über den Einfluss eines mit der Höhe veränderlichen Windes auf die Flugbahn einer Rakete

VON ERNST ROTH-DESMEULES, Luzern, und RAYMUND SÄNGER, Zürich, Schweiz<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Die Flugbahnen von Raketen unterliegen einer grossen Zahl von Störungen, die zu einer beträchtlichen Streuung der Bahnendpunkte führen. Nur für wenige dieser störenden Einflüsse, insbesondere für die durch den wechselnden Zustand der Atmosphäre bedingten, lassen sich – sobald die Abweichungen vom Normalzustand bekannt sind – zur Kompensation Korrekturen an den Abgangelementen anbringen. Im folgenden soll speziell der Einfluss des Windes – eine der wichtigsten Störungen – auf die Bahn einer Rakete untersucht und gezeigt werden, wie er in der Praxis ausgeschaltet werden kann.

Die Untersuchung bezieht sich auf eine sogenannte Artillerierakete, die auf einem ersten kurzen Teil ihrer Flugbahn – der *Aktivbahn* – durch den durch das verbrennende Treibmittel (Pulver) erzeugten Schub sehr stark beschleunigt wird und alsdann, nach Abschluss des Verbrennungsvorganges, sich im freien Flug – *Passivbahn* – auf das Ziel zu bewegt. Es soll – zur Vereinfachung der Rechnungen – vorausgesetzt werden, dass die Rakete nicht rotiere und durch Leitflächen stabilisiert sei. Die Rotation, und damit die Stabilisierung durch Drall kompliziert die Gleichungen beträchtlich, ohne dass für das vorliegende Problem wesentliche Änderungen auftreten würden.

Die Bestimmung des Windeinflusses auf die Rakete während der aktiven und der passiven Bewegung ist grundsätzlich gleich. Zunächst wird eine geeignete Normalflugbahn berechnet und der Wind als Störung dieser Bahn betrachtet. Dieses Vorgehen erlaubt die zugehörigen Differentialgleichungen zu linearisieren. – Es wird zunächst die Störung der Aktivbahn (Abschnitt 2), dann diejenige der Passivbahn (Abschnitt 3) bestimmt, und schliesslich werden die beiden Einflüsse zusammengesetzt (Abschnitt 4).

## 2. Der Einfluss des Windes auf die Aktivbahn

### 2.1 Allgemeine Gleichungen

Die allgemeine Raketentheorie liefert die zur Berechnung der Flugbahn erforderlichen Differentialgleichungen, nämlich drei Gleichungen für die Bewe-

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

gung des Raketenschwerpunktes und drei Gleichungen für die Bewegung des Raketenkörpers um den Schwerpunkt. Es braucht hier darauf nicht weiter eingegangen zu werden, da hierfür ausführliche Darstellungen existieren [7, 8]<sup>2)</sup>. Zwischen den beiden Gleichungsgruppen besteht eine Kopplung, so dass in Anbetracht des verwickelten Aufbaues eine allgemeine Lösung durch geschlossene Ausdrücke nicht möglich ist; allein umfangreiche numerische Integrationen geben Einblick in den genauen Bewegungsablauf.

Um zu einer übersichtlichen Näherungslösung zu gelangen, die aber doch die Verhältnisse recht gut wiedergibt, können eine Reihe von Vereinfachungen vorgenommen werden.

## 2.2 Kräfte und Momente

Auf die Rakete wirken während des Fluges eine grosse Zahl von Kräften und Momenten, solche, die durch den Verbrennungsvorgang hervorgerufen werden, dann die aerodynamischen und schliesslich die Schwerkraft. Eine eingehende Diskussion der Raketenkräfte geben RANKIN [7] sowie ROSSER [8], und das vollständige System der aerodynamischen Einflüsse untersuchen NIELSEN und SYNGE [6].

Für die vorliegende Untersuchung genügt es, allein die wichtigsten Kräfte und Momente zu berücksichtigen. Es sind dies die folgenden Kräfte:

1. Die *Schubkraft*  $S$ . Diese wird normalerweise als konstant angenommen. Sei  $m$  die Masse der Rakete, dann kann  $S$  mit Hilfe der Schubbeschleunigung  $\gamma$  in der folgenden Weise dargestellt werden

$$S = m \gamma. \quad (2.21)$$

Diese Kraft wirkt in der Richtung der Raketenachse.

2. Der *Luftwiderstand*  $W$ . Für den in der der Geschwindigkeit entgegengesetzten Richtung wirkenden Luftwiderstand gilt der Ansatz

$$W = c_W \frac{\rho}{2} V^2 q, \quad (2.22)$$

wo  $\rho$  die Luftdichte,  $V$  die Raketengeschwindigkeit und  $q$  die Querschnittsfläche der Rakete ist. Der Widerstandskoeffizient  $c_W$  kann noch eine Funktion der Machschen Zahl sein. Im folgenden soll er aber durch einen konstanten Mittelwert ersetzt werden.

3. Der *Auftrieb*  $A$ . Der Auftrieb steht normal zum Luftwiderstand und liegt in der durch die Geschwindigkeit  $V$  und die Raketenachse bestimmten Widerstandsebene. Ist  $\delta$  der Anstellwinkel, dann ist die Grösse von  $A$  gegeben durch

$$A = c_A \frac{\rho}{2} V^2 q \delta. \quad (2.23)$$

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 542.

$c_A$  ist der Auftriebskoeffizient; seine Abhängigkeit von der Machschen Zahl wird vernachlässigt.

4. Das *Gewicht*  $G$ . Das Gewicht ist während der Brenndauer eine Funktion der Zeit:

$$G = m(t) g. \quad (2.24)$$

Man kann es häufig durch einen konstanten Mittelwert ersetzen.

5. Das *Rückstellmoment*  $M$ . In bezug auf eine durch den Raketenschwerpunkt gehende Achse erzeugen der Auftrieb und der Luftwiderstand ein Drehmoment, das genähert durch die Formel

$$M = -c_M \frac{\rho}{2} V^2 q l \delta \quad (2.25)$$

wiedergegeben werden kann.  $l$  ist der Abstand des Druckmittelpunktes vom Schwerpunkt. Befindet sich der Druckmittelpunkt hinter dem Schwerpunkt, dann verkleinert dieses Moment den Anstellwinkel  $\delta$ . Zwischen den in (2.22), (2.23) und (2.25) auftretenden Koeffizienten besteht die genäherte Beziehung

$$c_M = c_W + c_A \cos \delta. \quad (2.26)$$

Die übrigen Kräfte und Momente, die zum Teil nur einen geringen Einfluss haben, zum Teil zahlenmässig nur sehr unvollkommen bekannt sind, sollen vernachlässigt werden. Ebenso sollen auch alle zusätzlichen Kräfte und Momente ausser acht gelassen werden, die durch Ungenauigkeiten in der Herstellung der Raketen hervorgerufen werden (vgl. dazu etwa [8]). Diese Grössen, die zufällige Werte besitzen, bewirken eine Vergrösserung der Streuung der Auftreffpunkte.

### 2.3 Die fiktive Aktivbahn

Wählt man die unter dem Winkel  $\vartheta_0$  gegen die Horizontale geneigte Abschussrichtung als  $x$ -Achse, dann lautet die Differentialgleichung für die Bewegung in dieser Richtung

$$\left. \begin{aligned} \text{oder} \quad m \ddot{x} &= S - m g \sin \vartheta_0 - c_W \frac{\rho}{2} V^2 q \\ \ddot{x} &= \gamma - g \sin \vartheta_0 - \frac{c_W}{m} \cdot \frac{\rho}{2} V^2 q. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Da  $\gamma$  bedeutend grösser ist als die beiden andern Glieder auf der rechten Seite so kann in erster Näherung geschrieben werden

$$\ddot{x} = \gamma. \quad (2.32)$$

Wird die Schubbeschleunigung  $\gamma$  als konstant vorausgesetzt, so ergibt sich



sofort unter Beachtung der Anfangsbedingungen

$$\dot{x} = \gamma t \quad (2.33)$$

und

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2. \quad (2.34)$$

Da, soweit sich dies praktisch überhaupt einhalten lässt, die Schubkraft  $S$  konstant gehalten wird, so bedeutet dies zufolge der Massenabnahme, dass während des Verbrennungsvorganges  $\gamma$  anwächst; andererseits wird auch der Luftwiderstand rasch grösser, so dass sich die beiden Effekte teilweise kompensieren und man um so eher berechtigt ist, die rechte Seite von (2.32) als konstant zu betrachten.

Die durch die Gleichungen (2.32) bis (2.34) definierte ungestörte Normalflugbahn soll als *fiktive Aktivbahn* bezeichnet werden. Sie stellt eine erste Näherung an die tatsächlichen Verhältnisse dar. Die fiktive Aktivbahn soll im konkreten Falle so bestimmt werden, dass sie mit der wirklichen (gemessenen) Bahn bei Brennschluss im Ort  $x$  und in der Geschwindigkeit  $\dot{x}$  übereinstimmt. Daraus kann die Konstante  $\gamma$  sowie die Zeit  $t_B$  des Brennschlusses ermittelt werden (die letzte Grösse  $t_B$  ist sonst nicht eindeutig definiert, da die Verbrennung allmählich aufhört und der Schub nicht augenblicklich null wird). Im weiteren kann aus der messbaren Geschwindigkeit  $\dot{x}_0$  beim Verlassen des Werfers auch eine fiktive Werferlänge berechnet werden. Die fiktive Rakete besitzt damit sowohl zu Beginn als auch am Ende der freien Bewegung dieselbe Geschwindigkeit wie die reale Rakete, ausserdem stimmen zu diesen Zeiten auch die Orte gut überein.

Der Einfluss der Schwerkraft und des Luftwiderstandes in der Gleichung (2.31) lässt sich nachträglich als Störung der fiktiven Aktivbahn berücksichtigen, so dass hier diese Effekte – da nur die Störung durch den Wind interessiert – ausser acht gelassen werden können.

## 2.4. Der Wind

Es soll ein horizontaler Wind  $\vec{w}$  von beliebiger Richtung herrschen. Er kann in zwei Komponenten  $\vec{w}_t$  und  $\vec{w}_n$  zerlegt werden, wobei die erste in Richtung der Flugbahn und die zweite normal dazu liegt.

$$\vec{w} = \vec{w}_t + \vec{w}_n. \quad (2.41)$$

Die *tangentiale* Windkomponente  $\vec{w}_t$  beeinflusst den Luftwiderstand (2.22) und bewirkt damit eine geringe Änderung der Geschwindigkeit und des Ortes bei Brennschluss. Da jedoch die Ungleichheiten im Ablauf des Brennvorganges eine bedeutend grössere Störung der Endgeschwindigkeit auf der Aktivbahn erzeugen, erscheint es nicht als angebracht, den Einfluss von  $\vec{w}_t$  zu berücksich-

tigen; er soll mindestens vorläufig als ein zusätzlicher Beitrag zur allgemeinen Streuung betrachtet werden.

Von ungleich grösserer Bedeutung ist dagegen die zur Bahn *normale* Windkomponente  $\vec{w}_n$ , da sie massgeblich die Anfangsrichtung der Passivbahn und damit sowohl die Schussweite als auch die seitliche Abweichung beeinflusst. Die Komponente  $\vec{w}_n$  rührt sowohl vom Längswind (in bezug auf die Flugbahnebene)  $\vec{w}_l$  als auch vom Querwind  $\vec{w}_q$  her. Ist  $\vartheta_0$  der Abschusswinkel, dann folgt für die Normalkomponente  $\vec{w}_l$  des Längswindes  $\vec{w}_h$

$$w_l = w_h \sin \vartheta_0. \quad (2.42)$$

Es gilt die Zerlegung

$$\vec{w}_n = \vec{w}_l + \vec{w}_q. \quad (2.43)$$

Der Querwind  $\vec{w}_q$  geht direkt in die Rechnung ein.

### 2.5 Die Störungsdifferentialgleichungen

Unter der Voraussetzung, dass die fiktive Aktivbahn die ungestörte Normalflugbahn sei, bleiben noch die Differentialgleichungen für die Pendelungen der Rakete um den Schwerpunkt und die dadurch bewirkte Störung (unter Berücksichtigung des Windes) für die Bahn des Schwerpunktes. Diese Gleichungen sollen hier direkt in der linearisierten Form angegeben werden.

Zur Ableitung der gesuchten Gleichungen sei um den Raketenschwerpunkt eine Kugel vom Radius 1 gelegt. Im Durchstosspunkt  $T$  der Flugbahntangente wird die Tangentialebene bestimmt und in dieser ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  gewählt, wie es die Figur 1 zeigt, wobei die  $\xi$ -Achse horizontal liegt<sup>3)</sup>. Die Richtung der Raketenachse sei durch den Vektor  $(\xi, \eta)$  gegeben, die Geschwindigkeit des Schwerpunktes infolge des Windeinflusses (normal zur Flugbahntangente der fiktiven Bahn) durch  $(u, v)$ , und schliesslich sei der Windvektor  $(w_q, w_l)$ . Formuliert man nun die Newtonschen Bewegungsgleichungen sowie den Drallsatz, dann ergibt sich mit den obigen Bezeichnungen unter Einführung der Kräfte (2.21), (2.23) und dem Moment (2.25) schliesslich das folgende System von Differentialgleichungen für die drallfreie Rakete

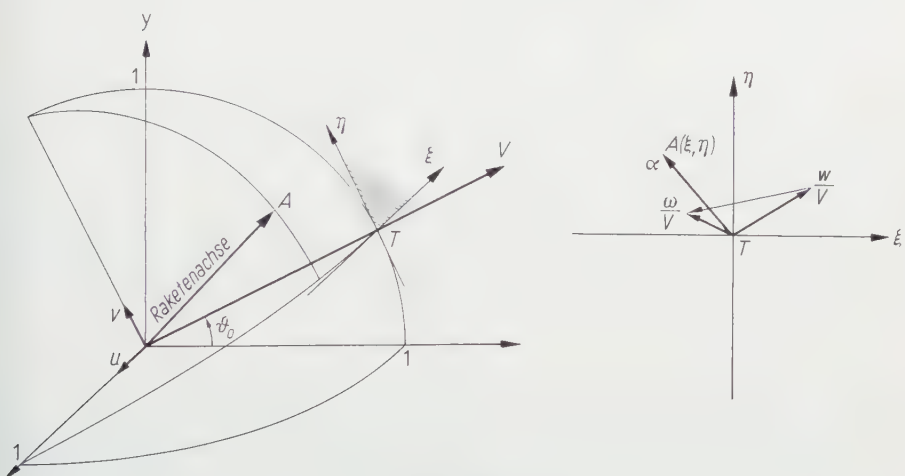
$$\left. \begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{c_A q}{m} \cdot \frac{q}{2} V^2 \left( \xi - \frac{u - w_q}{V} \right) + \gamma \xi, \\ \ddot{v} &= \frac{c_A q}{m} \cdot \frac{q}{2} V^2 \left( \eta - \frac{v - w_l}{V} \right) + \gamma \eta, \\ -B \ddot{\eta} &= c_A q l \frac{q}{2} V^2 \left( \eta - \frac{v - w_l}{V} \right), \\ +B \ddot{\xi} &= -c_A q l \frac{q}{2} V^2 \left( \xi - \frac{u - w_q}{V} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

<sup>3)</sup> Dadurch, dass die Gleichungen für das ebene  $(\xi, \eta)$ -System aufgeschrieben werden, ergibt sich gerade die Linearisierung der allgemeinen Gleichungen.

Hier bedeutet  $B$  das Trägheitsmoment der Rakete in bezug auf eine Querachse durch den Schwerpunkt<sup>4)</sup>.

Das System (2.51) lässt sich zunächst durch Einführung komplexer Grössen reduzieren auf zwei Gleichungen<sup>5)</sup>. Es sei

$$u + i v = \omega, \quad \xi + i \eta = \alpha, \quad w_a + i w_t = w. \tag{2.52}$$



Figur 1  
Koordinatensystem.

Wird die zweite und die dritte Gleichung des Systems (2.51) mit  $i$  multipliziert und dann die ersten beiden sowie die letzten zwei Gleichungen addiert, so folgt wegen (2.52)

$$\dot{\omega} = \frac{c_A}{m} q \frac{\rho}{2} V^2 \left[ \alpha - \frac{\omega - w}{V} \right] + \gamma \alpha, \tag{2.53}$$

$$\ddot{\alpha} = - \frac{c_A}{B} q l \frac{\rho}{2} V^2 \left[ \alpha - \frac{\omega - w}{V} \right]. \tag{2.54}$$

Es sei noch zur Abkürzung gesetzt

$$Q = \frac{c_A q \rho}{2 m}, \quad R = \frac{c_A q l \rho}{2 B}. \tag{2.55}$$

Mit der neuen Variablen

$$\delta = \gamma t \alpha - \omega \tag{2.56}$$

<sup>4)</sup> Für den zweidimensionalen Fall vergleiche [4], für den dreidimensionalen [2].  
<sup>5)</sup> Das ist deshalb möglich, weil die Bewegungsgleichungen für die Bewegung in der vertikalen Ebene durch die Normalflugbahn und  $\eta$ -Achse sowie in der durch die Normalflugbahn und die  $\xi$ -Achse bestimmten Ebene auf Grund der gemachten Annahmen analog sind.

können nun die beiden Gleichungen (2.53) und (2.54) nach einigen Rechnungen auf eine einzige Differentialgleichung zurückgeführt werden:

$$\ddot{\delta} + \left( Q \gamma t + \frac{1}{t} \right) \dot{\delta} + R \gamma^2 t^2 \delta = -R \gamma^2 t^2 w. \quad (2.57)$$

Wird schliesslich noch anstelle der Zeit  $t$  der von der Rakete auf der ungestörten Flugbahn zurückgelegte Weg  $x$  gemäss der Gleichung (2.34)

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2$$

als neue unabhängige Variable eingeführt, so ergibt sich nach etlichen Zwischenrechnungen

$$\delta'' + Q \delta' + R \delta = -R w, \quad (2.58)$$

wo die Striche Ableitungen nach  $x$  bedeuten. Dies ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung demzufolge leicht angegeben werden kann<sup>6)</sup>.

## 2.6 Lösung für die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\omega$

Für die Bestimmung des Windeinflusses interessiert in erster Linie die zur Flugbahntangente normale, gestörte Geschwindigkeit  $\omega$  des Schwerpunktes, da dadurch zusammen mit der Endgeschwindigkeit der Rakete auf der Aktivbahn die Anfangsrichtung der Passivbahn festgelegt wird. Der Ort des Schwerpunktes kann daraus für die Zeit des Brennschlusses durch eine Quadratur berechnet werden; doch spielt diese geringfügige Abweichung praktisch keine Rolle.

Ist  $\delta$  aus der Differentialgleichung (2.58) bekannt, so folgt wegen (2.53) und (2.56) die Schwerpunktsgeschwindigkeit  $\omega$  aus der Differentialgleichung

$$\dot{\omega} - \frac{1}{t} \omega = \left( Q \gamma t + \frac{1}{t} \right) \delta + Q \gamma t w, \quad (2.61)$$

deren Lösung lautet

$$\omega = t \int_{t_0}^t \left( Q \gamma + \frac{1}{t^2} \right) \delta dt + Q \gamma t^2 w. \quad (2.62)$$

Ohne Einzelheiten der Zwischenrechnung anzuführen, sei die allgemeine Lösung für  $\omega$  wiedergegeben. Sie ergibt sich aus

$$\omega = J t w, \quad (2.63)$$

<sup>6)</sup> HÖSLI [4] erhält eine Besselsche Differentialgleichung der Ordnung  $1/2$ , die sich nach bekannten Beziehungen mittels trigonometrischer Funktionen lösen lässt.

wo  $J$  den folgenden Ausdruck bedeutet

$$\left. \begin{aligned} \frac{J}{\sqrt{\mu \gamma/2}} = & \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{e^{-k(z-z_0)}}{\sqrt{z}} \cdot \frac{\cos(z-z_0+k)}{\cos k} \\ & + e^{kz_0} \left\{ \left[ \frac{Q}{\mu} \cdot \frac{\sin(z_0-k)}{\cos k} - \frac{\cos(z_0-2k)}{\cos^2 k} \right] \mathcal{S} \right. \\ & \left. + \left[ \frac{Q}{\mu} \cdot \frac{\cos(z_0-k)}{\cos k} + \frac{\sin(z_0-2k)}{\cos^2 k} \right] \mathcal{C} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

wobei noch folgende Abkürzungen verwendet wurden

$$\lambda = \frac{Q}{2}, \quad \mu = \sqrt{R - \frac{Q^2}{4}}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\mu}, \quad k = \arctg \kappa, \quad z = \mu \frac{\gamma}{2} t^2. \quad (2.65)$$

Die Funktionen  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{C}$  sind Verallgemeinerungen der Fresnelschen Integrale und ergeben sich als Imaginärteil und Realteil des Integrals

$$\mathcal{C} + i \mathcal{S} = \int_{z_0}^z z^{-1/2} e^{-(k-i)z} dz. \quad (2.66)$$

Für die üblichen Raketenmodelle zeigt es sich, dass der Auftrieb keinen sehr grossen Einfluss hat (vgl. auch [2, 4]). Vernachlässigt man ihn, behält dagegen das Rückstellmoment bei, dann lässt sich die Lösung stark vereinfachen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{w} = & \left[ 1 - \cos \mu \frac{\gamma}{2} (t^2 - t_0^2) \right] \\ & + t \sqrt{\pi \mu \gamma} \left[ \sin \mu \frac{\gamma}{2} t_0^2 (C(u) - C(u_0)) - \cos \mu \frac{\gamma}{2} t_0^2 (S(u) - S(u_0)) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

Hier bezeichnet  $t_0$  die Zeit des Einsatzes des Windes, im allgemeinen also die Zeit, zu der die Rakete den Werfer verlässt, und  $C(u)$  bzw.  $S(u)$  sind die Fresnelschen Integrale<sup>7)</sup>.

## 2.7 Störung des Neigungswinkels. Numerisches Beispiel

Die am Ende der Aktivbahn erreichte Normalgeschwindigkeit  $\omega$  des Schwerpunktes bestimmt zusammen mit der Endgeschwindigkeit  $V$  die Störung der «Abschussrichtung» der Passivbahn. Es gilt

$$\Delta \vartheta = \frac{\omega}{V}, \quad (2.71)$$

wo  $\Delta \vartheta$  ein komplexer Winkel ist, dessen Realteil die seitliche Abweichung  $\varphi$  zufolge eines Querwindes  $w_q$ , der Imaginärteil die durch den Längswind  $w_l$

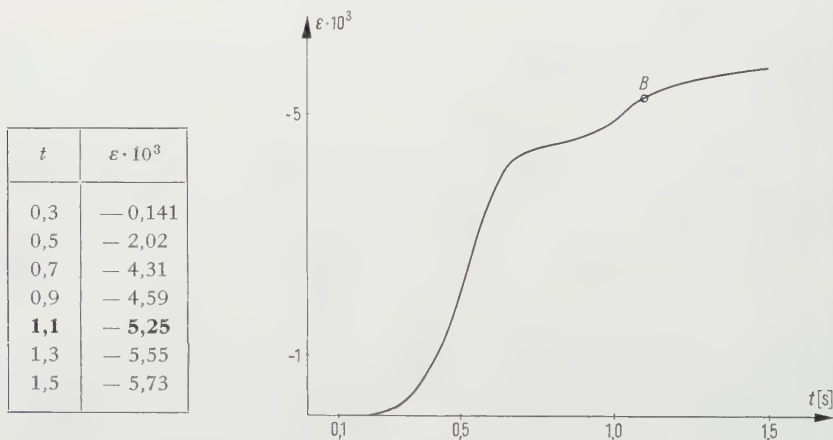
<sup>7)</sup> Vgl. [5], S. 34.

bewirkte Neigungsstörung  $\varepsilon$  ergibt. Man erhält die Beziehungen

$$\varphi = \frac{u}{V \cos \vartheta_0}, \quad \varepsilon = \frac{v}{V}. \quad (2.72)$$

*Numerisches Beispiel.* Um eine Idee von der Grössenordnung des Windeinflusses zu geben, sei eine Rakete betrachtet, zu der die folgenden Daten gehören.

$$\gamma = 450 \text{ m s}^{-2}, \quad \mu = 0,046 \text{ m}^{-1}, \quad t_0 = 0,19 \text{ s}, \quad t = 1,10 \text{ s}, \quad \vartheta_0 = 35^\circ. \quad (2.73)$$



Figur 2

Die Störung  $\varepsilon$  als Funktion der Zeit  $t$ . B Brennschluss.

Die Neigungsstörung  $\varepsilon$  folgt aus den Beziehungen (2.67) und (2.72). Es ergibt sich die folgende mit  $w_t = 1 \text{ m s}^{-1}$  berechnete Tabelle<sup>8)</sup>. Der Verlauf des Winkels  $\varepsilon$  ist ferner in der Figur 2 graphisch dargestellt.

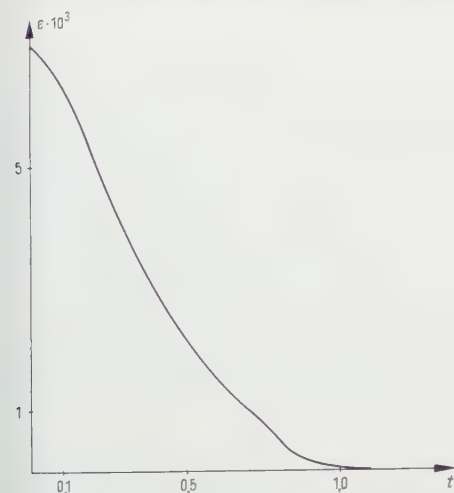
## 2.8 Ballistischer Wind für die Aktivbahn

Die Überlegungen der vorhergehenden Abschnitte gelten für den Fall eines homogenen, mit der Höhe unveränderlichen Windes. Ist dagegen der Windvektor  $\vec{w}$  eine Funktion der Höhe – wie dies praktisch immer der Fall ist –, dann lässt sich der Einfluss des variablen Windes ersetzen durch den sogenannten ballistischen Wind; dies ist definitionsgemäss ein fiktiver, konstanter Wind, der dieselbe Wirkung besitzt wie der variable Wind. Wie es in der Ballistik üblich ist, besteht die Möglichkeit, den Einfluss des Windes schichtweise zu erfassen; das Gewicht einer Schicht, die von  $y$  bis  $y + \Delta y$  reicht,

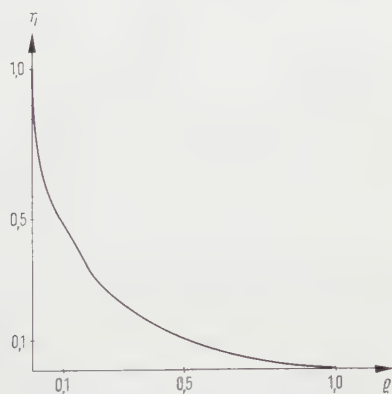
<sup>8)</sup> Der fettgedruckte Wert gilt für die Zeit des Brennschlusses. Die folgenden Werte wurden berechnet unter der Annahme, dass der Schub weiter wirksam sei.



kann in erster Näherung erhalten werden, indem man annimmt, dass der Wind einmal von der Höhe  $y$  bis zum Endpunkt der Aktivbahn, dann erst von der Höhe  $y + \Delta y$  an wirksam ist; bildet man die Differenz der beiden Einflüsse, dann ergibt sich das gesuchte Gewicht. Die Figur 3 zeigt die zum Beispiel von Abschnitt 2.7 gehörende Garniersche Einflusslinie. In der Figur 4 ist diese Funktion noch normiert worden und als Funktion der Höhe dargestellt. Man erkennt sofort, dass die unterste Schicht bis zu  $1/10$  der Höhe bereits 50% des



Figur 3



Figur 4

Figur 3: Garniersche Einflusslinie für den Einfluss der normalen Windkomponente auf die Aktivbahn.  
Figur 4: Normierte Einflusslinie als Funktion der Höhe.

Einflusses ausmacht. Andere Beispiele ergeben ähnliche Werte. Dies ist insofern von praktischer Bedeutung, als es für die geringen, für die Aktivbahn in Betracht kommenden Höhen – es handelt sich um 100–400 m – mit den üblichen Mitteln (Radiosonde) nicht ohne weiteres möglich ist, den Verlauf des Windes mit der Höhe festzustellen, und ausserdem ist auch die zeitliche Abhängigkeit ziemlich ausgeprägt. Man wird deshalb berechtigt sein, in der Praxis den bodennahen Wind direkt als ballistischen Wind der Aktivbahn zu betrachten.

### 3. Der Einfluss des Windes auf die Passivbahn

#### 3.1 Allgemeines

Auf der Passivbahn verhält sich die Rakete wie ein gewöhnliches Artilleriegeschoss, so dass die für ein solches gültigen Überlegungen übernommen werden können. Die passive Normalflugbahn darf damit als Bahn eines Massenpunktes

betrachtet und berechnet werden<sup>9)</sup>. Der Einfluss des Längswindes lässt sich dann, wie mit Hilfe eines mit dem Winde bewegten Koordinatensystems gezeigt werden kann, auf eine Änderung der Anfangsgeschwindigkeit und des Abschusswinkels zurückführen. Geringe Abweichungen von diesen Ergebnissen sind möglich im Falle, wo die Rakete zusätzliche Stabilisierungsflächen aufweist. Darauf soll aber im folgenden nicht eingegangen werden.

### 3.2 Die Normalflugbahn

Um einen ersten Überblick über die Verhältnisse auf der Passivbahn zu erhalten, soll diese durch leicht auswertbare analytische Ausdrücke approximiert werden. Zu diesem Zwecke wurde die im Luftwiderstandsgesetz auftretende Dichte  $\varrho$  als konstant betrachtet, was im Falle geringer Scheitelhöhen nicht allzuweit von der Wirklichkeit entfernt ist. Im weiteren soll die Abhängigkeit des Widerstandskoeffizienten von der Machschen Zahl vernachlässigt werden (ein Vorgehen, das sicher im Bereich, wo die Raketengeschwindigkeit in der Nähe der Schallgeschwindigkeit liegt, diskutabel ist) und ein Mittelwert gewählt werden, der ungefähr die tatsächliche Schussweite ergibt. Mit diesen Vereinfachungen folgt für den Luftwiderstand eine rein quadratische Abhängigkeit von der Raketengeschwindigkeit und der Ausdruck (2.22) im Abschnitt 2.2 nimmt die einfache Gestalt

$$W = c V^2 \quad (3.21)$$

an. In diesem Falle ergeben sich die Flugbahnelemente durch elementare Rechnungen<sup>10)</sup>

$$\left. \begin{aligned} V^2 &= \frac{1}{\cos^2 \vartheta_0 \frac{2c}{g} [C - \xi_2(\vartheta)]}, & x &= -\frac{1}{g} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} V^2 d\vartheta, \\ y &= -\frac{1}{g} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} V^2 \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta, & t &= -\frac{1}{g} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{V}{\cos \vartheta} d\vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

wo die Funktion  $\xi_2(\vartheta)$  die folgende Form hat:

$$\xi_2(\vartheta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \vartheta} + \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \quad (3.23)$$

und die Konstante

$$C = \frac{g}{2c V_0^2 \cos^2 \vartheta_0} + \xi_2(\vartheta_0)$$

ist. Die Flugbahnelemente können somit durch einfache Quadraturen, etwa mit Hilfe der Simpsonschen Regel, erhalten werden.

<sup>9)</sup> Vgl. [1] und [3].

<sup>10)</sup> Vgl. [1], S. 106.

### 3.3 Der Einfluss eines konstanten Längswindes

Der Einfluss des Längswindes kann als eine Störung der Anfangselemente  $V_0$  und  $\vartheta_0$  betrachtet werden, wobei die Beziehungen<sup>11)</sup>

$$\Delta V_0 = -\frac{w_h}{V_0} \cos \vartheta_0, \quad \Delta \vartheta_0 = +\frac{w_h}{V_0} \sin \vartheta_0. \quad (3.31)$$

gelten. Daraus berechnet sich die Änderung der Schussweite mit Hilfe der Formel

$$\Delta X = X_w - X_n = w_h \left( t_r - \frac{\partial X_n}{\partial V_0} \cos \vartheta_0 + \frac{\partial X_n}{\partial \vartheta_0} \cdot \frac{\sin \vartheta_0}{V_0} \right), \quad (3.32)$$

wo  $X_w$  die gestörte,  $X_n$  die ungestörte Schussweite bedeuten. Um die Koeffizienten  $\partial X_n / \partial V_0$  und  $\partial X_n / \partial \vartheta_0$  zu erhalten, können Flugbahnen mit geeigneten Störungen  $\Delta V_0$  und  $\Delta \vartheta_0$  der Anfangsgeschwindigkeit und des Abschusswinkels nach den Formeln (3.22) berechnet werden.

Für das Beispiel im Abschnitt 2.7 ergibt sich für einen Längswind von  $+w_h$  die Störung in der Schussweite  $X$

$$\Delta X = +29,6 \text{ s } w_h. \quad (3.33)$$

Um diese Störung zu kompensieren, muss am Neigungswinkel eine Korrektur

$$\Delta \vartheta_0 = -0,0167 \text{ s } m^{-1} w_h \quad (3.34)$$

angebracht werden.

### 3.4 Der Einfluss eines konstanten Querwindes

Die durch einen Querwind bewirkte seitliche Abtrift eines Geschosses oder einer Rakete ergibt sich aus der Beziehung<sup>12)</sup>

$$Z = w_q \left[ (t - t_v) - \frac{x - x_v}{\dot{x}_v} \right], \quad (3.41)$$

wo  $t_v$  die Zeit des Einsatzes des Windes bedeutet, der bis zur Zeit  $t$  herrschen soll<sup>13)</sup>.

Die durch einen homogenen Querwind von 1 m/s Stärke bewirkte Abweichung ergibt sich für das Beispiel in 2.7 zu

$$\varphi_p = \frac{Z}{x} = 0,00221. \quad (3.42)$$

<sup>11)</sup> Vgl. [1], S. 214.

<sup>12)</sup> Dies ist eine Verallgemeinerung der Formel (232a) in [1].

<sup>13)</sup> Mit Hilfe dieser Formel kann leicht die zur Bestimmung des ballistischen Windes erforderliche Garniersche Einflusslinie erhalten werden. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, sei festgehalten, dass sich diese ausgezeichnet durch eine quadratische Funktion approximieren lässt.

### 3.5 Der ballistische Wind für die Passivbahn

Auf Grund der gemachten Annahmen kann für den Fall eines mit der Höhe veränderlichen Windes für die Passivbahn der ballistische Wind – und zwar sowohl für den Längs- als auch für den Querwind – entsprechend den für Artillerieschosse gültigen Grundsätzen bestimmt werden<sup>14)</sup>. Dieser Wind werde mit

$$\vec{w}_p^b = \sum_1^n p_i \vec{w}_i \quad (3.51)$$

bezeichnet, wo die  $p_i$  die den einzelnen Zonen zugehörigen Gewichte bedeuten.

## 4. Der ballistische Wind für die Gesamtflugbahn

Nachdem nun der Einfluss des Windes sowohl für die Aktiv- als auch für die Passivbahn ermittelt worden ist, können die beiden Einwirkungen so miteinander verbunden werden, dass gesamthaft jene an den Abgangelementen anzubringenden Korrekturen bestimmt werden können, die dazu führen, dass die Rakete trotz des Windes ihr vorgeschriebenes Ziel erreicht. Die Besonderheiten der Raketenflugbahn bringen es mit sich, dass die Einflüsse von Längs- und Querwind verschieden sind, so dass dementsprechend zwei verschiedene ballistische Winde eingeführt werden müssen, einer für den Längswind, einer für den Querwind.

Im folgenden sei der gemäss Abschnitt 2.8 der Grösse und Richtung nach bestimmte ballistische Wind für die Aktivbahn mit  $\vec{w}_a^b$  und der aus 3.5 folgende ballistische Wind für die Passivbahn mit  $\vec{w}_p^b$  bezeichnet.

### 4.1 Ballistischer Querwind für die Gesamtflugbahn

Im Falle eines Querwindes von der Stärke 1 m/s werden entsprechend den Ergebnissen der Abschnitte 2.7 und 3.4 für die beiden Bahnteile die folgenden Abweichungen nach der Seite erhalten.

$$\text{Aktivbahn} \quad \varphi_a = -0,00641,$$

$$\text{Passivbahn} \quad \varphi_p = +0,00221.$$

Daraus ergibt sich also für das Verhältnis

$$\frac{\varphi_a}{\varphi_p} = -2,90. \quad (4.11)$$

Andere durchgerechnete Beispiele mit andern Schussdistanzen liefern ganz ähnliche Werte. Wählt man für die Praxis den abgerundeten Wert  $-3$ , so

<sup>14)</sup> Vgl. [9], 8. Kapitel.

folgt schliesslich für den ballistischen Querwind der Gesamtflugbahn

$$w_{\perp}^b = w_{\perp p}^b - 3 w_{\perp a}^b. \quad (4.12)$$

Hierin bedeutet  $w_{\perp p}^b$  bzw.  $w_{\perp a}^b$  die zur Flugrichtung normale Komponente des ballistischen Windes  $\vec{w}_p^b$  bzw.  $\vec{w}_a^b$ .

#### 4.2 Der ballistische Längswind für die Gesamtflugbahn

Für einen Längswind von  $w_h = 1 \text{ m/s}$  ergeben sich für das Beispiel ( $\vartheta_0 = 35^\circ$ ) nach 2,7 bzw. 3,3 die folgenden Abweichungen des Abgangswinkels

$$\text{Aktivbahn} \quad \Delta\vartheta_a^* = 0,00303,$$

$$\text{Passivbahn} \quad \Delta\vartheta_p = 0,0167.$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{\Delta\vartheta_a^*}{\Delta\vartheta_p} = 0,180 \approx 0,2. \quad (4.21)$$

Somit erhält man – mit den leicht verständlichen Symbolen – für den ballistischen Längswind der Gesamtflugbahn die Formel

$$w^b = w_p^b + \frac{1}{5} w_a^b. \quad (4.22)$$

### 5. Schlussbemerkungen

Die in den Formeln (4.12) und (4.22) auftretenden Koeffizienten  $-3$  und  $+1/5$  sind natürlich in einem gewissen Masse vom gewählten Luftwiderstandsgesetz (2.22) bzw. (3.21) abhängig. Ausserdem besteht noch eine Abhängigkeit dieser Werte vom Abschusswinkel  $\vartheta_0$ . Dies wird besonders für den Koeffizienten  $1/5$  im Falle des Längswindes zutreffen. Das Beispiel 2.7 bezieht sich auf einen Abschusswinkel von  $35^\circ$ , also einen ziemlich grossen Winkel, für den die Neigungsänderungen  $\Delta\vartheta_0$  bereits keinen sehr grossen Einfluss auf die Schussweite mehr haben, was natürlich im Korrekturwert zum Ausdruck kommt.

Man wird also eine gewisse Abhängigkeit der berechneten Gewichtskoeffizienten vom Abschusswinkel zu erwarten haben, so dass allgemeiner gesetzt werden kann

$$w_{\perp}^b = w_{\perp p}^b - a(\vartheta_0) w_{\perp a}^b, \quad w_{\parallel}^b = w_{\parallel p}^b + b(\vartheta_0) w_{\parallel a}^b. \quad (5.1)$$

Liegt der Bereich des Winkels  $\vartheta_0$  in verhältnismässig engen Grenzen, so wird man mit einem konstanten Mittelwert der Gewichtskoeffizienten auskommen können.

In der vorliegenden Arbeit handelte es sich in erster Linie darum, die grundsätzliche Seite der Frage einer Korrektur des Windeinflusses auf eine Rakete zu untersuchen. Für die praktische Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens wird man die Gewichtskoeffizienten in (5.1) auf Grund einer strengen Rechnung – unter Berücksichtigung des exakten Luftwiderstandsgesetzes – noch näher bestimmen müssen. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass der Einfluss des Windes auf die gesamte Flugbahn einer Rakete durch einen ballistischen Wind – unterschiedlich für Längs- und Querwind – erfasst werden kann, der sich durch Beziehungen der Form (5.1) ausdrücken lässt. Es ist daher möglich, die Wirkung eines mit der Höhe veränderlichen Windes durch entsprechende Korrekturen der Abschusselemente auszuschalten.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. ATHEN, *Ballistik* (Leipzig 1941).
- [2] P. CARRIÈRE, *Perturbations balistiques d'un projectile autopropulsé*, Mém. Art. franç. 25, 253–360 (1951).
- [3] C. CRANZ, *Lehrbuch der Ballistik*, Bd. 1, 5. Aufl. (Berlin 1925).
- [4] H. HÖSLI, *Störungen des Raketenfluges durch Windeinwirkung und verwandte Einflüsse*, Flugw. u. Techn. 8, 177 (1952).
- [5] E. JAHNKE und F. EMDE, *Tables of Functions* (New York 1945).
- [6] K. L. NIELSEN und J. L. SYNGE, *On the Motion of a Spinning Shell*, Quart. appl. Math. 4, 201–226 (1946).
- [7] R. A. RANKIN, *The Mathematical Theory of the Motion of Rotated and Unrotated Rockets*, Phil. Trans. [A] 241, 457–585 (1949).
- [8] J. B. ROSSER, R. R. NEWTON und G. L. GROSS, *Mathematical Theory of Rocket Flight* (New York 1947).
- [9] R. SÄNGER, *Ballistische Störungstheorie* (Basel 1949).

#### Summary

The present investigation deals with the influence on the trajectory of an artillery rocket of a wind variable in height. Under certain simplified conditions the effect is computed for the active and passive trajectory and it is shown how the two components can be combined into a single ballistic wind by means of suitable weight factors, into a wind, however, which must be defined differently for the longitudinal and the transverse directions.

(Eingegangen: 5. Oktober 1957.)



## On the Viscous Core of a Line Vortex

By NICHOLAS ROTT, Ithaca, New York, USA<sup>1)</sup>

In his paper *Über exakte Lösungen der Stokes-Navier-Gleichungen inkompressibler Flüssigkeiten bei veränderten Grenzbedingungen* [1<sup>2)</sup>] ACKERET revitalized the interest in an important group of exact solutions of the Navier-Stokes equations. Here, a solution will be given which also belongs to this family.

In a system of cylindrical polar coordinates  $r, \theta, z$ , where the velocity components are  $u$  (radial),  $v$  (circumferential) and  $w$  (vertical), consider the following (infinite) flow field of an incompressible fluid:

$$u = -a r, \quad w = 2 a z, \quad v = \frac{\Gamma_{\infty}}{2 \pi r}. \quad (1)$$

This field is easily recognized as a potential flow, and thereby as an exact solution of the Navier-Stokes equations, with the following interpretation:  $u$  and  $w$  are components of an axisymmetric stagnation-point flow; if the velocity gradient  $a$  in (1) is positive, the radial flow is directed inward, toward the  $z$ -axis. Superimposed is a potential vortex with the circulation  $\Gamma_{\infty}$ , centered around the  $z$ -axis.

The solution (1) is unsatisfactory as a solution of the Navier-Stokes equations, as  $v$  becomes infinite at  $r = 0$ . A new solution will be sought, in which this shortcoming is removed; if  $v$  is assumed to be some unknown function of  $r$ , the Navier-Stokes equations might lead to a new solution which is regular.

For the sake of greater generality,  $v$  will be taken as a function not only of  $r$  but also of the time  $t$ . Thus, the following type of flow field will be considered:

$$u = -a r, \quad w = 2 a z, \quad v = v(r, t). \quad (2)$$

Continuity is satisfied, and introduction into the Navier-Stokes equations [2] gives, in the  $r$ -direction:

$$a^2 r - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (3)$$

in the  $z$ -direction:

$$4 a^2 z = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Cornell University.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 553.

and in the  $\theta$ -direction:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a r \left( \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) = v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right). \quad (5)$$

From equations (3) and (4) the pressure can be written in the form

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2} (a^2 r^2 + 4 a^2 z^2) + p_r(r, t), \quad (6)$$

where

$$\frac{\partial p_r}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} \quad (7)$$

represents the superimposed pressure effect of the 'circulatory' motion; this quantity will be found later.

Equation (5) determines  $v$ ; it is advantageous to consider the quantity

$$\Gamma(r, t) = 2 \pi r v(r, t), \quad (8)$$

which substituted into equation (5) gives

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - a r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = v \left[ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right]. \quad (9)$$

Evidently,  $\Gamma = \text{const} = \Gamma_\infty$  is a trivial solution of equation (9), yielding the solution (1). Further solutions of this equation will be sought, first in the steady case.

If  $\partial \Gamma / \partial t = 0$ , elementary integration yields

$$\Gamma = A + B e^{-a r^2 / 2 v},$$

where  $A$  and  $B$  are constants. A solution is sought which is regular for  $r = 0$ ; thus, let

$$A = -B \equiv \Gamma_\infty,$$

so that the solution is

$$\Gamma = \Gamma_\infty (1 - e^{-a r^2 / 2 v}) \quad (10)$$

and

$$v = \frac{\Gamma_\infty}{2 \pi r} (1 - e^{-a r^2 / 2 v}). \quad (11)$$

This remarkable result can be compared with the well-known unsteady solution (due to OSEEN, 1911) of equation (9) for the case of no stagnation-point flow i. e.,  $a = 0$ :

$$v = \frac{\Gamma_\infty}{2 \pi r} (1 - e^{-r^2 / 4 v t}). \quad (12)$$

It is seen that the steady  $v$ -distribution (11) is the same as (12), only 'frozen' at a time  $t = (2 a)^{-1}$ .

The physical interpretation for the steady solution (11) is the following: while the vortex tends to decay, the 'onrushing' stagnation point flow carries new circulation from infinity towards the axis; in equilibrium, a 'viscous radius',  $r^*$  is found which is determined by the kinematic viscosity  $\nu$  and the 'inflow-gradient'  $a$ :

$$r^* = \sqrt{\frac{2\nu}{a}}. \quad (13)$$

If  $r \gg r^*$ , the solution (11) reduces to the potential flow, equation (1). Only for  $r$  comparable to  $r^*$  is the viscous effect felt, and as  $r \rightarrow 0$ , rigid rotation is found. It is clear that  $a > 0$ , i. e., the inward direction of the stagnation point flow, is essential for the existence of this solution.

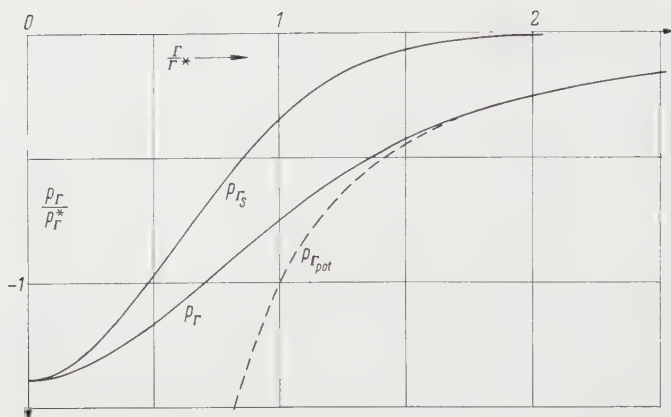
So far, all results were exact solutions of the Navier-Stokes equations. While this is gratifying, the very special assumptions on the flow geometry, namely, a stagnation-point flow extending to infinity, is of little practical interest. However, it was found that the viscous effect is restricted to a cylinder of the radius of the order  $r^*$ ; thus, the solution (11) will be applied, in the sense of the boundary-layer approximations, to the core of any vortex aligned with an axisymmetric stagnation point, whatever the flow at infinity may be. It can be verified *a posteriori* whether inside the viscous core the 'inflow-gradient' remains sufficiently constant. Note that also in reality, the axis of the vortex will always be *exactly* aligned with the axis of the stagnation point flow, as a consequence of the Helmholtz-Kelvin vortex laws: the circulation is 'brought in' from infinity by the flow, and no 'material' line surrounding the axis can ever cross it. The solution will be applied, in an approximate way, even to cases where the axis is not perfectly straight, or when the inflow-gradient  $a$  is a slowly varying function of  $z$  along the axis.

In this sense, the solution (11) will be used for discussion of phenomena like the bathtub vortex, tornadoes, etc. The result for viscous flow, in contrast to the potential solution (1), provides a 'cutoff' in the center of the core, yielding a finite pressure. The pressure due to the viscous vortex,  $p_r$ , which is superimposed onto the potential flow pressure field without the vortex, is calculated from equation (7). Introducing  $v$  from equation (11), and by use of the variable

$$\chi = \frac{a r^2}{2\nu} = \frac{r^2}{r^{*2}} \quad (14)$$

$p_r$  is given by the following expression:

$$p_r = -\frac{\rho \Gamma_\infty^2 a}{16 \pi^2 \nu} \int_\chi^\infty \left( \frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^2 dx. \quad (15)$$



The radial distribution of the pressure  $p_r$  in the core of a viscous vortex. Also plotted is the stagnation pressure  $p_{r_s}$  and the pressure distribution in an inviscid vortex,  $p_{r_{pot}}$ . The reference pressure is  $p_r^* = \rho \Gamma_\infty^2 / 8 \pi^2 r^{*2}$ .

Partial integration permits splitting this expression in two parts:

$$p_r = p_{r_d} + p_{r_s}, \quad (16)$$

where

$$p_{r_d} = -\frac{\rho \Gamma_\infty^2 a}{16 \pi^2 \nu} \cdot \frac{(1 - e^{-x})^2}{x} = -\frac{1}{2} \rho v^2 \quad (17)$$

is the dynamic pressure due to the velocity  $v$  given by equation (11), and

$$p_{r_s} = -\frac{\rho \Gamma_\infty^2 a}{8 \pi^2 \nu} \left\{ \int_x^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} - \int_x^\infty e^{-2x} \frac{dx}{x} \right\} \quad (18)$$

represents the change in stagnation pressure, or the change of the Bernoulli constant due to viscous effects. Numerical values of  $p_{r_s}$  are found with the help of the tabulated 'exponential integral'. Curves showing  $p_r$  and  $p_{r_s}$  are plotted in the figure, together with the 'potential' value of  $p_r$  which would follow from equation (1):

$$p_{r_{pot}} = -\frac{\rho \Gamma_\infty^2}{8 \pi^2 r^2} = -\frac{\rho \Gamma_\infty^2}{8 \pi^2 r^{*2} x} = -\frac{\rho \Gamma_\infty^2 a}{16 \pi^2 \nu x}. \quad (19)$$

The maximum of the dynamic pressure, or the velocity, is found at a position  $x$  which follows from the equation

$$e^x = 1 + 2x$$

yielding a radius

$$r = 1.12 r^*.$$

The maximum velocity is

$$v_{max} = 0.64 \frac{\Gamma_\infty}{2 \pi r^*} = 0.64 \frac{\Gamma_\infty}{2 \pi} \sqrt{\frac{a}{2 \nu}} . \tag{20}$$

The total pressure difference from infinity to the center of the core, due to the vortex, will be called  $\Delta p_{r_0}$ ; its magnitude follows after an easy evaluation of the definite integrals in equation (18) for  $x = 0$ :

$$\Delta p_{r_0} = \frac{\log 2 \cdot \varrho \Gamma_\infty^2 a}{8 \pi^2 \nu} = \frac{1.386 \varrho \Gamma_\infty^2}{8 \pi^2 \nu^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}} . \tag{21}$$

With the finite pressure at  $r = 0$ , the total lifting force  $L$  of the vortex over a circle of radius  $r$  in the (materialized) plane  $z = 0$  remains finite. Only the limiting result for  $r \gg r^*$  will be given, without reproducing the lengthy though elementary integrations:

$$L = \frac{\varrho \Gamma_\infty^2}{4 \pi} \log \frac{r}{r_0} , \tag{22}$$

where

$$r_0 = \sqrt[2]{\frac{2}{e \gamma}} r^* = 0.645 r^* . \tag{22a}$$

Here,  $\gamma = 1.781 \dots$  is 'EULER's constant'. If the vortex had been 'cut off' at a height  $z = H$ , where  $H \gg r^*$ , the total force on the infinite plane  $z = 0$  would remain finite; its value can be found to be

$$L = \frac{\varrho \Gamma_\infty^2}{4 \pi} \log \frac{H}{r_0} . \tag{22b}$$

As a first application, consider the case of the bathtub vortex. The basic flow in the emptying bathtub without the vortex will be schematically represented by a sink of strength  $Q$  (volume flow per unit time,  $\text{cm}^3 \text{ s}^{-1}$ ) representing the drain, at a distance  $h$  from an infinite plane, representing the (undisturbed) free surface. (The effect of the bottom and of the sidewalls will be neglected.) The sink flow and its image result in a stagnation point on the plane, where the inflow-gradient is found to be

$$a = \frac{Q}{2 \pi h^3} .$$

For the sink strength  $Q$ , put

$$Q = \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2 g h} ,$$

where  $d$  is the drain diameter. If a vortex of the strength  $\Gamma_\infty$  is present, a pressure drop at the core is found having the magnitude

$$\Delta p_{r_0} = \frac{\log 2}{64 \pi^2} \cdot \frac{\varrho \Gamma_\infty^2 d^2 \sqrt{2 g h}}{h^3 \nu} \tag{21a}$$

and as the pressure on the free surface is constant, a depression  $l$  of the surface will be caused such that the hydrostatic pressure balances  $\Delta p_{r_0}$ :

$$\Delta p_{r_0} = \rho g l.$$

The vortex 'breaks through' to the drain if  $l = h$ . Unfortunately the situation is complicated by the fact that if a depression is present, it will influence the inflow gradient; the problem of a sink flow limited by a non-planar surface is not readily solved. Qualitatively, this effect (which is more important than the neglected images due to the walls) will cause the following events: a depression of the surface increases the inflow gradient, which in turn increases the pressure drop  $\Delta p_{r_0}$ , which increases the depression, etc. Thus, in accordance with experience, the break-through occurs very suddenly.

In order to obtain a rough estimate of the vortex strength which causes such a break-through, let the pressure drop  $\Delta p_{r_0}$  according to the formula (21a), which ignores the change in  $a$  due to the depression, be equated to the hydrostatic pressure for a depression  $l$  which is a fraction  $\alpha$  (say) of the height  $h$ :

$$\Delta p_{r_0} = \alpha \rho g h.$$

The formula is good for  $\alpha \ll 1$ ; on the other hand, as soon as  $\alpha$  is some appreciable fraction of 1, the break-through proceeds very quickly; thus, an estimate of the critical conditions can be obtained by a reasonable guess on  $\alpha$ , say  $\alpha = 0.25$ . Solving the formula (21a) for  $\Gamma_\infty$ , it is found that

$$\Gamma_\infty^2 = \frac{64 \pi^2 \alpha}{\sqrt{2} \log 2} \nu \left( \frac{h}{d} \right)^2 h \sqrt{g h}.$$

In water at 40°C,  $\nu = 6.6 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ; assuming  $d = 2 \text{ cm}$ , a vortex which breaks through at a height  $h = 8 \text{ cm}$  must have a strength  $\Gamma_\infty = 80 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . This seems to be a reasonable value, in view of the size of a bathtub and the usual agitation of the water.

Next, the results will be discussed in connection with some observed properties of tornadoes. The 'radius' of a tornado, in the case of the narrower paths observed, is about 10 m (usually it is much larger). This radius will be identified with the radius  $r^*$ , equation (13), in the vicinity of which the stagnation pressure has a maximum. Taking the kinematic viscosity of air to be  $0.14 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  and  $r^* = 10^3 \text{ cm}$ , it follows that the inflow gradient is

$$a = 0.28 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1},$$

an improbably low value. Values which appear to be reasonable from meteorological experience would be of the order of 1 m/s change of wind speed per 1 km, or  $a = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; this, in turn, leads to the improbable value of  $r^* = 17 \text{ cm}$ .

It is believed that the basic flow picture considered here, namely, a vortex concentrated by an inflowing stagnation point flow, correctly represents the



phenomena in a tornado; nevertheless, some aspects of this flow model must be changed in order to explain the observed size of tornado paths. The first thought might be that the compressibility of air has to be taken into account. Whenever the maximum velocity according to equation (20) becomes comparable to the velocity of sound, a compressibility correction to the calculation of  $r^*$  is indicated. Atmospheric values of  $\Gamma_\infty$  and  $a$  could easily lead to values of  $v_{max}$  beyond this limit. Correspondingly, the absolute pressure at the center of the vortex has to fall well under one half of the undisturbed barometric pressure, before a sizeable compressibility correction has to be made. While such large pressure drops are not impossible, their existence apparently has not been proved yet.

Although the compressibility correction is of great theoretical and practical interest, it is hard to visualize how it could change  $r^*$  by several orders of magnitude, unless the core pressure falls to improbably low values. On the other hand, big effects on  $r^*$  are found if the assumption of laminar flow is dropped, as the appropriate kinematic viscosity would be increased by many orders of magnitude in turbulent flow. But can the flow be turbulent in the core of the vortex? A first thought which would indicate that turbulence is of little importance is the following: when the vortex flow is 'drawn in' toward the core and thereby accelerated in accordance with the law of conservation of angular momentum, this acceleration will make any initial turbulent fluctuations much less important; this is a well-known principle. But inside the core, where the flow is decelerated again, will this tendency reverse? If it does, if there is a turbulent vortex flow, it may be expected to be a very 'pure' and interesting case of turbulence, depending very little on initial conditions and having the 'natural' Reynolds number  $\Gamma_\infty/\nu$  as similarity parameter. Such considerations might have led SQUIRE [3] to the assumption of a turbulent eddy viscosity  $\epsilon$  proportional to the vortex strength  $\Gamma_\infty$ . A possible generalization of SQUIRE's assumption would be to put  $\epsilon$  proportional to  $\Gamma_\infty^n \nu^{1-n}$ , where  $n$  is some exponent. It must be emphasized that SQUIRE made his assumption in connection with a somewhat different problem, namely, the decay of the trailing vortex system behind an airplane. It is known that this vortex system has a fairly strong persistence, so that, e. g., several light-airplane landing and take-off accidents were found due to encountering the wakes of large airplanes. This problem was investigated by BLEVISS [4], who found that turbulent dissipation has to be assumed to explain the observed persistence of the vortex motion. In laminar flow, the vortex decay time would be many orders of magnitude larger than the observed times of several minutes, which already appear to be fairly large. The case is similar to HELMHOLTZ's classical estimate of the wind persistence with laminar flow. To explain the observed facts, BLEVISS assumed a turbulence intensity determined by usual meteorological conditions, while SQUIRE made the assumption of a turbulence intensity

typical for and determined by the vortex. In any case, there is circumstantial evidence for the role of turbulence in the vortex decay problem. This should be kept in mind in spite of the fact that the situation is quite different for a vortex with stagnation-point type inflow, when particles are strongly accelerated before they reach the core. All these speculations naturally lead to no conclusions; rather, basic observations are needed.

Returning to the tornado problem, another difference between reality and the assumed simple flow model is that the latter does not consider the viscous effects due to the presence of the ground. This effect causes all velocities to vanish in the plane  $z = 0$ , on which a boundary layer will be formed. Near the core, however, it is questionable whether boundary layer assumptions are sufficient for the treatment of the problem, as the imposed outside pressure distribution  $p_r$  itself is viscous in origin. It would be interesting to investigate this somewhat unusual situation.

Besides the tornado, similar phenomena are found at the intake of jet engines situated (at rest) near the ground: a vortex (like a little artificial tornado) is formed, extending from the ground into the intake and picking up objects from the ground which often damage the engine. Experiments by KLEIN [5] have proved several basic facts about this flow phenomenon, e. g., that the ground plays a role by producing a stagnation point flow in connection with the sink created by the jet intake, but that the boundary layer on the ground and its vorticity have no fundamental influence on the flow pattern. The proof was made by using a second jet intake as a true image, so that a stagnation point flow was formed along a frictionless plane. A vortex was found connecting the two intakes, if and only if a circulation at 'infinity' was created artificially in these controlled experiments, just as in the case of one intake and the ground. KLEIN also has shown a way to avoid this vortex and thereby possible damage to the engines: a small airjet, directed toward the ground where the stagnation point would be, 'blows away' the vortex; evidently, this 'aerodynamic screen' blows away the stagnation point. This principle, as KLEIN has pointed out, might be used perhaps for active tornado control. Although the circulations involved in a tornado are very large and beyond control, the inflow gradient might be small enough to be influenced by man-made jets.

Finally, returning to the firm ground of the Navier-Stokes equations, a few unsteady solutions will be sought for the exact equation (8). Consider first the inviscid case of a stagnation point and a circulation which is function of  $r$  and  $t$ ;  $\Gamma$  fulfills the equation

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - a r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = 0. \quad (9a)$$

In frictionless fluid flow,  $\Gamma$  will be 'attached' to the material-particle lines

drawn in by the inflow; they move toward the  $z$ -axis with the speed  $u$  from equation (1):

$$u = \frac{dr}{dt} = -a r$$

so that

$$r = r_0 e^{-at}, \quad (23)$$

where  $r_0$  is the initial radius of a particle at  $t = 0$ . In accordance with the Helmholtz-Kelvin law, any function

$$\Gamma = \Gamma(r_0) = \Gamma(r e^{at}) \quad (24)$$

fulfills equation (9a).

Proceeding to the viscous case, the solution (24) suggests trying the following form of  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \Gamma\{r F(t)\} \equiv \Gamma(\sigma) \quad (25)$$

with the function  $F(t)$  to be determined such that  $\Gamma$  fulfills the complete viscous equation (9a). Introduction of the expression (25) leads to the equation

$$(F' - a F) \sigma \frac{d\Gamma}{d\sigma} = r F^3 \left[ \frac{d^2\Gamma}{d\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\Gamma}{d\sigma} \right]. \quad (26)$$

It is seen that the unsteady case is formally reduced to the steady one if  $F(t)$  satisfies the differential equation

$$F' - a F = -c F^3, \quad (27)$$

where  $c$  is some (positive) constant; the solution is

$$F = \left( \frac{c}{a} + b e^{-2at} \right)^{-1/2}, \quad (28)$$

where  $b$  is a constant of integration. Now the 'steady' solution of equation (26) is

$$\Gamma = \Gamma_\infty (1 - e^{-c\sigma^2/2a}) .$$

Introduction of  $\sigma = r F$  leads to the final result:

$$\Gamma = \Gamma_\infty \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{a r^2}{2 r} \cdot \frac{1}{1 + \beta e^{-2at}} \right] \right\}, \quad (29)$$

where  $\beta = a b/c$  is a new constant. The physical interpretation of this exact result is the following: circulation is found to be essentially restricted to a domain outside of a shrinking cylinder with the radius

$$R^2(t) = \frac{2 r}{a} (1 + \beta e^{-2at}) = r^{*2} (1 + \beta e^{-2at}). \quad (30)$$

Suppose  $\beta$  is a large positive quantity. Then, for small values of  $t$ , the circu-

lation is 'brought in' in accordance with equation (23), in an almost inviscid manner, until finally, for large  $t$ , the core is reached and the steady solution is quickly approached.

Solution (29) represents roughly a 'step-function' in  $\Gamma$ , jumping at  $R(t)$  from  $\Gamma = 0$  to  $\Gamma = \Gamma_\infty$ . Noting that if  $\Gamma(r, t)$  is a solution of equation (9), then  $\partial\Gamma/\partial t$  is also a solution, an interesting expression is found by differentiating equation (29). This solution has roughly the character of a  $\delta$ -function of the circulation at  $R(t)$ :

$$\Gamma = K \frac{\beta e^{-2at}}{1 + \beta e^{-2at}} y^2 e^{-y^2}, \quad (31)$$

where

$$y^2 = \frac{a}{2\nu} \cdot \frac{1}{1 + \beta e^{-2at}} = \frac{r^2}{R^2(t)} \quad (31a)$$

and  $K$  is some constant. Discussion of this result shows that the circulation is first transported in an almost inviscid way, then dissipated in the core, and finally it disappears 'down the drain'.

The previous exact solutions can be realized only by creating an initial spatial distribution of  $\Gamma$  corresponding to the solution for  $t = 0$ ; the change in the zero of the time scale corresponds to a change in the constant  $\beta$ . However, by superposition, using the basic solution (29) or (31), the solution for any initial distribution can be determined in principle.

Additional exact solutions are easily obtained even if the inflow-gradient  $a$  is some given function of time. If solutions of the form (25) are sought, equation (27) remains unchanged, and the solution for any given function  $a(t)$  is

$$F^2 = \frac{e^{2\int a(t) dt}}{2c \int e^{2\int a(t) dt} dt}. \quad (32)$$

The use of this function instead of the expression (28) gives the proper generalization of the solution (29). However, the analogue of the solution (31) cannot be obtained by differentiation from the generalized solution (29). The general solution (31) is found by putting  $y^2 = c F^2 r^2 / 2\nu$ , where  $F$  is given by equation (32), and by replacing the explicit time-dependent factor in (31) by the expression

$$\left[ \int e^{2\int a(t) dt} dt \right]^{-1}.$$

Solutions obtained in this manner will correspond to very particular initial distributions of  $\Gamma$ , depending on the function  $a(t)$  and on the limits chosen for the integrals in the expression (32).

The author gratefully acknowledges the many valuable discussions of these problems with the Aerodynamics group of the Santa Monica Division, Douglas Aircraft Company.

### Addendum

It has been pointed out to the author by C. P. DONALDSON, who (in a recent and still unpublished thesis at Princeton University) made a review and extension of exact solutions of the Navier-Stokes equations, that the solution (11) was already discussed by J. M. BURGERS in the chapter on *A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence*, in: *Advances in Applied Mechanics*, vol. 1 (Academic Press, N. Y., 1948).

BURGERS found that the total dissipation per unit height in  $z$ -direction becomes independent of the viscosity. It is to be expected that BURGERS' result also holds for the unsteady solutions (29) and (31) given in this paper. Indeed, the dissipation for all unsteady flows of this type (with  $a = \text{const}$ ) is found to be independent of viscosity. It suffices to note that the general similarity properties of the solutions of equation (9) are expressed by the equation

$$\Gamma = \Gamma_0 f\left(r \left[ \frac{a}{r}, at \right]\right).$$

The spatial dependence on  $r(a/r)^{1/2}$  leads to the dissipation per unit height proportional to  $qaI_0^2$ ; in the unsteady case, this will be multiplied by a function of  $at$  only.

### REFERENCES

- [1] J. ACKERET, *Über exakte Lösungen der Stokes-Navier-Gleichungen...*, Z. angew. Math. Phys. 3, 259–271 (1952).
- [2] S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics* (Oxford 1938), p. 103.
- [3] H. B. SQUIRE, *The Growth of a Vortex in Turbulent Flow*, British A. R. C. No. 16, 666 (1954).
- [4] Z. O. BLEVISS, *Theoretical Analysis of Light Plane Landing and Take-Off Accidents due to Encountering the Wakes of Large Airplanes*, Rep. No. SM-13647, Douglas Aircraft Co. (1954).
- [5] H. KLEIN, *An Aerodynamic Screen for Jet Engines*, Rep. No. SM-22625, Douglas Aircraft Co. (1957).

### Zusammenfassung

Das Strömungsfeld einer räumlichen, axisymmetrischen Staupunktströmung (deren Radialgeschwindigkeit dem Staupunkt zu gerichtet ist) und eines überlagerten coaxialen Linienwirbels wird als exakte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen angegeben. Der Zähigkeitseinfluss ist auf einen Kern beschränkt, dessen Radius vom Geschwindigkeitsgradienten der Staupunktströmung abhängt. Der (endliche) Druck im Kern wird berechnet, und die Resultate werden im Zusammenhang mit bekannten Erscheinungen (wie der Badewannenwirbel, Wirbelwinde usw.) diskutiert. Einige verwandte nichtstationäre Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen werden angegeben.

(Received: September 11, 1957. Addendum received: October 10, 1957.)



## Remarques sur l'écoulement tourbillonnaire autour des ailes en flèche

Par MAURICE ROY, Châtillon-sous-Bagneux, France<sup>1)</sup>

Il est bien connu aujourd'hui qu'aux incidences notables l'écoulement autour des ailes à forte flèche présente des caractères très différents de celui relatif aux ailes presque droites et assez allongées dans le sens de leur envergure.

En particulier, le long du bord d'attaque et dès l'apex (ou pointe) de la flèche, apparaissent des tourbillons libres qui concourent à former un noyau tourbillonnaire bien net, se développant au-dessus de l'extrados, vers l'aval et vers l'extérieur de l'aile. Les deux noyaux de cette sorte forment ainsi au-dessus de l'aile une sorte de «Vé» attaché à l'apex et constituent ce qu'on appelle souvent les «tourbillons d'apex».

A la suite d'expériences minutieuses avec visualisation de l'écoulement que j'ai fait effectuer à l'O.N.E.R.A. en soufflerie aérodynamique et au tunnel hydrodynamique, j'ai caractérisé en 1952<sup>2)</sup> la formation de ces singularités par l'enroulement *en cornet* d'une nappe tourbillonnaire émergeant du bord d'attaque et séparant les courants d'extrados et d'intrados, dont le premier dérape sur l'extrados vers l'extérieur de l'aile tandis que le second déferle de l'intrados pardessus le bord d'attaque et s'enroule sur le premier.

Dans une publication récente<sup>3)</sup>, j'ai développé cette conception, à la lumière des expériences poursuivies depuis plusieurs années.

Je voudrais présenter ici, en réduisant au minimum l'emploi de notions mathématiques, un certain nombre de remarques à propos de la formation et de l'évolution des singularités tourbillonnaires que présente l'écoulement autour des ailes en flèche. En général, ces remarques concerneront l'aile en delta qui est un exemple particulièrement typique mais, partiellement au moins, elles sont applicables à des ailes à flèche modérée, ou même aux parties marginales d'ailes sans flèche.

On supposera aussi, pour simplifier, que la compressibilité du fluide est négligeable, sans oublier que des singularités du genre en question interviennent également dans des écoulements transsoniques ou supersoniques.

<sup>1)</sup> O. N. E. R. A. (Office national d'études et de recherches aéronautiques).

<sup>2)</sup> M. ROY, *Caractères de l'écoulement autour d'une aile en flèche accentuée*, C. r. Acad. Sci., Paris, 1952 (juin).

<sup>3)</sup> M. ROY, *Tourbillons d'apex et nappes en cornet*, Office national d'études et de recherches aéronautiques, Paris, n° 56 (février 1957).



## 1. Représentation d'un écoulement conique

Pour l'aile en delta indéfini et de forme conique, ce qui est le cas d'un plan mince en triangle indéfini, la conception d'un *écoulement conique* se justifie en subsonique comme en supersonique, étant bien entendu que l'apex est un point singulier, de nature très particulière.

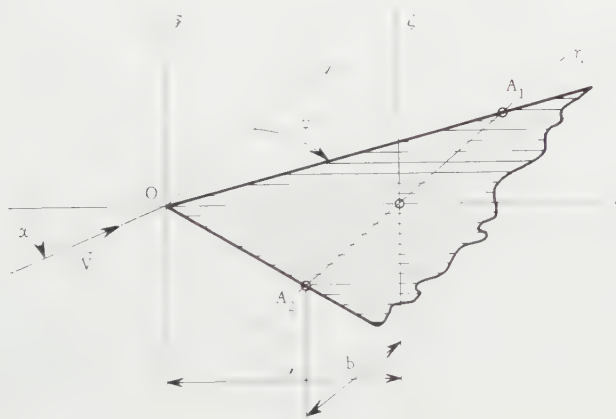


Figure 1  
Notations.

Toute surface conique issue de l'apex et s'appuyant sur une ligne de courant quelconque constitue alors une surface de courant. Il en est ainsi, en particulier, pour toute surface d'onde – onde d'accélération ou onde de choc, en supersonique – comme pour toute surface-cloison – telle qu'une surface ou nappe de tourbillon, en subsonique comme en supersonique.

Ces surfaces de courant coniques coupent une surface de référence quelconque liée à l'aile – par exemple, la sphère de rayon-unité centrée sur l'apex du delta indéfini – suivant un réseau de «directrices» que l'on peut prendre pour représentation à deux dimensions de l'écoulement conique tridimensionnel. Pour obtenir une figuration en dessin plan, on peut, comme l'a proposé récemment R. LEGENDRE, faire une projection perspective du réseau précédent sur le plan choisi.

Nous conserverons ici une représentation différente, plus directe et à laquelle on revient presque forcément lorsqu'il faut exprimer les équations de l'écoulement en coordonnées trirectangulaires classiques.

Adoptons, en effet, un trièdre de ce genre  $Oxyz$  (figure 1) lié au plan  $xOy$  de l'aile en delta indéfini, le point  $O$  étant confondu avec l'apex et l'axe  $Ox$  dirigé vers l'aval et confondu avec l'axe de symétrie du delta. Puis, considérons

l'intersection de l'écoulement par le plan  $\eta\tilde{z}$  parallèle au plan  $yOz$  et centré en un point de l'axe  $Ox$  — comme définie par les lignes tangentes en chacun de leurs points à la projection  $(v, w)$  sur le plan  $yOz$  de la vitesse locale  $(u, v, w)$  de l'écoulement conique. Autour de la section de l'aile, représentée sur l'axe  $\eta$  par le segment  $A_1 A_2$ , ces lignes sont appelées parfois «lignes de courant de l'écoulement transversal». Bien que cette dénomination soit littéralement correcte moyennant une convenable définition de ses deux termes, nous l'éviterons car elle induit trop facilement à confondre la notion mathématique de courant avec la réalité physique, où les composantes  $v$  et  $w$  de la vitesse locale sont inséparables de la troisième composante  $u$  (suivant  $Ox$ ) qui n'est pas une constante.

Aussi appellerons-nous les lignes en question «lignes du pseudo-courant transversal», en remarquant bien qu'en général la surface conique issue de l'apex et s'appuyant sur l'une quelconque de ces lignes n'est pas une surface de courant de l'écoulement conique. Par contre, l'intersection du plan transversal avec une nappe de tourbillon est la «directrice» de cette nappe conique.

Lorsqu'il s'agit d'interpréter les images d'un écoulement visualisé, on n'évite de graves erreurs que si l'on rapproche correctement le procédé expérimental d'obtention des images et la méthode que l'on veut utiliser pour la représentation de l'écoulement tridimensionnel conique, ou supposé tel.

## 2. Contournement du bord d'un obstacle mince

2.1 Soit, d'abord, un obstacle mince — à la limite, un plan ou une surface — bordé par une arête vive à peu près perpendiculaire au courant général amont.

L'écoulement extérieur étant pratiquement bidimensionnel, la vitesse serait infinie au contournement de l'arête vive (figure 2a), s'il ne s'y formait (figure 2b) une zone tourbillonnaire en forme de «bourrelet», par décollement du courant d'intrados, qui vient recoller sur l'extrados en contournant cette zone  $\mathcal{B}$ .

Si le bord contourné est arrondi au lieu d'être une arête vive, un «bourrelet» peut encore se former (figure 2c) après le point de courbure maximum du bord d'attaque si ce maximum de courbure est trop élevé. Cette éventualité disparaît (figure 2d) si le bord contourné est plus arrondi, c'est-à-dire à courbure assez faible.

Dans un bourrelet de l'espèce, la viscosité du fluide joue un rôle important car le gradient de la vitesse  $y$  est très élevé. L'intensité tourbillonnaire tend donc à s'y uniformiser. Mais, lorsque cette zone singulière du courant est de faible hauteur et de faible largeur comme il arrive notamment pour un bord d'attaque d'aile, à de faibles incidences, on ne peut guère considérer ladite zone autrement que comme une *singularité locale de couche-limite*. La frontière extérieure de cette zone est, en effet, formée par la couche-limite d'intrados refluant du point d'arrêt sur l'intrados vers le bord d'attaque, puis décollant de celui-ci en le franchissant. Il est à envisager que le bourrelet  $\mathcal{B}$  soit couram-

ment et en majeure partie turbulent, et qu'il communique, au moins localement, sa turbulence à la couche-limite qui le contourne, favorisant ainsi son entraînement par celle-ci dans sa partie antérieure, puis sa réalimentation par cette même couche dans la partie postérieure du bourrelet.

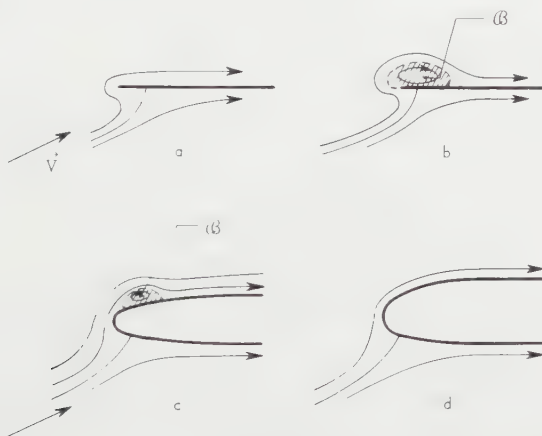


Figure 2  
Bourrelet de bord d'attaque.

Même dans l'hypothèse probablement simpliste de laminarité totale, il serait intéressant de déterminer la forme extérieure et la distribution tourbillonnaire du bourrelet de bord d'attaque d'un plan, mince et faiblement incliné, par les *méthodes d'étude de la couche-limite*, en traitant ce bourrelet comme une singularité de celle-ci, puis de reconnaître, en faisant tendre la viscosité vers zéro, la *forme rationnelle* d'une représentation du «bourrelet» en écoulement de fluide réputé parfait.

La *stabilité* d'un tel bourrelet constitue, bien entendu, une condition nécessaire de la validité de sa conception en courant permanent. Mais si le bourrelet est turbulent, cette stabilité s'entend de son écoulement moyen et, alors, elle n'est pas incompatible avec l'arrachement pulsatoire de petits tourbillons émigrant dans la couche-limite aval, et rendant ainsi cette dernière nécessairement turbulente.

En s'inspirant des idées que l'on peut se faire sur la tendance des tourbillons de couche-limite à pivoter pour devenir parallèles au courant extérieur, idées en relation avec l'instabilité de couche-limite ou avec l'apparence dentelée des zones de transition, on doit penser qu'un «bourrelet» rigoureusement bidimensionnel, c'est-à-dire sans composante de vitesse suivant son axe général, ne constitue qu'un *schéma idéal*, dont la réalité s'écarte passablement. En particulier, pour tout obstacle réel et forcément tridimensionnel, un écoulement non

négligeable, pulsé ou non, paraît devoir se produire suivant l'axe général d'un bourrelet du genre en question.

2.2 Supposons, maintenant, que le bord de l'obstacle mince considéré soit oblique sur le courant général amont, comme le bord d'attaque d'une aile en flèche.

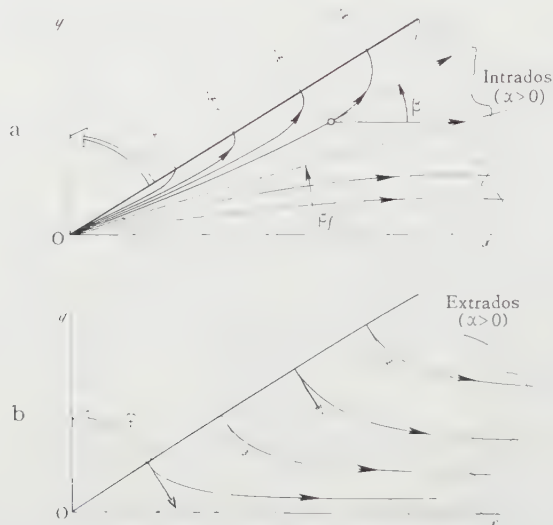


Figure 3

*a* écoulement irrotationnel d'intrados sur l'aile plane en delta indéfini; *b* écoulement irrotationnel d'extrados sur l'aile plane en delta indéfini.

On sait qu'en pareil cas le courant extérieur, supposé irrotationnel, peut contourner le bord d'attaque avec une composante de vitesse parallèle à ce bord: l'exemple de l'aile cylindrique indéfinie et dérapée le montre à l'évidence, puisqu'une vitesse uniforme de dérapage s'y superpose à celle d'un courant plan relatif à une section droite de l'aile.

Mais, si l'obstacle est conique avec *arête vive*, la vitesse  $y$  tend vers l'infini et les lignes de courant pariétales s'infléchissent au contournement pour franchir orthogonalement l'arête vive, ainsi que le montre la figure 3 pour l'aile infiniment mince et en delta indéfini.

La vitesse sur l'arête devenant infinie, le courant à potentiel continu autour de l'arête cesse d'être admissible, et une singularité du courant doit apparaître le long de l'arête. La *discontinuité* correspondante du potentiel représente une surface de tourbillon qui n'est autre, en écoulement conique, que la surface conique constituant (figure 4) notre «nappe en cornet».

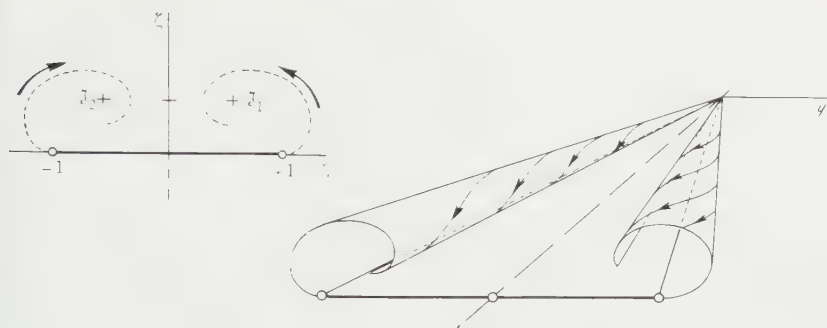


Figure 4

Schéma des deux nappes coniques «en cornet».

### 3. Points d'arrêt, lignes de partage et lignes de séparation

Lorsqu'il investit un obstacle réel, donc à trois dimensions finies, un courant permanent de *fluide parfait* ne peut marquer d'arrêt sur l'obstacle qu'en des *points distincts*, qui constituent des «ombilics» pour le réseau des lignes de courant pariétales.

En général et sauf décollements et singularités, il y a un ombilic d'arrêt amont et un ombilic d'arrêt aval. Dans la réalité, sur la partie postérieure de l'obstacle, l'épaississement de la couche-limite et les sillages qu'occasionne la viscosité des *fluides réels* détériorent la représentation idéalisée précédente, mais l'ombilic d'arrêt amont est toujours localisable avec précision.

Parmi les lignes pariétales qui en partent, certaines présentent la propriété de séparer le flux qui se dirige vers le bord d'attaque de l'obstacle (pour le contourner) de celui qui ne tend pas à contourner ce bord: un exemple d'une telle «*ligne de partage*» est fourni par la ligne d'intrados en trait mixte de la figure 3, ligne qui émane de l'apex comme toutes les lignes de courant pariétales, par suite de l'hypothèse drastique de «conicité» de cet écoulement. Une ligne de partage peut, comme dans l'exemple précédent, être elle-même une ligne de courant pariétale, ou être l'enveloppe commune de telles lignes qui lui sont tangentes de chaque côté.

Sur la paroi, d'autres lignes, qui partent ou non de l'ombilic d'arrêt amont (ou qui aboutissent ou non à l'ombilic d'arrêt aval), présentent le caractère suivant: la portion de courant limitrophe de la paroi d'un côté de la ligne cesse, au franchissement de cette ligne, de longer la paroi et vient en contact avec la portion de courant qui est limitrophe de la paroi de l'autre côté de la même ligne. Sur la paroi, c'est une ligne de partage, mais c'est en même temps une ligne le long de laquelle chacune des deux parties adjacentes du flux *se sépare* de la paroi, d'où son nom de «*ligne de séparation*». Cette séparation peut avoir



un caractère négatif lorsque le flux s'approche de la paroi et s'y divise sur la ligne en question, qui peut être appelée alors « ligne de rattachement ».

Les distinctions précédentes sont d'application particulièrement claire, lorsqu'une zone limitée de courant reste en mouvement permanent contre la paroi, étant contournée par le flux extérieur pour lequel elle forme une « poche de décollement ». La ligne fermée qui constitue le contour de cette poche sur la paroi, et qui comporte généralement deux points d'arrêt, est ligne de séparation sur une partie de son développement, et ligne de rattachement sur le reste.

Dans le cas de l'aile mince en delta indéfini et à écoulement conique, les bords d'attaque sont lignes de séparation, d'où émanent nos « nappes en cornet ».

#### 4. Formation de la nappe tourbillonnaire issue d'une ligne de séparation

4.1 En fluide réputé parfait, ou à viscosité négligée sauf contre les obstacles qu'il touche, une telle nappe est la schématisation de la zone tourbillonnaire formée par la confluence de deux couches-limites, développées sur un obstacle de part et d'autre d'une ligne de séparation. Ces couches se séparent dudit obstacle le long de cette ligne, et émigrent dans le courant réputé sain en s'influençant mutuellement.

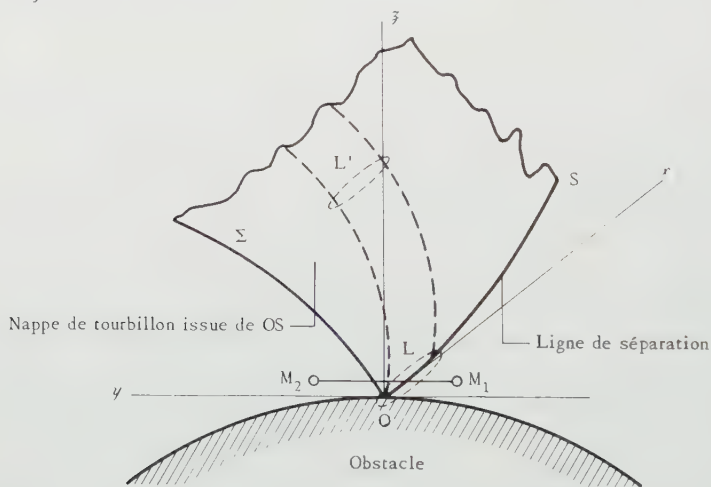


Figure 5

Détachement orthogonal d'une nappe de tourbillon.

Représentons-nous (figure 5) une coupe transversale  $yOz$  de l'obstacle et de l'écoulement, effectuée en un point  $O$  de l'obstacle et perpendiculairement à la direction locale  $Ox$  de la ligne  $OS$  de séparation, l'axe  $Oz$  étant dirigé suivant la normale extérieure à l'obstacle, et  $\Sigma$  désignant la trace sur le plan  $yOz$  de la nappe tourbillonnaire issue de la ligne de séparation.



Considérons deux points  $M_1$  et  $M_2$  infiniment voisins et situés de part et d'autre de  $\Sigma$ , dans le fluide et au voisinage de  $O$ . Supposons-les reliés l'un et l'autre par lignes de courant au même infini amont (pression  $p_0$  et vitesse  $V_0$  uniformes). On a ainsi, la densité  $\varrho$  du fluide étant invariable:

$$p_0 + \varrho \frac{V_0^2}{2} = p_1 + \varrho \frac{V_1^2}{2} = p_2 + \varrho \frac{V_2^2}{2}.$$

Si donc la pression est continue à travers  $\Sigma$ , comme il faut l'admettre sauf singularités très particulières à l'origine de  $\Sigma$ , les vitesses  $V_1$  et  $V_2$  sont pratiquement égales. En amenant  $M_1$  et  $M_2$  sur l'obstacle, les vecteurs portant ces vitesses deviennent tangents à celui-ci le long de  $Ox$ .

Il apparaît ainsi qu'en  $O$  et pour justifier la naissance d'une nappe de tourbillon à partir de  $OS$ , les vitesses  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ , qui ont même module, doivent être non seulement tangentes à  $Ox$ , mais *non nulles et de sens contraire*.

Il ne semble pas que l'on puisse mettre en doute la légitimité de cette double exigence en objectant que le lacet  $L$  – homologue près de l'obstacle du lacet  $L'$  sur lequel on évalue la circulation invariable d'une lanière déterminée de tourbillon de la nappe issue de  $OS$  – peut s'allonger indéfiniment dans le sens  $Oy$  lorsqu'on l'approche indéfiniment de l'obstacle. En effet, partant d'un lacet  $L'$ , on peut toujours arrêter sa position  $L$  à celle qui est la plus rapprochée de la racine  $OS$  de la nappe de tourbillon, puis placer nos points  $M_1$  et  $M_2$  sur ce lacet  $L$ . Alors, l'on est bien amené à envisager comme probable que la nappe soit orthogonale à l'obstacle et que, de part et d'autre de la ligne de séparation et parallèlement à celle-ci, les vitesses du fluide soient égales et opposées.

On expliquerait et on éclairerait au mieux le mécanisme de formation de la nappe tourbillonnaire issue d'une ligne de séparation:

*théoriquement*, en traitant un problème convenablement schématisé de confluence de couches-limites animées de dérapages différents sur un plan mince, puis en faisant tendre vers zéro la viscosité dans la solution, problème qui mérite d'être recommandé à l'attention et à l'ingéniosité des spécialistes de la couche-limite;

*expérimentalement*, en visualisant une confluence du genre précédent, problème abordé à l'O.N.E.R.A. mais qui recèle d'assez notables difficultés.

4.2 On peut aussi concevoir un cas différent de formation d'une nappe tourbillonnaire, à partir d'une ligne de séparation présentant le caractère très particulier que voici.

Reprenant le schéma de la figure 5, on imagine que la trace  $\Sigma$  de la nappe soit tangente à  $Oy$ , c'est-à-dire que la nappe quitte l'obstacle tangentiellement à celui-ci le long de  $OS$ . Alors, les vitesses  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  conservant même module pour éviter une quasi-discontinuité de pression le long de  $OS$ ,  $\vec{V}_2$  est parallèle à  $Ox$  si  $\Sigma$  est tangent à la partie positive de l'axe  $Oy$ , tandis que  $\vec{V}_1$  peut avoir,

en  $O$ , une orientation quelconque dans le plan  $xOy$  tangent à la fois à l'obstacle et à la nappe.

La figure 6 représente schématiquement ce cas pour un écoulement conique relatif à une aile en delta indéfini, d'épaisseur non négligeable et à bord suffisamment arrondi. La nappe en cornet se détache de l'aile conique le long

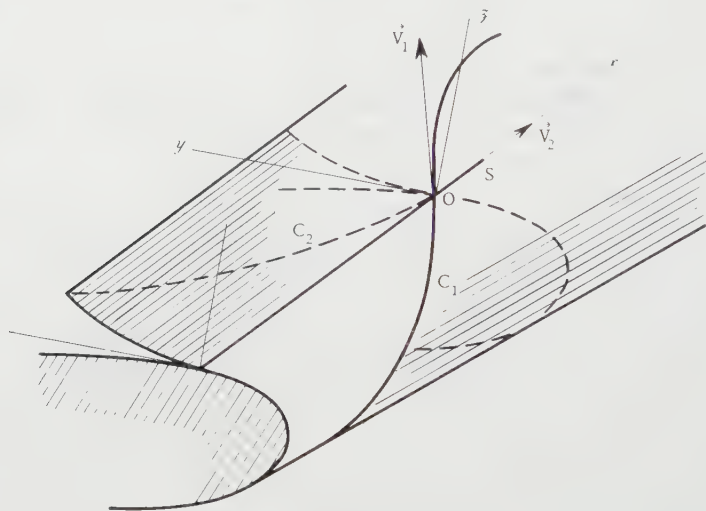


Figure 6  
Détachement tangentiel de la nappe en cornet.

de la génératrice  $OS$ , tandis que  $C_1$  et  $C_2$  représentent deux lignes de courant qui sont d'abord pariétales, puis se détachent de la paroi en  $O$  pour longer chacune l'une des faces de la nappe. La ligne de tourbillon issue de  $O$  est, dans le plan tangent  $xOy$ , bissectrice de l'angle des vecteurs égaux  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .

Il semble que cette conception s'accorde assez bien avec certaines observations sur des écoulements visualisés autour d'ailes à forte flèche et à bord d'attaque arrondi, ou même autour de corps de révolution bien fuselés. Elle mériterait d'inspirer une étude de couche-limite, en écoulement conique et convenablement schématisé.

### 5. Nappes en cornet pour le triangle plan indéfini

L'hypothèse d'écoulement conique entraîne dans ce cas que l'apex  $O$  est l'unique ombilic d'arrêt de l'écoulement, ce qui particularise extrêmement la *singularité* du courant en  $O$ .

Deux lignes de partage, rectilignes et issues de  $O$ , apparaissent sur l'intrados, tandis que le long des deux bords d'attaque droit et gauche, à la fois

arêtes vives et lignes de séparation, se développent en s'enroulant sur elles-mêmes les deux nappes en cornet de la figure 4.

Cette allure est bien fort confirmée par les images de la figure 7, qui représentent la visualisation par filets laiteux sur l'intrados et sur l'extrados, à des incidences assez fortes, d'après les expériences de H. WERLE au tunnel hydrodynamique de l'O.N.E.R.A.

Dans la représentation transversale sur le plan  $\eta \zeta$  de la figure 1, où l'on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \equiv \frac{y}{b} = \frac{y}{x} \cotg \varphi, \\ \zeta \equiv \frac{z}{b} = \frac{z}{x} \cotg \varphi, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{u}{V_0} \cos \alpha = 1 + \tilde{\omega}(\eta, \zeta), \\ \frac{v}{V_0} \cos \alpha = \chi(\eta, \zeta), \\ \frac{w}{V_0} \cos \alpha = \tau(\eta, \zeta), \end{array} \right.$$

le champ transversal  $(\chi, \tau)$  de vitesses réduites ne représente qu'un *pseudo-courant*, car la divergence de la vitesse n'y est pas rigoureusement nulle comme l'exigerait un flux purement transversal de fluide incompressible.

Si l'on convient de négliger les sources et puits, d'intensité d'autant plus faible que  $\cotg^2 \varphi$  ( $\varphi$ , angle de flèche, cf. figure 1) est plus petit, qui devraient être convenablement distribués dans tout le plan complexe  $\xi = \eta + i\zeta$ , il est probable qu'en certaines zones et près de l'aile, où la distribution de pression et de vitesse est particulièrement étudiée, l'effet cumulatif de toutes ces singularités élémentaires négligées puisse être apprécié assez exactement en *concentrant en certains points convenablement choisis du plan  $\xi$  quelques sources ou puits, d'intensité elle-même convenable*.

C'est cette voie que j'ai choisie et dont j'ai exposé le principe à l'assemblée annuelle de la W.G.L. tenue à Göttingen en 1953 (communication improvisée et non publiée).

Je signalerai ici que, dans la représentation en question (figure 7), la trace de la nappe en cornet est une *ligne de tourbillons-sources*, et non la trace d'une simple surface de tourbillon.

Cela résulte du fait déjà souligné que la représentation transversale (en  $\eta, \zeta$ ) de l'écoulement conique ne doit pas être confondue avec sa représentation par sections sphériques. L'équation de la ligne précédente s'écrit, en coordonnées intrinsèques ( $s, n$ ) du plan  $(\eta, \zeta)$ :

$$G = \frac{\sigma(r_s^2 + r_n^2 + \tg^2 \varphi) - (\Phi_i + G/2 + \tg \varphi) r_s}{\sigma r_s - (\Phi_i + G/2 + \tg \varphi)} \cdot \frac{dG}{ds},$$

où les lettres désignent:

$G(s)$ , la discontinuité  $(\Phi_e - \Phi_i)$ , à travers la nappe, du potentiel  $\Phi(\eta, \zeta)$  des vitesses réduites  $(\chi, \tau)$ , les indices  $e$  et  $i$  se rapportant aux faces dites d'extra-

dos et d'intrados, par continuité avec l'aile que la nappe prolonge;

$$\sigma, \text{ la dérivée } \sigma \equiv \frac{d[\Phi_i + G/2]}{ds};$$

$r_s$  et  $r_n$ , les composantes du rayon-vecteur  $\vec{r}$  sur les axes intrinsèques  $s$  et  $n$  (voir figure 7), avec  $r^2 \equiv r_s^2 + r_n^2$ .

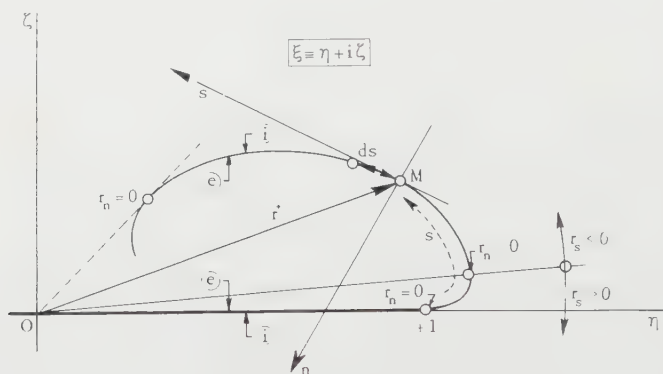


Figure 7

Coupe transversale de la nappe en cornet (tourbillons-sources et tourbillons-puits).

On peut regarder l'équation précédente comme définissant la fonction inconnue  $G(s)$  à partir de la forme (supposée connue et définissant donc  $r_s$  et  $r_n$ ) de la directrice de la nappe ainsi que de la valeur (également supposée connue) du potentiel  $\Phi$  sur l'intrados de la nappe.

Tandis que  $(-dG)$  représente la circulation directe autour de l'élément  $ds$  de nappe, la quantité

$$dQ = (G ds - r_s dG) \frac{r_n}{r_n^2 + \text{tg}^2 \varphi}$$

mesure le *débit-volume* de fluide émis par l'élément de nappe conique, de largeur  $ds$  dans le plan  $(\eta, \zeta)$  et de hauteur-unité suivant l'axe  $x$ . C'est le débit de la source élémentaire associée sur le tronçon  $ds$  de nappe, au tourbillon élémentaire de circulation  $dG$ .

En fait, la nappe en cornet ne s'enroule pas sur elle-même indéfiniment comme le fait prévoir la théorie rigoureuse d'un écoulement conique de *fluid parfait*. Vers son bord libre, cette nappe entraîne par viscosité le fluide ambiant et son enroulement se traduit par la formation d'un *noyau tourbillonnaire continu*, que j'appelle «bourrelet marginal» de la nappe en cornet (figure 8).

En représentation transversale, le schéma des lignes du pseudo-courant transversal se dispose alors selon le schéma de la figure 9.

Finalement et en simplifiant assez hardiment, je schématise la nappe en cornet (figure 10) par une *distribution continue de tourbillon pur* le long des lignes  $A_1 B$

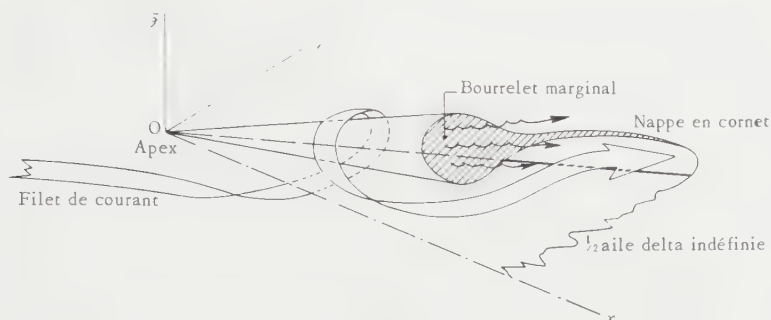


Figure 8

Vue perspective de la nappe en cornet et de son bourrelet marginal (aile plane).

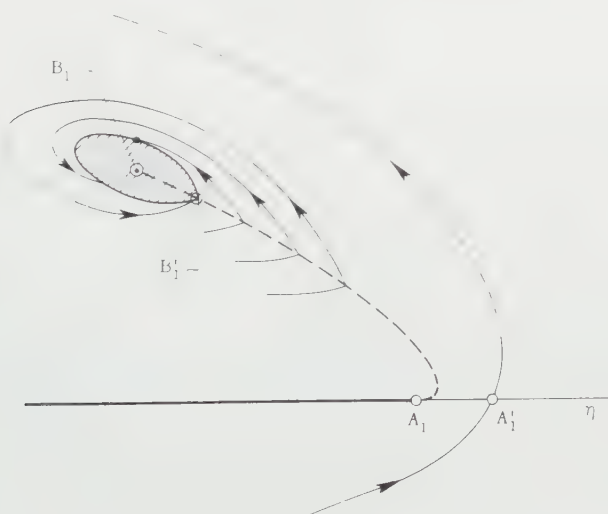


Figure 9

Coupe de la nappe en cornet et de son bourrelet marginal.

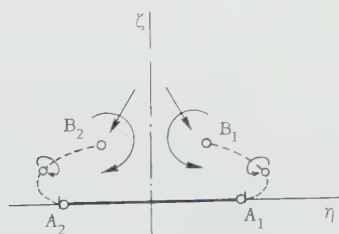


Figure 10

Pseudo-écoulement transversal schématisé.



et  $A_2 B_2$  et par un *tourbillon-puits concentré* en chacune des extrémités  $B_1$  et  $B_2$ , figurant essentiellement le bourrelet marginal de la nappe en cornet (figure 10).

La forme de la nappe et la loi de distribution le long de celle-ci sont choisies raisonnablement et en vue de simplifier suffisamment la théorie approximative, tandis que les inconnues subsistantes sont déterminées par des conditions essentielles et telles que, notamment, la continuité de pression et la discontinuité de direction de la vitesse au bord d'attaque ainsi que le cheminement progressif du bourrelet marginal suivant son axe.

La plupart des auteurs qui ont esquissé, à ma connaissance postérieurement à la définition (1952) de ma nappe en cornet, des schématisations plus ou moins analogues, négligent la dernière condition citée, relative au mouvement propre du noyau tourbillonnaire principal (ici, tourbillon-puits  $B_1$  ou  $B_2$ ).

Il paraît, cependant, *indispensable* de la formuler puisque, sans elle, rien n'assure la moindre probabilité de conservation du mouvement conique à potentiel discontinu que l'on imagine.

## 6. Singularités mineures – Nappes ou bourrelets secondaires

Revenons à l'aile mince et plane en delta indéfini, et considérons son écoulement d'extrados. Chassé latéralement vers les bords d'attaque, cet écoulement se trouve ralenti en s'approchant de ces bords qu'il tend à longer, tandis que le courant d'intrados déferle sur lui par-dessus ces arêtes vives qui constituent des lignes de séparation.

Ce ralentissement peut favoriser un décollement local qui contourne une «poche» formée par un bourrelet tourbillonnaire conique, animé lui-même d'un mouvement axial de progression vers l'aval.

On peut concevoir que la surface-cloison conique qui constitue la frontière commune de ce *bourrelet secondaire* et du courant extérieur soit tangente au plan d'extrados, suivant les deux lignes de séparation et de rattachement qui la limitent sur ce plan.

En coupe transversale et en représentation pariétale, un tel écoulement d'extrados correspond aux schémas indicatifs de la figure 11.

Suggérée par une remarque de R. LEGENDRE, la conception ci-dessus d'un «bourrelet secondaire» s'accorderait bien avec l'apparence que présentent, aux faibles nombres de REYNOLDS, certaines images d'écoulement pariétal visualisées par bulles d'air, obtenues par H. WERLE au tunnel hydrodynamique.

Elle s'accorderait bien aussi avec le fait, particulièrement mis en évidence par certains essais du R.A.E. à Bedford, qu'en aval d'une aile en delta sous incidence notable un tourbillon secondaire peut se détacher de l'extrados vers sa pointe marginale et se développer au-dessous du tourbillon principal d'apex (bourrelet marginal de la nappe en cornet), avec une intensité moindre et en *tournant en sens contraire*.



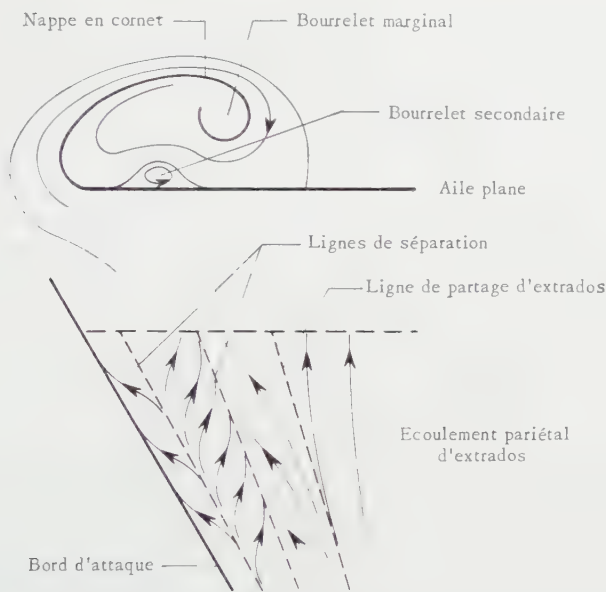


Figure 11  
Variantes et altérations de l'écoulement à nappe en cornet.

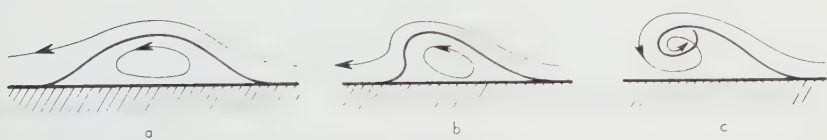


Figure 12  
Détachement spasmodique d'un bourrelet.

On peut même imaginer que le bourrelet secondaire ci-dessus prenne la forme d'une petite nappe en cornet, d'orientation inverse de celle de la nappe en cornet principale. Comme, à la différence de celle-ci, elle ne se formerait pas à partir d'une arête vive ou d'un bord à faible rayon de courbure mais à partir de la surface plane ou quasi-plane de l'extrados, on peut penser qu'une telle nappe secondaire proviendrait elle-même de l'évolution d'un bourrelet secondaire, d'abord collé à l'extrados, puis s'en détachant sur l'un de ses bords. Les schémas *a, b, c* de la figure 12 donnent, à titre *purement indicatif*, une idée des phases successives que pourrait comporter une telle évolution. En réfléchissant au passage de la phase *b* à la phase *c* – cas analogue à celui du détachement des tourbillons de sillage à partir d'un obstacle –, on aperçoit que cette *transition* ne peut vraisemblablement s'accomplir que d'une manière *spasmodique et instationnaire*.

La *turbulence de l'écoulement, même localisée*, peut jouer ici un rôle essentiel: excitée dans l'écoulement voisin de la paroi au cours de la formation d'un bourrelet qui soulève et «ride» la couche-limite, elle peut en effet favoriser l'apparition de *pulsations*, qui conduisent d'un régime apparemment bien stationnaire à un autre régime, tourbillonnaire et apparemment bien organisé.

Observons aussi que, dans l'écoulement à trois dimensions autour de corps fuselés ou d'ailes à forte flèche, les singularités sont en quelque sorte à la fois *entraînées* et *orientées* par le mouvement longitudinal général. Au lieu de se résoudre en tourbillons espacés – voire alternés – comme dans le cas des sillages en courant plan, ces singularités ont alors tendance à se résoudre en *noyaux tourbillonnaires continus*, animés également d'un mouvement longitudinal. Cela est particulièrement frappant lorsqu'on observe, par exemple, la stabilité et la régularité de tourbillons visualisés, en aval d'une aile en delta sous incidence notable.

## 7. Déchirement d'une nappe en cornet le long de sa racine

L'hypothèse de l'écoulement conique – qui implique, en fluide parfait et pour l'apex de l'aile conique en delta indéfini, la *singularité très particulière* déjà signalée – n'est pas conciliable avec la viscosité, dont l'effet est cumulatif le long d'une «génératrice» issue de l'apex.

Il en est ainsi, en particulier, le long du bord d'attaque où la nappe en cornet se forme par confluence de couches-limites se séparant ensemble de la paroi.

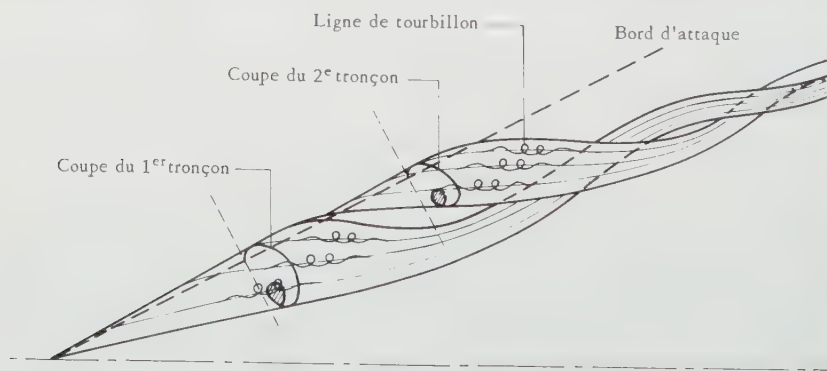


Figure 13

Enroulement en écheveau de deux nappes «en cornet» successives.

En progressant depuis l'apex le long du bord d'attaque, les conditions de cette confluence évoluent progressivement. On peut imaginer qu'à une certaine valeur du nombre de REYNOLDS – défini (en régime permanent) à partir de la vitesse et de l'état du fluide à l'infini amont ainsi que de la distance à l'apex –

la nappe «se déchire» (figure 13), puis qu'un nouveau tronçon de nappe en cornet se forme à partir de ce point de déchirement, et ainsi de suite. Bien entendu, les bourrelets marginaux, qui bordent ces tronçons successifs de nappe en cornet et où se concentre rapidement leur intensité tourbillonnaire, s'enroulent à leur tour les uns autour des autres comme les torons d'un câble pour former un noyau unique constituant, en définitive, le tourbillon principal d'apex.

C'est ainsi que me paraissent s'expliquer, au mieux, les ondulations successives des lignes pariétales le long d'un bord d'attaque d'aile en delta que révèlent certaines visualisations de l'écoulement d'extrados.

\* \* \*

Nappe en cornet déchirée en portions successives, finalement «toronnées» les unes sur les autres, et bourrelets ou nappes secondaires donnent à l'écoulement d'extrados sur les ailes à forte flèche une complexité notable. Même en simplifiant la théorie, selon les vues que j'ai détaillées ailleurs<sup>3)</sup>, les calculs restent ardues, et une bonne théorie approximative de ces écoulements ne pourra peut-être jamais atteindre à la simplicité fondamentale de la «Tragflügeltheorie» de PRANDTL pour ailes quasi-droites et d'assez grand allongement. Même dans ce cas, d'ailleurs, les notions de nappe en cornet et de bourrelet tourbillonnaire s'appliquent à la formation du «tourbillon marginal» classique.

De toute façon, il est essentiel de parvenir à une compréhension aussi exacte et précise que possible des singularités de l'écoulement réel. Comme je le signalais déjà en 1952, la clé de leur explication réside dans le comportement des couches-limites, dont l'étude constitue de plus en plus un chapitre capital de la dynamique des fluides.

### *Zusammenfassung*

Der Verfasser behandelt die Wirbelströmung um Pfeilflügel. Diese Strömung ist, bei etwas höheren Anstellwinkeln, gekennzeichnet durch die Ausbildung einer Singularität, die er «Wickelfläche» (nappe en cornet) nennt. Die Konfiguration am Rand dieser Wirbelfläche wird analysiert. Weiter wird das Bild einer konischen Strömung für einen unendlichen Delta-Flügel untersucht; dabei wird genauer auf den Sinn der Singularitäten eingegangen, die zu den Wirbeln der «Wickelfläche» oder den von der Pseudo-Strömung in einer Querebene gebildeten Wülsten dieser Fläche hinzugefügt werden, und die den Charakter von Quellen oder Senken haben.

Der Verfasser diskutiert die Bedeutung der Staupunkte, der Trenn- und Abösungs-Linien und legt dar, wie man die Ausbildung der Wülste und weiter der «Wickelfläche» selbst als das Ergebnis des Zusammenfließens der beiden Grenzschichten von Ober- und Unterseite auffassen kann, wobei diese letztere zur Oberseite hinüberströmt.

Schliesslich wird die Bildung von Gegenwirbeln untersucht.

Reçu: le 30 septembre 1957.)

# The Reflection of Shock Waves from an Orifice at the End of a Duct<sup>1)</sup>

By GEORGE RUDINGER, Buffalo, New York, USA<sup>2)</sup>

## 1. Introduction

It was observed [1]<sup>3)</sup> that when a shock wave reaches an orifice plate at the end of a duct, the pressure at the head of the reflected wave rises higher during a short pulse ('overshoot') than can be accounted for by the conventional computing methods. The latter are based on the assumption that the boundary conditions in nonsteady flow are the same as in steady flow and such

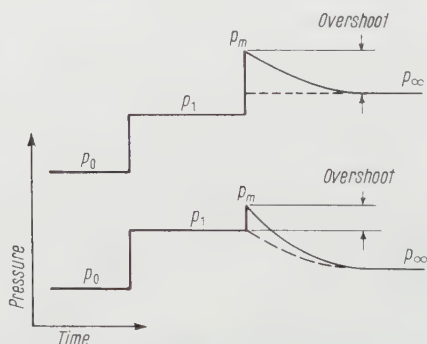


Figure 1

Pressure variations at some distance from the orifice.  
— Experiment; --- conventional calculation.

calculations predict that the reflected wave is either a simple expansion wave or a shock depending on the size of the orifice and the strength of the incident shock wave. Figure 1 shows the two types of pressure variations that occur in the duct at some distance from the orifice. The pressure before and after passage of the shock wave, and the final pressure after passage of the reflected wave are indicated by  $p_0$ ,  $p_1$  and  $p_\infty$ , respectively. The maximum pressure at the

<sup>1)</sup> This work was sponsored by Project SQUID which is supported by the Office of Naval Research under Contract N6-ori-105 T.O. III, NR-098-038. Reproduction in full or in part is permitted for any use of the United States Government.

<sup>2)</sup> Cornell Aeronautical Laboratory, Inc.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 584.

front of the reflected wave is denoted by  $p_m$ . Pressure variations of the reflected wave that are predicted in the conventional manner are shown as the dotted lines. The overshoot is given by

$$p_m - p_\infty \quad \text{if} \quad p_\infty \geq p_1$$

and by

$$p_m - p_1 \quad \text{if} \quad p_\infty \leq p_1.$$

These definitions become identical if  $p_1$  and  $p_\infty$  are equal; that is, for the 'nonreflecting orifice'. The overshoot may amount to an appreciable fraction of the pressure rise across the incident shock wave. Typical pressure records are reproduced in Figure 7, section 3.

A better understanding of this phenomenon is desirable for several reasons in addition to its fundamental interest. For example, SPRENGER [2] discussed various flow conditions that may lead to dangerous pressure pulses in constricted ducts; the overshoot, discussed here, may represent yet another source of such excess pressures. If the reflected wave is used in ignition studies, or if it interacts with a contact surface, the observations may be misinterpreted unless one is aware of the overshoot.

Nonsteady flows in ducts may be analyzed by means of wave diagrams which are based on the method of characteristics for quasi-one-dimensional flow (see, for instance [3-5]). In dealing with wave reflections from an abrupt change of cross section, or from an open end, one customarily assumes that the boundary conditions for nonsteady flow are the same as those for steady flow. Actually, the latter, after having been disturbed by an incident wave, can only gradually be re-established through a system of diffracted waves. The effects of this lag, which are neglected in the conventional procedures, clearly, are largest when the incident wave is a shock wave.

A few investigations of nonsteady flow through constrictions have been carried out, but most of them did not consider the lag effects. BOWMAN and NIBLETT [6], DOSANJH [7], and FRANKS [8] studied the interaction of shock waves with grids or wire screens, and observed the established steady-flow conditions. Useful charts for calculating wave reflections from a constriction on the basis of the steady-flow boundary conditions have been prepared, for instance, by JENNY [4] and HADLATSCH [9]. ZELLER [10] carried out experiments with both compression and expansion waves, but not with shock waves, and he observed pressure variations at various stations along the duct that agreed quite well with the results of calculations based on the steady-flow boundary conditions. An investigation by CHEN [11] was concerned with the flow downstream of a contraction where supersonic flow patterns may occur that cannot appear in a steady flow and, therefore, cannot be analyzed by means of steady-flow boundary conditions; he proposed plausible assumptions for the flow in this region, but did not compare his results with experimental observations.



For the reflection of shock waves from an open end of a duct, RUDINGER [12] derived improved boundary conditions which indicated that the lag effects may occasionally become significant. It seemed promising to extend this analysis to the reflection of shock waves from orifice plates located at the end of the duct.

The overshoot as a function of strength of the incident shock wave, orifice size, and distance from the orifice may be computed on the basis of a few reasonable assumptions. This analysis is described in section 2, and the results are compared with experimental observations in section 3. The feasibility of a special orifice design by means of which the overshoot may be eliminated is demonstrated in section 4, and, finally, cases that are not covered by the presented analysis are briefly discussed in section 5.

## 2. Method of Analysis

A wave diagram is based on the model of a one-dimensional flow, so that 'effective' boundary conditions are required rather than details about the three-dimensional wave pattern in the vicinity of the orifice. The reflected wave must, therefore, be determined on the basis of simplifying assumptions which yield the effective initial strength of the shock front and the transition to the final, steady-flow conditions.

When the incident shock wave arrives at the orifice plate, it passes, at first undisturbed, through the open portion of the plate, while a shock wave is reflected from the solid portion. The resulting difference between the pressures in front of the solid and open portions leads to the almost immediate formation of a vena contracta with a resulting modification of both the transmitted and reflected waves. Elevated pressure behind the transmitted wave cannot be maintained, and a reflected expansion wave is formed at a rate that depends on the time in which waves can travel across the orifice. The reflected shock and expansion wave elements interact as they spread over the entire cross section and propagate into the duct. The three-dimensional flow pattern quickly tends to become one-dimensional with increasing distance from the orifice plate. Schlieren photographs by DUFF and HOLLYER [13] indicate that the front of the reflected wave becomes essentially plane after having traveled as little as one or two duct diameters. The reflected wave is thus made up of a shock front that is gradually being overtaken by an expansion wave until the pressure is reduced to the level at which steady flow through the orifice is possible. Interaction of the reflected shock front with the expansion wave produces the pressure pulse that has been named overshoot.

Figure 2 is a sketch of the wave diagram showing the development of the reflected wave and the various points and regions that will be needed in the analysis. It is assumed that the gas is initially at rest. The regions before and



after passage of the incident shock wave are indicated by 0 and 1, respectively. The flow in the immediate vicinity of the orifice is not one-dimensional, but the 'effective' one-dimensional conditions immediately after the reflection of the incident shock wave will be denoted by  $i$ , and the final steady flow will be indicated by  $\infty$ . An intermediate point will be characterized by  $e$ . Corresponding conditions in the orifice will be indicated by a prime ( $'$ ).

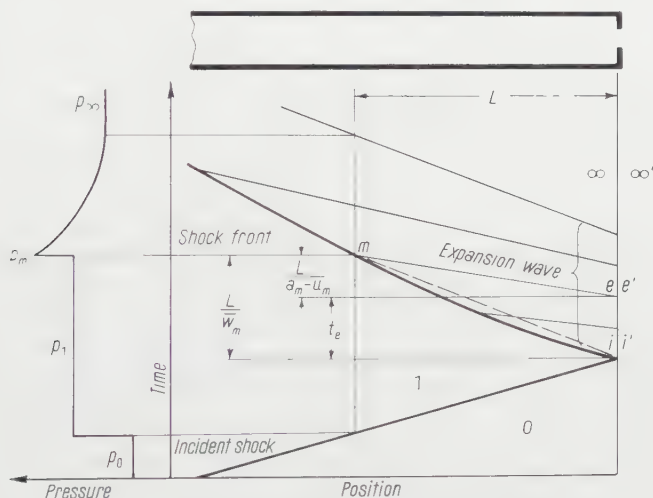


Figure 2

Wave diagram for shock reflection from an orifice.

The over-all strength of the reflected wave is such that the resulting steady-flow velocity  $u_\infty$  is compatible with steady flow through the orifice at  $u'_\infty$ . The pressure then satisfies the boundary condition  $p'_\infty = p_0$  if the exhaust jet is subsonic; if the flow in the orifice becomes sonic, it is possible for  $p'_\infty$  to become larger than  $p_0$ . These calculations, which correspond to the conventional computing procedure, involve the ratio of the orifice area to the duct area,  $\alpha$ , but since the stream contracts somewhat after leaving the orifice, an effective value  $\alpha_{eff}$  must be used. The latter depends not only on  $\alpha$  and on the strength of the incident shock wave (flow velocity through the orifice) but also on details of the orifice design (see section 3).

Results of the outlined calculations of the final steady-flow conditions, for a ratio of the specific heats  $\gamma = 1.4$ , are shown as the solid lines in Figure 3. The pressure ratio  $p_\infty/p_0$  is plotted against  $\alpha_{eff}$  for various strengths of the incident shock wave. Depending on whether  $p_\infty$  is greater or smaller than  $p_1$ , the entire reflected wave produces either a compression or an expansion of the gas. The condition  $p_\infty = p_1$  indicates the absence of a reflected wave and is shown by the dashed-dotted line.

The foregoing qualitative description of the initial flow pattern suggests a model on which one may base a reasonably simple computation of the initial reflection conditions. Imagine that the duct did not terminate at the orifice but continued from there with a smaller cross section corresponding to  $\alpha_{eff}$ .

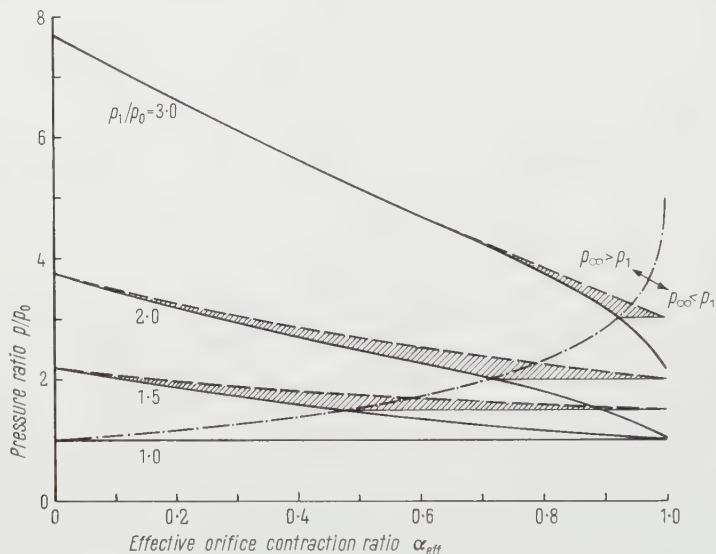


Figure 3

Initial and final effective pressures in the duct at the location of the orifice. The shaded areas represent the overshoot. —  $p_{\infty}/p_0$ ; ---  $p_i/p_0$ .

Such a duct configuration reflects an incident shock as a shock wave of reduced strength, and the working hypothesis is made that this wave represents the initial shock front of the reflected wave when the duct is terminated by an orifice. Since the effective conditions at the end of the duct are related to the corresponding ones in the orifice through steady-flow relations, the foregoing hypothesis implies that the reflected and transmitted shock waves are instantaneously established.

A wave diagram corresponding to these assumptions for the initial reflection conditions is indicated in Figure 4. The specific entropy in the gas behind the transmitted shock wave, region 2, is different from that in the gas that has passed through the incident and reflected shock waves, region  $i'$ , so that these two regions are separated by a contact surface. The calculations are carried out in the usual manner [4, 5], and some results for  $p_i/p_0$  are plotted as the dotted curves in Figure 3.

After the computation of both the initial and final effective pressures at the end of the duct, it remains to determine the transition from  $p_i$  to  $p_\infty$ . This problem is equivalent to that of finding the transition from  $p'_i$  to  $p'_\infty$  since to each value of  $p_e$  there corresponds a value of  $p'_e$ .

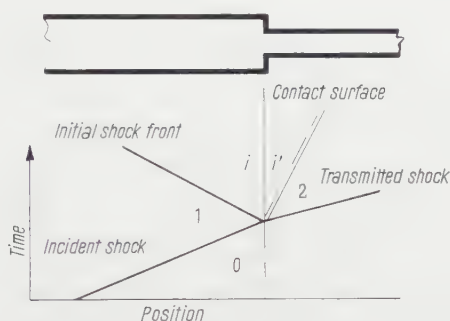


Figure 4

Wave diagram for the determination of the initial shock front of the reflected wave.

The solution for the fully open duct ( $\alpha = 1$  and  $p_e = p'_e$ ) was previously obtained [12] in the form

$$\frac{p_e(\tau) - p_0}{p_1 - p_0} = I(\tau),$$

where  $\tau = a_0 t/D$  is a nondimensional time with  $D$  as the duct diameter, and  $a_0$  as the speed of sound in the gas before the arrival of the shock wave. A plot of the transition function  $I(\tau)$  is shown in Figure 5 which indicates that the flow adjustment is essentially completed after a time  $3 D/a_0$ . The reference time  $D/a_0$ , which controls the rate of the pressure adjustment, is the time for a sound wave to travel across the duct diameter.

If the duct is terminated by an orifice, the contraction of the streamlines complicates the flow pattern. Nevertheless, the effective pressure variations may be computed if one assumes that the transition of the exit pressure from  $p'_i$  to  $p'_\infty$  is also described by the function  $I(\tau)$ , where the numerator represents the instantaneous deviation from the steady-flow conditions, and the denominator the pressure change during the transition. The reference time is now the time for a sound wave to travel across the effective diameter of the orifice<sup>4</sup>). If there are  $n$  equal holes evenly distributed over the cross section of the duct, the effective hole diameter is given by  $D (\alpha_{eff}/n)^{1/2}$ .

<sup>4</sup>) A sound wave behind the initial shock wave travels with a velocity  $a'_i$  in a gas flowing with the velocity  $u'_i$ . Its velocity across the orifice is, therefore, given by  $(a_i'^2 - u_i'^2)^{1/2}$  rather than by  $a_0$  [12]. If the gas is initially at rest, as in the present investigation, the resulting correction of the reference time is unimportant, but it may become significant if there is an appreciable flow velocity through the orifice before the arrival of the incident shock wave (see section 5).

In support of the foregoing assumption, it should be mentioned that the function  $I(\tau)$ , which, originally, was derived for a completely open end, was also successfully applied [14] to the boundary conditions for nonsteady flow into a duct from the surrounding atmosphere where a vena contracta is formed

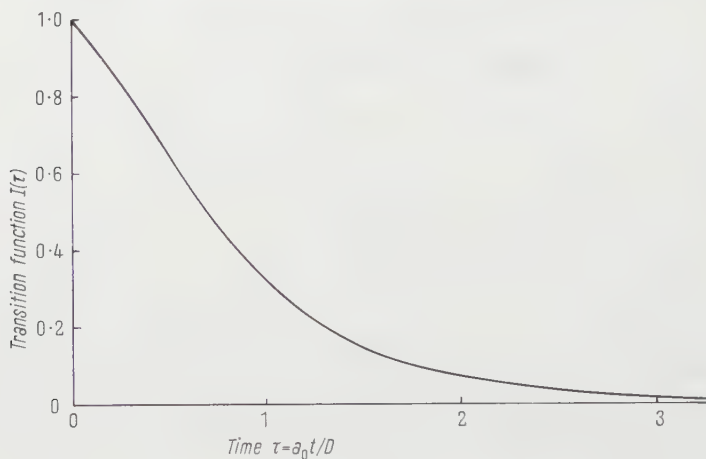


Figure 5

The transition function  $I(\tau)$ .

inside the duct. In addition, the adjustment time  $3D/a_0$ , mentioned before, is in good agreement with both experimental observations [15] and a theoretical analysis [16] of the time in which the pressure at the front of a wall decays from its peak to its final value after a blast wave has been reflected from the wall.

According to the stated hypothesis, the orifice pressure at a point during the adjustment process may be computed from the relation

$$\frac{p'_e(\tau) - p'_\infty}{p'_i - p'_\infty} = I(\tau) \quad (1)$$

with

$$\tau = \frac{a_0 t}{D} \left( \frac{n}{\alpha_{eff}} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Short tables of the function  $I(\tau)$  may be found in references [12] and [14].

The pressures  $p_i$  and  $p_\infty$ , together with the transition described by equations (1) and (2), determine the effective boundary conditions for any given values of  $p_1/p_0$  and  $\alpha_{eff}$ . The shock front of the reflected wave has an initial strength given by  $p_i/p_1$ . As it propagates into the duct, it is gradually overtaken by the expansion wave that is created by the pressure drops from  $p_i$  to  $p_\infty$ .

(see Figure 2). The initial pressure rise across the shock front is given by  $p_i - p_1$ . If  $p_\infty$  is greater than  $p_1$ , the initial shock front is stronger than the expansion wave, and the reflected wave ultimately becomes a single shock. If  $p_\infty$  is smaller than  $p_1$ , the shock front is eventually eliminated and a simple expansion wave remains. The initial overshoot is indicated by the shaded area in Figure 3. Maximum overshoot occurs when  $p_\infty$  equals  $p_1$ ; that is, when the net pressure change across the entire reflected wave is zero. The final conditions can then be reached only asymptotically because both the shock front and the tail of the expansion wave approach the same ultimate velocity (see also Figure 2). In the other cases, the final conditions are established at a finite distance, but it can be seen that the overshoot may be noticeable at considerable distances from the orifice.

In all cases in which the overshoot may be significant, the pressure ratio of the initial shock front  $p_i/p_1$  does not exceed a value of 2 and is nearer to 1.2 (see Figure 3), so that entropy gradients behind the reflected wave can be neglected within the accuracy required here. This observation makes it possible to compute the decay of the shock front as a function of the distance from the orifice without having to construct the entire wave diagram step-by-step. Let  $m$  represent a point on the high-pressure side of the shock front at the distance  $L$  from the orifice (Figure 2). The characteristics of the reflected wave are straight lines along which the flow conditions are constant, so that  $p_m = p_e$ ,  $u_m = u_e$ , and  $a_m = a_e$ ; their propagation velocity  $u_m - a_m$  is a negative quantity if  $u$  is measured positive toward the orifice. Let  $t_e$  be the time interval at the exit between the arrival of the shock wave and the point under consideration  $e$ . From the pressure ratio of the shock front, one can determine the shock Mach number  $M_s$ , so that the local propagation velocity of the shock front is given by

$$w_m = u_1 - a_1 M_{s,m}. \quad (3)$$

Since the values of  $M_{s,m}$  and  $w_m$  vary only little with the location of  $m$  because the shock front is weak, it is permissible to compute the time in which the shock travels from the orifice to the point  $m$  on the basis of the average velocity

$$\bar{w}_m = \frac{1}{2} (w_m + w_i) = u_1 - \frac{1}{2} a_1 (M_{s,m} + M_{s,i}). \quad (4)$$

It is seen from Figure 2 that the following relation must be satisfied

$$t_e = L \left( \frac{1}{\bar{w}_m} - \frac{1}{a_m - u_m} \right). \quad (5)$$

Since the shock front is weak, the characteristic equations for isentropic flow may be applied so that

$$\frac{a_m}{a_1} = \left( \frac{p_m}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \quad (6)$$

and

$$\frac{2}{\gamma-1} a_m + u_m = \frac{2}{\gamma-1} a_1 + u_1. \quad (7)$$

For given values of  $p_1/p_0$  and  $\alpha_{eff}$  the distance at which the magnitude of the overshoot reaches a selected value may now be determined in the following manner. First, one computes the initial and final conditions of the reflected wave as outlined. Then, a value of  $p_m$  is selected in the range between

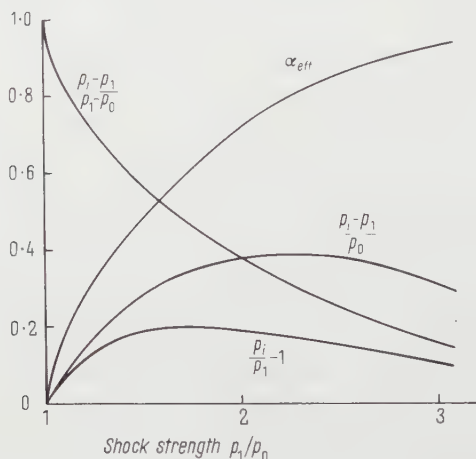


Figure 6

Various measures of the initial overshoot for a 'nonreflecting' orifice, and the required values of  $\alpha_{eff}$ .

$p_i$  and  $p_1$ , so that  $a_m$  and  $u_m$  can be computed from equations (6) and (7). The flow conditions at  $m$  and at the corresponding point  $e$  are thus determined. With the aid of steady-flow relations, one obtains the pressure in the orifice from which the value of  $I(\tau)$  may be found according to equation (1). The corresponding value of  $\tau$  is taken from a graph or a table of  $I(\tau)$ , and equation (2) yields  $t_e$ . Finally, equations (4) and (5) may be solved for  $L$ . Some numerical results of such calculations are presented in the following section together with experimental observations.

Maximum overshoot occurs for a 'nonreflecting orifice'. Its initial values expressed in different forms, are plotted against the pressure ratio of the incident shock wave in Figure 6, and the corresponding values of  $\alpha_{eff}$  are also included in the figure. The pressure ratio  $p_i/p_1$  has a broad maximum of about 1.2 near a shock pressure ratio of 1.7. Under these conditions, the relative magnitude of the overshoot  $(p_i - p_1)/(p_1 - p_0)$  reaches about 0.48, so that the overshoot then amounts to almost one half of the pressure rise across



the incident shock wave. For weaker shock waves, the actual magnitude of the overshoot decreases but its relative magnitude increases; for infinitesimal shock strengths, the overshoot becomes equal to the pressure rise across the shock wave. The pressure difference  $p_i - p_1$  has a maximum of about  $0.4 p_0$  near a shock pressure ratio of 2.3. For greater strength of the incident shock wave, both the actual and relative magnitudes of the overshoot decrease until they become rather insignificant for shock pressure ratios larger than 3.

### 3. Experimental Studies

A shock tube was used in experiments to verify calculated overshoots. The tube diameter was about  $3\frac{1}{4}$  in., and various orifice plates could be attached to the open end. Two small pressure transducers could be flush-mounted at various distances from the orifice, and the pressure signals from one of these were photographically recorded with the aid of a cathode-ray oscilloscope<sup>5)</sup>. A calibration of the entire pressure recording system was obtained for each experiment by determining the strength of the incident shock wave from its velocity. The latter was found by measuring, with a microsecond counter, the travel time of the shock wave between the two pressure transducers which were about 2 ft apart. The total length of the shock tube (about 26 ft) was sufficient to insure that the phenomena of interest could be recorded before any disturbing waves from the interior of the tube arrived at the pressure transducer.

Selection of the experimental conditions was guided by the fact that the overshoot is most significant for weak incident shock waves and in the neighborhood of the conditions of zero pressure change across the entire reflected wave. The experiments were carried out with shock pressure ratios of 1.58 and 1.22, and the pressure records were obtained at 1.86, 4.33, and 5.57 duct diameters from the orifice. Under these conditions, the effects of wall friction on the flow in the duct were sufficiently small to be ignored. Three different orifice plates were used: a single hole countersunk to almost a knife edge; a single straight hole; and 19 straight holes evenly distributed over the duct area. All plates were  $\frac{1}{4}$  in. thick and the holes were circular. Sketches of the plates and their area ratios are given in the first and second column of the table where the results are summarized. The last column of this table identifies a number of typical pressure records which are reproduced in Figure 7.

Each record was evaluated by measuring the deflections corresponding to  $p_1 - p_0$ ,  $p_m - p_1$  (or  $p_m - p_0$ ), and  $p_\infty - p_0$  (see Figure 1). From the known pressure rise across the incident shock wave,  $p_1 - p_0$ , the other pressures could

<sup>5)</sup> The oscilloscope was a Tektronix Type 535. Other details about the experimental equipment may be found in references [12] and [14].

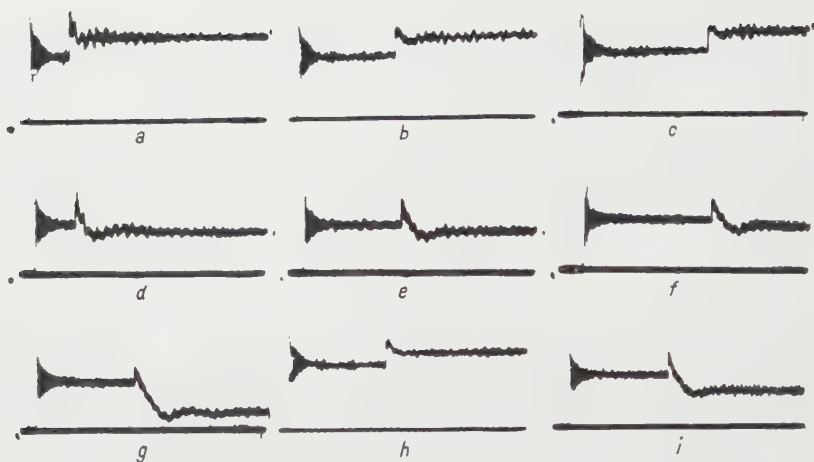
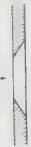

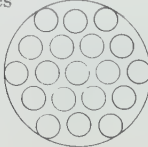


Figure 7

Typical pressure records at various distances from the orifice, for different shock strengths and orifices. All records cover a time of 5 ms. (Details of the experiments are listed in the table.)

Orifice		$\frac{p_1}{p_0}$	$\alpha_{eff}$	$\frac{p_\infty}{p_0}$	$\frac{L}{D}$	$\left(\frac{p_m}{p_0}\right)_{calc}$	$\left(\frac{p_m}{p_0}\right)_{exp}$	Pressure record in Figure 7
Design	$\alpha$							
Single countersunk hole 	0.52	1.58	0.39	1.76	0	1.99	—	—
					1.86	1.91	1.88	a
					4.33	1.86	1.83	b
					5.57	1.84	1.80	c
		1.22	0.35	1.19	0	1.35	—	—
					1.86	1.34	1.33	d
					4.33	1.32	1.30	e
					5.57	1.32	1.29	f
Single straight hole 	0.74	1.58	0.62	1.44	0	1.81	—	—
					4.33	1.73	1.72	—
		1.22	0.61	1.08	0	1.29	—	—
					4.33	1.27	1.27	g
19 straight holes 	0.52	1.58	0.44	1.69	0	1.94	—	—
					4.33	1.75	1.77	h
		1.22	0.43	1.15	0	1.33	—	—
					4.33	1.28	1.30	i

be determined. The value of  $\alpha_{eff}$  was obtained in each case<sup>6)</sup> from the pressure ratios  $p_1/p_0$  and  $p_\infty/p_0$ ; the final steady flow conditions could then be computed by means of the usual wave diagram procedures, and these, together with the relations for steady, isentropic flow from the duct through the orifice yielded  $\alpha_{eff}$ . The variation of  $p_m/p_0$  with  $L$  was finally computed as outlined in the preceding section. Results for the desired values of  $L/D$  are entered in the column of Table 1 headed  $(p_m/p_0)_{calc}$ . Directly measured experimental data  $(p_m/p_0)_{exp}$  are entered in the next column; each number in the table represents the mean of several, mostly five, separate experiments which, generally, agreed with each other within about 1%. The tabulated mean values agree with the calculated data within about 2%.

#### 4. Elimination of the Overshoot

For certain experiments, it may be desirable to eliminate the overshoot. Consider, for instance, a shock tube that is to be used as a short-duration, subsonic wind tunnel. If the reflection of the shock wave from the end of the tube could be eliminated, the test section could be located closer to the end of the tube with a resulting increase of available testing time; alternatively, a desired testing time could be obtained in a shock tube of reduced length. Figure 6 shows the relation between the effective size of the orifice that must be mounted at the end of the duct and the strength of the incident shock wave to eliminate the reflected wave, *except for the overshoot* which has its maximum amplitude under just these conditions.

If one replaces a single orifice by a number of evenly distributed holes, one can eliminate the overshoot only if the holes and spaces between them are quite small (fine-mesh wire screen) since a shock front and an expansion wave of equal and opposite pressure change cancel each other only asymptotically (compare also Figures 7*e* and *i*). Furthermore, a different screen would be needed for every shock strength. The overshoot would be eliminated if the shock front of the reflected wave could be transformed into a compression wave in which the rate of pressure rise matches the rate of pressure drop in the expansion wave. This aim can be realized if the solid portion of the orifice plate is replaced by a suitable porous material from which a shock wave is only gradually reflected as it penetrates below the surface.

A few experiments were carried out with an arrangement that consisted of a short duct, about two diameters long and closed at one end, tightly packed with steel wool and mounted in front of the open end of the shock tube. A

<sup>6)</sup> The ratio  $\alpha_{eff}/\alpha$  defines the coefficient of discharge of the orifice for the particular flow conditions involved and is of considerable importance in many engineering problems. The indicated method of obtaining its value by means of nonsteady-flow techniques may have useful applications which will be discussed elsewhere.

gap of width  $\delta$  was left between the two tubes which thus formed an adjustable orifice with  $\alpha = 4 \delta/D$ . A pressure record, obtained at  $L/D = 4.33$  for  $\alpha = 0.54$  and  $p_1/p_0 = 1.58$ , is shown in Figure 8a. For comparison, a record for a single-hole orifice plate ( $\alpha = 0.52$ ) and for  $p_1/p_0 = 1.36$  is reproduced in Figure 8b. Although the values of  $\alpha$  are almost identical in the two experiments, the values of  $\alpha_{eff}$  are different and the condition that  $p_\infty$  and  $p_1$  be equal is, therefore, satisfied by different shock strengths.

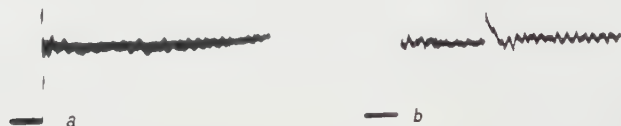


Figure 8

Pressure records for two 'nonreflecting' orifices: *a* special orifice design; *b* single-hole orifice plate (see text for details).

The overshoot is practically eliminated by the modified orifice. The pressure shows a slight rise toward the end of the record which is caused by the motion of the steel wool under the influence of the pressure waves. This motion is so slow that the initial reflection of the shock wave is not affected but the stream lines of the flow through the orifice are subsequently changed, and the resultant modification of  $\alpha_{eff}$  requires additional waves to satisfy the boundary conditions. Further studies with a more rigid material could be expected to eliminate this undesirable pressure change but the purpose of these experiments was merely to establish the feasibility of a truly nonreflecting orifice.

## 5. Discussion

The agreement between the calculated and observed values of the overshoot, as presented in the table, indicates that the method of analysis described in section 2 leads to effective boundary conditions at the orifice with an accuracy that should be adequate for all practical purposes.

The analysis is derived for the conditions that the gas is at rest ahead of an incident shock wave and that the orifice is located at the end of the duct. If the incident wave is not a shock but a wave of gradual pressure change, the magnitude of the overshoot would rapidly decrease with decreasing steepness of the wave front. Although such cases could be treated by the method of reference [14], they are not likely to be of importance; for instance, the records in reference [10] show no evidence of the overshoot.

A prescribed initial steady flow introduces no serious complications. One must merely take into account that the initial pressures and flow velocities in the duct and in the orifice are not equal. If the initial flow velocity is high

enough, it may also become necessary to correct equation (2) for the increased travel time of a wave across the orifice<sup>4</sup>).

If the orifice is located inside the duct, the problem of dealing with the nonsteady mixing process on the downstream side has not yet been solved. One might use an analysis based on CHEN's assumptions [11], or determine the effective boundary conditions in the same manner as if the orifice were located at the end of the duct. The required value of  $\alpha_{eff}$ , if not known, could be computed from pressure records taken both upstream and downstream of the orifice. In the absence of experimental verification, such calculations would have to be considered as tentative.

Acknowledgment

The author is greatly indebted to Mr. L. M. SOMERS who carried out the shock tube experiments.

Notation

- $a$  speed of sound;
- $D$  duct diameter;
- $I(\tau)$  transition function (see Figure 4);
- $L$  distance from orifice;
- $M_S$  shock Mach number;
- $n$  number of holes in orifice plate;
- $p$  absolute pressure;
- $t$  time;
- $u$  flow velocity;
- $w$  shock velocity;
- $\alpha$  ratio of orifice area to duct area;
- $\alpha_{eff}$  effective value of  $\alpha$  because of vena contracta;
- $\gamma$  ratio of specific heats;
- $\tau$  nondimensional time [see equation (2)];
- 0 conditions before arrival of incident shock wave;
- 1 conditions behind incident shock wave;
- 2 conditions behind transmitted shock wave;
- $e$  effective conditions at the end of the duct;
- $i$  effective conditions at the end of the duct immediately after arrival of the incident shock wave;
- $m$  condition of maximum pressure in the duct behind the shock front of the reflected wave;
- $\infty$  final steady-flow conditions;
- ' a prime indicates the effective conditions in the orifice.



## REFERENCES

- [1] G. RUDINGER, *Boundary Conditions in Nonsteady Flow*, Proc. IX Int. Congr. Appl. Mech., Brussels, Sept. 1956 (to be published).
- [2] H. SPRENGER, *Neue Erkenntnisse über thermische Effekte beim Expandieren von Gasen*, Z. Schweisstechnik 1956, Nr. 10, 3–15.
- [3] R. COURANT and K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience Publishers, Inc., New York 1948).
- [4] E. JENNY, *Berechnungen und Modellversuche über Druckwellen grosser Amplituden in Auspuff-Leitungen*, ETH Thesis (Ameba-Druck, Basel 1949).
- [5] G. RUDINGER, *Wave Diagrams for Nonsteady Flow in Ducts* (D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton 1955).
- [6] J. E. BOWMAN and G. B. F. NIBLETT, *The Passage of a Plane Shock Wave Through a Wire Gauze*, Proc. phys. Soc., London [B] 68 (12), 1008–1016 (1955).
- [7] D. S. DOSANJH, *Interaction of Grids with Traveling Shock Waves*, NACA TN 3680 (Sept. 1956).
- [8] W. J. FRANKS, *Interaction of a Shock Wave with a Wire Screen*, Inst. of Aerophysics, Univ. of Toronto, UTIA Tech. Note No. 13 (May 1957).
- [9] P. HADLATSCH, *Reibende Gasströmung durch Drosselstellen sowie Reflexion anbrandender Druckwellen mit grossen Amplituden*, Z. VDI 95, 503–510, 706–711, 1040 (1953).
- [10] H. ZELLER, *Beitrag zur eindimensionalen und nichtstationären Gasströmung mit Reibung und Wärmeleitung, insbesondere in Rohren mit unstetigen Querschnittsänderungen*, Forschungsberichte d. Wirtschafts- u. Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen Nr. 175 (Westdeutscher Verlag, Köln 1955).
- [11] T. N. CHEN, *Instationäre Randbedingung für die durch eine Querschnittsänderung gebildete Übergangszone in einer instationären, eindimensionalen Gasströmung*, Z. angew. Math. Phys. 6, 274–296 (1955).
- [12] G. RUDINGER, *On the Reflection of Shock Waves from an Open End of a Duct*, J. appl. Phys. 26, 981–993 (1955).
- [13] R. E. DUFF and R. N. HOLLYER jr., *The Diffraction of Shock Waves Through Obstacles with Various Openings in Their Front and Back Surfaces*, Eng. Res. Inst., Univ. of Michigan, Rept. No. 50-3, Nov. 7, 1950 (ASTIA ATI No. 94435).
- [14] G. RUDINGER, *The Reflection of Pressure Waves of Finite Amplitude from an Open End of a Duct*, J. Fluid Mech. 3, 48–66 (1957).
- [15] W. BLEAKNEY, D. R. WHITE and W. C. GRIFFITH, *Measurement of Diffraction of Shock Waves and Resulting Loading of Structures*, J. appl. Mech. 17, 439–444 (1950).
- [16] L. TING, *Diffraction of Disturbances Around a Convex Right Corner with Application in Acoustics and Wing-Body Interference*, Polytechn. Inst. of Brooklyn PIBAL Rept. No. 307 (August 1956) (ASTIA No. AD-96510).

## Zusammenfassung

Die Strömungserscheinungen, die auftreten, wenn eine Stosselle an ein mit einer Blende versehenes Rohrende gelangt, werden besprochen. Üblicherweise werden sie unter der Annahme berechnet, dass man für stetige und unstetige Strömungen die gleichen Randwertbedingungen in der Blende verwenden kann. Die reflektierte Welle ist dann entweder eine einfache Expansionswelle oder eine Stosselle, je nach der Stärke des einfallenden Stosses und der Blendenöffnung. Dieses Resultat stimmt nicht mit experimentellen Beobachtungen überein, die



gezeigt haben, dass die reflektierte Welle immer aus einer Stossfront besteht, der eine Expansionswelle nachläuft, bis der Druck genügend vermindert ist, um eine stetige Strömung zu ermöglichen. Die Überlagerung dieser Wellen erzeugt eine Druckspitze («overshoot»), die den in der üblichen Weise berechneten Maximaldruck um einen erheblichen Bruchteil des Druckanstieges in der einfallenden Stosswelle übersteigen kann. Die Unzulänglichkeit der üblichen Methode kann man qualitativ durch die Verzögerung erklären, die notwendig ist, um eine stetige Strömung in der Blende herzustellen, nachdem die einfallende Stosswelle eine Störung erzeugt hat. Die gegenwärtige Untersuchung zeigt, dass man die Überdruckspitze in Abhängigkeit von der Blendengrösse, der Stoßstärke und der Entfernung von der Blende auf Grund einiger einleuchtender Annahmen berechnen kann.

Es ergibt sich, dass die Überdruckspitze besonders dann bemerkbar wird, wenn die Druckänderung über die gesamte reflektierte Welle verschwindet. Unter dieser Bedingung und für Stosswellen verschwindender Stärke wird sie anfänglich genau so gross wie der Drucksprung der einfallenden Stosswelle. Mit wachsender Stärke des einfallenden Stosses verringert sich die relative Grösse der Überdruckspitze, während ihre absolute Grösse bis zu einem Maximum von beinahe 40% des Druckes vor der einfallenden Stosswelle ansteigt. Dieses Maximum wird bei einem ungefähren Druckverhältnis der einfallenden Stosswelle von 2,3 erreicht. Die Überdruckspitze wird ziemlich unbedeutend, wenn das Druckverhältnis den Wert 3 überschreitet.

Experimente mit einem Stosswellenrohr werden dann beschrieben, in denen die Druckveränderungen der einfallenden und reflektierten Wellen für verschiedene Entfernungen von der Blende, Stoßstärken und Blendenöffnungen aufgezeichnet werden können. Die gemessenen Überdruckwerte stimmen mit den gerechneten in allen Fällen gut überein.

Es kann erwünscht sein, die Überdruckspitze zu beseitigen, und die Möglichkeit einer speziellen Blendenkonstruktion wird gezeigt.

Die Berechnung der Überdruckspitze ist für eine einfallende Stosswelle abgeleitet, unter der Bedingung, dass das Gas vor der einfallenden Welle in Ruhe ist und dass sich die Blende am Ende des Rohres befindet. Erweiterungen der Methode auf beliebige Wellen, anfängliche Strömungen und Blenden im Inneren des Rohres sind kurz besprochen.

(Received: September 17, 1957.)

# Zur Bestimmung der Eigenwerte schiefssymmetrischer Matrizen

VON HEINZ RUTISHAUSER, Zürich, Schweiz<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Mit einem von W. GIVENS<sup>2)</sup> vorgeschlagenen Verfahren gelingt es bekanntlich, eine  $n$ -reihige symmetrische Matrix  $A$  auf Jacobische Form zu transformieren:

$$J = T^{-1}AT = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_2 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_n \end{vmatrix} \quad (1')$$

Im Verlaufe des Verfahrens werden auf  $A$  nacheinander  $\frac{1}{2}(n-1)$  ( $n-2$ ) orthogonale Transformationen  $T_{ik}$  ( $i < k$ ) folgender Art angewendet:

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \cos \varphi & -\sin \varphi & \\ & & \sin \varphi & \cos \varphi & \\ & & & & \ddots \end{vmatrix} \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

<sup>2)</sup> Siehe [1] im Literaturverzeichnis, Seite 590; die dort mit  $\beta_i$  bezeichneten Grössen erscheinen in dieser Arbeit als  $\sqrt{\beta_i}$ .

deren Reihenfolge sowie die Drehwinkel  $q$  so bestimmt werden, dass nach Ausführung der Transformation mit  $T_{ik}$  die Matrixelemente in den Positionen  $i-1, k$  und  $k, i-1$  ausgelöscht sind, aber die schon hergestellten Nullen nicht mehr zerstört werden. W. GIVENS schlägt die Reihenfolge  $T_{23}, T_{24}, \dots, T_{2n}, T_{34}, \dots$  usw. bis  $T_{n-1, n}$  vor; damit erhält man die Gestalt (1), und  $T$  ist das Produkt der  $T_{ik}$ .

Man könnte versuchen, aus der Matrix (1) zunächst das charakteristische Polynom zu bestimmen, um dann aus diesem die Eigenwerte zu berechnen. Die Praxis zeigt jedoch, dass dieser Weg nur für verhältnismässig kleines  $n$  gangbar ist; für die Bestimmung der Eigenwerte einer symmetrischen Matrix mit grösserer Reihenzahl ist das charakteristische Polynom gänzlich ungeeignet.

Es ist vielmehr zweckmässig, die Eigenwerte mit dem bei GIVENS [1] angegebenen Verfahren oder dann mit Hilfe des Quotienten-Differenzen-Algorithmus [2] zu bestimmen. Die Matrix (1) ist nämlich ähnlich zur Matrix

$$J_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 1 & & \\ & \beta_2 & & \ddots & \\ & & & \alpha_{n-1} & 1 \\ 0 & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{vmatrix}, \quad (3)$$

und für diese liefern die Formeln (2) in [2], Kap. III, sofort den Anschluss an den QD-Algorithmus. Es ist nach den bisherigen Erfahrungen allerdings zweckmässig, die Matrix (1) zuerst durch eine Nullpunktsverschiebung in der  $\lambda$ -Ebene positiv definit zu machen; es werden dadurch sämtliche  $q$  und  $e$  des QD-Schemas positiv, was dem Verfahren eine wesentlich bessere numerische Stabilität verleiht.

## 2. Das Givenssche Verfahren für schiefsymmetrische Matrizen

Wendet man die von GIVENS angegebenen Einzeldrehungen  $T_{ik}$  nach denselben Formeln und in derselben Reihenfolge auf eine schiefsymmetrische Matrix  $A$  an, so gelingt es ebenfalls, alle Matrixelemente  $a_{ik}$  mit  $|i-k| > 1$  zu Null zu machen. Weil auch die schiefe Symmetrie bei orthogonalen Transformationen erhalten bleibt, resultiert schliesslich eine schief-Jacobische

Matrix:

$$J = T^{-1} A T = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ -\sqrt{\beta_1} & 0 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & -\sqrt{\beta_2} & & \ddots & \\ & & & & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & & -\sqrt{\beta_{n-1}} & 0 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

wobei alle  $\beta_i$  positiv sind und auch alle Wurzelvorzeichen positiv gemacht werden können. Man könnte hier wie in Abschnitt 1 den Anschluss an den QD-Algorithmus herstellen, doch ist dies aus verschiedenen Gründen nicht zweckmässig. Wir wollen vielmehr von einer Umformung Gebrauch machen, die nicht nur diese Nachteile vermeidet, sondern auch noch die Zahl der zu bestimmenden Eigenwerte auf die Hälfte zu reduzieren gestattet.

### 3. Der QD-Algorithmus für die Grössen $\mu = -\lambda^2$

Die Matrix (4) ist ähnlich zur Matrix

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 1 & & \\ & -\beta_2 & & \ddots & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & -\beta_{n-1} & 0 \end{vmatrix},$$

ihre Eigenwerte  $\lambda_i$  sind somit die Pole des endlichen Kettenbruchs

$$g(z) = \frac{1}{z} + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z} + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{z}. \quad (5)$$

Wir können hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $n$  gerade sei; andernfalls rändert man die Matrix (4) rechts und unten mit Nullen was der Einführung eines zusätzlichen  $\beta_n = 0$  gleichkommt<sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup> Dadurch wird 0 zu einem doppelten Eigenwert. Der Kettenbruch (5) hat trotzdem nur den einfachen Pol  $z = 0$ , der erst durch die beim Übergang zu (6) erfolgende Division durch  $z$  zu einem doppelten wird. Durch die Einführung der neuen Variablen  $t = -z^2$  wird daher  $t = 0$  ein einfacher Pol der Funktion  $f(t)$ .

Der Kettenbruch (5) kann durch Äquivalenztransformation in

$$g(z) = \frac{z}{z^2} + \frac{\beta_1}{1} + \frac{\beta_2}{z^2} + \frac{\beta_3}{1} + \dots + \frac{\beta_{n-2}}{z^2} + \frac{\beta_{n-1}}{1}$$

umgewandelt werden, oder mit der neuen Variabeln  $t = -z^2$  und nach Division durch  $z$ :

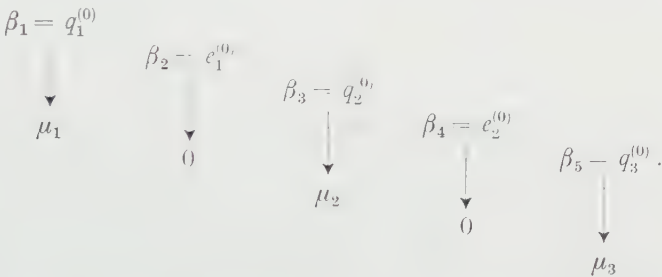
$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{\beta_1}{1} - \frac{\beta_2}{t} - \frac{\beta_3}{1} - \dots - \frac{\beta_{n-2}}{t} - \frac{\beta_{n-1}}{1}. \tag{6}$$

Wir haben damit einen Stieltjes-Kettenbruch gewonnen, dessen Pole  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{n/2}$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_j = -\lambda_{n+1-j}$ ) von (4) wie folgt zusammenhängen:

$$\mu_j = -\lambda_j^2 \quad \left( j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \right). \tag{7}$$

Andererseits stellt man durch Vergleich von (6) mit [2], Satz 1 (S. 14), sofort fest, dass das zur Funktion  $f(t)$  gehörige QD-Schema die  $\beta_i$  als oberste Schrägreihe besitzt; nach [2], Satz 5 (S. 18), erhält man daher ihre Pole als Grenzwerte der  $q$ -Kolonnen. Damit ergibt sich folgende

**Regel zur Bestimmung der  $\mu_i = -\lambda_i^2$ :** Man schreibt die in (4) auftretenden  $\beta_i$  als oberste Schrägreihe eines QD-Schemas an und setzt mit Hilfe der Rhombenregeln (siehe [2], Kapitel II, § 4) nach unten fort:



Es ist zu beachten, dass auf diese Weise nur  $n/2$  Eigenwerte bestimmt werden müssen und dass alle  $q$  und  $e$  von selbst positiv oder Null werden, was sich auf die Rundungsfehler günstig auswirkt.

4. Numerisches Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 24 & 120 \\ -1 & 0 & -4 & -18 & -96 & -600 \\ -2 & 4 & 0 & 9 & 72 & 600 \\ -6 & 18 & -9 & 0 & -16 & -200 \\ -24 & 96 & -72 & 16 & 0 & 25 \\ -120 & 600 & -600 & 200 & -25 & 0 \end{bmatrix}$$

wird durch 10 Drehungen in

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 122,5439 & & & & & 0 \\ -122,5439 & 0 & 878,3873 & & & & \\ & -878,3873 & 0 & 60,48976 & & & \\ & & -60,48976 & 0 & 21,68498 & & \\ & & & -21,68498 & 0 & 2,920008 & \\ & 0 & & & -2,920008 & 0 & \end{pmatrix}$$

transformiert. Durch Anwendung der obigen Regel erhält man damit das folgende QD-Schema:

$q_1$	$e_1$	$q_2$	$e_2$	$q_3$
15 017,00				
	771 564,2			
786 581,2		3 659,011		
	3 589,155		470,238 6	
790 170,4		540,095		8,526 446
	2,453 246		7,423 634	
790 172,9		545,065		1,102 812
	0,001 692		0,015 020	
790 172,9		545,078		1,087 792
	0,000 001		0,000 030	
$\mu_1 = \underline{790\,172,9}$		$\mu_2 = \underline{545,078}$		$\mu_3 = \underline{1,087\,762}$

Also

$$\lambda_{1,6} = \pm 888,917 i, \quad \lambda_{2,5} = \pm 23,3469 i, \quad \lambda_{3,4} = \pm 1,042958 i.$$

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. GIVENS, *A Method of Computing Eigenvalues and Eigenvectors Suggested by Classical Results on Symmetric Matrices*, Nat. Bur. Stand., Applied Mathematics Series, 29, 117–122 (1953).
- [2] H. RUTISHAUSER, *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Mitteilung Nr. 1, aus dem Institut für angewandte Mathematik (Verlag Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1957).

## Summary

GIVENS's method of reducing a symmetric matrix to Jacobi form works equally well for skew symmetric matrices. The author shows how the eigenvalues of the resulting skew-symmetric Jacobi matrix are obtained with the aid of the Quotient Difference Algorithm [2]. The theory of continued fractions allows to set the QD-table for the negative squares of the eigenvalues to be set up direct, which considerably reduces computing time.

(Eingegangen: 25. November 1957.)



## Einige optische und kinematische Effekte in der interstellaren Raumfahrt

Von EUGEN SÄNGER, Stuttgart, Deutschland<sup>1)</sup>

In der Raketentechnik ist die aus der Masseneinheit des Treibstoffes gewinnbare Energie von grundlegendster Bedeutung und die technische Realisierung des Einsteinschen Massenäquivalentes

$$\frac{E}{m} = c^2 = 2,15 \cdot 10^{13} \text{ kcal/kg} \quad (1)$$

das letzte Ziel aller Anstrengungen.

Von dieser völligen Zerstrahlung der Masse in Energie ist man indes technisch noch ziemlich entfernt, und man kann den Grad der jeweils erreichten Annäherung an den Idealprozess durch eine Art Umwandlungsgrad  $\varepsilon$  der Materie in Energie bei wirklich verfügbaren Prozessen charakterisieren, etwa nach der Beziehung

$$\frac{E_1}{m} = \varepsilon c^2 \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \frac{E_1}{m c^2}, \quad (2)$$

wenn  $E_1$  der tatsächliche Energiegewinn je Masseneinheit des jeweiligen Prozesses ist.

Die klassischen Raketentreibstoffkombinationen, wie Kohlenwasserstoffe-Flüssigsauerstoff, Alkohole-Stickoxyde usw., ergeben Energieausbeuten um 2500 kcal/kg, das heisst  $\varepsilon \sim 1,2 \cdot 10^{-10}$ .

Neuerdings werden auch energiereichere chemische Treibstoffkombinationen [1]<sup>2)</sup> mehr und mehr beachtet, zum Beispiel die Brennstoffe Wasserstoff, Bor, Lithium, Aluminium usw. in ihren zahlreichen Verbindungen in Kombination mit Sauerstoff, Ozon, Fluor usw. mit Energieausbeuten um 4000 kcal/kg, das heisst  $\varepsilon \sim 2 \cdot 10^{-10}$ .

Daneben bestehen auch noch Bemühungen um eine Gruppe noch als chemisch anzusprechender Treibstoffe, die aus freien Radikalen bestehen, wie atomarer Wasserstoff, atomarer Stickstoff usw. [1], mit Energieausbeuten bis zu  $E_1 = 50000 \text{ kcal/kg}$ , das heisst  $\varepsilon \sim 2,3 \cdot 10^{-9}$ .

Wesentlich höhere Energieausbeuten sind erst mit den Kernreaktionen verfügbar geworden, von denen die bekannten Kernspaltreaktionen schon in

<sup>1)</sup> Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe e. V., Stuttgart-Flughafen.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 599.

ein Stadium technischer Anwendungen, wenn auch noch nicht in der Rakete-technik [2], getreten sind und Energieausbeuten um  $E_1 = 1,3 \cdot 10^{10}$  kcal/kg also  $\varepsilon \sim 6 \cdot 10^{-4}$  aufweisen.

Noch höhere Energieausbeuten von  $E_1 = 1,6 \cdot 10^{11}$  kcal/kg und damit  $\varepsilon \sim 7 \cdot 10^{-3}$  zeigen die Kernaufbaureaktionen von den Wasserstoffen zum Helium, deren technische Verwendung in explosiver Form als Bombe geläufig ist, während die Verwendung der kontinuierlichen Reaktion [3] offenbar bevorzugt ist, wenn auch zunächst wieder nicht in der Raketentechnik.

Auch die vollständige Zerstrahlung der Materie mit  $E_1 = E = 2,15 \cdot 10^{10}$  kcal/kg und  $\varepsilon = 1$  tritt mehr und mehr in den Bereich des physikalischen Experimentes, beispielsweise mit dem Elektron-Positron-Paar, mit den Mesonen, Antimeson-Paaren und neuerdings mit dem Paar Proton-Antiproton.

Die Physiker fassen bereits die visionäre Möglichkeit einer Antimaterie im Auge, in deren Atomkernen vielleicht Protonen und Neutronen durch Antiprotonen und Antineutronen ersetzt sind und deren Atomhülle nicht aus Elektronen, sondern aus Positronen besteht und die mit gewöhnlicher Materie wahrscheinlich spontan zerstrahlt, das heisst sich vollständig in lichtschnellen Feldquanten, zum Beispiel Photonen, verwandelt, also die Analogie von Masse und Energie hundertprozentig realisiert.

Die technische Benützung dieser Reaktion in Raketen würde unmittelbar zur totalen Photonenrakete führen [4–12, 16], doch hat schon J. ACKERET selbst frühzeitig erkannt [5], dass die eigentlichen Rückstossphotonen nicht notwendigerweise identisch mit den diskreten Zerstrahlungsphotonen der Materie, das heisst der Treibstoffe, sein müssen, sondern dass sie zweckmässiger aus der kontinuierlichen Strahlung eines Schwarzstrahlers bestehen. Die Bedenken, dass derartige Schwarzstrahler als feste Körper nicht genügend hohe Temperaturen erlauben, wiegen heute geringer, seit man schwarzstrahlende Gasplasmen fast jeder beliebigen Temperatur technisch zugänglich macht [15].

In die bekannte [5] Ackeretsche relativistische Raketengrundgleichung

$$\frac{m_e}{m_{e0}} = \left( \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{c/2w} \quad (5)$$

für den Zusammenhang zwischen dem Verhältnis von End-Eigenmasse  $m_e$  des Fahrzeuges zu seiner Anfangs-Eigenmasse  $m_{e0}$  und dem Verhältnis der relativen Fahrtgeschwindigkeit  $v$  zur Lichtgeschwindigkeit  $c$  (dieses Verhältnis  $v/c$  wird oft als Einstein-Zahl der Raumfahrt bezeichnet) kann man für die Auspuffgeschwindigkeit  $w$  relativ zum Fahrzeug den Ausdruck

$$w = c \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} \quad (4)$$

setzen [10, 12], wenn die gesamte Treibstoffmasse durch die aus ihr freigesetzte Energie auf die Geschwindigkeit  $w$  beschleunigt wird (zum Beispiel

thermische Atomrakete), und

$$w = \varepsilon c, \quad (5)$$

wenn nur die freigesetzte Energie relativ zum Fahrzeug auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt wird, die inerte Restmasse aber kontinuierlich und geschwindigkeitslos gegenüber dem Fahrzeug von Bord gegeben wird (partielle Photonenraketen mit  $\varepsilon < 1$ ).

Für  $\varepsilon \rightarrow 1$  münden natürlich beide Raketenarten in die sogenannte totale Photonenrakete, für  $\varepsilon < 1$  ergibt zwar die durch Gleichung (4) gekennzeichnete, manchmal als «adiabatisch» bezeichnete Raketenart immer höhere Fahrgeschwindigkeiten als die partiellen Photonenraketen nach Gleichung (5), doch nimmt man mitunter an, dass für  $0 \ll \varepsilon < 1$  die letztere Art technisch leichter realisierbar sein könnte, wenn einmal die Kernreaktionen entsprechend hoher  $\varepsilon$  verfügbar sind.

Jedenfalls folgt aber aus den Grundgleichungen der beiden Atomraketenarten

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - (m_e/m_{e0})^2 \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}}{1 + (m_e/m_{e0})^2 \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}} \quad (4a)$$

und

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - (m_e/m_{e0})^{2\varepsilon}}{1 + (m_e/m_{e0})^{2\varepsilon}}, \quad (5a),$$

dass für die im schwebefreien und widerstandsfreien Weltraum grundsätzlich möglichen sehr grossen Werte von  $m_{e0}/m_e$  sogar schon bei den Energieumwandlungsgraden  $\varepsilon$  der Kernaufbaureaktionen und natürlich erst recht bei jenen der vollständigen Materiezerstrahlung ( $\varepsilon \rightarrow 1$ ) die Einstein-Zahl  $v/c$  der Raumfahrt sehr gegen Eins gehen kann, also alle Effekte der speziellen Relativitätsmechanik stark fühlbar werden.

Die Raketengrundgleichungen (4a) und (5a) gelten unabhängig vom zeitlichen Verlauf der Beschleunigung des Fahrzeuges, sie gelten also insbesondere auch für den praktisch sehr wichtigen Fall, dass die an Bord gemessene Eigenbeschleunigung  $b_e$  über der Eigenzeit  $t_e$  konstant ist, etwa gleich dem der Besatzung von der Erde her gewohntesten Wert  $b_e \doteq g \doteq 10 \text{ m/s}^2$ .

Man erhält die wesentlichsten kinematischen und dynamischen Grössen einer solchen gleichförmig eigenbeschleunigten Fahrt über dem Relativweg  $s$  in bekannter Weise [12, 16] zu folgenden Werten:

Einstein-Zahl am Ende der Beschleunigungsperiode:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + b_e s/c^2)^2}}. \quad (6)$$

An Bord gemessene Zeit  $t_e$  der gesamten Beschleunigungsperiode

$$t_e = \frac{c}{b_e} \operatorname{arcosh} \left( 1 + \frac{b_e s}{c^2} \right) \quad (7)$$

bzw. für

$$\frac{b_e s}{c^2} \gg 1, \quad t_e \sim \frac{c}{b_e} \cdot \ln \frac{2 b_e s}{c^2} = \frac{c}{b_e} \cdot \ln \frac{m_{e0}}{m_e}. \quad (7)$$

Nehmen wir nach diesen an sich bekannten Vorbemerkungen nun an, ein entsprechendes Raumfahrzeug würde von einer Aussenstation unserer Erde in Richtung eines beliebigen, viele Lichtjahre von uns entfernten Fixsterns starten und zur besseren Bequemlichkeit der Reisenden also mit der an Bord messbaren und physiologisch empfundenen Eigenbeschleunigung von rund  $10 \text{ m/s}^2$ , die über der gleichfalls an Bord gemessenen Eigenzeit konstant bleibt. Dabei behalte die Besatzung sowohl den Zielstern als auch das gesamte übrige Firmament ständig im Auge.

Infolge des relativistischen, also quadratischen Doppler-Effektes

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 - v/c \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (8)$$

ändert das aus einer Richtung, die zur Flugrichtung den Winkel  $\vartheta$  einschliesst, von einem Stern kommende Licht seine Wellenlänge  $\lambda$  und damit seine Farbe in Abhängigkeit von diesem Winkel  $\vartheta$  und von der Einstein-Zahl  $v/c$  des Fluges.

Für den Zielstern ist  $\vartheta = 0$ , und es handelt sich um eine Blauverschiebung

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}, \quad (9)$$

also um eine Wellenlängen-Verkürzung im genau gleichen Verhältnis wie die Massenabnahme  $m_e/m_{e0}$  einer totalen Photonenrakete nach Gleichungen (3), (4) und (5).

Für den Startstern ist  $\vartheta = \pi$ , und es handelt sich um eine Rotverschiebung

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (10)$$

also um eine Wellenlängenvergrößerung wieder genau entsprechend dem Massenverhältnis  $m_{e0}/m_e$  einer totalen Photonenrakete.

Wir dürfen der Einfachheit halber annehmen, dass die Sterne des Firmamentes, von dem noch ruhenden Raumfahrzeug aus gesehen, alle eine mittlere gelbe Farbe von vielleicht  $\lambda_0 = 5900 \text{ \AA}$  haben.

Mit anwachsender Fahrtgeschwindigkeit verfärbt sich der Startstern von Gelb nach Orange und Rot, um schliesslich die langwellige Sichtbarkeitsgrenze von  $\lambda = 8000 \text{ \AA}$  gegen Ultrarot bei  $v/c = 0,297$  zu erreichen.

Mit weiter wachsender Fahrtgeschwindigkeit bildet sich um den unsichtbar gewordenen Startstern ein kreisförmiger Fleck von wachsendem Durchmesser, aus dem alle Sterne nur mehr ultrarotes Licht ins Fahrzeug gelangen lassen, also für das Auge unsichtbar sind. Wie die weiteren Überlegungen noch zeige

werden, wächst dieser blinde Heckfleck mit sehr hohen Einstein-Zahlen fast über das ganze Firmament bis in die Nähe des Zielsternes.

Während dieses Vorganges verfärbt sich auch der Zielstern von seinem ursprünglichen Gelb von  $\lambda_0 = 5900 \text{ \AA}$  über Grün, Blau und Violett, um schliesslich die kurzwellige Sichtbarkeitsgrenze von  $\lambda = 4000 \text{ \AA}$  gegen Ultraviolett bei  $v/c = 0,37$  zu erreichen.

Bei weiterer Steigerung der Fahrtgeschwindigkeit über die Einstein-Zahl 0,37 hinaus bildet sich auch um den nun für das freie Auge unsichtbar gewordenen Zielstern ein kreisförmiger dunkler Fleck wachsenden Durchmessers, in dem alle Sterne unsichtbar geworden sind und nurmehr ultraviolettes oder noch kurzwelligeres Licht ins Fahrzeug gelangen lassen.

Bei allen Fahrt-Einstein-Zahlen über 0,37 umgibt also den Startstern ein grösserer und den Zielstern ein kleinerer dunkler kreisförmiger Fleck, und zwischen den beiden Begrenzungskreisen dieser Flecken sind alle am Firmament sichtbaren Sterne in zur Fahrtrichtung konzentrischen Kreisen in allen Farben des Regenbogens gefärbt, vorne bei Violett beginnend, über Blau, Grün, Gelb, Orange bis Rot am anderen Ende.

Bei einer bestimmten Flug-Einstein-Zahl  $v/c$  haben die blinden Flecken nach Gleichung (8) den halben Öffnungswinkel

$$\cos \vartheta = \frac{1 - \lambda/\lambda_0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{v/c}, \quad (11)$$

wobei  $\lambda/\lambda_0 = 4000/5900 = 0,68$  für den vorderen und  $\lambda/\lambda_0 = 8000/5900 = 1,36$  für den rückwärtigen blinden Fleck gilt.

Gleichung (11) zeigt nun für jeden Wert von  $\lambda/\lambda_0$ , dass bei sehr grossen Einstein-Zahlen  $v/c \rightarrow 1$ , jedenfalls  $\cos \vartheta \rightarrow 1$ , also  $\vartheta \rightarrow 0$  geht, das heisst, beide Kreise schliessen sich um den Zielstern.

Das ist offenbar nur dadurch möglich, dass der blinde Fleck um den Startstern zwar monoton immer grösser wird, bis er das ganze Firmament eingenommen hat, dass aber der Fleck um den Zielstern zwar anfangs auch grösser wird, dass dieser aber bald, und zwar bei  $v/c = 0,74$ , einen maximalen Durchmesser von etwa  $43^\circ$  erreicht, um dann bei weiter wachsender Einstein-Zahl wieder abzunehmen.

Auf der Regenbogenschale zwischen den beiden Begrenzungskreisen der blinden Flecken gibt es auch immer einen bestimmten, zur Flugrichtung senkrechten Kreis, auf dem die Sterne ihre ursprüngliche gelbe Farbe von  $\lambda_0 = 5900 \text{ \AA}$  behalten, dessen Richtungswinkel nach Gleichung (11) also durch  $\lambda/\lambda_0 = 1$  definiert ist, zu

$$\cos \vartheta = \frac{1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}}{v/c}. \quad (12)$$

Für sehr kleine Einstein-Zahlen ( $v/c \ll 1$ ) wird  $\vartheta \rightarrow \pi/2$ , also nur die Sterne in dem Grosskreis, der senkrecht zur Fahrtrichtung steht und in dessen Mittel-



punkt sich das Fahrzeug befindet, nur in diesem Grosskreis bleibt die Sternfarbe unverändert, da nur diese Sterne keine radiale Geschwindigkeitskomponente zum Fahrzeug haben, also keinen klassischen Doppler-Effekt erleiden und die Zeitdilatation noch vernachlässigbar ist.

Alle in Fahrtrichtung weiter vorne liegenden Sterne verschieben ihre Farbe nach Blau, alle hinter dieser Ebene liegenden Sterne verschieben ihre Farbe nach Rot.

Mit wachsenden Einstein-Zahlen des Fluges verschiebt sich dieser Sternkreis unveränderter Farbe nach vorne, das heisst gegen  $\vartheta < \pi/2$ , der Bereich vergrösserten Wellenlängen greift von der hinter dem Fahrzeug liegenden Halbkugel auch immer weiter nach vorne über, der Bereich verkleinerten Wellenlängen verschiebt sich auf einen immer kleiner werdenden kreisförmigen Fleck um den Zielstern.

Für sehr grosse Einstein-Zahlen ( $v/c \rightarrow 1$ ) wird  $\vartheta \rightarrow 0$ ; das heisst, der gelbe Ring unveränderter Sternfarbe zieht sich eng um den Zielstern zusammen.

Beispielsweise ist bei  $v/c = 0,99$  der Winkel  $\vartheta = 28^\circ$ , unter dem der gelbe Spektralkreis unseres Regenbogens erscheint. Seine innere Begrenzung gegen Ultraviolett liegt bei  $23^\circ$ , seine äussere Begrenzung gegen Ultrarot liegt bei  $35^\circ$ , der gesamte, vor dem Fahrzeug in der Fahrtrichtung liegende kreisrunde Regenbogen ist also nur mehr etwa  $12^\circ$  breit und wird mit weiter wachsender Fahrtgeschwindigkeit immer kleiner und schmaler.

Das übrige Firmament ausserhalb des Regenbogens, den wir ja besser einen siebenfarbigen Sternenbogen nennen würden, der Hintergrund ausserhalb dieses optischen Phänomens ist dagegen völlig schwarz, sowohl innerhalb (kurzwellig unsichtbar) als auch ausserhalb (langwellig unsichtbar) des ringförmigen Sternenbogens, der selbst in allen sieben Farben des Spektrums glänzt.

Der Öffnungswinkel  $2\vartheta$  jenes Kreises im Sternenbogen, der die ursprüngliche Farbe der Sterne unverändert beibehalten hat, ist ein genaues Mass der relativen Fahrzeuggeschwindigkeit zu den Sternen, insofern, als sich dieser Kreis mit wachsender Geschwindigkeit monoton und immer mehr um den Zielpunkt der Fahrt zusammenzieht und verengt, während der Farbenbogen selbst immer schmaler wird, also sich seine Spektralenden Violett und Rot ihrerseits immer näher an das unveränderte Gelb heranziehen.

Während dieses Farbphänomen also bei mässigen Fahrzeuggeschwindigkeiten sich tatsächlich über die gesamte Himmelskugel vom Zielstern bis zum Startstern erstreckt, bilden sich um diese beiden Punkte des Himmelsgewölbes mit wachsender Fluggeschwindigkeit kreisrunde dunkle Flecken, wobei derjenige um den Startstern immer grösser wird, so dass er schliesslich fast das ganze Himmelsgewölbe überdeckt, während nurmehr ein ganz schmaler und kleiner leuchtender Ring von Sternen schliesslich gelber Farbe den selbst unsichtbaren Zielstern umgibt.



Während die Ausbreitung des Phänomens in die Spektralfarben eine Folge des klassischen Doppler-Effektes, also des Zählers in Gleichung (8) ist, wird die Wanderung des gelben Kreises gegen den Zielstern durch die relativistische Zeitdilatation, also durch den Nenner im Bruch der Gleichung (8) bewirkt.

Neben diesen optischen Absonderlichkeiten weist die interstellare Raumfahrt auch mancherlei kinematische Eigentümlichkeiten auf, von denen einige wieder anhand der gleichförmig eigenbeschleunigten Bewegung kurz verfolgt werden mögen.

Wir nehmen an, ein Fahrzeug beabsichtige eine interstellare Fahrt etwa von einer Aussenstation unserer Erde nach einem in der astronomischen Entfernung  $S$  befindlichen Zielstern.

Die auf dieser Strecke  $S$  jeweils seit Antritt der Reise schon zurückgelegte astronomische Teilstrecke sei  $s$ . Die Fahrtstrecken  $S$  und  $s$  ruhen selbstverständlich im Sternensystem, das heisst, von dem bereits mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten Fahrzeug aus betrachtet, sind sowohl  $S$  wie  $s$  relativistisch verkürzt zu  $S'$  und  $s'$  nach der Beziehung

$$\frac{S'}{S} = \frac{s'}{s} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

Führen wir für  $v/c$  die Gleichung (6) ein, so ergibt sich

$$\frac{S'}{S} = \frac{s'}{s} = \frac{1}{1 + b_e s/c^2}. \quad (13a)$$

Der Betrag von  $c^2/b_e$  ist mit  $b_e = 9,81 \text{ m/s}^2$  ziemlich genau ein Lichtjahr ( $9,45 \cdot 10^{15} \text{ m}$ ).

Während die in gleichförmig eigenbeschleunigter Bewegung zurückgelegte astronomische Entfernung  $s$  natürlich monoton wächst, geht die vom Fahrzeug aus gemessene Länge  $s'$  dieser selben Entfernung  $s$  gegen den Grenzwert  $c^2/b_e$ , also zum Beispiel gegen ein Lichtjahr, und wird auch bei noch so langer Dauer der Reise nicht mehr grösser, wie gross auch immer die astronomische Gesamtlänge  $S$  der Reise sein mag.

Die Entfernung vom Startstern kann der Besatzung niemals grösser als ein Lichtjahr erscheinen, bei entsprechend grösseren Eigenbeschleunigungen  $b_e > 9,81 \text{ m/s}^2$  erschiene ihr die grösstmögliche Entfernung sogar noch kleiner, vom ausgestrahlten Photon aus erscheint die Entfernung zum ausstrahlenden Atom immer als Null.

Die vom jeweiligen Schiffsort aus noch bis zum Ziel zurückzulegende Entfernung ist für den irdischen Beobachter ( $S - s$ ). Vom Fahrzeug aus betrachtet, ist sie dagegen

$$(S' - s') = \frac{(S - s)}{1 + b_e s/c^2}. \quad (14)$$

Für  $s = 0$  ist beim Start naturgemäss  $(S' - s') = S$ .

Für  $s = S/2$  ist in Wegmitte  $(S' - s') = c^2/b_e$ , also zum Beispiel ein Lichtjahr unabhängig von  $S$ , wenn dieses hinlänglich gross ist.

Für  $s = S$  ist selbstverständlich  $(S' - s') = 0$ .

Von der Wegmitte aus, und aus dem Fahrzeug betrachtet, wird die noch verbleibende Reisstrecke nie grösser als  $c^2/b_e$ , zum Beispiel ein Lichtjahr, sein, auch wenn die astronomische Entfernung  $S$  der Gesamtreise Millionen von Lichtjahren beträgt.

Wenn von der Wegmitte an nicht weiter beschleunigt, sondern weiterhin gleichförmig eigenverzögert wird, und zwar wieder in zahlenmässig gleicher Stärke  $b_e$ , dann ist weiterhin bei jedem astronomischen  $(S - s)$  der vom Fahrzeug aus noch als verbleibend erscheinende Weg gleich dem entsprechenden zurückgelegten Weg in der Beschleunigungsperiode  $(S - s)$ , also

$$(S' - s') = \frac{(S - s)}{1 + b_e (S - s)/c^2}. \quad (15)$$

Obwohl also in Wegmitte auch das astronomisch noch Lichtjahrmillionen entfernte Ziel der Besatzung nicht ferner als 1 Lichtjahr erscheinen kann, nimmt auf der zweiten Weghälfte trotz der dauernd abnehmenden Fahrtgeschwindigkeit auch die vom Fahrzeug aus gemessene Entfernung zum Ziel monoton ab, bis sie schliesslich Null geworden ist und das Fahrzeug sein Ziel erreicht hat.

Auf einer solchen gleichförmig eigenverzögert durchlaufenen Wegstrecke spielen sich die eingangs geschilderten optischen Phänomene natürlich in umgekehrter zeitlicher Reihenfolge ab, bis schliesslich, am Zielstern angelangt, der ganze Sternhimmel wieder das gewohnte Gewimmel ziemlich gleichmässiger und gelblich gefärbter Sterne zeigt.

Der Nachrichtengehalt des von den Sternen in das Raumfahrzeug gelangenden Lichtes geht natürlich noch weit über seine Farbe hinaus und kann unter Umständen durch Aufnahmegeräte genügenden Auflösungsvermögen im Fahrzeug erschlossen werden.

Wir wollen einmal eine Reise in der mehrfach vorausgesetzten Weise von der Erde nach einem etwa 1000 Lichtjahre entfernten Stern ins Auge fassen.

Könnte die Besatzung während dieser ihrer Reise auf dem Zielstern Einzelheiten beobachten, so würde sie beim Start von der Erde die Verhältnisse auf dem Zielstern natürlich vor einem Jahrtausend sehen.

Während ihrer sehr schnellen Annäherung an den Zielstern würde ihr die Geschichte des Zielsternes im letzten Jahrtausend zeitrafferartig abrollen. Wenn sie beispielsweise nach zehn ihrer Eigenjahre am Zielstern ankäme, würde sie das, was sie dort studieren könnte, als die Gegenwartsverhältnisse bezeichnen. Etwas mehr als das ganze letzte Jahrtausend ihres Zielsternes hätte sie in 10 Jahren, also hundertmal schneller erlebt als ein Bewohner dieses Sternes. Während dieser Hinreise wären sowohl auf dem Zielstern als auch auf der Erde etwas über 1000 Jahre vergangen.

Könnte die Besatzung während ihrer Reise, nach rückwärts blickend, auch die Ereignisse auf der Erde beobachten, so würde ihr, wie schon ausgeführt, mit wachsender Fluggeschwindigkeit das von der Erde kommende Licht immer röter erscheinen und schliesslich die Wellenlänge von Funkwellen annehmen. Diese langen Wellen würden ihr im wesentlichen die Erdgeschichte während der zehn Erdenjahre seit dem Start berichten, so dass die Besatzung – am Zielstern angelangt – die Erde etwa im Zustand ihrer Abreise von dort beobachten würde, während auf der Erde inzwischen etwas über 1000 Jahre vergangen wären.

Hielte sich die Besatzung länger auf dem Zielstern auf, so würde sie den irdischen Rhythmus des irdischen Geschehens, jedoch gegenüber der Besatzungszeit 1000 Jahre in der Vergangenheit, beobachten.

Würde die Besatzung aber nach ihrer Ankunft auf dem Zielstern sofort umkehren und in gleicher Weise zurückfliegen, so würden während dieser Reise auf der Erde nochmals etwas über 1000 Jahre vergehen und auf dem Fahrzeug wieder 10 Jahre.

Würde die Besatzung während ihres Rückfluges die irdischen Verhältnisse beobachten, so würden ihr auch diese im hundertfachen Zeitraffertempo erscheinen.

Nach ihrer Rückkehr wären auf der Erde seit dem Antritt der Gesamtreise etwas über 2000 Jahre vergangen, auf dem Fahrzeug 20 Jahre.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. SÄNGER und I. BREDT, *Über einen Raketenantrieb für Fernbomber*, Deutsche Luftfahrtforschung UM 3538, Ainring 1944; Edition Robert Cor-nog, Santa Barbara, Kalifornien 1952; Verlag E. v. Olnhausen, Stuttgart 1957.
- [2] E. SÄNGER und I. SÄNGER-BREDT, *Mitteilung 6 des Forschungsinstitutes für Physik der Strahlantriebe* (Verlag Flugtechnik E. v. Olnhausen, Stuttgart 1956).
- [3] E. SÄNGER, *Stationäre Kernverbrennung in Raketen*, Astronautica Acta 1, H. 2, 61–88 (1955); NACA TM 1405 (Washington 1957).
- [4] ROBERT ESNAULT-PELTERIE, *L'Astronautique* (Lahure, Paris 1930).
- [5] J. ACKERET, *Zur Theorie der Raketen*, Helv. phys. Acta 19, 2 (1946).
- [6] E. SÄNGER, *A propos des limites de l'Astronautique*, L'Astronef 1, 8 (Paris 1950).
- [7] T. F. REINHARDT, *Unusual Applications of the Momentum Principle* (American Rocket Society, November 1951).
- [8] L. R. SHEPHERD, *Interstellar Flight*, J. Brit. interplan. Soc. 11, 4, 149 (1952).
- [9] E. SÄNGER, *Die physikalischen Grundlagen der Strahlantriebstechnik*, VDI-Forschungsheft 437 (Düsseldorf 1953).
- [10] E. SÄNGER, *Zur Theorie der Photonenraketen*; Ing.-Arch. 21, 3, 213 (1953); IV. Internationaler Astronautischer Kongress, Zürich 1953 (Laubscher, Biel 1954).
- [11] W. L. BADE, *Relativistic Rocket Theory*, Amer. J. Phys. 21, 310 (1953).

- [12] E. SÄNGER, *Zur Mechanik der Photonenstrahlantriebe*; Mitteilung 5 des Forschungsinstitutes für Physik der Strahlantriebe (R. Oldenbourg, München 1956); Mitteilung 6 des Forschungsinstitutes für Physik der Strahlantriebe (E. v. Olnhausen, Stuttgart 1956); Aero Dig. 73, Nr. 1, 68–73 (1956); J. Fusées, 1, Nr. 3, 253–259 (1956); Kongressbericht, VII. Internationaler Astronautischer Kongress, Rom 1956, Astronautica Acta 3, H. 2, 89–90 (1957); Verlag für ausländisches Schrifttum, Moskau 1957; Civiltà della Macchine, Rom 1956; J. Brit. interplan. Soc. 1958.
- [13] E. SÄNGER, *Gemeinsamkeit und Befriedigung der Luftfahrt und Raumfahrt im 20. Jahrhundert*, Frankfurter Allgemeine Zeitung, 24. November 1956; Weltraumfahrt 8, H. 1, 1–6 (1957); Universitas (engl. Ausgabe) 1, H. 3, 279–287 (1957).
- [14] E. SÄNGER, *Raumfahrt und die Erschliessung fremder Welten. Wie leben wir morgen* (Alfred-Kröner-Verlag, Stuttgart 1957); Atlantic Monthly 200, 4, 153 (1957); Universitas 12, 9, 967 (1957).
- [15] E. SÄNGER, *Zur Strahlungsphysik der Photonenstrahlantriebe und Waffenstrahlen*, Mitteilung 10 des Forschungsinstitutes für Physik der Strahlantriebe (R. Oldenbourg, München 1957).
- [16] J. ACKERET, *Über die Grenzen der Erreichbarkeit ferner Weltkörper*, Interavia 11, H. 12, 989–991 (1956).

### Summary

In interstellar astronautics, where flight velocities are comparable with the velocity of light, the stars appear to the crew in rainbow colours and all distances shrink for the crew so that no distances greater than in the order of light years seem to exist.

(Eingang: 4. September 1957.)

# Überschallströmung um Rumpf-Flügel-Anordnungen

Von ROBERT SAUER, München, Deutschland<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Das erste Problem, das in der theoretischen Gasdynamik für Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit in Angriff genommen und gelöst wurde, betraf die Berechnung von Auftrieb und Widerstand eines Profils in einem zweidimensionalen Überschallstrom. Es war J. ACKERET [1]<sup>2)</sup>, der diese Aufgabe vor mehr als 3 Jahrzehnten löste, indem er die Differentialgleichungen und Randbedingungen linearisierte und dadurch den Grundstein legte für eine lineare Theorie der Überschallströmungen. TH. v. KÁRMÁN [2] und seine Schüler entwickelten alsbald lineare Methoden für dreidimensionale Probleme, nämlich für Überschallströmungen um axial angeblasene Drehkörper und um Drehkörper unter kleinem Anstellwinkel [3]. Hierbei wurde die vom Drehkörper hervorgerufene Störung der Grundströmung durch eine Belegung der Körperachse mit gewissen Singularitäten (*Quellen*, *Senken* und zur Körperachse quergestellten *Dipolen*) dargestellt.

Im folgenden soll kurz über eine Verallgemeinerung dieses Singularitätenverfahrens durch J. MÜNCH [4] und D. SUSCHOWK [5] berichtet werden, bei der sich durch Hinzunahme höherer Singularitäten (*Multipole*) auch nicht dreh-symmetrische Körper mit geradliniger Achse (*„verbeulte Drehkörper“*) erfassen lassen. Diese Untersuchungen gewinnen durch Anwendung auf das *Interferenzproblem* für Überschall-Strömungen um *Rumpf-Flügel-Anordnungen* praktische Bedeutung, wie im letzten Abschnitt dieser Note gezeigt werden soll.

Die Arbeiten, über die hier berichtet wird, wurden teils von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert und teils unter Kontrakt AF 61(514)-1080 des ARDC durchgeführt.

## 2. Aufbau von Strömungsfeldern durch Multipol-Anordnungen

Das Geschwindigkeitspotential  $\varphi(x, r, \omega)$  als Funktion der Zylinderkoordinaten  $x, r, \omega$  für die der Grundströmung ( $M_\infty$  - Mach-Zahl der in Richtung der positiven  $x$ -Achse verlaufenden Grundströmung) zu überlagernde Stör-

<sup>1)</sup> Mathematisches Institut der Technischen Hochschule.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 605.



strömung genügt in der linearen Näherung der Differentialgleichung

$$\beta^2 \varphi_{xx} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r} \varphi_r - \frac{1}{r^2} \varphi_{\omega\omega} = 0, \quad \beta^2 = M_\infty^2 - 1 > 0. \quad (1)$$

Hierzu kommen folgende Anfangsbedingungen und weitere Forderungen:

- $$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \varphi = 0 \text{ auf dem vom Nullpunkt stromabwärts laufenden Mach-Kegel} \\ & x^2 - \beta^2 r^2 = 0, \quad x \geq 0 \text{ und oberhalb dieses Kegels;} \\ (b) \quad & \text{Singularitäten sind zugelassen auf der positiven } x\text{-Achse und unter-} \\ & \text{halb eines von einem Punkt } x = \sigma > 0 \text{ der positiven } x\text{-Achse aus-} \\ & \text{gehenden Mach-Kegels;} \\ (c) \quad & \text{Rechts-links-Symmetrie, das heisst } \varphi(x, r, +\omega) = \varphi(x, r, -\omega). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Der formale Fourier-Ansatz

$$\varphi(x, r, \omega) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(x, r) \cos k \omega \quad (3)$$

erfüllt die Symmetriebedingung (2c) und führt unter Berücksichtigung der Forderungen (2a, b) zu folgender formaler Lösung der Differentialgleichung (1)

$$\varphi^k(x, r) \sim \sum_{v=1}^{\infty} a_v^k (x^2 - \beta^2 r^2)^{v/2} Q_v^k \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 (r/x)^2}} \right); \quad (4)$$

dabei sind die  $Q_v^k$  Legendre-Funktionen der zweiten Art und die  $a_v^k$  zunächst unbestimmte Koeffizienten.

Aus einer Integralbeziehung zwischen den Legendre-Funktionen der zweiten Art und den Tschebyscheff-Polynomen

$$T_k(z) = \frac{1}{2} \left[ \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^k + \left( z - \sqrt{z^2 - 1} \right)^k \right] \quad (5)$$

ist die Lösung (4) gleichbedeutend mit

$$\varphi^k(x, r) = \int_0^{x-\beta r} f_k(\xi) \frac{T_k \left( \frac{x-\xi}{\beta r} \right) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 r^2}}, \quad f_k(\xi) = (-1)^k k! \sum_{v=1}^{\infty} \binom{v+k}{k} a_v^k \xi^v. \quad (6)$$

Für die Herleitung und genauere Diskussion der Gleichungen (4) und (6) und die Definition der Legendre-Funktionen der zweiten Art sei auf die Arbeiten von D. SUSCHOWK [5] verwiesen.

Der Spezialfall  $k = 0$ ,  $T_0(z) \equiv 1$  ist die bekannte Quell-Senken-Anordnung von TH. v. KÁRMÁN [2]

$$\varphi^0(x, r) = \int_0^{x-\beta r} \frac{f_0(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 r^2}},$$



der Spezialfall  $k = 1$ ,  $T_1(z) = z$  die bekannte Dipolanordnung von TSIEN [3]

$$\varphi^1(x, r) \cos \omega = \frac{1}{\beta r} \cos \omega \int_0^{1-\beta r} \frac{f_1(\xi) (x - \xi) d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2 r^2}}.$$

Die höheren Terme mit  $k = 2, 3, \dots$  sind Multipolanordnungen ( $2k$ -Pole) längs der positiven  $x$ -Achse.

Die Dipol-Anordnung ( $k = 1$ ) bewirkt – bei passender Festlegung der Funktion  $f_1(\xi)$  – eine Schrägstellung des durch  $\varphi^0(x, r)$  bestimmten Drehkörpers, die höheren Multipolanordnungen ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ) bewirken Verbeulungen des Drehkörpers.

Wenn wir uns bei den formalen Reihen in Gleichung (4) für die Funktionen  $\varphi^k(x, r)$  jeweils auf das erste Glied ( $\nu = 1$ ) beschränken,

$$a_1^k = b_k, \quad a_2^k = a_3^k = \dots = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

so spezialisiert sich Gleichung (3) zu

$$\varphi(x, r, \omega) \sim \sqrt{x^2 - \beta^2 r^2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k Q_1^k \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 (r/x)^2}} \right) \cos k \omega. \quad (7)$$

Die sich daraus ergebenden Geschwindigkeitskomponenten

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &\sim \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_k Q_0^k \cos k \omega, \\ \varphi_r &\sim \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left\{ Q_0^{k+1} + k \sqrt{\left( \frac{x}{\beta r} \right)^2 - 1} Q_1^k \right\} \cos k \omega, \\ \frac{1}{r} \varphi_\omega &\sim -\beta \sqrt{\left( \frac{x}{\beta r} \right)^2 - 1} \sum_{k=0}^{\infty} k b_k Q_1^k \sin k \omega \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

hängen nur von  $x/r$  und von  $\omega$  ab. Infolgedessen wird durch Gleichung (7) ein *konisches Strömungsfeld* mit dem Nullpunkt als Scheitel gegeben.

### 3. Verallgemeinerung des v. Kármánschen Quell-Senken-Verfahrens auf verbeulte Drehkörper

Beim v. Kármánschen Quell-Senken-Verfahren werden konische Strömungsfelder, welche für sich allein Strömungen um axial oder schief angeblasene Drehkegel mit Scheiteln  $\xi^{(q)}$  ( $q = 1, 2, \dots$ ) auf der  $x$ -Achse liefern würden, überlagert. Diese konischen Strömungsfelder ergeben sich mit  $x - \xi^{(q)}$  statt  $x$

aus den Gleichungen (8) durch Spezialisierung, indem jeweils nur die beiden ersten Glieder  $k = 0$  und  $k = 1$  in den Summen genommen werden. Man hat dann in diesen Strömungsfeldern die noch unbestimmten Konstanten  $b_0^{(1)}, b_1^{(1)}; b_0^{(2)}, b_1^{(2)}; b_0^{(3)}, b_1^{(3)}; \dots$  festzulegen. Dies geschieht dadurch, dass in geeignet gewählten Querschnittkreisen  $x = x^{(\mu)}$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) jeweils im obersten und untersten Punkt ( $\omega = 0, \omega = \pi$ ) Strömung in Richtung der Profiltangente verlangt wird. Diese Bedingung führt zu einem gestaffelten System linearer Gleichungen [6] für die  $b_0^{(1)}, b_0^{(2)}, b_0^{(3)}, \dots$  und einem ebensolchen System für die  $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, b_1^{(3)}, \dots$ .

Bei verbeulten Drehkörpern sind die Querschnitte  $x = x^{(\mu)}$  nicht mehr Kreise  $r^{(\mu)} = \text{const}$ , sondern von der Kreisform mehr oder weniger abweichende Kurven  $r^{(\mu)} = k^{(\mu)}(\omega)$ . Auf jeder dieser Querschnittkurven wählt man nun  $m + 1$  Punkte ( $\omega = 0, \omega = \omega_1, \dots, \omega = \omega_m = \pi$ ) und verlangt in diesen Punkten Strömung tangential zur Körperoberfläche. Auf diese Weise ergeben sich, wenn man in den Summen in den Gleichungen (8) jetzt bis  $k = m$  geht, für jeden Querschnitt  $x = x^{(\mu)}$  je  $m + 1$  lineare Gleichungen für die  $m + 1$  Konstanten  $b_0^{(\mu)}, b_1^{(\mu)}, \dots, b_m^{(\mu)}$ . Bezüglich  $\mu$  sind diese Gleichungssysteme gestaffelt, das heisst, man kann zuerst die  $b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_m^{(1)}$  berechnen, hernach die  $b_0^{(2)}, b_1^{(2)}, \dots, b_m^{(2)}$  usw.. Abgesehen von dem grösseren Rechenaufwand ist das Verfahren demnach ebenso einfach wie beim v. Kármánschen Quell-Senken-Verfahren für nicht verbeulte Drehkörper.

#### 4. Anwendung auf Rumpf-Flügel-Anordnungen

Das Interferenzproblem für die Überschallströmung um eine Rumpf-Flügel-Anordnung lässt sich unter der Annahme, dass die Vorderkante des Flügels eine Überschallkante ist, bekanntlich auf die Lösung der drei folgenden Aufgaben zurückführen [7]:

(a) Berechnung der Strömung um den Rumpf (Drehkörper) für sich allein und Bestimmung der von dieser Strömung am Flügel induzierten Normalkomponenten der Geschwindigkeit. Umdeutung dieser Normalkomponenten als Verbeulung des Flügels.

(b) Berechnung der Strömung um den verbeulten Flügel für sich allein und Bestimmung der von dieser Strömung an der Oberfläche des Rumpfes induzierten Normalkomponenten der Geschwindigkeit. Umdeutung dieser Normalkomponenten als Verbeulung des Rumpfes.

(c) Berechnung der Strömung um den verbeulten Rumpf für sich allein unter der Nebenbedingung, dass am Flügel (Ebene  $\omega = \pm \pi/2$ ) keine Normalkomponenten der Geschwindigkeit induziert werden.

Aufgabe (a) wird durch das v. Kármánsche Quell-Senken-Verfahren, Aufgabe (b) durch eine der üblichen Methoden der Tragflügeltheorie gelöst. Aufgabe (c) lässt sich mit dem in Abschnitt 3 beschriebenen allgemeineren Singularitätenverfahren behandeln. Hierbei treten in den Gleichungen (8) nur die

geraden Werte  $k = 0, 2, 4, \dots$  auf, weil für  $\omega = \pm \pi/2$  die Normalkomponente  $\varphi_{\omega}/r$  der Geschwindigkeit verschwinden muss.

Die praktische Durchführung des Verfahrens mit Hilfe des Münchener Rechenautomaten PERM soll demnächst erprobt werden.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. ACKERET, Z. Flugtech. 16, 72-74 (1925).
- [2] TH. v. KÁRMÁN und N. B. MOORE, Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. 1932, (Juni).
- [3] SHUE-SHEN TSIEN, J. aero. Sci. 5, 480-489 (1938).
- [4] J. MÜNCH, Z. angew. Math. Mech. 37, 51-63 (1957).
- [5] D. SUSCHOWK, Mitteilungen aus dem Mathematischen Institut der Technischen Hochschule München, Nr. 20 und Nr. 21 (1956).
- [6] R. SAUER, *Einführung in die theoretische Gasdynamik*, 2. Aufl. (Springer, 1951), S. 55-58.
- [7] H. J. STETTER, S.-B. bayer. Akad. Wiss., math.-nat. Klasse 1956, 61-86.

#### Summary

TH. v. KÁRMÁN's method for supersonic steady flow around slender bodies of revolution is generalized in such a manner that solutions are available not only for bodies of revolution but also for indented bodies. This method is then applied to the wing body interference problem by reducing the reaction of the wing to a small deformation of the body.

(Eingegangen: 28. August 1957.)

## Ein Beispiel zur Verwendung des Stosswellenrohres für Probleme der instationären Gasdynamik

VON HUBERT SCHARDIN, St-Louis (Ht-Rhin), Frankreich,  
und Weil am Rhein, Deutschland<sup>1)</sup>

### Einleitung

Im Jahre 1927 gab J. ACKERET im *Handbuch der Physik* [1]<sup>2)</sup> die erste zusammenfassende Darstellung der Gasdynamik. Wenn auch in den seitdem verflossenen drei Jahrzehnten dieses Gebiet einen ungeahnten Aufschwung genommen hat, so bildet doch auch heute noch dieser Handbuchartikel eine beachtenswerte Einführung in die «Gasdynamik».

Die experimentellen Unterlagen, die damals zur Verfügung standen, waren nicht sehr umfangreich. Es liegt heute ausserordentlich viel mehr Material vor. Dieses stammt in erster Linie aus den Versuchen in Überschallkanälen, deren es heute eine grosse Anzahl gibt. Hinzu kommen die Freiflugversuche. Die genaue Vermessung der Flugbahn eines abgeschleuderten Profils sowie die während des Fluges aufgenommenen Schlierenbilder erlauben dessen aerodynamische Daten zu ermitteln. Auch können vom fliegenden Profil mit Hilfe eines eingebauten Senders unmittelbar Messwerte empfangen werden, besonders dann, wenn man – wie bei einer Rakete – genügend Raum für Messgeräte zur Verfügung hat.

Ein weiteres Versuchsfeld liegt in der messtechnischen Verfolgung der Ausbreitung von Stosswellen, wie sie insbesondere bei der Detonation normaler Sprengstoffe, aber auch bei der Atombombe entstehen. Der Einsatz von nuklearen Sprengstoffen für umfangreiche gasdynamische Versuche verbietet sich von selbst; aber auch die Verwendung von klassischen Sprengstoffen ist nicht immer angebracht.

Nun gibt es aber eine wesentlich einfachere Methode, die Expansion hochgespannter Gase für gasdynamische Zwecke zu verwenden, nämlich im Stosswellenrohr. Grundsätzlich hat bereits VIEILLE [2, 3] das Stosswellenrohr mit der Zielsetzung der Erzeugung einer Stosswelle verwendet. Es finden sich bei ihm schon die folgenden charakteristischen Merkmale:

<sup>1)</sup> Mitarbeiter am Service Technique de l'Armée française.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 620.

1. Die Verwendung einer platzenden Membran zur Einleitung des Druckausgleichsvorganges.
2. Die Durchführung der Geschwindigkeitsmessung der sich ausbreitenden Stosswelle sowie ein Vergleich mit einer unmittelbaren Druckmessung unter Heranziehung der Hugoniot-Gleichung.
3. Die Erkenntnis, dass ein konstantes Druckgebiet hinter der Stosswelle vorhanden ist.
4. Die Erkenntnis, dass in den druckseitigen Teil des Stosswellenrohres eine Verdünnungswelle mit Schallgeschwindigkeit hineinläuft.

Die theoretischen Grundlagen für den Druckausbreitungsvorgang in einem Stosswellenrohr sind im wesentlichen 1910 von K. KOBES [4] angegeben worden. ACKERET erwähnt in seinem Handbuchartikel auf Seite 324 die Arbeiten von KOBES.

Durch diesen Hinweis aufmerksam gemacht, hat der Verfasser seinerzeit die Arbeiten von KOBES aufgegriffen und Versuche in einem 10 m langen Rohr angestellt [5].

Es waren amerikanische Forscher, die die Bedeutung des Stosswellenrohres für systematische Untersuchungen über die Ausbreitung von Stosswellen und als instationären Windkanal erkannt haben. Insbesondere hat GEORGE T. REYNOLDS [6] 1943 die ersten Arbeiten in diesem Sinne an der Princeton University durchgeführt. 1945 hat L. G. SMITH [7] die ersten aerodynamischen Anwendungen und die Untersuchung der Mach-Reflexion in einem Stosswellenrohr vorgenommen. W. BLEAKNEY [8] verwendete für die Untersuchungen einen Interferenzrefraktor. Desgleichen sind die Arbeiten an der University of Michigan (Ann Arbor) zu nennen, bei denen 1948 die Möglichkeit der Verwendung des Stosswellenrohres als Windkanal klar herausgestellt wurde (LAPORTE, MAUTZ, GEIGER, EPSTEIN [9-12]). Heute sind an sehr vielen Orten Stosswellenrohre vorhanden, und es werden mit ihnen zahlreiche grundsätzliche Arbeiten durchgeführt.

Im folgenden soll gezeigt werden, dass es mit verhältnismässig einfachen Mitteln möglich ist, interessante Versuche über Probleme der Gasdynamik mit Hilfe des Stosswellenrohres anzustellen.

### Versuchsanordnung

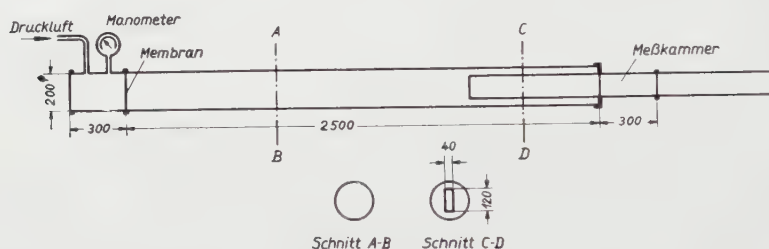
Zur Aufnahme von Schlierenbildern ist es notwendig, das Stosswellenrohr mit einer Messkammer zu versehen, die von ebenen Glaswänden begrenzt ist. In den meisten Fällen besitzt aus diesem Grunde das ganze Stosswellenrohr einen rechteckigen Querschnitt.

Einfacher ist folgender Weg: Für das Stosswellenrohr unmittelbar werden handelsübliche Rohre mit rundem Querschnitt verwendet. Vor der Messkammer jedoch wird in dieses runde Rohr ein viereckiges hineingesetzt mit



scharfen Kanten, so dass aus der rundbegrenzten Stosswelle ein rechteckiges Stück herausgeschnitten wird. Diese Stosswelle läuft dann durch die mit ebenen Glasplatten versehene Messkammer. Die nicht zur Wirkung kommenden Teile der Stosswelle laufen in die toten Winkel hinein. Auf diese Weise wird die gesamte Konstruktion wesentlich einfacher (Figur 1).

Die im folgenden beschriebenen Versuche wurden mit Luft an beiden Seiten der Berstmembran – an der rechten Seite normaler Aussendruck und an der linken ein Überdruck von 6,5 atü – durchgeführt. Man erreicht zwar hier-



Figur 1

Schematische Darstellung des verwendeten Stosswellenrohres.

durch keine grossen Strömungsgeschwindigkeiten hinter der Stosswellenfront; trotzdem sind die zu erzielenden Resultate sehr lehrreich. Als Membran wurde eine Folie aus Zellophan von 0,15 mm Stärke verwendet. Eine einzelne hiervon hält bei dem Durchmesser von 200 mm einen Überdruck von rund 1,5 atü aus. Man kann das Druckverhältnis dadurch erhöhen, dass man so viele Folien übereinanderlegt, dass der einzuhaltende Überdruck sicher ohne ein zufälliges Platzen ertragen wird. Der Vorgang wird dann beim Erreichen des gewünschten Druckes durch Anstechen der Membran eingeleitet. Zur Aufnahme diente die Mehrfachfunkenkamera [13] und zur Sichtbarmachung des Vorganges die Schattenmethode über eine optische Abbildung. Im allgemeinen wird beim Schattenverfahren ein Bild des Vorganges ohne jede Optik dadurch erzeugt, dass das Licht einer punktförmigen Lichtquelle nach Durchtritt durch das Objekt auf einer photographischen Platte aufgefangen wird. Auf diese Art und Weise kann man jedoch keine Kinematographie durchführen. Immerhin ist es beim Stosswellenrohr möglich, den Vorgang beliebig oft ablaufen zu lassen und die zeitliche Auslösung wunschgemäss zu variieren. Bei der Verwendung der Mehrfachfunkenkamera jedoch erhält man bei einem einzigen Versuch bereits 24 Bilder. Man ist in diesem Falle dann in der Auswertegenauigkeit nicht von der Streuung der Einzelversuche abhängig.

Schattenaufnahmen kann man mit der Mehrfachfunkenkamera dadurch erzielen, dass man ebenfalls sehr gute, punktförmige Lichtquellen verwendet



und ausserdem die Abbildung auf der Platte nicht auf die Mitte der Messkammer vornimmt, sondern auf eine «Referenzebene» vor oder hinter der Platte [14, 15].

In den nachstehend wiedergegebenen Aufnahmen betrug der Abstand der Referenzebene von der Mitte der Messkammer 40 cm.

### Umströmung einer Schneide

Als einfaches Beispiel für die Anwendung des Stosswellenrohres diene zunächst die Umströmung einer Schneide (Figur 2). Bei dem Anfangsdruck vor



Figur 2

Reflexion und Beugung einer Stosswelle durch eine Schneide.

dem Bersten der Membran von 6,5 atü entsteht eine Stosswelle von 1,53 atü mit einer Laufgeschwindigkeit von 520 m/s und einer Strömungsgeschwindigkeit hinter der Stosswellenfront von 247 m/s sowie einer Temperaturerhöhung von 98° C. Diese Stosswelle trifft senkrecht auf eine Wand, die an der oberen Kante unter einem Winkel von 20° nach rückwärts angeschärft ist. Die Wand reflektiert die Stosswelle. Der Druck hinter der reflektierten Stosswellenfront beträgt 4,7 atü. Von der Kante geht eine Entlastungswelle aus, die den reflektierten Stosswellendruck herabsetzt. Vom Schnittpunkt der reflektierten Welle mit der Entlastungswelle (linker Tripelpunkt) läuft die reflektierte Welle in einem kreisförmigen Bogen in die primäre Stosswelle ein, indem sie mit ihr und mit der um die Kante herum gebeugten Welle den rechten Tripelpunkt bildet. Beide Tripelpunkte ziehen hinter sich eine Kontaktfläche. Die rechte Kontaktfläche ist auf dem Bild in ihrem anfänglichen Verlauf gut sichtbar.

Um die Schneide herum bildet sich ein Wirbel aus, der nach hinten aufrollt. In diesem Wirbelgebiet herrscht ein sehr grosser Dichtegradient, der zu einer vollkommenen Schwärzung dieses Gebietes führt. Die Ausdehnung desselben ist sehr scharf umrissen.

Bezüglich der Behandlung dieses Problems liegen bisher folgende Arbeiten vor:

1. BARGMANN [16] stellte 1945 eine Näherungslösung für *schwache* Stösse bei Umströmung einer stumpfen Ecke mit kleinem Abnickwinkel  $\delta$  auf, ohne die Wirbelablösung zu berücksichtigen.
2. LIDTHILL [17] veröffentlichte 1949 eine linearisierte Theorie auch für kleine Winkel  $\delta$ , aber für endliche Stoßstärke.
3. JONES, MARTIN und THORNHILL [18] erweiterten 1951 die Theorie. Sie fanden, dass es bei starken Stössen Prandtl-Meyer-Bereiche mit beschränkter Ausdehnung gibt. Aber auch sie vernachlässigten die Wirbelbildung.
4. GRIFFITH und BRICKL [19] veröffentlichten 1952 Versuche von Interferenz-aufnahmen am Stosswellenrohr bei starken Stössen (Strömungs-Mach-Zahl  $> 1$ ). Sie folgerten, dass die potentialtheoretische Behandlung der Strömung nur qualitativ richtig sei. Die Aufteilung der Strömung in zwei Bereiche infolge der Grenzschichtablösung sei sehr wesentlich.
5. HOWARD und MATTHEWS [20] brachten 1956 eine weitere Arbeit mit Hilfe von Stosswellenrohr und Interferenzrefraktor für schwache Stösse und einer  $5^\circ$ -Schneide. Sie zeigten, dass auch für das Wirbelgebiet eine pseudostationäre Ausbreitung vorhanden sei, kommen aber nicht zu einer detaillierten Theorie des Gesamtvorganges.

In allen bisher veröffentlichten Versuchen wird bei jedem Vorgang eine Einzelaufnahme gemacht. Die hier dargestellte Verwendung der Mehrfachfunkenkamera, die 24 Bilder bei jedem Versuch liefert, erlaubt insbesondere eine genaue Weg-Zeit-Ausmessung und liefert damit die Geschwindigkeit der Ausbreitung. Es liegt daher nahe, die Pseudostationarität des Vorganges zu überprüfen.

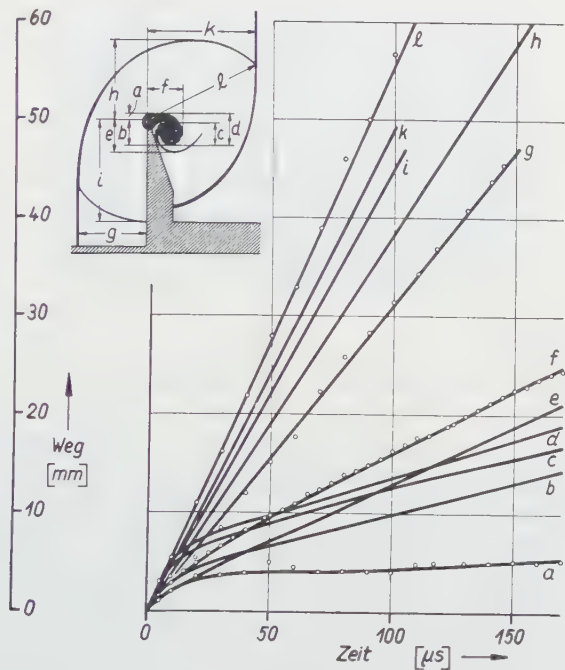
Das Prinzip der Pseudostationarität, das heisst einer Abhängigkeit von nur  $x/t$  und  $y/t$  ist wohl zuerst von J. v. NEUMANN aufgestellt worden.

Die Einführung des Begriffs der Pseudostationarität und eine allgemeine Diskussion der pseudostationären Strömung um eine Ecke stammt von F. WECKEN [21].

Wenn ein Vorgang pseudostationär ist, so genügt *eine* Aufnahme zu seiner Kennzeichnung, die früheren oder späteren Stadien lassen sich durch Verkleinerung oder Vergrösserung gewinnen.

Bei der Weg-Zeit-Auswertung einer kinematographischen Bildserie müssten also alle Weg-Zeit-Kurven Geraden sein, die durch den Koordinatenursprung gehen.

Figur 3 bringt eine derartige Auswertung. Die Bezeichnungen ergeben sich aus der miteingetragenen Skizze. Man erkennt, dass alle Weg-Zeit-Kurven für die sich ausbreitenden Wellen die Bedingung der Pseudostationarität voll erfüllen. Nicht mehr ganz gilt dies für die Kurve *c*, die Ausbreitung der rechten



Figur 3

Weg-Zeit-Auswertung der kinematographischen Aufnahme der Umströmung einer Schneide.

Kontaktfläche nach unten. Diese Ausbreitung ist bereits ein wenig durch das Wirbelgebiet gestört. Alle übrigen Kurven, die die Ausbreitung des Wirbelgebietes kennzeichnen, laufen nicht geradlinig in den Koordinatenursprung ein. Sie können von 20  $\mu$ s ab jedoch als geradlinig angesehen werden, aber ausgehend von einem Punkt, der mehr oder weniger weit links liegt, das heisst, der Gesamtvorgang mit Einschluss des Wirbelgebietes ist genau genommen nicht pseudostationär. Für das Wirbelgebiet allein kann man nach einer gewissen Anlaufzeit eine Pseudostationarität (wie durch HOWARD und MATTHEWS gezeigt), aber zugeordnet zu einem fiktiven Ursprung annehmen.

Wenn die sich ausbreitenden Wellen an der Boden- und Deckplatte der Messkammer reflektiert werden, hört natürlich für den Versuch die Pseudostationarität auf; für das Wirbelgebiet insbesondere dann, nachdem die re-

flektierten Wellen durch dieses hindurchlaufen. In den Weg-Zeit-Kurven entsprechend Figur 2 ist dieser Zeitpunkt durch einen deutlichen Knick gekennzeichnet (nicht mehr in der Darstellung enthalten).

Dass die Schwärzung im Wirbelgebiet in den Figuren 2 und 4 stark verschieden und daher Figur 4 nicht durch Vergrößerung von Figur 2 zu gewinnen



Figur 4

Ausbildung des Wirbels hinter der Schneide. Deformation der am Boden reflektierten Stosswellen infolge der Geschwindigkeitsverteilung in der Umgebung des Wirbels.

nen ist<sup>3)</sup>, beruht auf einem rein optischen Effekt. Bei pseudostationärer Ausbreitung des Vorganges nimmt der Dichtegradient mit der Zeit ab. Daher verringert sich in gleicher Weise die Lichtablenkung, die durch die Dichteänderung hervorgerufen wird. Wenn also die optische Einstellung in allen Fällen auf die gleiche Referenzebene erfolgt, so muss der Vorgang für kleinere Zeiten ein optisch empfindlicheres Bild liefern. Um optisch ähnlich aussehende Bilder zu bekommen, wäre es notwendig, mit zunehmender Ausbreitung des Vorganges eine Verkleinerung des Abstandes zwischen der Mitte der Messkammer und der Referenzebene vorzunehmen. Macht man bei jedem Versuch nur eine einzelne Aufnahme, so könnte man statt dessen im Prinzip die Tiefe der Messkammer mit späteren Phasen des Vorganges entsprechend verkleinern.

Die Art der Ausbreitung der reflektierten Welle gibt einen interessanten Einblick in die Verteilung der Strömungsgeschwindigkeiten in der Umgebung des Wirbelgebietes. In Figur 4 erkennt man, dass die am Boden reflektierte Stosswelle im Gebiet zwischen dem Wirbelkern und der rückseitigen Oberfläche der Schneide infolge der dort vorhandenen Rotationsgeschwindigkeit stark beschleunigt, während sie rechts vom Wirbel aus dem gleichen Grunde in der Ausbreitung verzögert wird.

Schliesslich wird der linke Teil der Welle praktisch selbständig, läuft durch die von der Schneide ausgehende Wirbelfläche hindurch, wobei die Wirbelfläche an der Schneide durch den Sprung, den die Strömungsgeschwindigkeit hierbei macht, zerschnitten wird. Figur 5 zeigt einen etwas späteren Zeitpunkt

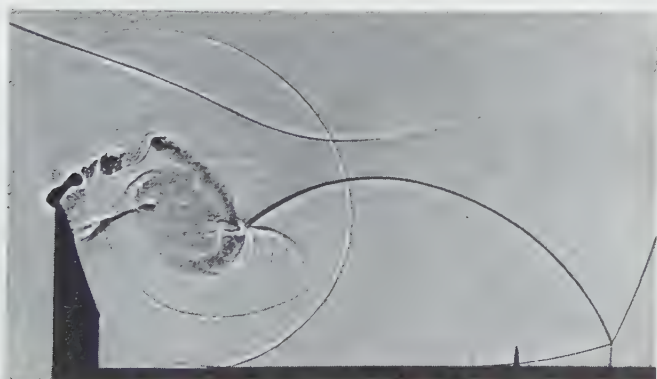
<sup>3)</sup> Abgesehen von der Abweichung von der Pseudostationarität.

Man erkennt, dass die durch die Wirbelfläche hindurchgelaufene Welle sich annähernd kreisförmig als eine neue Stosswelle um das Wirbelgebiet herum ausgebreitet hat, und man sieht die Trennfuge in der Wirbelfläche. Der rechte Teil der am Boden reflektierten Welle endet praktisch am Wirbel. Sie wird von diesem teilweise reflektiert.



Figur 5

Das linke Ende der reflektierten Stosswelle ist durch das Wirbelgebiet hindurchgelaufen. Die Wirbelfläche wurde hierbei aufgeschnitten.

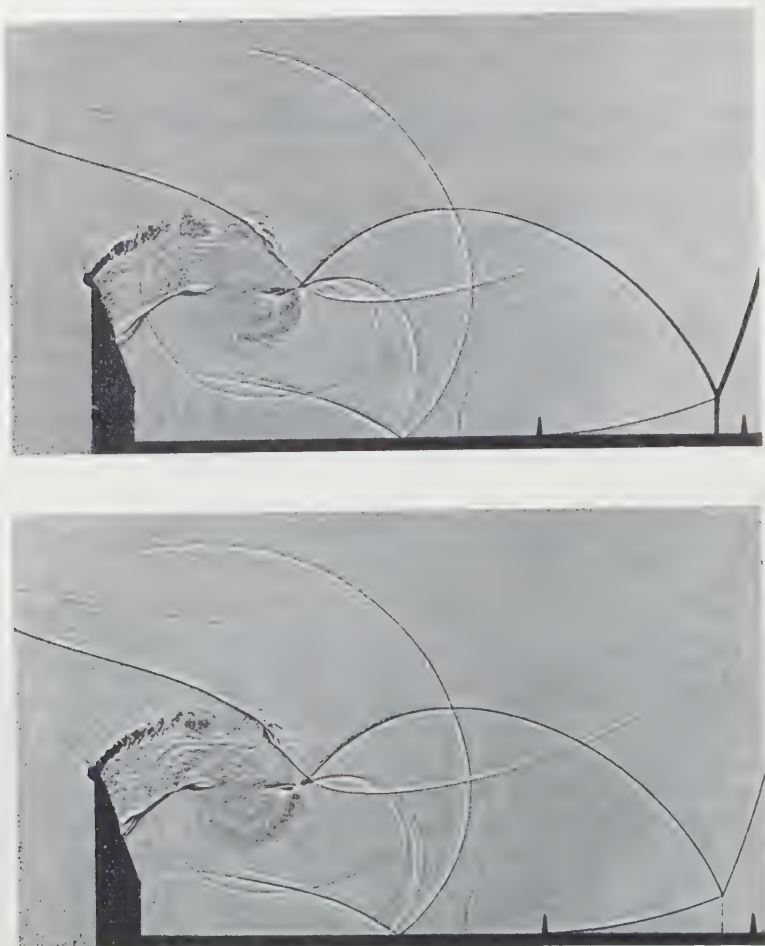


Figur 6

Wie Figur 5 – späterer Zeitpunkt. Auch die von der oberen Messkammerwand reflektierte Stosswelle ist infolge der Geschwindigkeitsverteilung deformiert.

Eine weitere Phase des Vorganges ist in Figur 6 wiedergegeben. Die Trennfuge in der Wirbelfläche hat sich stark erweitert. Unterhalb der von der Schneide abströmenden Wirbelfläche bildet sich ein gerader Verdichtungsstoss aus. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Umgebung des Wirbelgebietes wird hier auch durch die Deformation der von der oberen Wand der Messkammer reflektierten Welle sichtbar gemacht.





Figur 7 (*a* und *b*)

Zwei einander entsprechende Phasen der Umströmung einer Schneide für zwei verschiedene Versuche. Man erkennt die Übereinstimmung im Grossen und die statistischen Schwankungen der Details in der Wirbelbildung.

Wir haben gesehen, dass eine Störung in der Ausbreitung der Wirbelfläche durch das Durchlaufen einer Stosswelle entstand. Unabhängig hiervon sind jedoch statistische Ursachen für ein unregelmässiges Verhalten der Wirbelfläche vorhanden. Diese sind allerdings nicht so stark ausgeprägt, wie man zunächst vermuten sollte. Wenn man den gleichen Vorgang zweimal ablaufen lässt und die im entsprechenden Zeitpunkt gemachten Aufnahmen miteinander



ander vergleicht (Figuren 7a und b), so stellt man zwar in den feinsten Details im Wirbelgebiet Unterschiede fest. Diese sind aber nicht so ausgeprägt. Man ist erstaunt über den gleichartigen Ablauf. Um diese statistischen Erscheinungen studieren zu können, ist es notwendig, eine wirkliche Kinematographie des Vorganges mit hoher zeitlicher Auflösung durchzuführen und Serien untereinander zu vergleichen, die unter denselben Bedingungen aufgenommen worden sind.

Figur 7 zeigt an der rechten Seite sehr deutlich den Mach-Effekt, der bei der Reflexion der primären gebeugten Welle am Boden entsteht.

Ferner erkennt man links von der Schneide, dass die Strömungslinien angeordnet sind. Dieser Effekt dürfte auf den Wirbeln beruhen, die an den Glasplatten der Messkammer in der Grenzschicht entstanden sind. Nach Reflexion der primären Stosswelle an der Schneidenwand wird die Stoffgeschwindigkeit gleich null, und die in der Grenzschicht verbleibenden Unregelmässigkeiten fliessen mit der Strömung ab.

### Durchströmung eines Spaltes

Die folgenden Aufnahmen bringen eine Erweiterung des soeben geschilderten Versuches. Zwei gleichartige Schneiden sind einander gegenübergestellt, so dass sie einen Spalt bilden. Bei Anlaufen der Stosswelle handelt es sich zunächst in der Umgebung jeder Schneide um den gleichen Vorgang, wie er im vorigen Abschnitt beschrieben wurde (Figur 8). Sobald sich jedoch die Strömungsvorgänge um die beiden Schneiden gegenseitig beeinflussen, haben wir es mit neuartigen Vorgängen zu tun. So zeigt bereits der Zustand an den Schneiden in Figur 9 ein anderes Verhalten. Die die beiden Tripelpunkte miteinander verbindende Stosswelle nach Figur 2 hat hier bereits jeweils die gegenüberliegende Schneide überstrichen und ist zum Teil an der Wirbelfront reflektiert worden. Die Überlagerung der beiden die Tripelpunkte verbindenden Stosswellen hat in der Mitte vor dem Spalt zu einem Mach-Effekt geführt. Das Machsche V ist sehr ausgeprägt zu sehen.

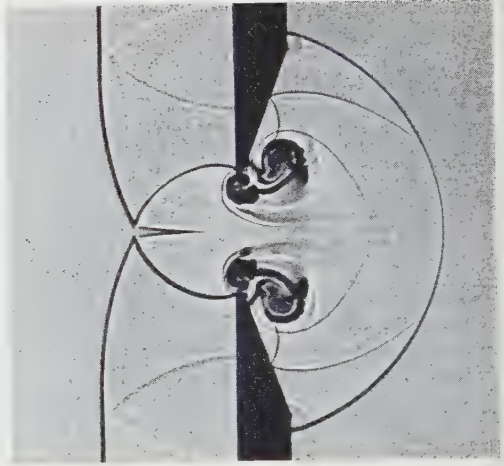
Wenige Mikrosekunden nach der in Figur 9 dargestellten Phase bildet sich nun ein sehr eigenartiger Effekt aus: Es baut sich hinter dem Spalt ein senkrechter Verdichtungsstoss auf. Figur 10 zeigt den Beginn, Figur 11 die Vollendung dieses Aufbaues.

Die Ursache für das Zustandekommen dieses Verdichtungsstosses ist folgende: Bei Expansion um eine Schneide herum entsteht eine höhere Geschwindigkeit. Im Falle des Spaltes erfolgt nun eine Expansion nach beiden Seiten, so dass die Geschwindigkeit noch erheblich vergrössert wird; sie wächst auf Überschallgeschwindigkeit. Eine solche kann jedoch nur mit Hilfe eines Verdichtungsstosses wieder in Unterschallgeschwindigkeit zurückgewandelt werden.



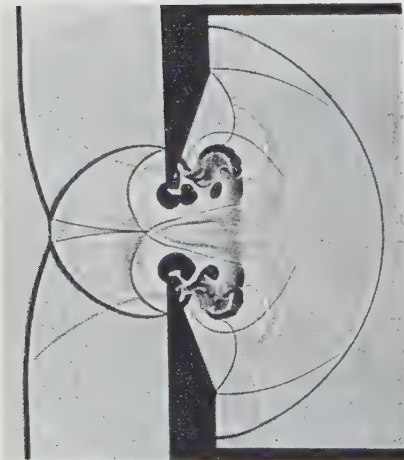
Figur 8

Eine Stosswelle läuft durch einen Spalt. Der Ablauf des Vorganges um jede Schneide herum erfolgt noch ohne gegenseitige Störung.



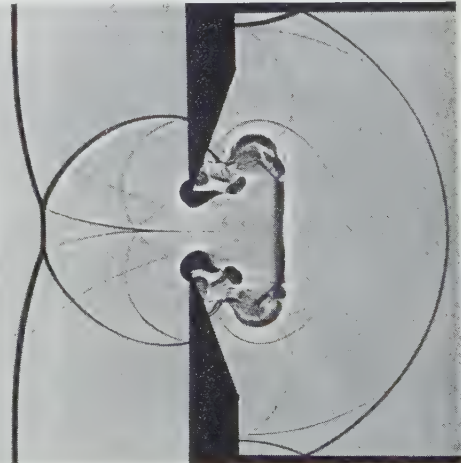
Figur 9

Gegenseitige Beeinflussung der Vorgänge um die beiden Schneiden eines Spaltes.



Figur 10

Aufbau eines geraden Verdichtungsstosses hinter dem Spalt.



Figur 11

Ein intensiver gerader Verdichtungsstoss hat sich hinter dem Spalt aufgebaut.

Diese Bilder sind eine sehr anschauliche Demonstration für das Auftreten des gleichen Effektes auch in anderen Fällen. Zum Beispiel haben F. WECKEN und L. MÜCKE [22, 23] im Jahre 1950 festgestellt, dass bei der kugelförmigen Expansion einer detonierenden Sprengstoffkugel ausser der primären, nach aussen laufenden Stosswelle noch eine sekundäre Stosswelle entsteht, die bezüglich des Mediums in entgegengesetzter Richtung wie diese läuft, infolge der hohen Expansionsgeschwindigkeit der Materie von dieser jedoch mit nach aussen geführt wird. Erst zu einem späteren Zeitpunkt übersteigt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der sekundären Stosswelle die stoffliche Strömungsgeschwindigkeit. Die sekundäre Stosswelle läuft dann konzentrisch nach innen und anschliessend nach Durchgang durch den Mittelpunkt als zweite Stosswelle nach aussen.

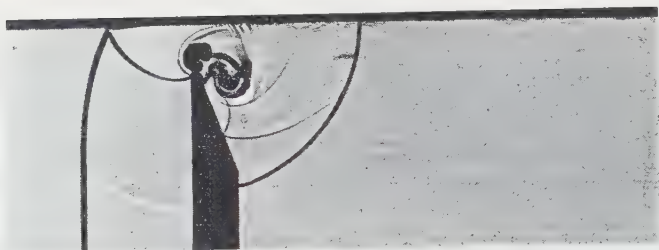
Ein anderes Beispiel ist die Erzeugung von Hyperschallströmungen in Stosswellenrohren. Bei einer Expansion in einer konischen Düse bildet sich bei Beginn des Expansionsvorganges in der Düse auch ein nach rückwärts laufender Stoss. Um diesen die Messzeit verringernden Anfangsvorgang zu vermeiden, wird der Einlaufquerschnitt der konischen Düse mit einer Berstmembran versehen und die Düse selbst evakuiert [24].

Auch in unserem Beispiel der Strömung durch den Spalt handelt es sich um eine Art Düsenströmung. Die Geschwindigkeit steigt wie in dem divergenten Teil einer Überschalldüse auf Überschallgeschwindigkeit. Der Effekt dieser Düsenwirkung ist aber nur über eine gewisse Strecke vorhanden, daher muss die Umwandlung in Unterschallgeschwindigkeit an der Grenze dieses Gebietes durch einen Stoss erfolgen.

### Schneide in der Nähe einer Wand

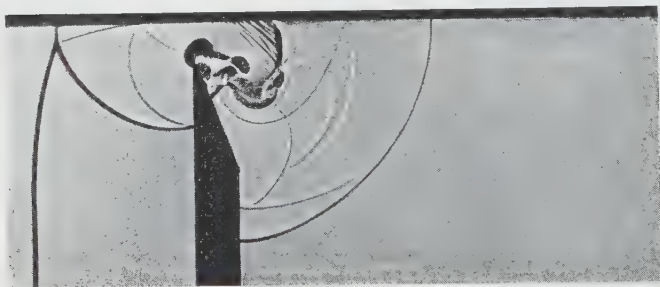
In einer etwas abgewandelten dritten Versuchsserie kann das Auftreten der Überschallgeschwindigkeit in Form sich bildender Mach-Linien veranschaulicht werden. Die Schneide befindet sich in der Nähe der oberen Wand der Messkammer. Solange die Wand als idealer Reflektor dient, ist der Vorgang der gleiche wie im Falle des Spaltes. So entspricht die Figur 12 genau der Figur 9, nur mit dem Unterschied, dass an der Wand im Bereich der Überschallgeschwindigkeit Machsche Linien auftreten. Sie werden durch die zufälligen Unregelmässigkeiten der Wand bzw. durch die Grenzschicht angeregt. Diese sind ein eindeutiger Beweis für die tatsächlich vorhandene Überschallgeschwindigkeit. Die Figur 13 entspricht der Figur 11. Der gerade Verdichtungsstoss hat sich bis zur Wand hin ausgebildet. Links desselben sind zahlreiche Machsche Linien vorhanden, nicht dagegen an der rechten Seite.

Im späteren Verlauf macht sich nun jedoch der Einfluss der Grenzschicht an der Wand bemerkbar. Der Verdichtungsstoss neigt sich gegen die Wand



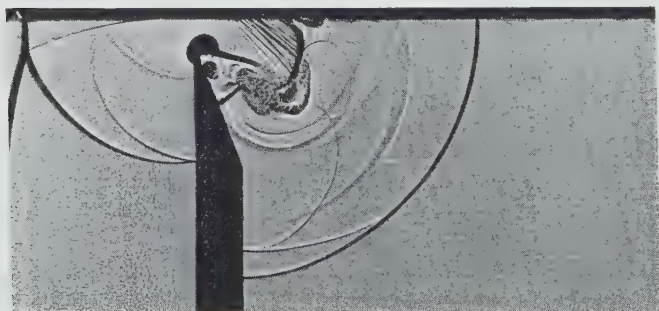
Figur 12

Eine Stosswelle ist durch einen Spalt in der Nähe einer Wand hindurchgelaufen.



Figur 13

Aufbau eines geraden Verdichtungsstosses.  
Vor demselben intensive Machsche Linien, die von der Wand ausgehen.

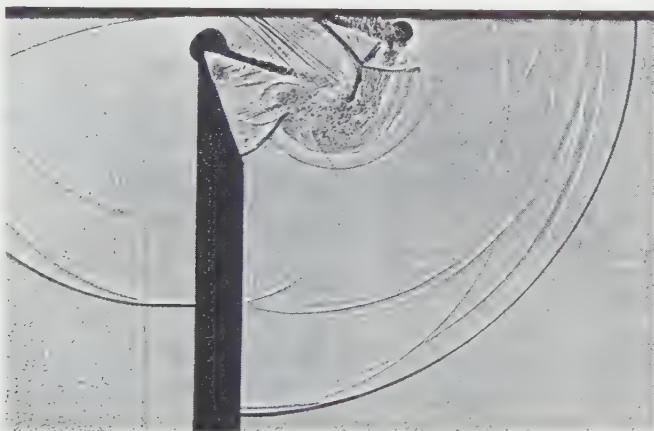


Figur 14

In der Nähe der Wand beginnt sich der Verdichtungsstoss zu neigen,  
verbunden mit einer Ablösung der Grenzschicht.

(Figur 14) und artet schliesslich in einen schiefen Verdichtungsstoss aus (Figur 15). Am Ansatzpunkt des Stosses an der Wand findet eine Ablösung der Grenzschicht statt.

Die vorliegenden Aufnahmen sollten zeigen, dass man mit einem sehr einfach aufgebauten Stosswellenrohr und bei Verwendung von Luft an beiden



Figur 15

Aus dem geraden ist ein schiefer Verdichtungsstoss geworden. Ablösung der Grenzschicht.

Seiten der Membran sowie Aussendruck in der Messkammerseite mit Hilfe des Schattenverfahrens aufschlussreiche Informationen über gasdynamische Vorgänge erhalten kann.

Der Ablauf des Vorganges wird wesentlich anschaulicher, wenn man ihn als Film wiedergibt. Ein solcher wurde für die drei dargestellten Fälle auf der Sitzung des Fachausschusses «Kurzzeitphysik» des Verbandes der Deutschen Physikalischen Gesellschaften auf der Physikertagung in Heidelberg am 30. September 1957 vorgeführt. Hierbei wurden die jeweils mit der Mehrfachfunkenkamera erhaltenen 24 Teilbilder für mehrere Vorgänge phasengetreu aneinandergereiht. Die Streuungen von Versuch zu Versuch sind hierbei so gering, dass man sie bei der Vorführung des Filmes nicht wahrnimmt. Die hier wiedergegebenen Aufnahmen sind Teilbilder aus diesem Film. Die Herstellung des Filmes erforderte einige Mühe, da Teilbild für Teilbild auf dem Tricktisch nach sorgfältiger Justierung kopiert werden musste. Für die Mitarbeit schulde ich besonderen Dank den Herren H. NASDALA und K. TANNEBERG.



## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. ACKERET, *Gasdynamik aus Handbuch der Physik: Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper* (G. GEIGER und K. SCHEEL), Bd. 7 (Verlag Springer, Berlin 1927), S. 289–342.
- [2] P. VIEILLE, *Etude sur les rôles des discontinuités dans les phénomènes de propagation*, Mém. Poudres Salpêtres 10, 117–260 (1899).
- [3] P. VIEILLE, *Sur les discontinuités produites par la détente brusque de gaz comprimés*, C. r. 129, 1228–1230 (1899).
- [4] K. KOBES, *Die Durchschlagsgeschwindigkeit bei den Luftsaug- und Druckluftbremsen*, Z. öst. Ing.- u. Archit.-Vereins 62, 558 (1910).
- [5] H. SCHARDIN, *Bemerkungen zum Druckausgleichsvorgang in einer Rohrleitung*, Phys. Z. 33, 60–64 (1932).
- [6] GEORGE T. REYNOLDS, *A Preliminary Study of Plane Shock Waves Formed by Bursting Diaphragms in a Tube*, OSRD-Report No. 1519 (June 1943).
- [7] LINCOLN G. SMITH, *Photographic Investigation of the Reflection of Plane Shocks in Air*, OSRD-Report No. 6271 (November 1945).
- [8] W. BLEAKNEY und A. H. TAUB, *Interaction of Shock Waves*, Rev. mod. Phys. 21, 548 (1949).
- [9] C. W. MAUTZ, F. W. GEIGER und H. T. EPSTEIN, *On the Investigation of Supersonic Flow Patterns by Means of a Shock Tube*, Phys. Rev. 74, 1872 (1948).
- [10] C. W. MAUTZ, *The Use of the Shock Tube in the Production of Uniform Fields of Transonic and Supersonic Flow*, Dissertation (University of Michigan, 1949).
- [11] F. W. GEIGER, *On the Shock Tube as a Tool for the Investigation of Flow Phenomena*, Dissertation (University of Michigan, 1949).
- [12] F. W. GEIGER und C. W. MAUTZ, *The Shock Tube as an Instrument for the Investigation of Transonic and Supersonic Flow Patterns*, Report on ONR Contract N6-ONR-232, TO IV, Eng. Res. Inst. Univ. Michigan (1949).
- [13] H. SCHARDIN, *Die Mehrfachfunkenkamera und ihre Anwendung in der technischen Physik*, Z. angew. Phys. 5, 19–24 (1953).
- [14] H. SCHARDIN, *High-Frequency Cinematography in the Shock-Tube*, Proc. 3rd. Int. Congr. High-Speed Phot., London, Sept. 1956 (Butterworths Scientific Publications, London 1957), S. 365–369.
- [15] H. SCHARDIN, *High-Frequency Cinematography in the Shock-Tube* (Ergänzung), J. phot. Sci. 5, Nr. 2, 17–19 (1957).
- [16] V. BARGMANN, *On Nearly Glancing Reflection of Shocks*, OSRD-Report Nr. 5171 (März 1945).
- [17] M. J. LIGTHILL, *The Diffraction of Blast, I*, Proc. roy. Soc. 198 (1), 454–470 (1949).
- [18] D. M. JONES, P. M. E. MARTIN und C. K. THORNHILL, *A Note on the Pseudo-Stationary Flow Behind a Strong Shock Diffracted or Reflected at a Corner*, Proc. roy. Soc. [A] 209, 238–248 (1951).
- [19] W. GRIFFITH und D. E. BRICKL, *Diffraction of Strong Shock Waves*, Phys. Rev. 89, 451–453 (1953).
- [20] L. N. HOWARD und D. L. MATTHEWS, *On the Vortices Produced in Shock Diffraction*, J. appl. Phys. 27 (3), 223–231 (1956).
- [21] F. WECKEN, *Pseudo-stationäre Strömungsvorgänge*, Bericht 26/46, Laboratoire St-Louis (1946).



- [22] F. WECKEN und L. MÜCKE, *Die Detonation einer kugelförmigen Sprengladung*, I und II, Berichte No. 8/50 und 1/53 des Laboratoire St. Louis (1950 und 1953).
- [23] H. SCHARDIN, *Measurement of Spherical Shock-Waves*, Commun. pure appl. Math. 8 (1), 223–243 (1954).
- [24] H. S. GLICK, A. HERTZBERG und W. E. SMITH, *Flow Phenomena in Starting a Hypersonic Shock Tunnel*, A. E. D. C.-T. N. – 55 – 16.

### Summary

A test-rig using a shock tube is described which enables problems in instationary gas dynamics to be studied in a simple manner. As an example of its application, the flow round a knife-edge and through a slit are described in detail by means of schlieren-photographs.

(Eingegangen: 25. November 1957.)

# Das Gleichgewicht eines Wasserringes mit freier Oberfläche in einem rotierenden Hohlkörper

VON ERNST SCHMIDT, München, Deutschland<sup>1)</sup>

Bei dem vom Verfasser angegebenen Kühlverfahren von Gasturbinen wird in der rotierenden hohlen Trommel der Turbine durch die Wirkung der Zentrifugalkraft ein mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie der Läufer umlaufender Wasserring gebildet, von dem Flüssigkeit auch in Kühlbohrungen eintritt, die in die Schaufeln hineinragen. Diese Anordnung erhebt die Frage nach der kritischen Drehzahl des wassergefüllten Läufers und nach der Möglichkeit der Entstehung von Läuferunruhe durch Schwingungen der freien Oberfläche des Wasserringes, die durch die Drehzahl angeregt und aufgeschaukelt werden können, wenn beide die gleiche Frequenz haben.

## Kritische Drehzahl eines teilweise mit Wasser gefüllten Läufers

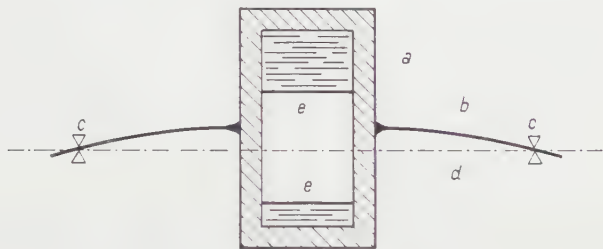
Dass die Berechnung der kritischen Drehzahl eines teilweise mit Flüssigkeit gefüllten Läufers nicht einfach durch Addieren der Masse der Wasserfüllung zu der des Läufers erfolgen darf, erkennt man leicht anhand der folgenden Überlegung: Denkt man sich die Welle eines genau ausgewuchteten, mit seiner kritischen Drehzahl rotierenden Läufers leicht durchgebogen, so besteht bekanntlich bei jeder Grösse der Durchbiegung Gleichgewicht zwischen der Zentrifugalkraft der mit ihrem Schwerpunkt aus der wahren oder geometrischen Drehachse herausgerückten Masse des Rotors und der elastischen Rückstellkraft der gebogenen Welle. Bei einer solchen Verschiebung des Läufers wird aber die Lage der Wasserfüllung relativ zum Läufer nicht unverändert bleiben, sondern die Flüssigkeit wird sich mehr nach der Seite des Hohlraumes bewegen, welche die grössere Entfernung von der wahren Drehachse des Läufers hat, in solcher Weise, dass die freie Oberfläche des Wasserringes wieder einen zur wahren Drehachse konzentrischen Zylinder bildet.

In Figur 1 sind diese Verhältnisse veranschaulicht. Dabei ist  $a$  der mit einem Hohlraum in Gestalt eines Kreiszylinders mit zur Drehachse senkrechten ebenen Endflächen versehene Läufer,  $b$  ist die im durchgebogenen Zustand gezeichnete, von den Lagern  $c$  gehaltene Welle. Die gestrichelte Gerade  $d$  be-

<sup>1)</sup> Technische Hochschule München, Lehrstuhl für technische Thermodynamik.

zeichnet die wahre oder geometrische Drehachse des Läufers. Die Flüssigkeit verschiebt sich nun bei einem in der beschriebenen Weise rotierenden Körper derart, dass ihre freie Oberfläche *e* wieder einen zur wahren Drehachse konzentrischen Zylinder bildet, wie es vor der Auslenkung der Welle der Fall war.

Vergössert man in einem mit kritischer Drehzahl in durchgebogenem Zustand der Welle umlaufenden Hohlkörper den Wasserinhalt, so ändert sich



Figur 1

Mit kritischer Drehzahl bei durchgebogener Welle umlaufender Läufer mit Wasserfüllung.  
*a* Läufer; *b* durchgebogene Welle; *c* Lager; *d* wahre oder geometrische Achse der Rotation; *e* freier Wasserspiegel.

offenbar nichts am Gleichgewicht der Kräfte, denn die hinzugefügte Wassermenge wird einen zur wahren Drehachse konzentrischen Ring bilden. Das für die kritische Drehzahl charakteristische Gleichgewicht zwischen der Zentrifugalkraft des ausgelenkten Läufers und der elastischen Rückstellkraft der Welle ist also völlig unabhängig von dem Grade der Füllung des Läufers. Man erhält deshalb seine kritische Drehzahl sehr einfach dadurch, dass man die Masse des Flüssigkeitsinhaltes des völlig gefüllten Hohlraumes mit zur Läufermasse rechnet.

**Oberflächenwellen bei rotierenden Flüssigkeitsringen**

Wir beschreiben die Schwingungen eines flüssigen Kreisringes, der von zwei ebenen Flächen senkrecht zur Drehachse begrenzt ist, nach Figur 2 mit den Zylinderkoordinaten *r* und *ϑ* und den Geschwindigkeitskomponenten *u* in Umfangsrichtung und *v* in radialer Richtung unter Benutzung des Geschwindigkeitspotentials *Φ*. Dann gilt für den Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{w} = \text{grad } \Phi \tag{1}$$

und für seine Komponenten

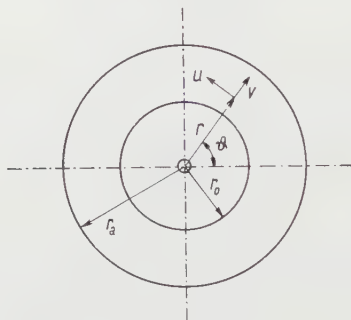
$$u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} . \tag{1a}$$

Die Kontinuitätsgleichung verlangt bei inkompressiblen Medien  $\text{div } \mathbf{w} = 0$ , womit sich für das Geschwindigkeitspotential die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (2)$$

ergibt.

Wenn wir die Wassermasse des Ringes freie Schwingungen kleiner Amplitude ausführen lassen, so werden diese periodische Funktionen sowohl des



Figur 2

Erläuterung der Bezeichnungen bei einem umlaufenden Wasserring.

Umfangswinkels als auch der Zeit  $t$  sein, und man kann das Geschwindigkeitspotential schreiben in der Form

$$\Phi = R \cos(\alpha \vartheta) \cos(\beta t), \quad (3)$$

wobei  $R$  eine Funktion allein der radialen Koordinate  $r$  ist. Durch Einsetzen von Gleichung (3) in Gleichung (2) erhält man für  $R$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$R'' + \frac{R'}{r} - \frac{\alpha^2 R}{r^2} = 0, \quad (4)$$

deren allgemeine Lösung  $R = A r^\alpha + B r^{-\alpha}$  ist.

Damit ergibt sich für das Geschwindigkeitspotential

$$\Phi = (A r^\alpha + B r^{-\alpha}) \cos(\alpha \vartheta) \cos(\beta t). \quad (5)$$

Nun verlangt die Randbedingung am Boden des Wasserringes bei  $r = r_a$ , dass die Radialgeschwindigkeit  $v = \partial \Phi / \partial r$  verschwindet, was, wie man leicht ausrechnet, die eine willkürliche Konstante durch die Gleichung

$$B = A r_a^{2\alpha}$$

auf die andere zurückführt. Damit bekommt das Geschwindigkeitspotential die Form

$$\Phi = C \left[ \left( \frac{r}{r_a} \right)^\alpha + \left( \frac{r}{r_a} \right)^{-\alpha} \right] \cos(\alpha \vartheta) \cos(\beta t), \quad (6)$$

wobei für  $A r_a^\alpha$  die neue Konstante  $C$  eingeführt ist.

Bei der Ableitung der Randbedingung für die freie Oberfläche des Flüssigkeitsringes geht man gewöhnlich aus von der Verallgemeinerung der Bernoullischen Gleichung auf nichtstationäre Strömungen, die bei inkompressibler Flüssigkeit im zweidimensionalen Falle unter der Annahme, dass die eingepägten Kräfte das Potential  $U$  haben, die Form

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\varrho} + U = F(t) \quad (7)$$

annimmt, wobei  $F(t)$  eine willkürliche Funktion der Zeit ist.

Beschränken wir uns zunächst auf die freie Schwingung einer ebenen Oberfläche im Schwerfeld mit der Fallbeschleunigung  $g$ , so verschwindet die willkürliche Funktion  $F(t)$ , und das Kräftepotential wird  $U = -g y$ , wenn wir die  $y$ -Achse von der ungestörten Oberfläche an senkrecht nach unten legen. Bei sehr kleinen Schwingungsamplituden und damit auch sehr kleinen Geschwindigkeiten kann das erste Glied von Gleichung (7) vernachlässigt werden, da es nur Quadrate von Geschwindigkeiten enthält. Damit vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\varrho} - g y = 0. \quad (8)$$

Wendet man diese Beziehung auf einen kleinen Ausschlag der Oberfläche aus ihrer Ruhelage an und bedenkt, dass an der gestörten Oberfläche der Druck gleich dem konstanten Atmosphärendruck ist und dass hier die Vertikalkomponenten der Oberflächengeschwindigkeit gleich den Vertikalkomponenten der Flüssigkeitsbewegung sein müssen, so erhält man nach W. KAUFMANN<sup>2)</sup> die Randbedingung

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)_{y=0} = g \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (9)$$

die bei kleinen Schwingungsamplituden auch für  $y = 0$ , das heisst am Orte der ungestörten Oberfläche gilt.

Im Falle unseres mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Wasserringes tritt an die Stelle der Fallbeschleunigung  $g$  die Zentrifugalbeschleunigung  $r_0 \omega^2$  am Ort der ungestörten Oberfläche bei  $r = r_0$  auf, und wir erhalten die

<sup>2)</sup> Vgl. WALTER KAUFMANN, *Technische Hydro- und Aeromechanik* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1954), S. 172.

Oberflächenbedingung in der Form

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_{r=r_0} = r_0 \omega^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=r_0}. \quad (10)$$

Mit unserem Ansatz des Geschwindigkeitspotentials nach Gleichung (6) ergibt sich

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_{r=r_0} = -C \beta^2 \left[ \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^\alpha + \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^{-\alpha} \right] \cos(\alpha \vartheta) \cos(\beta t)$$

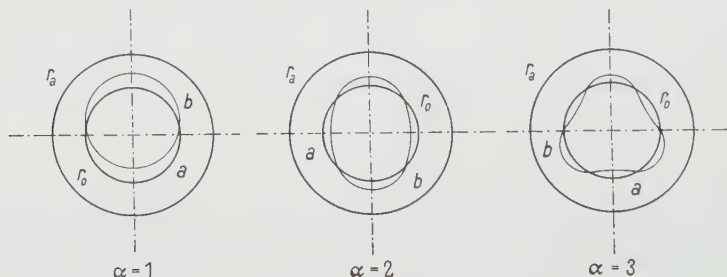
und

$$r_0 \omega^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=r_0} = C \alpha \frac{r_0}{r_a} \omega^2 \left[ \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^{-\alpha-1} \right] \cos(\alpha \vartheta) \cos \beta t.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke entsprechend Gleichung (10) wird

$$\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 = -\alpha \frac{\left(\frac{r_0}{r_a}\right)^\alpha - \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^{-\alpha}}{\left(\frac{r_0}{r_a}\right)^\alpha + \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^{-\alpha}}. \quad (11)$$

Nun ist unwuchterregend nur die Schwingung mit  $\alpha = 1$ , denn wie Figur 3 zeigt, gleichen sich Massenverschiebungen für  $\alpha = 2$  und alle ganzzahligen grös-



Figur 3

Grundschwingung ( $\alpha = 1$ ) und Oberschwingungen ( $\alpha = 2$  und 3) der freien Oberfläche eines rotierenden Flüssigkeitsringes.  $a$  ungestörte Oberfläche mit dem Radius  $r_0$ ;  $b$  durch Schwingungen ausgelenkte Oberflächen.

seren Werte von  $\alpha$  aus. Mit  $\alpha = 1$  erhält man nach einfacher Umformung

$$\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 = \frac{\left(\frac{r_a}{r_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{r_a}{r_0}\right)^2 + 1}. \quad (12)$$

Da  $r_a/r_0 > 1$  ist, wird die rechte Seite des Ausdruckes (12) stets kleiner als 1 und damit auch die Eigenfrequenz der Oberflächenschwingungen des mit ein-



laufenden Wasserringes in einem rotierenden Körper stets niedriger als die Frequenz der Rotation.

Die freie Grundschwingung des Wasserringes, die allein eine Unwucht des Läufers hervorruft, kann also nicht durch die Rotation angeregt werden, wenn der Wasserring mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit wie der Läufer rotiert. Die Oberschwingungen höherer Ordnung, deren Frequenz unter Umständen mit der Drehzahl zusammenfallen kann, verursachen nur symmetrische, sich in der Wirkung ausgleichende Massenverschiebungen.

### *Summary*

The problem of the critical speed of revolution of a hollow rotor which has a water ring revolving inside and with it, is investigated and it is found to be identical with the critical speed of revolution of a rotor completely filled with water. As the calculation of the oscillations of the water ring itself shows, dangerous resonances with the rotor oscillations need not be expected.

(Eingegangen: 3. Oktober 1957.)

## Ein neues Isotopentrennverfahren

VON FRITZ SCHULTZ-GRUNOW, Aachen, Deutschland<sup>1)</sup>

Unter den Gratulanten möchte ich nicht fehlen, gehörte ich doch zu den ersten Mitarbeitern des Jubilars damals, als er noch die Geschicke der Wasserturbinenversuchsabteilung von Escher Wyss leitete und ihm die schwierige und verantwortungsschwere Aufgabe oblag, die ersten Grossturbinen für besonders hohe und niedrige Gefälle zu entwickeln. Dort erfahren zu haben, wie aus sehr zweckentsprechenden Kenntnissen wissenschaftlicher Grundlagen heraus fortschrittliche Ingenieurprobleme optimal gelöst werden, gleichgültig, ob sie dem eigenen Fachgebiet angehören oder nicht, war mir das Erlebnis dieser meiner ersten Industriestellung. Deshalb ist auch der folgende Beitrag gewählt, der zeigt, wie man bei der Trennung von Gemischen durch Thermodiffusion, von denen heute besonders Isotopengemische wirtschaftlich wichtig sind, die Ausbeute durch hydrodynamische Massnahmen steigern kann.

Die Trennung von Gemischen mittels Thermodiffusion wurde durch den Gedanken von CLUSIUS [1]<sup>2)</sup> praktisch möglich, der eine zirkulatorische Strömung verwendete, die sowohl ein für die Thermodiffusion günstiges Konzentrationsgefälle schafft als auch die getrennten Teilchen fortbewegt und sammelt. In seinem Trennrohr erzeugte CLUSIUS diese Strömung durch Thermosiphonwirkung [1, 2]. Insbesondere zeigte sich das Verfahren als äusserst wirksam bei kleinen Unterschieden der Atomgewichte und bei kleinen Konzentrationen [4], indem es gelang, das gasförmige  $^{37}\text{Cl}$ -Isotop mit 99% Reinheit zu gewinnen, was einem Trennfaktor 310 (siehe dessen weiter unten mitgeteilte Definition) entspricht. Es war überdies schon vorher bekannt, dass sich der Thermodiffusionseffekt nicht auf den gasförmigen Zustand beschränkt und deshalb das Verfahren auch bei Flüssigkeiten, Suspensionen und Aerosolen anwendbar ist [2]. An Flüssigkeiten wurden quantitative Messungen durchgeführt [3, 4], und es ergab sich bei der Trennung des  $^{37}\text{Cl}$  und  $^{35}\text{Cl}$  in flüssigem Zustande ein Thermodiffusionsfaktor gleicher Grössenordnung wie bei isotonen Gasmischungen [5]. Insbesondere gelang es in neuerer Zeit P. H. ABELSON [6], nach dem Trennrohrprinzip das  $^{235}\text{U}$ -Isotop aus flüssigem  $\text{UF}_6$  zu gewinnen.

Dieses Verfahren und auch die später vorgeschlagene Trennwalze, bei der eine intensivere Konvektionsströmung durch Reibungswirkung erzeugt wird, haben Nachteile, die die praktische Anwendung verhinderten. Neben rein

<sup>1)</sup> Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Lehrstuhl für Mechanik.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 636.

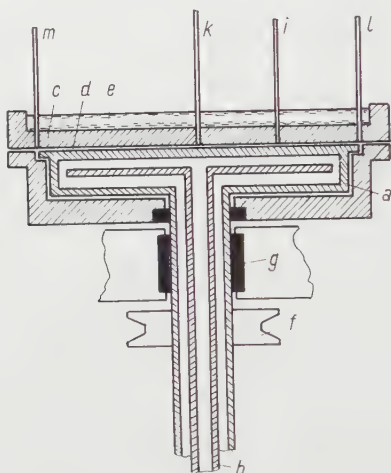
technischen Mängeln, wie unausführbare Baulängen, Abdichtungsschwierigkeiten, oder dass nur eine Komponente gewonnen werden kann, sind es die geringe Thermosiphonwirkung, die geringe Regelfähigkeit und die Turbulenzempfindlichkeit der Strömung. Tatsächlich zeigte sich das Trennrohr als erschütterungsempfindlich [2]. Die Forderungen hoher Trennschärfe und hoher sekundlicher Ausbeute lassen sich auch nicht vereinigen, denn die Trennschärfe ist zu  $r^{-4}$  ( $r$  = Rohrradius), die sekundliche Ausbeute dagegen zu  $r^4$  proportional [2]. Deshalb war die Ausbeute bei der oben erwähnten Trennung des fast reinen gasförmigen Cl-Isotops nur 8 cm<sup>3</sup> pro Tag und erforderte die Anreicherung des Sauerstoffs in Luft um das Dreifache (Trennfaktor 8) 50 Stunden [2].

Man kann aber eine kräftige, laminare, zirkulatorische Strömung erzeugen, die den Vorteil hat, von der Geräteabmessung weitgehend und von den Temperaturdifferenzen völlig unabhängig zu sein, wenn man eine Scheibe in einem engen Gehäuse verwendet und die Scheibe relativ zum Gehäuse rotiert. Das zu trennende Gemisch befindet sich in dem Spalt zwischen Scheibe und Gehäuse. Die Strömung, die entsteht, wenn die Scheibe rotiert und das Gehäuse ruht, ist bekannt [7]. Es bestehen Grenzschichten mit radialen Geschwindigkeitskomponenten, die an der rotierenden Scheibe nach aussen, am Gehäuse nach innen weisen. Beide Grenzschichtströmungen zusammen bilden die zirkulatorische Strömung. Sie verlaufen in Spiralen, deren Steigung durch die Drehzahl und die Spaltweite fast unbeschränkt reguliert werden kann. Das Eintreten der Turbulenz kann durch entsprechende Drehzahlen und Spaltweiten weitgehend vermieden werden. Die gleiche Strömung besteht auch bei ruhender Scheibe und rotierendem Gehäuse sowie allgemein, wenn Scheibe und Gehäuse mit unterschiedlichen Drehzahlen rotieren, denn im einen Fall sind nur die Randbedingungen für die Strömung vertauscht und im anderen Fall überlagert sich lediglich ein auf der Zentrifugalwirkung beruhender Ruhedruck, der eine zusätzliche Thermosiphonwirkung verursacht. Der notwendige lange Strömungsweg, der grösstmögliche Trennrohlängen verlangt, erscheint nun hier in einem Gehäuse relativ sehr kleinen Durchmessers aufgewickelt. Zwischen Scheibe und Gehäuse wird das für die Thermodiffusion erforderliche Temperaturgefälle aufrechterhalten.

Die nachfolgend mitgeteilten Versuchsergebnisse wurden mit einer Scheibe von nur 22,4 cm Durchmesser bei einer mittels Thermoelement gemessenen Temperaturdifferenz von 300°C zwischen Scheibe und Gehäuse, bei Drehzahlen von maximal 3000 U/min und bei Atmosphärendruck erhalten. Die geringe Drehzahl zeigt, dass es sich hier keineswegs um die Trennung schwererer und leichter Moleküle nach dem Zentrifugenprinzip handelt. Es ist auch hier zu bemerken, dass unterschiedliche Molekulargewichte nicht das einzige Kriterium für das Auftreten der Thermodiffusion sind.

Figur 1 zeigt die Versuchsanordnung. Hier rotiert die Scheibe in einem stillstehenden Gehäuse. Die Scheibe *a* ist fliegend bei *g* gelagert und hohl ausge-

führt, damit sie von innen gekühlt werden kann mit einem Strömungsmittel, das durch die hohle Welle bei *b* zu- und abgeführt wird. Die Scheibe bildet mit der gegenüberliegenden Gehäusewand *c* den Spalt *d*, in dem getrennt wird. Die Wand *c* wurde von aussen mit flüssigem Metall *e* geheizt. *f* ist die Antriebs-scheibe. Der Einfachheit halber wird bei dieser ersten Versuchsanordnung nur



Figur 1

Versuchsapparatur mit fliegender Lagerung der Scheibe.

*a* rotierende Scheibe; *b* Zu- und Abfuhr des Kühlmittels zur Scheibe; *c* Gehäusewand; *d* spaltförmiger Trennraum; *e* flüssiges Metall; *f* Antriebsscheibe; *g* Lagerung der Scheibe.

die eine Seite der Scheibe für die Trennung ausgenutzt und nur die in Achsen-nähe sich ansammelnde Komponente gewonnen. Es wurde zunächst Stickstoff aus einem Stickstoff-Argon-Gemisch getrennt.

Die Ein- und Austritte für die Gase sind in Figur 2 angegeben. Es wurden zwei Eintrittsöffnungen benutzt, zunächst *i* auf dem mittleren Durchmesser und dann *m* am Aussenumfang. Die Austrittsöffnung *k* für die leichte Komponente liegt in der Mitte, die für die schwerere Komponente (*l*) auch am Aussenumfang.

Die Trennung erwies sich als derart intensiv, dass im kontinuierlichen Durchfluss getrennt werden konnte. Von dem bei *k* austretenden, an Stickstoff angereicherten Gas wurde die Menge und interferometrisch die Stickstoffkonzentration gemessen. Die zweite, schwerere Komponente blies durch *l* am Aussenumfang ab.

Diese einzelnen Zu- und Abführungen stellen noch nicht die beste Anordnung dar, da hiermit nur ein beschränkter Winkelraum des Spaltes zur Trennung ausgenutzt wird und daher auch ein spiralförmiges Scheibensegment für

die Trennung genügen würde. Die Anordnung mehrerer Ein- und Austrittsöffnungen auf den verschiedenen Durchmessern oder die Anordnung von Ein- und Austrittsschlitzen wird daher noch eine Erhöhung der sekundlichen Ausbeute ergeben. Bei rotierender Scheibe und stillstehendem Gehäuse wird man die Zu- und Ableitungen durch die Scheibe führen.



Figur 2

Zu- und Abführung der Gase.

*i, m* wahlweise Zuführung; *k* Entnahme des angereicherten Stickstoffs, *l* Austritt des an Stickstoff verarmten Gemisches.

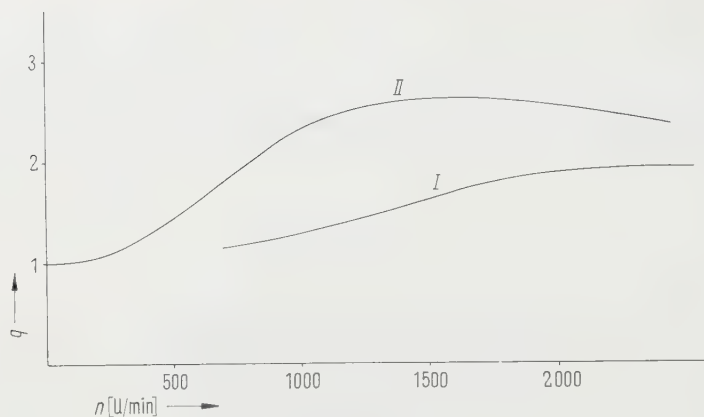
Aus den Versuchsergebnissen wurde der Trennfaktor ermittelt in der üblichen Weise als Verhältnis der Molenbrüche nach und vor der Trennung

$$q = \frac{n''_{N_2}/n''_{Ar}}{n'_{N_2}/n'_{Ar}},$$

wo  $n$  die Anzahl der Mole je Volumeneinheit bedeutet und sich die Indizes '' und ' auf das Gemisch nach und vor der Trennung beziehen.

Figur 3 zeigt den Trennfaktor abhängig von der Drehzahl, wenn ein Gemisch von 58%  $N_2$  und 42%  $Ar$  zugeführt und kontinuierlich eine mit  $N_2$  angereicherte Menge von 80 cm<sup>3</sup>/min entnommen wird. Die Spaltbreite beträgt 1,1 mm. Bei Kurve *I* wurde das zu trennende Gemisch, wie erwähnt, auf einem mittleren Durchmesser, bei Kurve *II* am Aussenumfang zugeführt. Der Vergleich der Kurven *I* und *II* zeigt etwa die Verbesserung, die man von einer Vergrößerung des Scheibendurchmessers zu erwarten hat. Die Ausbeute von 80 cm<sup>3</sup>/min bei einem Trennfaktor 2,5 ist wesentlich grösser als beim Trennrohr, das den gleichen Trennfaktor für Sauerstoff aus Luft [2] bei nur 26 cm<sup>3</sup>/h erreicht bei der doppelten Temperaturdifferenz von 600° C. Mit grösser werdendem Durchsatz wächst dieser Unterschied noch weiter.

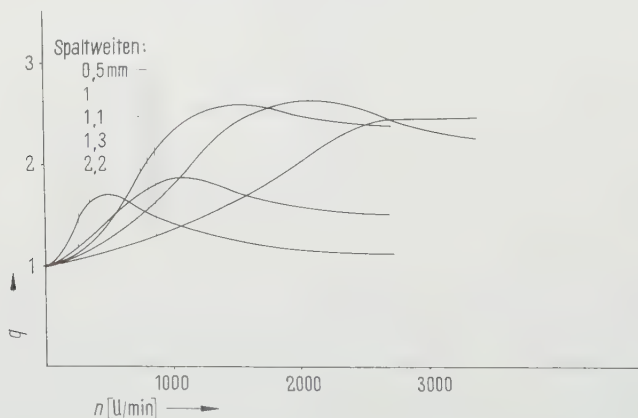
Der Abfall der Kurve *II* bei den hohen Drehzahlen ist eine Wirkung der Turbulenz, was sich hier dadurch bestätigt, dass bei Kurve *I* der Abfall zu höheren Drehzahlen verschoben ist, indem bei *I* zur Trennung nicht das turbulente



Figur 3

Trennfaktor  $q$  abhängig von der Drehzahl  $n$ .

*I* Zufuhr bei *i*; *II* Zufuhr bei *m*. Spaltbreite 1,1 mm. Ausgangskonzentration 58%  $N_2$ , 42% Ar. Sekundlich entnommene Menge an angereichertem Stickstoff 80 cm<sup>3</sup>/min.



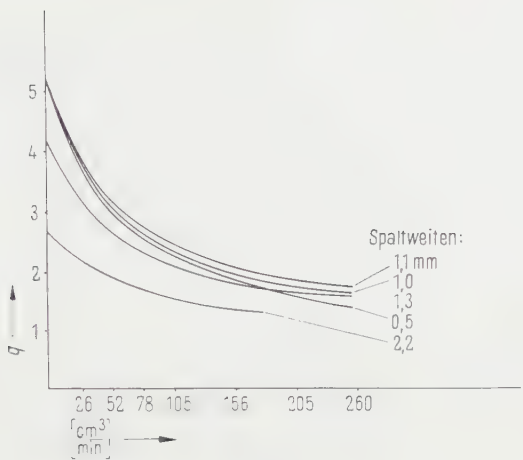
Figur 4

Einfluss der Spaltbreite bei 80 cm<sup>3</sup>/min Entnahme von angereichertem Stickstoff auf den Trennfaktor.

Aussengebiet ausgenutzt wird. Alle folgenden Versuche beziehen sich auf eine Zu- und Abfuhr der Gase wie bei Kurve *II*.

Figur 4 zeigt den Einfluss der Spaltbreite bei der gleichen Entnahmemenge von 80 cm<sup>3</sup>/min. Die Nachrechnung ergibt, dass die Maxima der Kurven bei gleichen Reynoldsschen Zahlen auftreten. Das bestätigt, dass der Abfall der Kurven bei den höheren Drehzahlen vom Turbulentwerden der Strömung am Scheibenumfang herrührt. Eine Spaltbreite von 1 mm erweist sich als günstig.





Figur 5

Abhängigkeit des Trennfaktors von der Entnahmemenge an angereichertem Stickstoff bei den günstigsten Drehzahlen nach Figur 4.

Figur 5 zeigt die Abhängigkeit des Trennfaktors von der Entnahmemenge bei verschiedenen Spaltbreiten und bei der jeweils günstigsten Drehzahl, die sich aus Figur 4 ergab. Man kann danach den Trennfaktor 4 bei der recht hohen Entnahmemenge von 26 cm<sup>3</sup>/min erreichen. Ausserdem ergibt eine Auftragung von  $q$  über der über die Spaltbreite gemittelten radialen Durchtrittsgeschwindigkeit des angereicherten Stickstoffgemisches durch eine Zylinderfläche des Halbmessers 1, dass der Trennfaktor mit kleiner werdender Spaltweite erst zunimmt und dann konstant bleibt, womit sich die Vermutung bestätigt, dass das Verhältnis dieser Stoffgeschwindigkeit  $v_r$  zur Thermodiffusionsgeschwindigkeit  $v_{Th}$

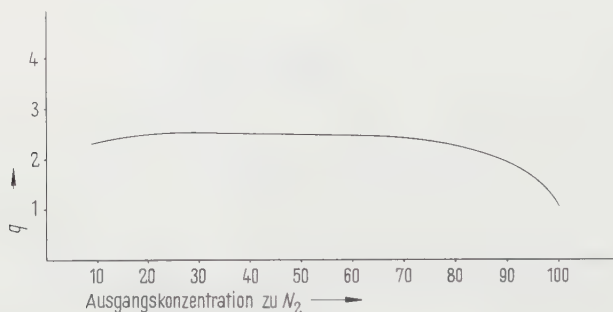
$$\Phi = \frac{v_r}{v_{Th}}$$

eine die Trennschärfe charakterisierende Kennzahl ist.

Schliesslich zeigt Figur 6 den Trennfaktor in Abhängigkeit von der Ausgangskonzentration bei einer Spaltweite von 1 mm, wieder bei einer Entnahmemenge des angereicherten Stickstoffes von 80 cm<sup>3</sup>/min, und bei der günstigsten Drehzahl nach Figur 4. Es zeigt sich ein günstiger flacher Verlauf.

Zum besseren Vergleich mit Trennrohrversuchen über die Sauerstofftrennung aus Luft [2] wurde auch Stickstoff aus Luft getrennt. Die in Figur 7 wiedergegebenen Ergebnisse sind unmittelbar vergleichbar. Durch Wahl der günstigsten Drehzahl (vergleiche Figur 4) lassen sich noch rund 10% zuschlagen. Hiernach ist bei 1 mm Spaltweite und 350°C Temperaturdifferenz

ein Trennfaktor  $q = 1,36$  erreichbar bei einer Ausbeute von  $80 \text{ cm}^3/\text{min}$ , während das Trennrohr bei der kleinsten untersuchten Ringspaltbreite von  $3 \text{ mm}$  und bei  $600^\circ \text{C}$  Temperaturdifferenz den gleichen Trennfaktor erst bei einer Ausbeute von  $16 \text{ cm}^3/\text{h}$  erreicht. Zu der starken Überlegenheit in der Ausbeute trägt grossenteils auch der Umstand bei, dass die heisse Fläche an der Trennscheibe wesentlich grösser als im Trennrohr ist.



Figur 6

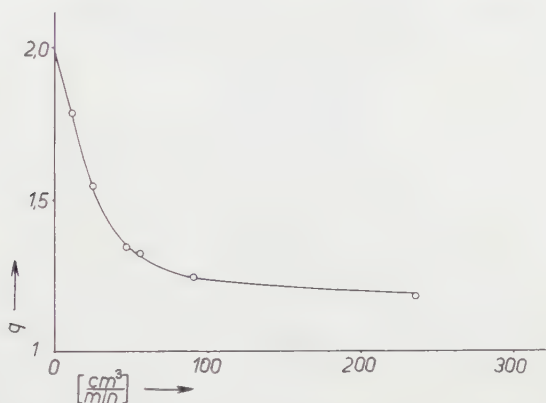
Trennfaktor in Abhängigkeit von der Ausgangskonzentration.

Spaltweite  $1 \text{ mm}$ , Entnahmemenge an angereichertem Stickstoff  $80 \text{ cm}^3/\text{min}$ , günstigste Drehzahlen nach Figur 4.

Diese Versuche zeigen, dass mit einer Trennscheibe, wie die neue Apparatur wohl am zweckmässigsten genannt wird, bei kleinen Abmessungen ein hoher Durchsatz erreichbar ist. Ausserdem ist bei kleinen Apparatedimensionen in einer Stufe ein hoher Trennfaktor mühelos erreichbar, während bei der Druckdiffusion, die in grosstechnischem Maßstab durchgeführt wird und bei der der Trennfaktor der Wurzel aus dem Massenverhältnis gleich ist, sich für das hier verwendete Stickstoff-Argon-Gemisch nur ein Trennfaktor  $1,2$  je Stufe erreichen lässt. Ein weiterer Vorteil, der die Apparatedimensionen ebenfalls erheblich reduziert, ist die Möglichkeit der Trennung in flüssigem Zustand, denn bei der Trennung des Chlor-Isotops hatte sich je Masseneinheit der gleiche Thermoeffusionsfaktor ergeben [5], und zwar für flüssigen und gasförmigen Zustand.

Die zweite zurzeit im Bau befindliche Apparatur zeigt Figur 8. Die Scheibe ist wiederum fliegend gelagert und allseits vom Gehäuse umschlossen, so dass beide Seiten der Scheibe für die Trennung verfügbar sind. Für die Flüssigkeitstrennung wird ein Sperrgas verwendet, dessen Gegendruck über eine Labyrinthdichtung ( $n$ ) erzeugt wird. Der Scheibendurchmesser ist gegenüber der ersten Apparatur vergrössert, was den Vorteil hat, dass bei gleicher Länge des Strömungsweges die spiralförmigen Stromlinien stärkere Steigung besitzen können, wodurch die quer wirkende, normale Diffusion abgeschwächt und der

Trennfaktor vergrößert wird. Die notwendigen Drehzahlen sind auch hier so gering, dass keine besonderen Korrosionen zu befürchten sind. Bei der Flüssigkeitstrennung wird es ausserdem wegen des hohen Wärmeflusses, der etwa  $2,5 \text{ cal/cm}^2 \text{ s}$  bei einer Temperaturdifferenz von  $150^\circ\text{C}$  und bei 1 mm Spaltweite betragen dürfte, zu empfehlen sein, nicht wie bei den beschriebenen Versuchen die Scheibe zu kühlen und das Gehäuse zu heizen, sondern umge-



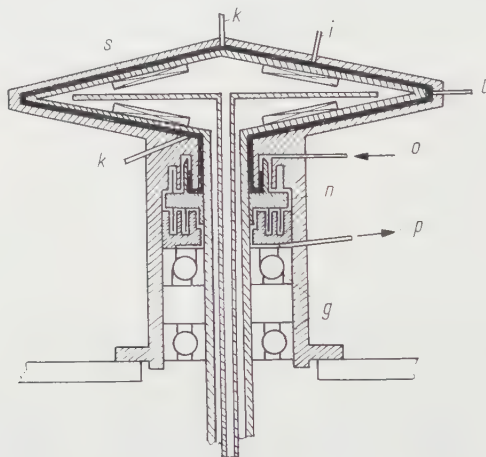
Figur 7

Abhängigkeit des Trennfaktors  $q$  von der Entnahmemenge an angereichertem Stickstoff bei der Trennung aus Luft bei Atmosphärendruck. Drehzahl 1550/min, Spaltweite 1 mm, Temperaturdifferenz  $350^\circ\text{C}$ .

kehrt die Scheibe von innen zu heizen und das Gehäuse zu kühlen, weil das zur Kühlung zur Verfügung stehende Temperaturgefälle beschränkt ist. Wegen des optimalen Wärmeübergangs ist hier eine Heizung durch flüssiges Metall vorteilhaft, das bei Betriebsbeginn im Bedarfsfall durch eine in der Scheibe vorgesehene elektrische Heizung (s in Figur 8) geschmolzen wird. Bei der hiermit erreichbaren Wärmeübergangszahl von der Ordnung  $5 \cdot 10^4 \text{ kcal/m}^2 \cdot ^\circ\text{C h}$  sind nur einige Grade Temperaturdifferenz nötig, um den notwendigen Wärmefluss aufrechtzuerhalten. Die Turbulenz lässt sich überdies auch durch Ausfüllen des Spaltes mit porösem Material vermeiden.

Infolge ihrer intensiven Trennwirkung bei hohem Durchsatz dürfte die Trennscheibe geeignet sein, die Lücken auszufüllen, die die fraktionierte Destillation offenlässt. Hierher gehören Gemische, deren Komponenten benachbarte Siedepunkte besitzen, vor allem Kohlenwasserstoffe, und Gemische von Komponenten, deren Siedepunkte unterhalb der Siedepunkte der gebräuchlichen Kältemittel, nämlich flüssiger Luft und flüssigen Stickstoffs, liegen. Hier ist die Gewinnung von Helium aus dem Neon zu erwähnen, das das Linde-Verfahren liefert, da es 30% Helium enthält. Ferner dürfte die Trenn-

scheibe zur Anreicherung des Uranisotops in kleineren Konzentrationen in Frage kommen, weil besonders bei schwacher Anreicherung höhere sekundliche Ausbeute bei gleichem Energieaufwand als nach den bekannten Verfahren zu erwarten ist und wegen der Möglichkeit, im flüssigen Zustand zu trennen.



Figur 8

Im Bau befindliche, doppelseitige Apparatur insbesondere zur Trennung von Flüssigkeiten. Schwarz: zu trennende Flüssigkeit; *o, p* Zu- und Abfuhr des Sperrgases, *n* Labyrinthdichtung; *s* elektrische Heizung zum Verflüssigen des als Heizflüssigkeit verwendeten Metalls.

Schliesslich ist auf die Gewinnung des als Spurenelement wichtigen  $^{17}\text{O}$ -Isotops hinzuweisen, das nicht anders als durch Thermodiffusion getrennt werden kann.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] CLUSIUS, K., DRP. 701016 vom 5. IV. 1938.
- [2] CLUSIUS, K., und G. DICKEL, Z. phys. Chem. 344, 397–450 (1939).
- [3] KORSCHING, H., und K. WIRTZ, Naturwissenschaften 27, 110 (1939).
- [4] CLUSIUS, K., und G. DICKEL, Naturwissenschaften 27, 148 (1939).
- [5] ALEXANDER, K. F., und R. FREYER, Z. Naturforsch. 10a, 1034 (1955).
- [6] SMYTH, H. D., *Atomic Energy for Military Purposes* (Princeton 1948), S. 68, 203.
- [7] SCHULTZ-GRUNOW, F., Z. angew. Math. Mech. 15, 191–204 (1935).

#### Summary

An isotope process is described which employs the principle of thermal diffusion employed by CLUSIUS and which creates the required circulatory flow not by means of convection but by a forced controllable boundary layer flow. Experimental results are given and compared to results from other processes.

(Eingegangen: 14. August 1957.)

# A Note on the Vorticity Downstream of a Curved Shock

By ASCHER H. SHAPIRO, Cambridge, Mass., USA<sup>1)</sup>

## Introduction

It is well known, according to CROCCO's theorem, that the presence of vorticity in a steady non-viscous motion is associated with the existence of gradients of entropy and of stagnation enthalpy in the direction normal to the streamline.

Vorticity is therefore created when a uniform, parallel flow passes through a curved shock. Here, although the stagnation enthalpy remains constant throughout, a gradient of entropy is created downstream of the shock by reason of the variation of entropy increase with shock angle.

In this brief note an explicit expression is derived for the vorticity downstream of a curved, two-dimensional shock, first, for any fluid, and subsequently, for a perfect gas.

## Analysis

It is convenient to employ CROCCO's theorem in the form<sup>2)</sup>

$$2 \omega V = T \frac{\partial s}{\partial n} - \frac{\partial h_0}{\partial n}, \tag{1}$$

where  $2 \omega$  is the vorticity ( $2 \vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{V}$ ),  $V$  is the velocity,  $T$  is the absolute temperature,  $s$  is the entropy,  $h_0$  is the stagnation enthalpy, and  $n$  is the arc distance measured normal to the streamline direction. The quantities  $\omega$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $s$ , and  $h_0$  all refer to conditions at the downstream face of the shock.

Since  $h_0$  is everywhere the same upstream of the shock, and is unaltered by the shock,  $\partial h_0 / \partial n$  is zero.

Let subscript  $\infty$  refer to the uniform flow upstream of the shock, and let  $\sigma$  and  $\delta$  refer to the shock angle and turning angle, respectively (Figure 1). By a transformation of reference frame such that the shock appears normal, it becomes evident that the entropy rise across the shock,  $s - s_\infty$ , is equal to that for a normal shock which has an entry Mach number  $M_\infty \sin \sigma$ . Accordingly,

<sup>1)</sup> Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering.

<sup>2)</sup> SHAPIRO, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, vol. 1 (Ronald Press, New York 1953), p. 282.





Since the equation of continuity across the shock is

$$\varrho_\infty V_\infty \sin \sigma = \varrho V \sin (\sigma - \delta)$$

the term  $\sin (\sigma - \delta)$  may be entirely eliminated from the previous equation. Rearranging, one obtains

$$\frac{2 \omega r_s}{V_\infty} = \left( \frac{T_\infty}{V_\infty^2} \right) \left( \frac{\varrho}{\varrho_\infty} \right) \left( \frac{T}{T_\infty} \right) \frac{M_n \cos \sigma}{\sin^2 \sigma} \cdot \frac{df}{dM_n}. \tag{5}$$

This is as far as the analysis may be brought in general terms for an arbitrary fluid substance. The further development of an explicit formula is based on a perfect gas. For the latter we note that  $\varrho T / \varrho_\infty T_\infty = p / p_\infty$ , and that  $T_\infty = c_\infty^2 / k R$ , where  $c_\infty$  is the free-stream sound speed,  $k$  is the ratio of specific heats, and  $R$  is the gas constant. Thus  $T_\infty V_\infty^2$  is replaced by  $(k R M_\infty^2)^{-1}$ . The well-known shock formulas for  $p / p_\infty$  and  $s - s_\infty$  are<sup>3)</sup>:

$$\frac{p}{p_\infty} = \frac{2 k}{k + 1} M_n^2 - \frac{k - 1}{k + 1}, \tag{6}$$

$$\frac{s - s_\infty}{R} = \frac{k}{k - 1} \ln \left[ \frac{2}{(k - 1) M_n^2} + \frac{k - 1}{k - 1} \right] + \frac{1}{k - 1} \ln \left[ \frac{2 k}{k + 1} M_n^2 - \frac{k - 1}{k + 1} \right]. \tag{7a}$$

Differentiation of equation (7a) yields

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{df}{dM_n^2} = \frac{2 k (M_n^2 - 1)^2}{M_n^2 [2 k M_n^2 - (k - 1)] [2 + (k - 1) M_n^2]}. \tag{7b}$$

Making the indicated substitutions in equation (5), and simplifying, one finally achieves the desired formula:

$$\frac{2 \omega r_s}{V_\infty} = \frac{4}{k + 1} \cdot \frac{(M_n^2 - 1)^2 \cos \sigma}{M_n^2 [2 + (k - 1) M_n^2]}. \tag{8}$$

This shows that the appropriate dimensionless vorticity,  $\omega r_s / V_\infty$ , depends only on  $M_\infty$ ,  $\sigma$ , and  $k$ .

It is evident that  $\omega r_s / V_\infty$  is zero when  $\sigma = 90^\circ$  (normal shock), and when  $M_n \equiv M_\infty \sin \sigma = 1$ . The latter condition corresponds to the shock lying at the Mach angle, thus signifying that it is of vanishing intensity. By setting equal to zero the derivative  $(\partial \omega / \partial \sigma)_{M_\infty}$ , as computed from equation (8), one obtains after a considerable amount of calculation the following formula for the shock angle at which  $\omega r_s / V_\infty$  is a maximum:

$$(\tan^2 \sigma)_{\omega_{max}} = \frac{4 (1 + k M_n^2)}{(M_n^2 - 1) [2 + (k - 1) M_n^2]}. \tag{9}$$

<sup>3)</sup> SHAPIRO, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, vol. 1 (Ronald Press, New York 1953), pp. 118-120.

Inasmuch as  $M_n \equiv M_\infty \sin \sigma$ , it does not appear possible to express  $(\sigma)_{\omega_{max}}$  by an explicit algebraic formula. However, once  $(\sigma)_{\omega_{max}}$  is obtained from equation (9) for a specific value of  $M_n$ , the corresponding value of  $M_\infty$  is at once calculable from equation (2). Substitution into equation (8) then gives the maximum value of  $(2 \omega r_s / V_\infty)$ .

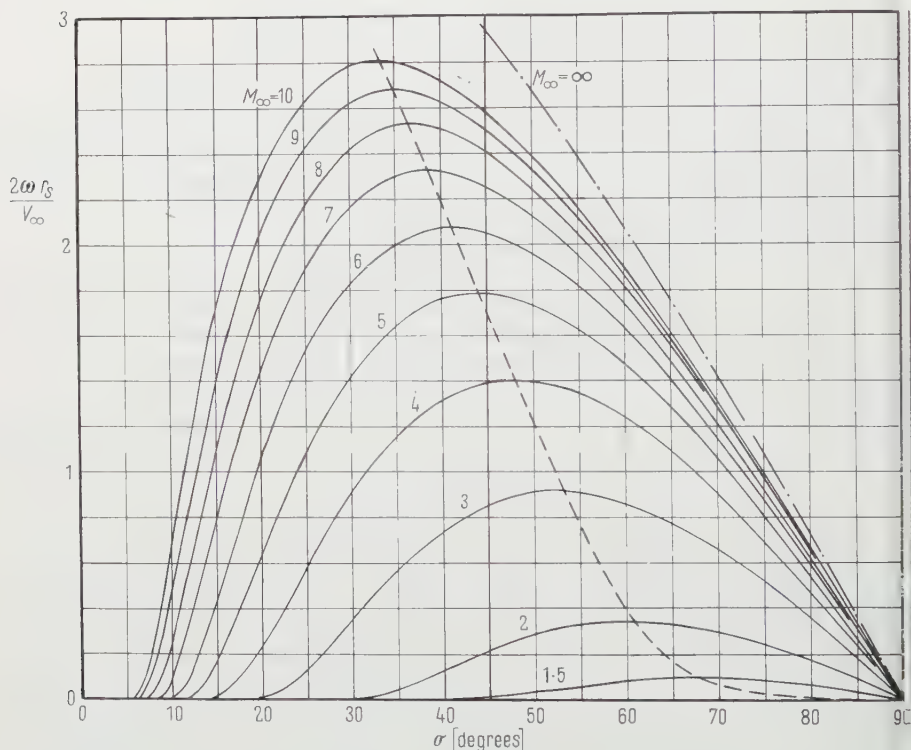


Figure 2

Dimensionless vorticity as function of shock angle and Mach number. Dashed line represents maximum dimensionless vorticity for a fixed Mach number.

## Results

Figures 2 and 3 are graphical representations of equations (8) and (9) for  $k = 1.4$ . The maximum dimensionless vorticity goes to zero very rapidly as  $M_\infty \rightarrow 1$ , and approaches an asymptotic value of 4.17 as  $M_\infty \rightarrow \infty$ . The shock angle corresponding to maximum vorticity starts at  $\sigma = 90^\circ$  for  $M_\infty = 1$ , and after decreasing first rapidly and then slowly, goes to  $0^\circ$  for  $M_\infty = \infty$ .

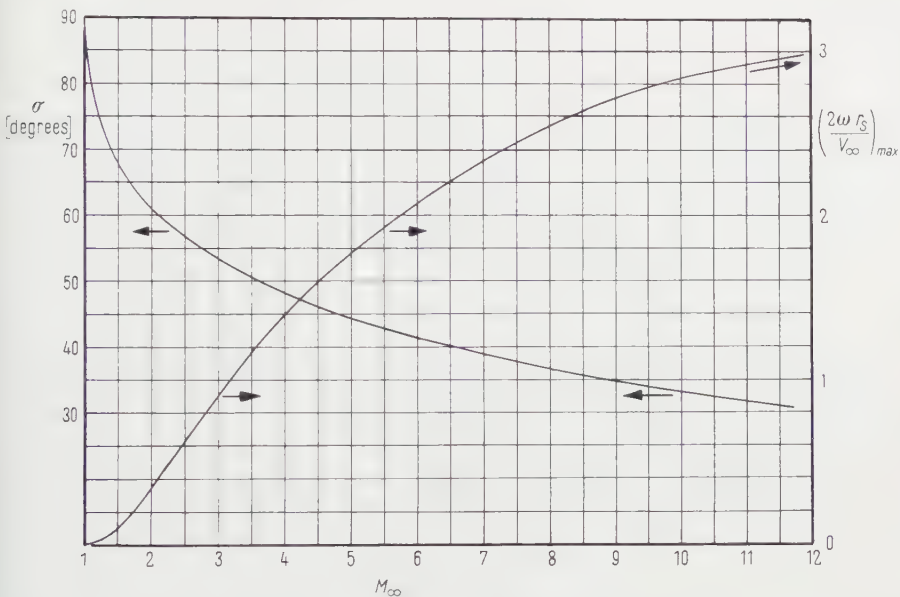


Figure 3

Maximum dimensionless vorticity, and corresponding shock angle, as function of Mach number.

*Zusammenfassung*

Es wird ein expliziter Ausdruck für die Wirbelstärke  $\omega$  hinter einem gekrümmten Verdichtungsstoss für den Fall der zweidimensionalen Strömung eines idealen Gases in Termen der Geschwindigkeit der ungestörten Strömung  $V_\infty$ , ihrer Mach-Zahl  $M_\infty$ , des Stosswinkels  $\sigma$  und des Krümmungsradius  $r_s$  des Verdichtungsstosses im betrachteten Punkt aufgestellt.

Die dimensionslose Wirbelstärke  $\omega r_s/V_\infty$  hängt nur von  $M_\infty$  und  $\sigma$  ab. Bei festgehaltenem  $M_\infty$  treten bei einem Stosswinkel von  $90^\circ$  (senkrechter Verdichtungsstoss) und auch dann, wenn der Stosswinkel dem Mach-Winkel der ungestörten Strömung gleich ist (Verdichtungsstoss der Intensität Null), keine Wirbel auf. Für einen dazwischenliegenden Winkel, der von  $68^\circ$  für  $M_\infty = 1,5$  bis zu  $36^\circ$  für  $M_\infty = 10$  variiert, wird die Wirbelstärke ein Maximum.

(Received: October 4, 1957.)

# Dimensionslose Theorie der isentropischen Gasströmung durch Kreisräder unter der Voraussetzung kleiner Breiten und unendlicher Schaufelzahl (Stromfadentheorie)

Von WILHELM SPANNHAKE, Karlsruhe, Deutschland<sup>1)</sup>

Es wird ein Arbeitsdiagramm aufgestellt, mittels dessen man den Verlauf der Strömung durch ein vorgegebenes Kreisrad verfolgen oder für einen vorgegebenen Strömungsverlauf die Form des Kreisrades bestimmen kann.

Betrachtet wird die *Absolutströmung*.

Vier Aussagen stehen zur Verfügung.

## 1. Ausdrücke für die Isentropie

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^\kappa = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{2\kappa/(\kappa-1)}. \quad (1)$$

$a$  ist die örtliche Schallgeschwindigkeit.

## 2. Die Energiegleichung der Turbinentheorie

$$c^2 + \frac{2}{\kappa-1} a^2 = c_0^2 + \frac{2}{\kappa-1} a_0^2 + 2 u_0 \frac{r}{r_0} \left( c_u - \frac{r_0}{r} c_{u_0} \right). \quad (2)$$

Der Index 0 bezieht sich auf einen passend gewählten Bezugskreis mit dem Radius  $r_0$ .

## 3. Die Kontinuitätsgleichung

$$r b c \sin \delta \frac{\varrho}{\varrho_0} = r_0 b_0 c_0 \sin \delta_0. \quad (3)$$

$\delta$  ist der Winkel der Absolutgeschwindigkeit gegen die Umfangsgeschwindigkeit.

## 4. Aussage über die Umfangskomponente $c_u$

Bei arbeitsfreier Strömung ist

$$c_u = c_{u_0} \frac{r_0}{r}.$$

Von diesem Wert muss sich  $c_u$  bei Strömung mit Arbeitsaustausch um eine passend zu wählende Funktion von  $r/r_0$  unterscheiden.

<sup>1)</sup> Technische Hochschule «Friedericiana».

Wir setzen

$$c_u = c_{u_0} \frac{r_0}{r} = u_0 L \left( \frac{r}{r_0} \right). \quad (4)$$

$L$  ist eine dimensionslose Funktion von  $r/r_0$ , die für  $r = r_0$  den Wert Null hat. Führen wir sie in Gleichung (2) ein, so kommt, wenn wir von jetzt ab

$$\frac{r}{r_0} = x \quad (5)$$

setzen,

$$c^2 + \frac{2}{\kappa - 1} a^2 = \frac{2}{\kappa - 1} a_0^2 \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left( \frac{c_0}{a_0} \right)^2 + (\kappa - 1) \left( \frac{u_0}{a_0} \right)^2 x L \right]. \quad (6)$$

Der Klammerausdruck ist eine dimensionslose Funktion von  $x$ ; wir setzen

$$K^2 = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left( \frac{c_0}{a_0} \right)^2 + (\kappa - 1) \left( \frac{u_0}{a_0} \right)^2 x L. \quad (7)$$

Mit dieser Festsetzung wird aus Gleichung (6)

$$\left( \frac{\frac{c}{\sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}}} a_0 K}{a_0 K} \right)^2 + \left( \frac{a}{a_0 K} \right)^2 = 1. \quad (8)$$

Nunmehr führen wir die dimensionslosen Grössen

$$\frac{\frac{c}{\sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}}} a_0 K}{a_0 K} = \xi, \quad (9a)$$

$$\frac{a}{a_0 K} = \eta \quad (9b)$$

ein und erhalten als *dimensionslose Energiegleichung*

$$\xi^2 + \eta^2 = 1. \quad (10)$$

Nach den Gleichungen (9) und (10) wird die Machsche Zahl

$$M_a = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (11)$$

Für das Dichteverhältnis findet man

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{2/(\kappa - 1)} = (\eta K)^{2/(\kappa - 1)} = (1 - \xi^2)^{1/(\kappa - 1)} K^{2/(\kappa - 1)}. \quad (12)$$

Mit den Gleichungen (9) und (12) wird nun aus Gleichung (3), wenn wir noch

$$\frac{b}{b_0} = z \quad (13)$$

setzen

$$\xi (1 - \xi^2)^{1/(\kappa-1)} \sin \delta = \frac{1}{\kappa z} \cdot \frac{\xi_0 \sin \delta_0 K_0}{K^{2/(\kappa-1)+1}}. \quad (14)$$

Gleichung (4) schreibt sich unter Einführung des Winkels  $\delta$

$$c \cos \delta = \frac{1}{\kappa} c_0 \cos \delta_0 + u_0 L,$$

und hieraus wird

$$\xi \cos \delta = \frac{\xi_0 \cos \delta_0 K_0 + \sqrt{\frac{\kappa-1}{2}} \cdot \frac{u_0}{a_0} \kappa L}{\kappa K}. \quad (15)$$

Auf der rechten Seite der beiden letzten Gleichungen stehen, da auch  $z$  als Funktion von  $\kappa$  aufzufassen ist, dimensionslose Funktionen von  $\kappa$ .

Wir setzen

$$\lambda(\kappa) \varphi(\kappa) = \frac{\xi_0 \sin \delta_0 K_0}{\kappa z K^{2/(\kappa-1)+1}}, \quad (16)$$

$$\varphi(\kappa) = \frac{\xi_0 \cos \delta_0 K_0 + \sqrt{\frac{\kappa-1}{2}} \cdot \frac{u_0}{a_0} L \kappa}{\kappa K}, \quad (17)$$

also

$$\lambda(\kappa) = \frac{1}{z} \cdot \frac{\xi_0 \sin \delta_0 K_0}{\xi_0 \cos \delta_0 K_0 + \sqrt{\frac{\kappa-1}{2}} \cdot \frac{u_0}{a_0} L \kappa}. \quad (18)$$

Die Gleichungen (14) und (15) schreiben sich nun

$$\xi (1 - \xi^2)^{1/(\kappa-1)} \sin \delta = \lambda \varphi, \quad (19)$$

$$\xi \cos \delta = \varphi. \quad (20)$$

Division liefert

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\lambda}{(1 - \xi^2)^{1/(\kappa-1)}} \quad (21)$$

oder

$$\sin \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (1 - \xi^2)^{2/(\kappa-1)}}}. \quad (22)$$

Quadrieren und Addieren ergibt

$$(\xi^2 - \varphi^2) (1 - \xi^2)^{2/(\kappa-1)} - \lambda^2 \varphi^2 = 0, \quad (23)$$

also eine Gleichung von der Form

$$F\{\xi, \varphi(\kappa), \lambda(\kappa)\} = 0.$$



Wir fragen nun nach Extremwerten von  $q$  als Funktion von  $\xi$  und bilden daher

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{d\lambda}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}} \quad (1).$$

Im allgemeinen, das heißt bei beliebig gegebenem  $Z(x)$  und  $L(x)$  wird der Nenner des Ausdrucks auf der linken Seite nicht gleichzeitig mit dem Zähler Null; daher lautet die Extrembedingung

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{2}{\kappa - 1} (\xi^2 - \varphi^2) - \eta^2 = 0. \quad (24)$$

Mit Gleichung (20) wird hieraus

$$\frac{2}{\kappa - 1} \xi^2 \sin^2 \delta - \eta^2$$

und hieraus mit den Gleichungen (9)

$$c \sin \delta = a. \quad (25)$$

Die Extremwerte von  $\varphi$  und damit von  $x$  werden also dort erreicht, wo die Meridiankomponente  $c_m = c \sin \delta$  der örtlichen Schallgeschwindigkeit gleich ist.

Gleichung (19) liefert, nach  $\varphi$  aufgelöst,

$$\varphi = \frac{\xi (1 - \xi^2)^{1/(\kappa-1)}}{\lambda^2 (1 - \xi^2)^{2/(\kappa-1)}}. \quad (26)$$

In den Gleichungen (22) und (26) fassen wir  $\lambda$  als Parameter auf und erhalten damit die Kurvendarstellung der beigefügten Figur.

Die Maxima der  $\varphi$ -Kurven liegen auf der Hyperbel

$$\varphi^2 = \frac{\kappa + 1}{2} \xi^2 - \frac{\kappa - 1}{2}. \quad (27)$$

Längs dieser Hyperbel ist also  $c \sin \delta = a$ . Auf ihr genügen die  $\lambda$ -Werte entsprechend Gleichung (23) der Beziehung

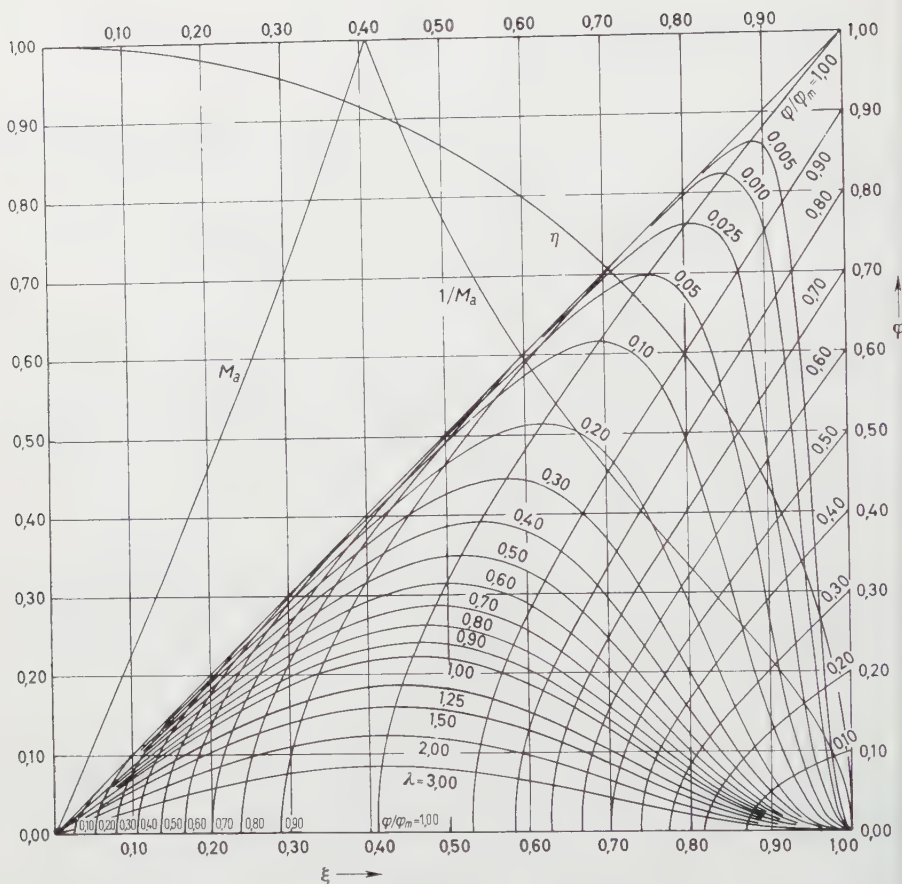
$$\lambda = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot \frac{(1 - \xi^2)^{(\kappa+1)/(\kappa-1)}}{\xi^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}}. \quad (28)$$

Nun ist der kritische  $\xi$ -Wert, der der Mach-Zahl eins entspricht,

$$\xi_{kr} = \sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}}, \quad (29)$$

daher kann man für  $\lambda$  schreiben

$$\lambda_{\varphi \max} = \xi_{kr}^2 \frac{(1 - \xi^2)^{(\kappa+1)/(\kappa-1)}}{\xi^2 - \xi_{kr}^2}. \quad (30)$$



Dimensionsloses Arbeitsdiagramm für Gasströmungen mit Energieaustausch. Parameterdarstellung der Zustandsfläche  $F \equiv (\xi^2 - \varphi^2) (1 - \xi^2)^{2/(\kappa-1)} - \lambda^2 \varphi^2 = 0$  für die allgemeine eindimensionale Gasströmung.

In das Diagramm ist die Mach-Zahl bzw. ihr reziproker Wert mit eingetragen. Das Druckverhältnis wird

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{2\kappa/(\kappa-1)} = (\eta K)^{2\kappa/(\kappa-1)} = (1 - \xi^2)^{\kappa/(\kappa-1)} K^{2\kappa/(\kappa-1)},$$

also

$$\frac{p}{p_0} = P K^{2\kappa/(\kappa-1)}. \quad (31)$$

$P$  ist eine reine Funktion von  $\xi$ .

## Anwendungsbeispiele

### 1. Freie Drallströmung im schaufellosen Rotationshohlraum (Wirbelquelle)

Hier ist  $c_u r = \text{const} = c_{u_0} r_0$  und  $u = u_0 = 0$ . Daher  $L = 0$ ,  $K = K_0$ .

Für konstante Breite ( $z = 1$ ) verläuft die Strömung entsprechend irgend-einer Kurve  $\lambda = \text{const}$ . Dabei ist

$$\varphi = \frac{\xi_0 \cos \delta_0}{x} \quad (32)$$

Für veränderliche Breite muss man  $\lambda$  aus

$$\lambda = \frac{\text{tg } \delta_0}{z}$$

ausrechnen und eine die  $q$ - und  $\sin \delta$ -Kurven kreuzende Linie eintragen. Auf jeden Fall gelangt man an die gestrichelt eingetragene Maximumshyperbel. Aus dem dort geltenden  $q$ -Wert erhält man den Minimalradius aus Gleichung (32). In der rein zweidimensionalen Strömung wären die Minimalkreise tatsächliche Grenzkreise. Im rotationssymmetrischen Falle kann man den mittleren Meridian des Hohlraumes U-förmig umbiegen und so die Strömung wirklich fortsetzen (unter der Voraussetzung kleiner Breite!). Ein reiner Drall ist durch  $\varphi = \xi$ , eine reine Quellströmung durch  $\varphi = 0$  gegeben.

### 2. Kreiselrad mit vorgegebener «Zustandslinie»

Von irgendeinem Punkt  $q_0$ ,  $\xi_0$  ziehen wir eine Linie durch das Feld der  $q$ -Kurven. Jeder Punkt einer solchen Linie entspricht einem Ordinatenwert  $q$  und einem Parameterwert  $\lambda$ . Um aus diesen beiden Werten weitere Angaben aus den beiden Gleichungen (17) und (18) zu gewinnen, müssen wir entweder  $x$  oder  $z$  als Funktion von  $\xi$  wählen. Dann kann man die Funktion  $L$  und  $z$  bzw.  $L$  und  $x$  bestimmen. Der  $\sin \delta$  ergibt sich in einfacher Weise aus dem Diagramm. Eine nähere Diskussion des Diagramms, aus der noch eine Reihe zusätzlicher Aufschlüsse zu erlangen wären, würde hier zu weit führen.

## Summary

A diagram is developed by means of which any flow through axisymmetric spaces with and without exchange of energy can be followed up. The flow, too, is assumed to be axisymmetric which, in the case of turbomachines, means that an infinite number of blades is assumed and the average values of the meridian components of the velocities are introduced. In all cases the absolute flow is discussed.

(Eingegangen: 30. September 1957.)

# Geschwindigkeitsverteilung in rotationssymmetrischen Drallströmungen inkompressibler Flüssigkeiten

Von MICHAEL STRSCHELETZKY, Friedrichshafen, Deutschland<sup>1)</sup>

## 1. Problemstellung

Beim Entwerfen von Strömungsmaschinen, hydraulischen Anlagen und Apparaten strebt man an, die festen Begrenzungen (Wände) der strömenden Flüssigkeit derart zu formen, dass die vorgeschriebenen Kräfte der Gegenwirkung zwischen der Flüssigkeit und den Wänden bei einer ablösungsfreien Umströmung dieser Wände verwirklicht werden können. Nicht weniger wichtig ist die rechnerische Ermittlung von «freien Trennflächen», die unter Umständen im betreffenden Raum weit von den festen Wänden entstehen können und die «gesunde» Strömung von denjenigen Gebieten trennen, die zwar mit Flüssigkeit gefüllt sind, aber ausserhalb der Hauptströmung liegen (vgl. [1]<sup>2)</sup> und insbesondere das erste Kapitel in [2]). Die beiden Aufgaben werden auf eine ausführliche hydrodynamische Analyse von Strömungen zurückgeführt. Die Grundlage dieser Analyse bildet die rechnerische Ermittlung des Geschwindigkeitsfeldes von «gesunden» Strömungen, deren Begrenzungen sowohl aus festen Wänden als auch aus Trennflächen bestehen können, wobei die Form dieser Begrenzungen dem Zustand des hydrodynamischen Gleichgewichtes der strömenden Flüssigkeit im betreffenden Raum entspricht (vgl. [1] und das zweite Kapitel in [2]).

Strömungen, die in rotierenden Strömungsmaschinen vorkommen, vollziehen sich zum grössten Teil in Kanälen, deren Begrenzungen durch rotationssymmetrische Wände gebildet sind. Auch verschiedene Strömungen in Rohrleitungen, Armaturen, Messgeräten, Zyklonabscheidern usw. sind durch feste Wände begrenzt, die ganz oder zum Teil aus rotationssymmetrischen Flächen bestehen.

Es ist also für die praktischen Zwecke von grosser Bedeutung, Strömungen zu analysieren, die sich in verschiedenen Rotationshohlräumen vollziehen. Dabei ist es besonders wichtig, die sogenannten «rotationssymmetrischen» Strömungen zu untersuchen, deren örtliche Geschwindigkeiten von der Winkelkoordinate unabhängig sind. Die in Rotationshohlräumen vorkommenden wirk-

<sup>1)</sup> Maschinenfabrik J. M. Voith GmbH, Heidenheim.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 660.

lichen Strömungen kann man zwar angenähert, aber meist mit genügender Genauigkeit als rotationssymmetrische Bewegungen betrachten.

In dieser Abhandlung werden Geschwindigkeitsfelder von stationären Strömungen in Rotationshöhlräumen betrachtet, wobei angenommen wird, dass die Verteilung der örtlichen Geschwindigkeiten und Drücke sowohl als auch die Verteilung des Energieinhaltes der strömenden Flüssigkeit rotationssymmetrisch ist. Wir wollen also die dreidimensionalen « Drallströmungen » untersuchen, deren Geschwindigkeitsfelder im allgemeinen Falle axiale, radiale und Umfangskomponenten der örtlichen Geschwindigkeit aufweisen, die nur von der axialen und der radialen Koordinate (und nicht von der Winkelkoordinate!) abhängen.

Die Analyse des Geschwindigkeitsfeldes wird auf eine reibungsfreie, homogene, inkompressible Flüssigkeit bezogen, wobei aber praktisch beliebige Verteilungen des Energieinhaltes der Flüssigkeit in der zu den Stromflächen senkrechten Richtung zugelassen werden<sup>3)</sup>.

## 2. Das Geschwindigkeitsfeld im allgemeinen Falle

Wir betrachten stationäre, das heisst von der Zeit  $t$  unabhängige, rotationssymmetrische Strömungen reibungsfreier, homogener, inkompressibler Flüssigkeiten und nehmen an, dass eine solche Strömung einen Raum  $\mathfrak{R}$  lückenlos ausfüllt, wobei innerhalb dieses Raums keine Unstetigkeiten des Geschwindigkeitsfeldes auftreten. Die Form der festen Begrenzungen (Wände) des Raums  $\mathfrak{R}$  entspricht also dem Zustand des hydrodynamischen Gleichgewichtes der betreffenden Strömung [1, 2].

Es ist bequem, die Analyse der Strömung im betreffenden Falle auf die zylindrischen Koordinaten  $\theta, r, z$  (Figur 1) zu beziehen. Da die Strömung rotationssymmetrisch ist, sind sowohl die örtlichen Geschwindigkeiten als auch die örtlichen Drücke von der Winkelkoordinate  $\theta$  unabhängig. Die Eulerschen Gleichungen lauten also:

$$c_a \frac{\partial c_u}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_u}{\partial r} + \frac{c_u c_r}{r} = 0, \quad (1)$$

$$c_a \frac{\partial c_r}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} - \frac{c_u^2}{r} = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2)$$

$$c_a \frac{\partial c_a}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_a}{\partial r} = -g - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3)$$

<sup>3)</sup> In reellen Strömungen hinter den Laufrädern von Strömungsmaschinen hängt die Verteilung des Energieinhaltes der Flüssigkeit in der zu den Stromflächen senkrechten Richtung von der Bauart der Lauf- und Leitschaufeln wesentlich ab und kann unter Umständen beträchtliche Abweichungen von einem konstanten Wert aufweisen.

wobei  $c(c_u, c_r, c_a)$  örtliche Geschwindigkeit<sup>4)</sup>,  $g$  Beschleunigung der Erdschwere,  $p$  örtlichen Druck und  $\varrho$  Dichte bedeuten.

Wir bezeichnen durch

$$c_m = \sqrt{c_r^2 + c_a^2} \quad (4)$$

die Meridiankomponente der örtlichen Geschwindigkeit. Die Stromlinien  $l$  der Strömung bilden rotationssymmetrische Stromflächen  $f(r, z) = F(b)$ , wobei der Parameter  $F(b)$  eine Funktion der Flächennormale (Figur 1) darstellt. Die Meridianschnitte der Stromflächen  $f(r, z) = F(b)$  stellen stetig gekrümmte Stromlinien  $l_m$  des Geschwindigkeitsfeldes  $c_m(r, z)$  dar.

Die durch die Krümmung der Stromlinien  $l_m$  erzeugte Fliehkraft pro Volumeneinheit beträgt  $\varrho c_m^2/R$ , wobei  $R(r, z)$  den örtlichen Krümmungsradius bedeutet. Die Komponenten dieser Fliehkraft sind:

$$\text{in } r\text{-Richtung } -\frac{c_m^2}{R} \varrho \cos \alpha, \quad \text{in } z\text{-Richtung } \frac{c_m^2}{R} \varrho \sin \alpha.$$

Der örtliche Vektor  $N$  der Hauptnormalen der Stromfläche  $f(r, z) = F(b)$  liegt in der  $(r, z)$ -Ebene und bildet mit den Koordinatenrichtungen  $r$  und  $z$  die Winkel  $\beta_r$  und  $\beta_z$ ; deren Kosinus sind:

$$\cos \beta_r = R \frac{d^2 r}{dl_m^2} \cos \alpha, \quad \cos \beta_z = R \frac{d^2 z}{dl_m^2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha.$$

Die örtliche Beschleunigung der stationären Strömung in der Meridianebene im Punkt  $A$  (Figur 1) hat die Komponenten:

in  $r$ -Richtung:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\partial c_r}{\partial z} c_a + \frac{\partial c_r}{\partial r} c_r = \frac{d^2 r}{dl_m^2} c_m^2 = \frac{c_m^2}{R} \cos \alpha, \quad (5)$$

in  $z$ -Richtung:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial c_a}{\partial z} c_a + \frac{\partial c_a}{\partial r} c_r = \frac{d^2 z}{dl_m^2} c_m^2 = -\frac{c_m^2}{R} \sin \alpha. \quad (6)$$

Da die Gleichungen (5) und (6) für beliebige Punkte der Normallinie  $b$  (Figur 1) gelten, dürfen wir diese Gleichungen in die Summe

$$(3) db \sin \alpha - (2) db \cos \alpha$$

einführen und erhalten damit

$$\frac{c_u^2}{r} \cos \alpha db - \frac{c_m^2}{R} db = -g \sin \alpha db - \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \sin \alpha - \frac{\partial p}{\partial r} \cos \alpha \right) db$$

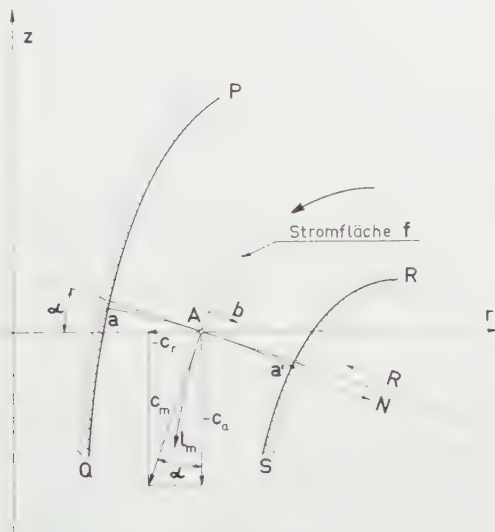
oder

$$\frac{c_u^2}{r} dr - \frac{c_m^2}{R} db = \frac{d}{db} \left( \frac{p}{\varrho} + g z \right) db. \quad (7)$$

<sup>4)</sup> Die Indizes bedeuten:  $r$  radiale Richtung,  $u$  Richtung der Umfangsgeschwindigkeit bzw. tangentielle Richtung und  $a$  axiale Richtung.



Diese Gleichung gilt längs der Normallinie  $b$ , so dass das auf der rechten Seite stehende vollständige Differential diejenige Änderung der Grösse  $p/q \pm g z$  bedeutet, die der Verschiebung  $db$  ( $dr$ ,  $dz$ ) des Aufpunktes längs der Normallinie  $b$  entspricht.



Figur 1  
Meridianschnitt einer rotationssymmetrischen Strömung.

Wir bilden jetzt die Summe

$$(3) dl_m \cos \alpha + (2) dl_m \sin \alpha ,$$

wobei  $dl_m = \sqrt{dl_r^2 + dl_z^2}$  ist, und erhalten damit

$$c_a \left( -\frac{\partial c_a}{\partial z} dl_z + \frac{\partial c_r}{\partial z} dl_r \right) + c_r \left( \frac{\partial c_a}{\partial r} dl_z + \frac{\partial c_r}{\partial r} dl_r \right) - \frac{c_u^2}{r} dl_r \\ = g dz + \frac{1}{q} \left( \frac{\partial p}{\partial z} dl_z + \frac{\partial p}{\partial r} dl_r \right)$$

oder, nach einigen Zwischenrechnungen

$$\frac{d}{dl_m} \left[ \frac{c_m^2}{2} + g z + \frac{p}{q} \right] dl_m = \frac{c_u^2}{r} dr . \tag{8}$$

Diese Gleichung gilt längs der Stromlinie  $l_m$  der Meridianströmung; das auf der linken Seite stehende vollständige Differential bedeutet diejenige Änderung der Grösse  $c_m^2/2 + g z + p/q$ , die der Verschiebung  $dl_m$  ( $-dr$ ,  $-dz$ ) des Aufpunktes längs der Stromlinie  $l_m$  entspricht. Da die Strömung rotationssymmetrisch ist, gilt die Gleichung (8) auf der ganzen Stromfläche  $f(r, z) = F(b)$ .

Aus (1) ergibt sich

$$\frac{c_u}{r} = -\frac{c_a}{c_r} \cdot \frac{\partial c_u}{\partial z} - \frac{\partial c_u}{\partial r}$$

oder, auf die Stromfläche  $f(r, z) = F(b)$  bezogen,

$$\frac{c_u}{r} dl_r = \frac{\partial c_u}{\partial l_z} dl_z + \frac{\partial c_u}{\partial l_r} dl_r = \frac{dc_u}{dl_m} dl_m$$

oder

$$\frac{c_u^2}{r} dr = -\frac{d}{dl_m} \left( \frac{c_u^2}{2} \right) dl_m.$$

Damit ergibt sich aus (8)

$$\frac{d}{dl_m} \left[ \frac{c_m^2}{2} + \frac{c_u^2}{2} + g z + \frac{p}{\varrho} \right] dl_m = 0 \quad (9)$$

oder, nach der Integration längs der Stromlinie  $l_m$ ,

$$\frac{c^2}{2} + g z + \frac{p}{\varrho} = C_l, \quad (10)$$

wobei die Integrationskonstante  $C_l$  den Energieinhalt (Energie der Masseneinheit) der strömenden Flüssigkeit bedeutet und für die ganze Stromfläche  $f(r, z) = F(b)$  gilt; die Ordinate  $z$  entspricht den auf dieser Stromfläche liegenden Aufpunkten.

Da die Strömung im Raum  $\mathfrak{R}$ , nach der Voraussetzung, keine Trennflächen, das heisst keine Unstetigkeiten des Geschwindigkeits- bzw. Druckfeldes enthält, stellt  $C_l$  eine stetige Funktion der längs einer jeden Normallinie  $a a'$  (Figur 1) gemessenen Ordinate  $b$  dar, so dass

$$C_l = C_l(b)$$

ist. Das bedeutet, dass beim Übergang von einer Stromfläche  $f_n$  zu der Stromfläche  $f_{n+1}$ , die von  $f_n$  in einem Abstand  $db$  (längs Normallinie  $b$  gemessen!) liegt, sich die Konstante  $C_l(b)$  ändert und auf der Stromfläche  $f_{n+1}$  den Wert

$$C_l(b) + \frac{\partial C_l(b)}{\partial b} db$$

aufweist.

Aus (10) erhalten wir also

$$\frac{\partial}{\partial b} \left[ \frac{c^2}{2} + g z + \frac{p}{\varrho} \right] db = \frac{\partial C_l(b)}{\partial b} db. \quad (11)$$

Aus (7) und (11) ergibt sich

$$\frac{c_u^2}{r} dr - \frac{c_m^2}{R(b)} db + \frac{\partial}{\partial b} \left[ \frac{c_m^2}{2} + \frac{c_u^2}{2} \right] db = \frac{\partial C_l(b)}{\partial b} db = \frac{dC_l(b)}{db} db$$

oder<sup>5)</sup>

$$\frac{\partial c_m}{\partial b} - \frac{c_m}{R(b)} = -\frac{1}{c_m} \cdot \frac{dC_l(b)}{db} - \frac{1}{c_m} \left[ \frac{c_u}{r} \cdot \frac{d(c_u r)}{db} \right]. \quad (12)$$

Die Gleichung (12) stellt in Differentialform die Grundgleichung der rotationssymmetrischen Drallströmungen reibungsfreier, homogener, inkompressibler Flüssigkeiten dar. Sie gilt (wie die Eulerschen Differentialgleichungen 1, 2 und 3) sowohl für wirbelbehaftete Strömungen als auch für den Fall, dass eine Strömung wirbelfrei ist, wobei ihr Geschwindigkeitsfeld einer Potentialfunktion entspricht. Die Gleichung (12) wird auf eine Flächennormale  $b$  bezogen, die zu den Stromflächen  $f(r, z) = F(b)$  senkrecht gerichtet ist (Figur 1).

Die Gleichung (12) integrieren wir längs der Normallinie  $a \overline{a'}$  (Figur 1), vorausgesetzt, dass die festen Begrenzungen  $PQ$  und  $RS$  des Rotationshohlraums  $\mathfrak{R}$  den Zustand des hydrodynamischen Gleichgewichtes der betreffenden Strömung ermöglichen (vgl. 1 und das zweite Kapitel in [2]). Damit erhalten wir<sup>6)</sup>:

$$c_m \int_0^b \frac{db}{R(b)} \left| \sqrt{c_{m0}^2 - 2 \int_0^b \frac{1}{R(b)} \frac{dC_l(b)}{db} db - 2 \int_0^b \frac{1}{R(b)} \left[ \frac{c_u}{r} \cdot \frac{d(c_u r)}{db} \right] db} \right|, \quad (13)$$

wobei  $c_{m0}$  die Meridiankomponente der örtlichen Geschwindigkeit an der Stelle  $a(b=0)$  bedeutet, die aus der Kontinuitätsbedingung ermittelt werden kann.

Die sekundliche Durchflussmenge, die durch die Normalfläche  $a \overline{a'}$  (Figur 1) fließt, ist

$$Q = 2\pi \int_0^b \left[ r e^{\int_0^b \frac{db}{R(b)}} \sqrt{c_{m0}^2 + \varphi(b)} \right] db, \quad (14)$$

wobei

$$\varphi(b) = 2 \int_0^b e^{\int_0^b \frac{db}{R(b)}} \frac{dC_l(b)}{db} db - 2 \int_0^b e^{-2 \int_0^b \frac{db}{R(b)}} \left[ \frac{c_u}{r} \cdot \frac{d(c_u r)}{db} \right] db$$

bedeutet. Da die unter dem Integralzeichen der Gleichung (14) stehende Funktion im ganzen Integrationsbereich stetig ist, kann man die Integration numerisch durchführen. Damit ergibt sich nach der Gaußschen Formel

$$Q \approx 2\pi b \sum_{k=1}^k A_k \left[ r e^{\int_0^b \frac{db}{R(b)}} \sqrt{c_{m0}^2 + \varphi(b)} \right]_k, \quad (15)$$

<sup>5)</sup> Vgl. Abschnitt 4, Gleichung (28).

<sup>6)</sup> Vgl. den Anhang zu dieser Abhandlung.

wobei die in Klammern stehende Funktion den  $k$  Gaußschen Abszissen entspricht.  $A_k$  sind die Gaußschen Koeffizienten [8]. Aus der Gleichung (15) ergibt sich die Komponente  $c_{m0}$  der örtlichen Geschwindigkeit an der Stelle  $b = 0$ .

Da zu Beginn der Berechnung die Funktion  $R(b)$  nur für die Grenzflächen des Rotationshohlraums bekannt ist, findet man die Lösung von (14) mittels der Methode der sukzessiven Approximation.

Die Gleichung (13) ermöglicht eine direkte Ermittlung der  $c_m$ -Verteilung längs einer jeden Normallinie  $b$  (zum Beispiel  $a$  oder  $a'$  auf Figur 1), wenn sowohl die Drallverteilung und die Funktion  $C_l(b)$  längs dieser Normallinie als auch die Durchflussmenge bekannt sind.

Aus der Gleichung (13) folgt, dass die Verteilung der  $c_m$ -Komponente bzw. der Durchflussmenge  $Q$  über einen jeden Querschnitt einer rotationssymmetrischen Strömung sowohl von dem Verlauf des Dralles  $c_u r = f(b)$  als auch von der Verteilung des Energieinhaltes in der strömenden Flüssigkeit abhängt. Nur in Strömungen mit konstantem Energieinhalt ( $C_l = \text{const}$  für die ganze Strömung bzw.  $dC_l/db = 0$ ) wird die  $c_m$ -Verteilung allein durch die Drallverteilung  $c_u r = f(b)$  eindeutig bestimmt.

### 3. Allgemeine Bemerkungen über die Integrationskonstante $C_l(b)$

Um die Grundeigenschaften der Funktion  $C_l(b)$  festzustellen, führen wir in die auf das rechtwinklige Koordinatensystem  $(x, y, z)$  bezogenen Eulerschen Differentialgleichungen die Komponenten des örtlichen Wirbels ein und erhalten damit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c^2}{2} \right) - 2 \omega_z c_y + 2 \omega_y c_z + \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial c_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{c^2}{2} \right) + 2 \omega_z c_x - 2 \omega_x c_z + \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial c_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{c^2}{2} \right) - 2 \omega_y c_x + 2 \omega_x c_y + \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wobei

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_x}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} \right) \quad (17)$$

ist<sup>7)</sup> und  $U$  die Kräftefunktion der Massenkkräfte bedeutet, die mit ihren Ableitungen überall stetig ist.

Wir wollen die Gleichungen (16) über einen Raum  $\mathfrak{R}$  integrieren und nehmen an, dass eine Strömung den Raum  $\mathfrak{R}$  lückenlos ausfüllt und sich im Zustand des hydrodynamischen Gleichgewichtes befindet. Innerhalb des Raums  $\mathfrak{R}$  sind also keine Trennflächen vorhanden (vgl. [1] und das erste Kapitel in [2]).

<sup>7)</sup> Bezeichnungen nach (3).

Wir multiplizieren die Gleichungen (16) der Reihe nach mit den Projektionen  $dx_s, dy_s, dz_s$  des Elements  $ds = \sqrt{dx_s^2 + dy_s^2 + dz_s^2}$  einer stetigen Linie, die innerhalb des genannten Raums  $\mathfrak{R}$  liegt und folglich keine Unstetigkeitsfläche überquert. Nach der Addition der damit erhaltenen Gleichungen erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial c_x}{\partial t} dx_s + \frac{\partial c_y}{\partial t} dy_s + \frac{\partial c_z}{\partial t} dz_s - \frac{d}{ds} \left[ \frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} \right] ds \\ & = 2 (\omega_z c_y z - \omega_y c_z) dx_s + 2 (\omega_x c_z - \omega_z c_x) dy_s + 2 (\omega_y c_x - \omega_x c_y) dz_s. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die Integration der Gleichung (18) wollen wir für die folgenden Sonderfälle durchführen:

a) *Die Strömung ist wirbelfrei*

In diesem Falle ist  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ , und die örtliche Geschwindigkeit hat ein Potential  $\Phi(x, y, z)$ . Nach dem Satz von LAGRANGE behält ein Geschwindigkeitsfeld dauernd ein Potential, wenn es zu irgendeinem Zeitpunkt ein Potential besitzt [4]. Deshalb dürfen wir die folgende Umbildung durchführen:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial c_x}{\partial t} dx_s + \frac{\partial c_y}{\partial t} dy_s + \frac{\partial c_z}{\partial t} dz_s \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dx_s + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dy_s + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dz_s - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Damit erhalten wir aus (18)

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} \right] ds = 0. \quad (20)$$

Die Integration der Gleichung (20) längs einer beliebigen Kurve  $S$ , die im Raum  $\mathfrak{R}$  liegt, ergibt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} = C_{\mathfrak{R}}(t), \quad (21)$$

wobei die Integrationskonstante zu ein und demselben Zeitpunkt für den ganzen Raum  $\mathfrak{R}$  gilt. Die Abhängigkeit der Konstante  $C_{\mathfrak{R}}(t)$  von der Zeit  $t$  bedeutet, dass der Energieinhalt der Flüssigkeit bzw. der Druck im Raum  $\mathfrak{R}$  durch äussere Einwirkungen variiert werden kann.

Für die von der Zeit  $t$  nicht abhängigen (stationären) wirbelfreien (potentiellen) Strömungen ergibt sich aus (21) der Energieinhalt der Flüssigkeit pro Masseneinheit

$$\frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} = C_{\mathfrak{R}}, \quad (22)$$

der an allen Stellen des Raums  $\mathfrak{R}$  und an seinen Begrenzungen gleich ist.

b) *Die Strömung ist stationär und wirbelbehaftet*

In diesem Falle ist der örtliche Wirbelvektor  $\vec{\omega}$  ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ )  $\neq 0$ . Der rechte Teil der Gleichung (18) verschwindet aber, wenn

$$\frac{dx_s}{c_x} = \frac{dy_s}{c_y} = \frac{dz_s}{c_z} \quad (23)$$

ist. Die Bedingung (23) bedeutet, dass die Gleichung (18) im betreffenden Falle auf die Stromlinien  $l$  bezogen wird:

$$\frac{d}{dl} \left[ \frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right] dl = 0. \quad (24)$$

Die Integration dieser Gleichung längs einer Stromlinie  $l$  (Raum  $\mathfrak{R}$ ) ergibt

$$\frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = C_l, \quad (25)$$

wobei die Integrationskonstante  $C_l$ , die dem Energieinhalt der strömenden Flüssigkeit entspricht, längs ein und derselben Stromlinie der betreffenden stationären Strömung gilt. Diese Konstante ändert ihren Wert beim Übergang von einer Stromlinie zu der anderen, stellt aber eine stetige Funktion sowohl innerhalb des Raums  $\mathfrak{R}$  als auch an seinen Grenzen dar, weil nach der Voraussetzung der Raum  $\mathfrak{R}$  keine Trennflächen enthält.

Wir betrachten eine Fläche  $f(x, y, z) = 0$ , die zu den Stromlinien einer stationären, wirbelbehafteten Strömung im Raum  $\mathfrak{R}$  senkrecht gerichtet ist, und nehmen auf dieser Fläche ein orthogonales Netz der krummlinigen Koordinaten  $\eta, \zeta$  an. Die Integrationskonstante  $C_l$  kann man als eine stetige Funktion der Koordinaten  $\eta, \zeta$  betrachten.

Kommen alle Stromlinien aus einem Raum, in dem die Flüssigkeitsteilchen überall einen gleichen Energieinhalt aufweisen, so gilt die Konstante  $C_l$  für die ganze Strömung.

#### 4. Das Verhalten des Dralles in rotationssymmetrischen Drallströmungen

In dem Falle, dass in einer rotationssymmetrischen Strömung keine Wirbel vorhanden sind, gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial(r c_u)}{r \partial z} = 0, \quad \frac{\partial c_u}{\partial r} + \frac{c_u}{r} = \frac{\partial(r c_u)}{r \partial r} = 0, \quad \frac{\partial(r c_u)}{r \partial \theta} = 0.$$

Daraus folgt, dass in wirbelfreien rotationssymmetrischen Strömungen

$$c_u r = \text{const} \quad (26)$$

für die ganze Strömung ist. Bleibt auch der Energieinhalt der strömenden



Flüssigkeit in der ganzen Strömung gleich, das heisst  $C_l(b) = C_{\mathfrak{R}} = \text{const}$ , so ergibt sich aus (13)

$$c_m = c_{m0} e^{\int_{R_0}^R \frac{db}{Rb}}. \quad (27)$$

Eine graphisch-analytische Lösung dieser Gleichung ist wohl bekannt (vgl. zum Beispiel [5]).

Im allgemeinen Falle einer wirbelbehafteten stationären Strömung wird das Verhalten des Dralles lediglich dadurch bestimmt, dass der Energieinhalt eines jeden Flüssigkeitsteilchens, welches sich längs seiner Stromlinie innerhalb des Rotationshohlraums  $\mathfrak{R}$  bewegt, nicht geändert werden kann (reibungsfreie Flüssigkeit!). Damit ergibt sich aus der Gleichung des Impulsmomentes der Masseneinheit

$$\frac{d}{dl} (c_u r) = 0$$

oder

$$c_u r = \text{const}. \quad (28)$$

Die Gleichung (28) gilt längs ein und derselben Stromlinie bzw. auf ein und derselben Stromfläche einer rotationssymmetrischen Strömung und ist unabhängig von der Verteilung sowohl des Dralles als auch des Energieinhaltes der Flüssigkeit in der zu den Stromflächen dieser Strömung senkrechten Richtung.

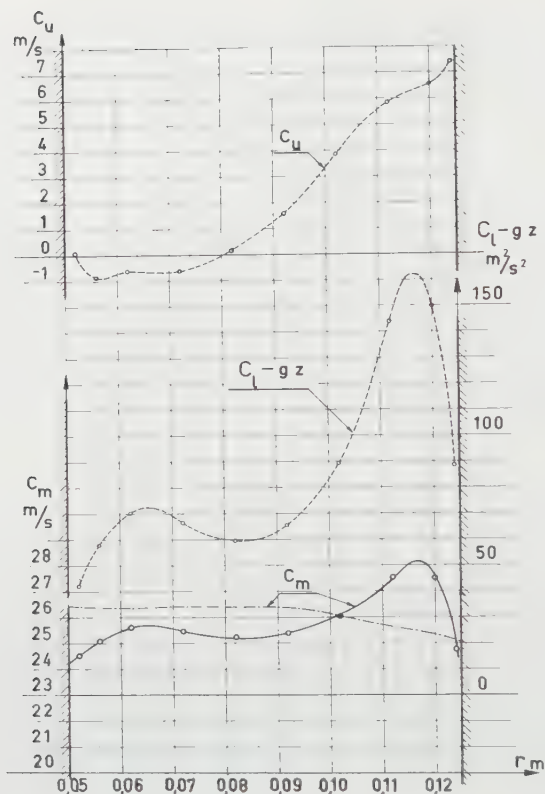
Die Gleichungen (26) und (28) erleichtern wesentlich die rechnerische Behandlung von rotationssymmetrischen Drallströmungen (vgl. auch [6]).

## 5. Vergleich mit den Versuchsergebnissen

Rotationssymmetrische Strömungen mit fast konstantem Energieinhalt der Flüssigkeit kommen oft vor, wobei nur mit einem verhältnismässig geringen Einfluss der Reibungsverluste auf die Verteilung des Energieinhaltes zu rechnen ist. Die experimentellen Nachprüfungen der Gleichung (13) für den Sonderfall  $C_l(b) = \text{const}$ ,  $dC_l(b)/db = 0$  (gleichförmige Energieverteilung in der ganzen Strömung) findet man in [6].

Strömungen, die hinter den Laufrädern von Strömungsmaschinen vorkommen, weisen meist keine gleichförmige Energieverteilung in Querschnitten der strömenden Flüssigkeit auf.

Auf der Figur 2 findet man, zum Beispiel, die gemessenen Werte des Energieinhaltes ( $C_l = g z$ , wobei  $z = \text{const}$ ) und der Umfangskomponente  $c_u$  der örtlichen Geschwindigkeiten in einem Querschnitt hinter dem Laufrad einer Kaplan-Turbine. Die Messebene liegt genügend weit hinter dem Laufrad, wobei die Wände des Rotationshohlraums zylindrisch sind; die Strömung



Figur 2

Strömung hinter dem Laufrad einer Kaplan-Turbine.

- - - - - o - - - - - vorgegebene bzw. gemessene Verteilungen des Energieinhaltes  
 \$(C\_l - gz)\$ und der Umfangskomponente \$(c\_u)\$;  
 ————— \$c\_m\$-Verteilung nach der Formel (13);  
 o ————— gemessene Werte der \$c\_m\$-Komponente;  
 · · · · · \$c\_m\$-Verteilung für \$C\_l = \text{const}\$ bzw. \$C\_l - gz = \text{const}\$ nach der  
 Formel (13).

kann mit ausreichender Genauigkeit als eine rotationssymmetrische Strömung ohne Radialkomponente der örtlichen Geschwindigkeiten betrachtet werden<sup>8)</sup>

Anhand von den gemessenen Werten von  $C_l - gz$  und  $c_u$  wurde die Verteilung der Meridiansgeschwindigkeit  $c_m(r)$  nach der Formel (13) berechnet und mit den gemessenen Werten von  $c_m$  verglichen. Aus der Figur 2 kann man folgern, dass die berechnete reibungsfreie Strömung [Formel (13)] mit der wirklichen Strömung völlig übereinstimmt, was zu erwarten ist, weil die Reibungs-

<sup>8)</sup> Die Messungen wurden in der hydraulischen Versuchsanstalt Brunnenmühle der Maschinenfabrik J. M. Voith GmbH, Heidenheim, von Dr.-Ing. W. Thuss durchgeführt (vgl. auch [7]).

kräfte nur in den dünnen Grenzschichten an den Wänden des Rotationshohlraums merkbar sind<sup>9)</sup>.

Um den Einfluss der nicht gleichförmigen Energieverteilung auf das  $c_m$ -Feld deutlicher zu zeigen, haben wir die  $c_m$ -Werte der Strömung im betreffenden Rotationshohlraum für den auf Figur 2 angegebenen  $c_u$ -Verlauf aber für  $C_l - g z = \text{const}$  ( $z = \text{const}$ ) nach der Formel (13) berechnet und auf Figur 2 durch eine Strichpunktlinie aufgezeichnet. Aus dem Vergleich der beiden  $c_m$ -Verteilungen (Figur 2) sowohl als auch aus anderen ähnlichen Untersuchungen<sup>10)</sup> folgt, dass die Verteilung der Durchflussmenge in Querschnitten der strömenden Flüssigkeit hinter den Laufrädern von Strömungsmaschinen von der Verteilung des Energieinhaltes unter Umständen wesentlich abhängen kann.

### Anhang

$$\text{Lösung der Differentialgleichung } \frac{\partial c_m}{\partial b} = \frac{c_m}{R(b)} - \frac{1}{c_m} \cdot \frac{dC_l(b)}{db} = \frac{1}{c_m} \left[ \frac{c_u}{r} \cdot \frac{d(c_u r)}{db} \right]$$

Die betreffende Differentialgleichung wird längs einer Normallinie ( $a a'$ , Figur 1) integriert.

Man setzt

$$c_m = v w; \quad \frac{\partial c_m}{\partial b} = v \frac{\partial w}{\partial b} + w \frac{\partial v}{\partial b}$$

und erhält damit

$$v \frac{\partial w}{\partial b} + w \frac{\partial v}{\partial b} - \frac{v w}{R(b)} = -\frac{1}{v w} \left[ \frac{c_u}{r} \cdot \frac{d(c_u r)}{db} - \frac{dC_l(b)}{db} \right].$$

oder

$$v \frac{\partial w}{\partial b} + w \left[ \frac{\partial v}{\partial b} - \frac{v}{R(b)} \right] = -\frac{1}{v w} \left[ \frac{c_u}{r} \cdot \frac{d(c_u r)}{db} - \frac{dC_l(b)}{db} \right]. \quad (a)$$

Von den beiden Funktionen  $v$  und  $w$  kann eine willkürlich ausgewählt werden. Es sei also  $v$  derart bestimmt, dass in der Gleichung (a) die eckigen Klammern der linken Seite verschwinden. Damit ergibt sich:

$$\frac{\partial v}{\partial b} = \frac{v}{R(b)}; \quad \frac{dv}{v} = \frac{db}{R(b)}; \quad \ln v = \int_0^b \frac{db}{R(b)} + \ln C'$$

und

$$v = C' e^{\int_{R(b)}^b \frac{db}{R(b)}},$$

wobei  $C'$  den Wert bedeutet, den die Veränderliche  $v$  an der Stelle  $b = 0$  annimmt.

<sup>9)</sup> Im betreffenden Falle ist  $R(b) \rightarrow \infty$ , wodurch die Gleichung (13) wesentlich einfacher wird. Dabei erkennt man besonders deutlich, dass jede Änderung des Energieinhaltes  $c_l(r)$  eine entsprechende Änderung der  $c_m$ - bzw.  $c_a$ -Komponente ( $c_r \approx 0$ ) mit sich bringt.

<sup>10)</sup> Vgl. Kapitel 4 in [2].

Aus (a) ergibt sich damit:

$$w^2 = -\frac{2}{(C')^2} \int_0^b e^{-2 \int_0^b \frac{db}{R(b)}} \left[ \frac{c_u}{r} \cdot \frac{d(c_u r)}{db} - \frac{dC_l(b)}{db} \right] db + (C'')^2,$$

wobei  $C''$  der Wert ist, den die Veränderliche  $w$  an der Stelle  $b = 0$  annimmt. Damit erhalten wir:

$$c_m = v w = C' e^{\int_0^b \frac{db}{R(b)}} \sqrt{(C' C'')^2 - 2 \int_0^b e^{-2 \int_0^b \frac{db}{R(b)}} \left[ \frac{c_u}{r} \cdot \frac{d(c_u r)}{db} - \frac{dC_l(b)}{db} \right] db}.$$

Für  $b = 0$  ist

$$c_{m0} = C' C''.$$

Also

$$c_m = e^{\int_0^b \frac{db}{R(b)}} \sqrt{c_{m0}^2 + 2 \int_0^b e^{-2 \int_0^b \frac{db}{R(b)}} \frac{dC_l(b)}{db} db - 2 \int_0^b e^{-2 \int_0^b \frac{db}{R(b)}} \left[ \frac{c_u}{r} \cdot \frac{d(c_u r)}{db} \right] db},$$

wobei im allgemeinen Falle  $C_l(b)$  eine stetige Funktion der Koordinate  $b$  ist.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. STRSCHELETZKY, *Ein Beitrag zur Theorie des hydrodynamischen Gleichgewichtes von Strömungen*, Voith-Forschung Konstr. 1957, H. 2, 1 — 8.
- [2] M. STRSCHELETZKY, *Stabilität und Gleichgewicht von Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten* (in Vorbereitung).
- [3] H. LAMB, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, 2. Aufl. (Leipzig 1931), S. 34.
- [4] L. PRANDTL und O. TIETJENS, *Hydro- und Aeromechanik*, Bd. 1 (Berlin 1929), S. 115 und 116.
- [5] C. PFLEIDERER, *Die Kreiselpumpen*, 2. Aufl. (Berlin 1932), S. 20 u. w.
- [6] M. STRSCHELETZKY, *Strömung im Übergangsraum der Wasserturbinen*, Ingen.-Arch. 19, 309–320 (1951); 21, 408 (1953).
- [7] W. THUSS, *Über Strömungsmessungen in Kaplan-turbinen*, Voith-Forschung Konstr. 1957, H. 1, 4. 1. bis 4.6.
- [8] C. RUNGE und H. KÖNIG, *Numerisches Rechnen* (Berlin 1924), S. 275–284.

#### Summary

Supplementing an earlier publication the author investigates axially symmetric rotational flows of friction-free homogeneous incompressible fluids, which are in hydrodynamic equilibrium and in which not only the tangential velocities but also the energy content of the flowing liquid may have any distribution. The analysis is reduced to the calculation of meridional components of the local flow velocities.

The experimental checks on the theory have disclosed that there is good agreement between the calculated and the measured flows.

(Eingegangen: 13. September 1957.)

# Zur Prandtlschen Membrananalogie der Torsion<sup>1)</sup>

Von FRITZ STÜSSI, Zürich, Schweiz<sup>2)</sup>

1. Es ist das Verdienst von LUDWIG PRANDTL, als erster auf die Analogie hingewiesen zu haben, die zwischen der Gleichung der Spannungsfunktion  $\Phi$  eines auf reine Torsion beanspruchten prismatischen Stabes,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2 G \vartheta, \quad (1)$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2)$$

und der Durchbiegungsgleichung einer durch die Flächenbelastung  $q$  belasteten und durch die gleichmässige Scheitelkraft  $S$  (je Längeneinheit) gespannten biegsamen Membran,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{S}, \quad (3)$$

besteht [1<sup>3)</sup>]. Nach dieser Analogie sind die Schubspannungen  $\tau$  durch die Neigungen der Membran und das resultierende Torsionsmoment  $T$ ,

$$T = 2 \iint \tau \, dx \, dy, \quad (4)$$

durch den doppelten Inhalt des von der Membran und ihrer Grundfläche umschlossenen Volumens gegeben, wenn die reduzierte Belastung  $q/S$  dem Wert  $2 G \vartheta$  entspricht; dabei bedeutet  $G$  bekanntlich den Schubmodul des Stabmaterials und  $\vartheta$  die Änderung  $q' = dq/dz$  des Verdrehungswinkels  $q$  über die Längeneinheit.

Die Prandtlsche Analogie ist wertvoll, weil sie das Torsionsproblem veranschaulicht und weil sie seine experimentelle Untersuchung («Seifenhautgleichnis») erlaubt. Darüber hinaus führt sie auch auf eine einfache numerische Untersuchung des gegebenen elastizitätstheoretischen Problems, weil sie die Verbindung mit einer statischen Aufgabe herstellt, die durch die Mittel der Baustatik gelöst werden kann.

<sup>1)</sup> Es sei mir gestattet, meinen Glückwunsch an Prof. J. ACKERET durch diesen ergänzenden Hinweis auf eine bekannte Arbeit seines auch von ihm verehrten Lehrers LUDWIG PRANDTL darzubringen.

<sup>2)</sup> Institut für Baustatik an der ETH.

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 667.

2. Eine gespannte biegsame Haut kann statisch ersetzt werden durch zwei Scharen von sich rechtwinklig kreuzenden Hautstreifen, die je einen Anteil  $q_x$  bzw.  $q_y$  der Belastung  $q$  aufnehmen,

$$q_x + q_y = q. \quad (5)$$

Die Aufteilung der Belastung  $q$  auf die beiden Streifengruppen ist nun nicht mehr durch Gleichgewichtsbetrachtungen bestimmbar, sondern von den Verformungen abhängig; *die Aufgabe ist statisch unbestimmt*.

In der Baustatik sind zur Lösung solcher statisch unbestimmter Aufgaben zwei grundsätzlich verschiedene, einander jedoch dual entsprechende Methoden aufgestellt worden, die Kraftmethode und die Deformationsmethode, die beide auch zur Lösung der Membranaufgabe und damit des Torsionsproblems verwendet werden können. Gemeinsame Grundlage beider Methoden ist der Zusammenhang zwischen Belastung und Durchbiegung eines Membranstreifens bzw. eines biegsamen Seiles, der beispielsweise für die  $x$ -Richtung durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{q_x}{S}, \quad (6a)$$

das heisst statisch durch ein Seilpolygon bzw. die Seilpolygongleichung [2]

$$-w_{m-1} + 2w_m - w_{m+1} = \Delta x K_m \left( \frac{q_x}{S} \right) \quad (6b)$$

gegeben ist. Für stetig verteilte Belastung  $q_x$  wird die Knotenlast  $K_m$  bei gleichen Intervallen  $\Delta x$  sehr gut durch die «Parabelformel»

$$K_m(q_x) = \frac{\Delta x}{12} (q_{x_{m-1}} + 10 q_{x_m} + q_{x_{m+1}}) \quad (6c)$$

angenähert.

Die Gleichungen (6) drücken bekannte Zusammenhänge der elementaren Baustatik aus; sie sagen nämlich aus, dass die Durchbiegungen  $w$  eines Membranstreifens wegen  $S_w = M$  wie die Momente  $M$  eines einfachen Balkens infolge der Belastung

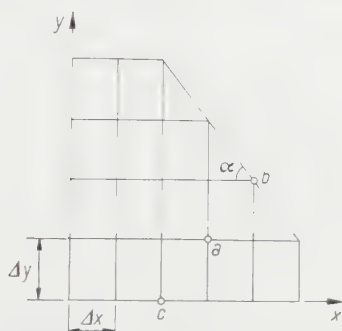
$$p = \frac{q}{S}$$

berechnet werden können.

3. Bei der *Kraftmethode* zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme werden Kraftgrössen («überzählige Grössen») als Unbekannte eingeführt wobei die Bestimmungsgleichungen durch Aussagen über die Formänderungen die sogenannten Elastizitätsbedingungen, geliefert werden. Führen wir die Belastungen  $p_x$  der Membranstreifen der  $x$ -Richtung als überzählige Grössen ein, so sind die Belastungen der  $y$ -Streifen durch die Gleichgewichtsbedingung (5) bzw. durch  $p_y = p_0 - p_x$  bestimmt, wobei  $p_0 = 2 G \varphi'$  beträgt.



Bei den Elastizitätsbedingungen sind zwei Gruppen zu unterscheiden (Figur 1): in den Kreuzungspunkten  $a$  müssen die Durchbiegungen  $w$  (bzw. die « Balkenmomente »  $M$ ) der beiden Membranstreifen gleich gross sein, während



Figur 1  
Bezeichnungen.

an den Randpunkten  $b$ , an denen ja die Schubspannung  $\tau$  tangential zum Randpunkt verlaufen muss, die Randbedingung

$$\frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha = 0 \quad (7)$$

gilt. Dies bedeutet zunächst, dass die Durchbiegung  $w$  längs eines Randes konstant ist; für den Umfang eines einfachen vollen Querschnittes ist im Sinne unserer Balkenanalogie  $w = 0$  anzunehmen. Mit

$$Q_y = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad Q_x = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

kann Gleichung (7) durch die « Querkräfte »  $Q$  ausgedrückt werden:

$$Q_y \sin \alpha + Q_x \cos \alpha = 0. \quad (7a)$$

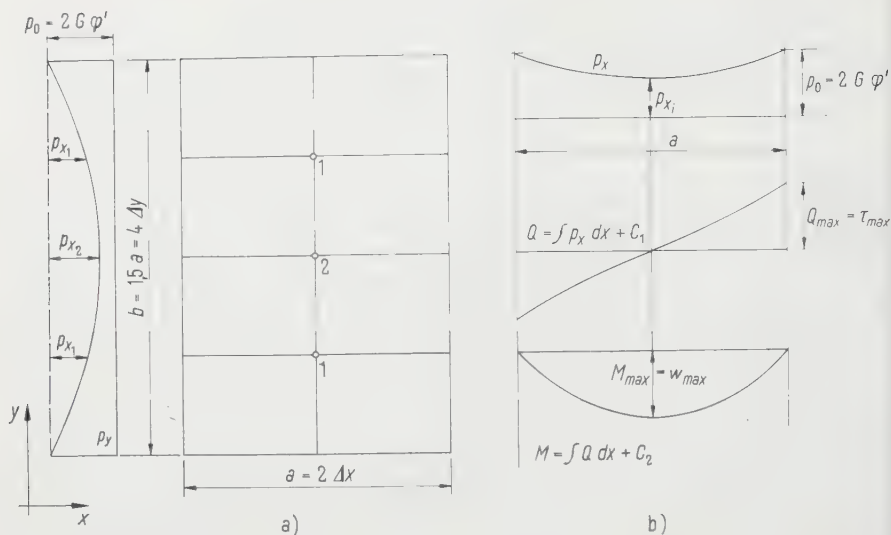
Gleichung (7a) bedeutet die Elastizitätsbedingung zur Ermittlung der Randbelastungen  $p_x$  und  $p_y$  im Randpunkt  $b$ .

Für einen Randpunkt  $c$  auf einem zur  $x$ -Achse parallelen Rand ist nicht nur  $\partial w / \partial x = 0$ , sondern auch

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -p_x = 0,$$

so dass hier  $p_y = p_0$  wird.

Die Berechnung soll noch an einem einfachen Beispiel gezeigt werden: Wir bestimmen das Torsionsmoment  $T$  und die grösste Schubspannung  $\tau_{max}$  für einen Rechteckquerschnitt mit dem Seitenverhältnis  $b = 1,5 a$ . Es sei absichtlich eine sehr grobe Feldteilung gewählt (Figur 2a). Da wegen der zu den Achsen  $x$  und  $y$  parallelen Ränder die Randbelastungen bekannt sind, müssen



Figur 2  
Rechteckquerschnitt.

nur zwei unbekannte Belastungswerte  $p_{x_1}$  und  $p_{x_2}$  berechnet werden, für die sich durch Gleichsetzung der Durchbiegungen  $w_1$  und  $w_2$  in beiden Richtungen aus elementarer Rechnung die beiden Bestimmungsgleichungen

$$w_1 = \frac{\Delta x^2}{12} (p_0 + 5 p_{x_1}) = \frac{\Delta y^2}{12} [p_0 + 11 (p_0 - p_{x_1}) + 6 (p_0 - p_{x_2})],$$

$$w_2 = \frac{\Delta x^2}{12} (p_0 + 5 p_{x_2}) = \frac{\Delta y^2}{12} [p_0 + 12 (p_0 - p_{x_1}) + 11 (p_0 - p_{x_2})]$$

oder geordnet und mit

$$\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = \frac{1,5^2}{2,0^2} = 2,25$$

$$44,75 p_{x_1} + 13,50 p_{x_2} = 36,50 p_0, \quad 27,00 p_{x_1} + 44,75 p_{x_2} = 50,00 p_0$$

ergeben; die Lösungen betragen

$$p_{x_1} = 0,5851 p_0, \quad p_{x_2} = 0,7643 p_0.$$

Denken wir uns nach Figur 2b die Verteilung von  $p_x$  durch eine quadratische Parabel erfasst, so ergibt sich durch Integration

$$Q_{max} = \frac{\Delta x}{3} (p_0 + 2 p_{x_i}), \quad M_{max} = \frac{\Delta x^2}{12} (p_0 + 5 p_{x_i}),$$

$$\int_a^a M_{max} dx = \frac{2 \Delta x^3}{15} (p_0 + 4 p_{x_i}).$$

Die grösste Schubspannung tritt in der Mitte des längeren Randes auf und beträgt mit  $\Delta x = a/2$ ,  $p_0 = 2 G \varphi'$

$$\tau_{max} = \frac{a}{6} (1,0 + 2 \cdot 0,7643) 2 G \varphi' = 0,843 a G \varphi';$$

der Unterschied gegenüber dem von S. TIMOSHENKO [3] angegebenen und als genau anzusehenden Wert  $0,848 a G \varphi'$  beträgt 0,6%.

Das Torsionsmoment  $T$  bestimmen wir, indem wir aus den Werten

$$\int_0^a M_{max} dx \rightarrow \int_0^a w dx = 3,340 \frac{a^3 p_0}{60} \quad \text{für Punkt 1,}$$

$$4,057 \quad \text{für Punkt 2}$$

das doppelte Membranvolumen mit der Simpsonschen Regel bestimmen:

$$T = 2 (2 \cdot 4 \cdot 3,340 + 2 \cdot 4,057) \frac{a^3}{60} \cdot \frac{b}{12} 2 G \varphi' = 0,1935 a^3 b G \varphi'$$

mit einem Fehler von 1,3% gegenüber dem von S. TIMOSHENKO angegebenen Wert  $0,196 a^3 b G \varphi'$ .

4. Die Berechnung statisch unbestimmter Systeme nach der *Deformationsmethode* ist dadurch gekennzeichnet, dass die unbekannten Kraftgrössen zunächst durch die Formänderungen ausgedrückt werden; diese Werte in die Gleichgewichtsbedingungen eingesetzt, liefern die gesuchten Bestimmungsgleichungen. Auf die Membranalogie übertragen, sind die beiden Belastungsanteile

$$p_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad p_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

in die Gleichgewichtsbedingung

$$p_x + p_y = p_0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -p_0 = -2 G \varphi'$$

einzusetzen; die Differentialgleichung der Membranausbiegung erfasst somit das Problem in der Formulierung der Deformationsmethode.

Für die numerische Lösung sind die beiden Seilpolygongleichungen

$$-w_{m-1} + 2w_m - w_{m+1} = \frac{\Delta x^2}{12} (p_{x_{m-1}} + 10p_{x_m} + p_{x_{m+1}}),$$

$$-w_l + 2w_m - w_n = \frac{\Delta y^2}{12} (p_{y_l} + 10p_{y_m} + p_{y_n})$$

derart zu kombinieren, dass alle Belastungswerte  $p_x$  und  $p_y$  durch die Gleich-

gewichtsbedingung eliminiert werden können; dies führt auf das in Figur 3 dargestellte Rechenschema.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 2 & -1 \\ \hline -10 & 20 & -10 \\ \hline -1 & 2 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot w \Delta y^2 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -10 & -1 \\ \hline 2 & 20 & 2 \\ \hline -1 & -10 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot w \Delta x^2 = \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 10 & 1 \\ \hline 10 & 100 & 10 \\ \hline 1 & 10 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \rho_0 \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{12}}_{= 12 \rho_0 \Delta x^2 \Delta y^2}$$

Figur 3  
Rechenschema.

Für das Zahlenbeispiel der Figur 2 ergeben sich so die beiden Bestimmungs-  
gleichungen

$$125 w_1 - 35,5 w_2 = 13,5 a^2 G \varphi', \quad -71 w_1 + 125 w_2 = 13,5 a^2 G \varphi'$$

mit den Lösungen

$$w_1 = 0,16534 a^2 G \varphi', \quad w_2 = 0,20192 a^2 G \varphi',$$

woraus sich die Werte

$$p_{x_1} = 1,1873 G \varphi', \quad p_{x_2} = 1,5384 G \varphi'$$

ergeben. Analog zu früher erhalten wir damit

$$\tau_{max} = 0,846 a G \varphi', \quad T = 0,195 a^3 b G \varphi'$$

mit Fehlern von 0,2% bzw. 0,5% gegenüber den genauen Werten.

5. Die Rechnung ist trotz der zu groben Feldteilung erstaunlich genau. Dabei zeigt die Deformationsmethode die grössere Genauigkeit, was offenbar darauf zurückzuführen ist, dass hier die Belastung  $p$  durch Flächen-Knotenlasten erfasst wird, während wir bei der Kraftmethode mit Linienlasten gerechnet haben.

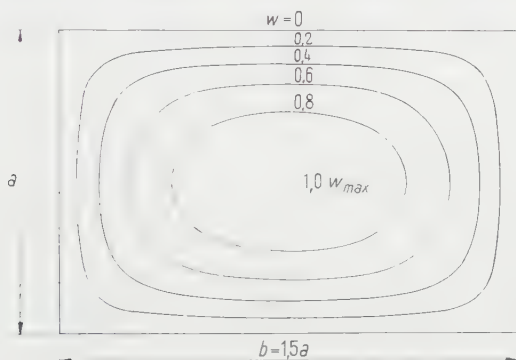
Bei einer Einteilung  $a = 4 \Delta x$ ,  $b = 6 \Delta y$ , das heisst mit 6 Bestimmungs-  
gleichungen, ergeben sich folgende Werte:

$$\text{Kraftmethode:} \quad \tau_{max} = 0,8472 a G \varphi', \quad T = 0,1950 a^3 b G \varphi',$$

$$\text{Deformationsmethode:} \quad 0,8477 a G \varphi', \quad 0,1953 a^3 b G \varphi',$$

mit praktisch bedeutungslosen Unterschieden gegenüber den genauen Werten. Die Ergebnisse dieser genaueren Rechnung sind in Figur 4 durch die Niveaueurven der Durchbiegungsfläche  $w$  dargestellt.

Der Vorzug der grösseren Genauigkeit der Deformationsmethode wird mit zwei Nachteilen gegenüber der Kraftmethode erkauft: Erstens ist die Deformationsmethode in bezug auf die gesuchten Kraftgrössen (hier  $p$ ) eine indirekte Methode; die Belastungen  $p$  müssen zusätzlich aus den Durchbiegungen



Figur 4  
Niveaueurven.

$w$  berechnet werden. Schwerer wiegt der zweite Nachteil: Bei beliebig geformten Querschnitten lassen sich die Randbedingungen nicht mehr immer auf einfache Weise formulieren, während die Kraftmethode immer direkt zum Ziel führt.

Analog wie die Membrangleichung können auch Platten- und Scheibenprobleme numerisch nach der Kraftmethode [4] oder nach der Deformationsmethode [5] gelöst werden.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. PRANDTL, *Zur Torsion von prismatischen Stäben*, Phys. Z. 4, 758–759 (1903).
- [2] F. STÜSSI, *Numerische Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Seilpolygongleichung*, Z. angew. Math. Phys. 1, 53–70 (1950).
- [3] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity* (New York 1934), S. 248.
- [4] CHARLES DUBAS, *Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies*, Mitt. Inst. Baustatik ETH, Nr. 23 (1948).
- [5] PIERRE DUBAS, *Calcul numérique des plaques et des parois minces*, Mitt. Inst. Baustatik ETH, Nr. 27 (1955).

#### Summary

LUDWIG PRANDTL's membrane analogy reduces the problem of torsion, which involves the theory of elasticity, to that of calculating a membrane, which relates to structural statics; this enables a solution to be found by means of the known methods applied in structural statics.

(Eingegangen: 5. Oktober 1957.)

## Parallel Effects of Bulk Viscosity and Time Lag in Kinetics of Non-Monatomic Fluids<sup>1)</sup>

By PHRIXOS THEODORIDES, College Park, Maryland, USA<sup>2)</sup>

In his classical treatise of gas dynamics [1]<sup>3)</sup>, Professor J. ACKERET referred to the first invariant of the total stress tensor — in regard to  $\bar{p}_{d,n} = (1/3) \sum_{x,y,z} \bar{p}_{(ii)}$  — with an early warning. He wrote: 'Ohne weiteres darf dieser Druck nicht mit dem in der Gasgleichung,  $p/\rho = RT$ , vorkommenden identifiziert werden.' His prophetic statement is gratefully acknowledged as a source of inspiration for the following lines. They are contributed in deep affection and admiration of his personality.

### 1. Introduction

Let a macroscopic flow be considered, and parallel to it an imaginary inner surface. Darting across it are particles in random thermal motion, yet momentum of gross flow is carried as well by the molecules. Impulses are thus conveyed by means of collisions over the imaginary border in either direction. So, if there is a gradient of gross velocity, molecular agitation accounts for a transport of momentum at right angles to the mass flow. The global effect appears as shear viscosity.

Similarly, temperature gradients are antagonized by conduction of heat as directed by the second law of thermodynamics, and gradients of concentration cause diffusion in gas mixtures. The kinetic picture helps clarifying the individuality of a fluid in non-uniform fields of gross velocity, temperature and concentration. Continuum theory accounts for such antagonistic effects by specific values of global physical parameters ( $\mu$ ,  $k$ ,  $D$ ). These classic transport phenomena occur no matter how many atoms compose a molecule.

But if complex, the molecules of a fluid show in general a lack of rigidity, unless adequate cooling has frozen one or more of the admissible, inner processes. Conversely, as temperature is being raised in a complex medium, typical events may occur that are unthinkable in a monatomic fluid. The non-monatomic status determines, according to range of temperature and kind of fluid,

<sup>1)</sup> This work is part of an investigation supported by the United States Air Force, through the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command on contract AF-18 (600)-428.

<sup>2)</sup> University of Maryland, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 684.



one or more of the following distinctive processes: atomic vibrations within molecules in several normal modes (symmetric, antimetric, flexural, etc.), a disruptive loosening of intramolecular bonds, structural changes in liquids, specific chemical reactions in any fluid, etc.

At higher temperatures, extensive dissociation, ionization, and recombination tend to obliterate the peculiarities of initially complex gases. They behave then as mixtures of various species like: monatomic components, ions and electrons, and proceed finally into the plasma state.

Let our present interest be in a range of conditions preserving the non-monatomic character of the fluid, yet involving notably one inner process only, and let this be a single mode of vibration within molecules. It may be so either because the fluid is diatomic or on account of a temperature that is not high enough to excite but the lowest eigenfrequency of triatomic or polyatomic molecules.

The classical transport phenomena dissipate energy without regard to simplicity or complexity of colliding molecules. In non-monatomic media, however, additional irreversible processes hail from the aforesaid typical phenomena. This means bulk viscosity and an equivalent time lag. Under specific conditions thermal elastic relaxation may even account for almost the entire dissipation [38].

This seems to be nearly so in supersonic flight at great altitude, as growth of the air's kinematic viscosity with elevation reduces the Reynolds number ( $Re$ ) for unchanged product ( $M l$ ) of Mach number ( $M$ ) times a typical reference length ( $l$ ). Accordingly the flow around a missile at certain heights may be treated as laminar to a certain extent even for  $M l$ -values that would correspond to an over-critical  $Re$  near ground. The boundary conditions are not changed appreciably if the surrounding air is not too rarefied as presently assumed.

Pure kinetic theory moves on the hard path of integrating the Maxwell-Boltzmann integro-differential equation for non-elementary cases on specific boundary conditions. This implies overcoming as well tough hurdles of delicate existence and unicity proofs as to solutions under non-equilibrium conditions in complex media. Though rather promising, this method would seem still far from producing conclusive results (cf. Truesdell contribution in [29]).

It may be worth while trying an intermediate method on a quasi-continuum basis [26] set forth for tri-axial flow [32]. While interpreting kinetically some of the physical parameters, the endeavor rests on the differential equations for conservation of mass, momentum and energy. Through effects of bulk viscosity and quadratic shear viscosity the Navier Stokes equations are generalized.

The latest NBS data [31] on thermal properties of gases, as based on the spectra and statistical thermodynamics, include anharmonicity and inter-

action effects on quantized intramolecular degrees of freedom. Their availability makes worth while an effort to reconsider the conditions of shock transition with after-effects trailing the shock front.

The scarce data on compression viscosity hail from experiments in ultrasonics [17, 19].

Because of unavailable empirical data on separating nonlinear viscosity, the gap is bridged after GILBARG and PAOLUCCI [26], by kinetic Burnett numbers of third approximation with Sonine polynomials.

## 2. Elastic Waves (Plane, Longitudinal) in Non-Monatomic Fluids

Complex fluids differ from the monatomic ones in general as to transmission of longitudinal elastic waves, when these combine either: (1) Very small intensity with ultrasonic pitch [13, 17] (up to  $10^9$  Hz and beyond), or (2) finite intensity with supersonic rate of propagation [40, 41]. The latter properties characterize the shock wave liable to originate from a disturbance in a supersonic flow, an electric spark, an explosion (chemical or nuclear).

Unlike the behavior of fluids in the subaudible and audible range, ultrasonics revealed: (a) in gases, a molecular dispersion, i.e., a small increase (a few percent) of phase velocity with wave frequency. (b) In both, gases and liquids, an added dissipation of wave energy from molecular causes, in time-dependent processes, i.e., as bulk viscosity effects. The absorption seems to grow with molecular complexity of the transmitting medium. (c) In liquids, eventual activation of structural changes (time-dependent) and even a semblance of shear elasticity.

In gases both dispersion and absorption are observable at the available upper limits of ultrafrequency, and the dispersion curve  $g^2(\ln \omega)$  shows a point of inflection at almost the same critical value of the circular frequency ( $\omega$ ) that maximizes the absorption coefficient. Then, the reciprocal of  $\omega_{crit}$  measures the relaxation time referred to a reduction of the wave intensity by a factor  $e^{-1}$  [13].

## 3. Triaxial Flow with Trimerous Viscosity [32, 33, 41]

### (a). *Tensor of Total Stress*

Let first the notation be clarified as follows: Time rate of strain elements

$$\alpha = u_x, \quad \varepsilon = u_y + v_x,$$

$$\beta = v_y, \quad \zeta = v_z + u_y,$$

$$\gamma = w_x, \quad \eta = w_x + u_z.$$

Time rate of relative bulk variation:

$$\operatorname{div} \frac{\dot{\mathbf{b}}}{\dot{b}} = \varrho \frac{D\tau}{dt} = -\varrho^{-1} \frac{D\varrho}{dt} = \alpha + \beta + \gamma \neq 0. \quad (1)$$

$$A = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}, \quad D = A + A^T = \begin{vmatrix} 2\alpha & \varepsilon & \eta \\ \varepsilon & 2\beta & \zeta \\ \eta & \zeta & 2\gamma \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$D^2 = AA^T + A^T A + A^2 + (A^T)^2 = (d_{(i,j)}), \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{xx} &= 4\alpha^2 + \varepsilon^2 + \eta^2, & d_{xy} &= d_{yx} = 2(\alpha + \beta)\varepsilon + \eta\zeta, \\ d_{yy} &= \varepsilon^2 + 4\beta^2 + \zeta^2, & d_{yz} &= d_{zy} = 2(\beta + \gamma)\zeta + \varepsilon\eta, \\ d_{zz} &= \eta^2 + \zeta^2 + 4\gamma^2, & d_{zx} &= d_{xz} = 2(\gamma + \alpha)\eta + \zeta\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

Particular case of uni-axial flow, e.g., in  $x$ -direction only:

$$d_{(xx)} = 4\alpha^2 = 4u_x^2, \quad d_{(yy)} = 0 = d_{(zz)} = d_{(ij)} \quad (i \neq j).$$

A linear matrix of strain rate is symmetrized as a sum ( $D$ ) of the asymmetric matrix ( $A$ ) and its transpose ( $A^T$ ). In view of isotropy, the nonlinear terms in matrix  $\Gamma$  of viscous stress should be even functions of  $D$  with coefficients  $\lambda_{(i)}$  in the expansion marking physical parameters of viscosity in function of temperature.

Thus

$$\lambda_{(2)} \neq 0, \quad \lambda_4 \neq 0, \quad \lambda_{(2n)} \neq 0,$$

but

$$\lambda_{(3)} = 0, \quad \lambda_5 = 0, \quad \lambda_{(2n \pm 1)} = 0.$$

As we retain only the first three terms ( $n=1$ ), we write

$$\Gamma = \sum_0^{2n} (\lambda_{(i)} D^{(i)}) \approx \lambda_0 + \lambda_{(1)} D + \lambda_{(2)} D^2 = \lambda(T) \delta I + \mu(T) D + \nu(T) D^2. \quad (4)$$

At a higher range of temperature, non-monatomic fluids may become the seat of inner processes like atomic vibrations within molecules implying bulk viscosity or the equivalent notion of a finite relaxation time. Moreover, inclusion of nonlinear viscosity would seem justified when such inner phenomena occur at a high time rate. But trimorous viscosity ( $\lambda, \mu, \nu$ ) should suffice.

Conversely, slow-rate conditions allow to neglect even quadratic viscosity. In particular, flow problems, if not occurring under high pressure, seem to admit for all monatomic gases one and the same constant ratio:  $\lambda/\mu = -2/3$  (Maxwell-Stokes hypothesis), i.e.,  $\kappa = \lambda + 2\mu/3 = 0$ .

The viscous stressing--matrix  $I' \equiv (s_{i,j})$  -- is superposed to the static pressure as given by the equation of state

$$p = \frac{R_0}{m} T \varrho = R T \varrho.$$

Thus, the matrix,  $\varphi$ , of total stress becomes

$$\varphi = p I - I' = (p - \lambda \delta) I - \mu D - \nu D^2, \quad (6)$$

or in terms of the modulus of bulk viscosity,

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3} \mu, \quad (7)$$

$$\varphi = (p - \kappa \delta) I - \mu \left( D - \frac{2}{3} \delta I \right) - \nu D^2 = (p_{(i,j)}). \quad (8)$$

The matrix elements of total stress for a general, tri-axial flow are

$$\left. \begin{aligned} p_{(xx)} &= p - \kappa \delta - 2\mu \left( \alpha - \frac{\delta}{3} \right) - \nu d_{(xx)}, & p_{(xy)} &= p_{(yx)} = -(\mu \varepsilon + \nu d_{(xy)}), \\ p_{(yy)} &= p - \kappa \delta - 2\mu \left( \beta - \frac{\delta}{3} \right) - \nu d_{(yy)}, & p_{(yz)} &= p_{(zy)} = -(\mu \zeta + \nu d_{(yz)}), \\ p_{(zz)} &= p - \kappa \delta - 2\mu \left( \gamma - \frac{\delta}{3} \right) - \nu d_{(zz)}, & p_{(zx)} &= p_{(xz)} = -(\mu \eta + \nu d_{(zx)}). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

These formulae may be condensed in

$$p_{(i,j)} = (p - \kappa \delta) \delta_{(i,j)} - \mu \left( u_{(i,j)} + u_{(j,i)} - \frac{2}{3} \delta \delta_{(i,j)} \right) - \nu d_{(i,j)}, \quad (10)$$

yielding as normal stress ( $i=j$ ,  $\delta_{(i,j)}=1$ )

$$p_{(i,i)} = p - \kappa \delta - 2\mu \left( u_{(i,i)} - \frac{\delta}{3} \right) - \nu d_{(i,i)}, \quad (10a)$$

and as shear stress ( $i \neq j$ ,  $\delta_{(i,j)}=0$ )

$$p_{(i,j)} = -\mu (u_{(i)j} + u_{(j)i}) - \nu d_{(i,j)}. \quad (10b)$$

If the flow is uni-axial (e.g., in  $x$ -direction only), the stress components are

$$\left. \begin{aligned} p_{(x,x)} &= p - \left( \kappa + \frac{4}{3} \mu \right) u_x - 4\nu u_x^2, \\ p_{(y,y)} &= p - \left( \kappa - \frac{2}{3} \mu \right) u_x, \\ p_{(z,z)} &= p - \left( \kappa - \frac{2}{3} \mu \right) u_x, \end{aligned} \right\} p_{(i,j)} = 0 \quad (i \neq j). \quad (10c)$$

In tri-axial flow, the mean value of the three orthogonal normal stresses at viscous conditions ( $\bar{p}_{dyn}$ ) differs from the counterpart ( $p$ ) in uniform flow by an amount

$$B \equiv \bar{p}_{dyn} - p = \frac{1}{3} \sum_{i=1,2,3} \dot{p}_{(i,i)} - R T \varrho = -\kappa \delta - \frac{\nu}{3} \sum_{i=1,2,3} \dot{d}_{(i,i)} \quad \left. \vphantom{\sum_{i=1,2,3}} \right\} \quad (11)$$

$$\kappa \delta = -\frac{2}{3} \nu \{ 2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \varepsilon^2 + \zeta^2 + \eta^2 \}$$

and specialized for uni-axial flow

$$B_{uni-axial} = -\kappa u_x - \frac{4}{3} \nu u_x^2. \quad (11a)$$

If, moreover, nonlinear viscosity be negligible

$$B_{(\lambda, \mu)} = -\kappa \delta = -\left(\lambda + \frac{2}{3} \mu\right) \operatorname{div} \dot{\vec{b}}, \quad (11b)$$

$$\text{for compression } (\delta < 0): \quad \bar{p}_{dyn} > R T \varrho,$$

$$\text{for dilation } (\delta > 0): \quad \bar{p}_{dyn} < R T \varrho.$$

Evidently  $B_{(\lambda, \mu)}$  would vanish for either  $\delta = 0$ ,  $\kappa \neq \infty$  (incompressible behavior) or  $\kappa = 0$ ,  $\delta \neq \infty$  (Maxwell-Stokes hypothesis).

The latter may hold, as previously stated, in monatomic gases as long as flow conditions preclude immoderate values of the state variables, i.e., if neither pressure is to become very high (Enskog thesis, Uppsala 1917) nor temperature (ionization negligible).

#### (b) Conservation of Mass

$$\varrho_t + \operatorname{div} (\varrho \dot{\vec{b}}) \equiv \frac{D \varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \dot{\vec{b}} = \varrho \frac{D \tau}{dt} - \operatorname{div} \dot{\vec{b}} = 0, \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{b}} = -\varrho^{-1} (\varrho_t + u \varrho_x + v \varrho_y + w \varrho_z) \neq 0. \quad (12a)$$

#### (c) Conservation of Momentum

$$\varrho \frac{D \dot{\vec{b}}}{dt} = \nabla \cdot \overset{\circ}{\mathcal{P}}. \quad (13)$$

The vector equation (13) generalizes NEWTON's law in stating that the product of mass density and substantial time derivative of the velocity vector equals the divergence of the stress tensor. For a tri-axial flow with negligible

effects from body forces the kinetic equation in  $x$ -direction reads

$$\varrho \frac{D u}{dt} = \dot{p}_{(xx)x} + \dot{p}_{(yx)y} + \dot{p}_{(zx)z} = \dot{p}_x - (\kappa \delta)_x + \frac{2}{3} (\mu \delta)_x - 2 (\mu u_x)_x - (\mu \varepsilon)_y - (\mu \eta)_z - (\nu \dot{d}_{(xx)})_x - (\nu \dot{d}_{(yx)})_y - (\nu \dot{d}_{(zx)})_z. \quad (14)$$

By cyclic interchange, similar equations obtain in directions  $y$  and  $z$ .

For independence of the viscosity parameters between themselves, as well as from the coordinates, and neglect of body forces, the equations of motion read:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{D u}{dt} &= \dot{p}_{(xx)x} + \dot{p}_{(yx)y} + \dot{p}_{(zx)z} = \dot{p}_x - \left( \kappa + \frac{\mu}{3} \right) \delta_x - \mu \overset{3}{V}_u^2 - \nu \Xi, \\ \varrho \frac{D v}{dt} &= \dot{p}_{(xy)x} + \dot{p}_{(yy)y} + \dot{p}_{(zy)z} = \dot{p}_y - \left( \kappa + \frac{\mu}{3} \right) \delta_y - \mu \overset{3}{V}_v^2 - \nu H, \\ \varrho \frac{D w}{dt} &= \dot{p}_{(xz)x} + \dot{p}_{(yz)y} + \dot{p}_{(zz)z} = \dot{p}_z - \left( \kappa + \frac{\mu}{3} \right) \delta_z - \mu \overset{3}{V}_w^2 - \nu Z, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{D u}{dt} &= u_t + u_x u + u_y v + u_z w, & \Xi &= \dot{d}_{(xx)x} + \dot{d}_{(yx)y} + \dot{d}_{(zx)z}, \\ \frac{D v}{dt} &= v_t + v_x u + v_y v + v_z w, & H &= \dot{d}_{(xy)x} + \dot{d}_{(yy)y} + \dot{d}_{(zy)z}, \\ \frac{D w}{dt} &= w_t + w_x u + w_y v + w_z w, & Z &= \dot{d}_{(xz)x} + \dot{d}_{(yz)y} + \dot{d}_{(zz)z}. \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

These component equations (15) may be merged in the single vector equation

$$\left. \begin{aligned} \varrho \left( \ddot{\vec{b}}_t + \ddot{\vec{b}} \nabla \cdot \ddot{\vec{b}} \right) &= \text{grad } \dot{p} \\ &- \left( \kappa + \frac{\mu}{3} \right) \text{grad div } \ddot{\vec{b}} - \mu \overset{3}{V}^2 \ddot{\vec{b}} - \nu \left( \ddot{i} \Xi + \ddot{j} H + \ddot{k} Z \right). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

For negligible quadratic viscosity and validity of the Maxwell-Stokes hypothesis the kinetic equations degenerate into the classic Navier-Stokes system.

#### (d) Balance of Energy Flow

The function  $\Phi_{(\kappa, \mu, \nu)}$  shall express for the general case the dissipation of energy by viscosity, i.e., conversion of power per unit volume from gross motion into heat.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{(\kappa, \mu, \nu)} &= s_{(xx)} \alpha + s_{(yy)} \beta + s_{(zz)} \gamma + s_{(yx)} \varepsilon + s_{(zy)} \zeta + s_{(xz)} \eta \\ &- \kappa \delta^2 + \mu \left\{ \frac{2}{3} [(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] + \varepsilon^2 + \eta^2 + \zeta^2 \right\} \\ &+ \nu \{ \alpha \dot{d}_{(xx)} + \beta \dot{d}_{(yy)} + \gamma \dot{d}_{(zz)} + \varepsilon \dot{d}_{(xy)} + \zeta \dot{d}_{(yz)} + \eta \dot{d}_{(zx)} \}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$



By integration over the volume  $\Omega$

$$\Phi_{(\Omega)} = \int_{(\Omega)} \Phi_{(\kappa, \mu, \nu)} d\Omega.$$

Neglect of the nonlinear terms reduces the general expression (17) to the following extension of RAYLEIGH's function

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{(\kappa, \mu)} &= \kappa \delta^2 + \mu \left\{ \frac{2}{3} [(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] + \varepsilon^2 + \zeta^2 + \eta^2 \right\} \\ &= \lambda \delta^2 + \mu \{ 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \varepsilon^2 + \eta^2 + \zeta^2 \}. \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

Finally with  $\kappa = 0$ , the expression (17a) yields

$$\Phi_{Stokes} = \mu \left\{ \frac{2}{3} [(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] + \varepsilon^2 + \zeta^2 + \eta^2 \right\}. \quad (17b)$$

The balance between input and output of heat at general kinetic conditions means the following differential equation of the temperature field

$$\left( \underset{\text{dynamic}}{\rho} \frac{d\tau}{dT} + c_{(p)} \right) \frac{DT}{dt} = \underset{\text{viscous}}{\frac{\Phi}{\rho}} + \underset{\text{dissipation}}{\frac{1}{\rho}} \operatorname{div} (\underset{\text{heat}}{\mathbf{k}} \operatorname{grad} T) - \underset{\text{heat}}{\frac{\partial Q_e}{\partial t}} = T \frac{D\sigma}{dt} - \underset{\text{total}}{\frac{\partial Q_e}{\partial t}}. \quad (18)$$

heat
total
heat

The terms of equation (18) express power per unit mass of a compressible medium. Its last term is the time rate of source heat per unit mass supplied from outside by a chemical or nuclear reaction. Exothermic and endothermic processes contribute with opposite sign. The factor in front of the substantial derivative of temperature is the specific heat for a change of state along the path of the mass unit.

The three kinetic equations of general type (15), the continuity equation (12), the energy equation (18), and the equation of state (5) are intercoupled. Moreover the physical parameters depend all on temperature, and some of them also slightly on pressure. Therefore the integration of so general a group of basic equations for tri-axial flow is rather entangled.

#### 4. Normal, Stationary Shock Wave with Variable Specific Enthalpy

Originally, RIEMANN (1860) conceived the compression front as a mathematical discontinuity (infinitely thin strip of transition). RANKINE (1870) accounted for the irreversible transfer of energy. HUGONIOU (1889) established the correct energy equation for gases passing through a shock wave. STODOLA (1903) materialized a compressive surge in steam nozzles, and analyzed the normal stationary shock. TAYLOR (1910) clarified the conditions in weak transi-

tions. BECKER (1922) calculated, for a constant Prandtl-number, a strip width of the order of one mean free molecular path, i.e., about 1/10 of a micron for normal conditions. At present [35, 44] a front width of many free paths would seem likely for not too high values of Mach number.

The actual interest in the problem is focussed on variable dimensionless enthalpy and transport properties as well as inner processes trailing the shock with a time lag linked to bulk viscosity.

### (A) Assumptions

(1) Initially supersonic, steady, uni-axial flow in  $x$ -direction. (2) A shock front is caused by a disturbance. To an observer attached to the  $x$ -axis, i.e., moving with shock speed, the front is stationary. (3) At stations appreciably upstream (cold domain; subscript 1) or downstream (hot domain; subscript 2) of the front, there is uniform flow ( $u_x = 0$ ) and thermal equilibrium ( $T_x = 0$ ).

The dependency of enthalpy on temperature is accounted for. Thus with

$$i(T) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{di}{d(\ln T)}$$

the specific heats are

$$c_{(p)} = \frac{dH_{(p)}}{dT} = R \left( i + \frac{di}{d(\ln T)} \right), \quad c_{(v)} = \frac{dU_{(p)}}{dT} = R \left( i + \frac{di}{d(\ln T)} - 1 \right). \quad (19)$$

Their ratio is

$$\gamma' \equiv \frac{c_{(p)}}{c_{(v)}} = \left( i + \frac{di}{d(\ln T)} \right) \left( i + \frac{di}{d(\ln T)} - 1 \right)^{-1}. \quad (20)$$

The squared speed of sound is

$$g^2 = \gamma R T = \left( i + \frac{di}{d(\ln T)} \right) \left( i + \frac{di}{d(\ln T)} - 1 \right)^{-1} R T. \quad (21)$$

### (B) Basic Relations

The basic equations of this particular case follow from our general relations for vanishing components and derivatives in regard to  $y$  and  $z$ , as well as vanishing partial derivatives in regard to time.

#### (a) Equation of State

$$\text{Unchanged } \dot{p} = R T \varrho. \quad (5)$$

#### (b) Stress

$$\dot{p}_{(xx)} = -\dot{p} + s_{(xx)} = -\dot{p} + \kappa u_x + \frac{4}{3} \mu u_x^2 + 4 \nu u_x^2, \quad (22)$$

$$s_{(xx)} = (\lambda + 2 \mu) u_x + 4 \nu u_x^2 = \kappa u_x + \frac{4}{3} \mu u_x^2 + 4 \nu u_x^2. \quad (22a)$$

The Burnett numbers [4, 5, 20, 26]

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{4}{3} \left( \frac{7}{2} - \frac{T}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dT} \right), & \omega_4 &= 0, \\ \omega_2 &= 2, & \omega_5 &= 3 \frac{T}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dT}, \\ \omega_3 &= 3, & \omega_6 &= 8 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

are used in expressing our coefficient of nonlinear shear viscosity as follows [41]

$$\nu = - \left( \frac{\omega_1}{6} - \frac{7}{18} \omega_2 - \frac{2}{27} \omega_6 \right) \frac{\mu^2}{p} = \left( \frac{2}{9} \cdot \frac{T}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dT} - \frac{16}{27} \right) \frac{\mu^2}{p}. \quad (24)$$

(c) *Conservation of Mass*

$$(\varrho u)_x = 0, \quad (25)$$

hence

$$\varrho u = \text{const} = \varrho_1 u_1. \quad (25a)$$

(d) *Conservation of Momentum*

$$a u_x = -\dot{p}_x + s_{(xx)x}, \quad (26)$$

hence

$$a u = -\dot{p} + s_{(xx)} + b. \quad (26a)$$

By entry conditions

$$b = \dot{p}_1 + \varrho_1 u_1^2,$$

because the flow is assumed uniform at the boundaries (1, 2).

(e) *Conservation of Energy*

We assume the shock intensive enough to excite molecular vibration. This implies an abrupt rise of the temperature up to  $T_f > 600^\circ\text{K}$  over a thin zone of transition. Behind the shock front the temperature and the other variables of state adjust gradually to their values at the new thermal equilibrium (station 2).

The initial thermodynamic state is fixed by  $T_1$  and  $p_1$  chosen at a stratospheric level, while a set of different values is assigned to the final temperature ( $T_2$ ).

For end states of uniform mass flow ( $u_x = 0$ ) and vanishing heat flow ( $T_x = 0$ ), the conservation relations become directly integrable, and so yield the constants of integration  $a$ ,  $b$ ,  $c$

$$\left. \begin{aligned} a &= \varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2, \\ b &= \dot{p}_1 + a u_1 = \dot{p}_2 + a u_2, \\ c &= (u_1^2 + 2 i_1 R T_1)^{1/2} = (u_2^2 + 2 i_2 R T_2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Here the values of  $a$ ,  $b$ ,  $c$  depend on finding previously the speeds  $u_1$  and  $u_2$  which are consistent with the chosen initial values for the state variables (station 1) and the temperature ( $T_2$ ) at the new station of thermal equilibrium behind the shock.

To this end we solve the following equations for  $u_1$  and  $u_2$

$$u_1 + \frac{RT_1}{u_1} = u_2 + \frac{RT_2}{u_2}, \quad (28)$$

$$u_1^2 + 2Ri_1T_1 = u_2^2 + 2Ri_2T_2. \quad (29)$$

Relation (28) is derived by combining the equations for conservation of mass (25a) and momentum (26) with the equation of state (5). Relation (29) is the energy equation for our end state conditions. It holds only for  $u_x = 0$  (uniform stream), and  $T_x = 0$  (no heat flow) at the boundaries, i.e., on both sides of a thin zone of transition.

An asset to the computation of asymptotic boundary conditions is the availability of the function  $i(T, p)$  in tabulated form for many gases [31].

With nondimensional variables

$$\tau = \frac{T_2}{T_1}, \quad v = \frac{u_2}{u_1}$$

equation (28) yields

$$\frac{u_1^2}{RT_1} = \frac{v - \tau}{v(v-1)}, \quad (28')$$

equation (29) yields

$$\frac{u_1^2}{RT_1} = \frac{2(i_1 - \tau i_2)}{v^2 - 1}. \quad (29')$$

By equating (28') to (29') the following quadratic equation results

$$v^2 - 2jv - \tau = 0 \quad (30)$$

with

$$j = \left(\frac{1}{2} - i_2\right)\tau + i_1 - \frac{1}{2}. \quad (30a)$$

A meaningful solution is

$$v = \frac{u_2}{u_1} = j + (j^2 + \tau)^{1/2}. \quad (31)$$

Then with  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  known, and the state equation holding, the three constants of integration ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) become directly calculable and allow to complete and check a table with regard to all desirable characteristics of the end states.

This method is similar to that initiated by BETHE [7]. He clearly dispelled as fallacy any influence of transport phenomena and relaxed inner processes on boundary conditions of thermal equilibrium and uniform flow. Intermediate

occurrence of non-equilibrium as well as current transport phenomena do only affect the structure and width of the transition zone.

We were fortunate to base on the NBS-Tables the numerical values regarding the dimensionless proper enthalpy  $i(T, p)$  and the specific heat ratio  $\gamma(T, p)$ . Their dependence on pressure is slight over the relevant range.

The free choice of final temperatures ( $T_2$ ) was associated with estimating the probable values of final pressures ( $p_2$ ). Mostly one iteration sufficed in order to obtain satisfactory agreement between estimated and computed  $p_2$ -values.

On this basis we calculated the end state characteristics of shock waves in molecular nitrogen, atmospheric air, molecular oxygen and carbon dioxide with  $T_1 = 218^\circ\text{K}$ ,  $p_1 = (0.1)$  atm corresponding to an altitude of 52,898 ft = 16.134 km of Standard Atmosphere. The set of end temperatures was equally spaced by  $\Gamma T = 200^\circ\text{K}$ . It covered the interval  $400^\circ\text{K} \leq T_2 \leq 2000^\circ\text{K}$  for  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$  and air, while  $300^\circ\text{K} \leq T_2 \leq 1500^\circ\text{K}$  was taken for  $\text{CO}_2$ .

These asymptotic boundary conditions are used for the numerical integrations in the zone of shock transition with trimorous viscosity, heat conduction and specific heats dependent mainly on temperature and only slightly on pressure [44]. For conditions of equilibrium nearly prevailing and time lag almost negligible, the basic relations for uni-axial steady flow with non-vanishing gradients of speed and temperature are

$$\begin{aligned}\rho u &= \text{const} = a, \\ a u &= -p + (\lambda + 2\mu) u_x + 4\nu u_x^2 + b, \\ &= -p + \kappa u_x + \frac{4}{3}\mu u_x + 4\nu u_x^2 + b, \\ k T_{xx} + (k_\lambda - a c_{(T)}) T_x - (a u - b) u_x &= 0.\end{aligned}$$

The third equation of this group expresses the balance of energy in the one-dimensional case in a steady field of temperature and speed ( $\partial/\partial t = 0$ ) with no sources or sinks of heat. It is linked to viscous effects by the momentum equation yielding:  $a u - b = -p + s_{(xx)}$ . We may distinguish two categories of fluids, namely:

- Gases, like nitrogen, for which reliable data on bulk viscosity hail from ultrasonics [17, 19].
- Most of the gases and liquids for which, at present, little is accurately known as to bulk viscosity [6].

#### Category (a)

Here  $\kappa/\mu = \text{const}$ , and the linear linking of bulk viscosity to ordinary shear viscosity follows from ultrasonic experiment. Implied is then the same dependency on temperature in the two modes of viscous dissipation.

On such a first approximation rest the preliminary numerical solutions which we have recently communicated [44] in regard to the broadening of the profiles for velocity and temperature on account of a varied shock intensity in molecular nitrogen.

In the range of envisaged conditions, the Becker profiles (constant Prandtl number) are considerably dilated (order of dilation: 10:1) mainly because the actual temperature variation influences appreciably the physical parameters.

Quantitative results were reached as well in regard to an additional dilation in above profiles on account of bulk viscosity. The latter was based on the excess absorption of wave energy in ultrasonics [19, 40, 44].

In this connection we found the Stokes hypothesis affecting more the temperature distribution than the velocity profile. While the former's profile width appears as waning with waxing shock intensity, the less pronounced Stokes-effect in the velocity profile was revealed of opposite sign [44].

### Category (b)

Here, relaxation [6] should compensate for unavailable data on bulk viscosity. This means accounting for a very small but finite time of adjustment ( $\beta$ ) over a very small but finite distance between stations of equilibrium.

Let a single mode of vibration be the only unfrozen internal process. Then the total nondimensional proper enthalpy may be split as follows:

$$i = i_{(a)} + i_{(v)}(T) \quad (33)$$

with  $i_{(a)}$  being nearly constant.

### Kind of Molecules

	Monatomic	Diatomic linear	Non-monatomic non-linear
$i_{(a)}$	$3/2 + 1 = 2.5$	$5/2 + 1 = 3.5$	$6/2 + 1 = 4$

Thus the energy equation over the non-equilibrium process may read:

$$i_{(a)} R T + i_{(v)}(T) R T + \frac{u^2}{2} = \frac{c^2}{2}. \quad (34)$$

## 5. Concluding Remarks

Since the advent of the high speed electronic computer, a lack of solutions in closed form is no more an impervious barrier precluding further analytical interest in the mathematics of specific physical problems.



Numerical integrations, however, regarding relaxation phenomena on the basis of the excellent theory of LANDAU and TELLER still suffer mainly from haziness as to the evaluation of collision cross-sections.

An alternative would be to try to remedy the present paucity of knowledge about bulk viscosity of various fluids and the law of its thermal variation. In this respect, the ultrasonic experiment should be very helpful if conducted systematically on a variety of utmost pure fluids and extended over a wide range of values for the state variables.

From a different angle, important theoretical research is now in full evolution on a closer analysis of non-equilibrium rate processes particularly in chemical kinetics [42, 43]. One of these recent publications discusses the relaxation of a system of harmonic oscillators contained in an isothermal bath. May the hope be expressed that such a sound approach could be soon extended to include also secondary effects of anharmonicity and interaction between periodic modes.

## 6. Notation

A superposed dot means time rate. Any subscript, if not parenthesized, stands for one partial derivation as to the subscribed variable. In uni-axial flow, each accent (') as superscript denotes one derivation in regard to  $x$ .

$x, y, z$	orthogonal, cartesian spatial coordinates;
$X, Y, Z$	acceleration components from body forces;
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	unit vectors in directions $x, y, z$ , respectively;
$\bar{b} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$	displacement vector;
$t$	time;
$\dot{\bar{b}} = \bar{i}u + \bar{j}v + \bar{k}w$	velocity vector with orthogonal components; $u, v, w$ or $u_{(i)}, u_{(j)}, u_{(k)}$ ;
$\delta \equiv \text{div } \dot{\bar{b}} = u_x + v_y + w_z$	divergence of velocity vector or time rate of relative bulk variation;
$T$	absolute temperature in °K, based on trans- latory random agitation only,
	$c_{tr} = \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{\rho}$ ;
$\beta$	relaxation time as for intramolecular mobilities;
$T_{(i)}$	inner temperature defined by $\beta T_{(i)t} = T - T_{(i)}$ ;

$D/dt$ 
 $\delta_{(i,j)}$ 
 $p = RT \varrho$ 
 $I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 
 $\bar{p}_{dyn} = \frac{1}{3} \sum_{x,y,z} p_{(ii)}$ 
 $B = \bar{p}_{dyn} - p$ 
 $A$ 
 $A^{(T)}$ 
 $D = A \quad A^{(I)}$ 
 $D^2 \equiv (d_{(i,j)})$ 
 $I \equiv (s_{(i,j)})$ 
 $\varphi = p I - \Gamma$ 
 $\lambda = \kappa \quad \frac{2}{3} \mu$ 
 $\mu \equiv \eta$ 
 $\nu$ 
 $\kappa = \lambda \quad \frac{2}{3} \mu$ 
 $k$ 
 $\varrho$ 
 $\tau$ 
 $Q_{(\varepsilon)}$ 
 $\Phi$ 
 $\Phi/\varrho$ 
 $c = (2.997,76) 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ 
 $R_0 = (8.314,36) 10^7 \text{ erg } (^{\circ}\text{K})^{-1} \text{ mol}^{-1}$  universal gas constant;

 $m$ 
 $R = R_0/m$ 
 $N = (6.0251) 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ 
 $k = \frac{R_0}{N} = (1.380,32) \text{ erg } (^{\circ}\text{K})^{-1}$ 
 $e_0$ 
 $e = \frac{RT}{2}$ 

substantial derivative, e. g.,

 $\frac{DT}{dt} = T_t + T_x u + T_y v + T_z w;$ 

Kronecker delta;

static pressure;

identity matrix;

dynamic mean value of normal stresses;

difference between dynamic and static mean value of normal stresses;

asymmetric matrix of strain-rate;

 transposed  $a$ -matrix;

symmetrized linear matrix of strain-rate;

symmetrized bilinear matrix of strain-rate;

matrix of viscous stress tensor;

matrix of total stress tensor;

coefficient of linear compression viscosity;

coefficient of linear shear viscosity;

coefficient of nonlinear shear viscosity;

modulus of bulk viscosity;

coefficient of thermal conductivity;

mass per unit volume;

volume per unit mass;

source-heat from outside per unit mass;

dissipation function = power from visible motion converted into heat per unit volume;

power dissipated per unit mass by viscosity;

speed of light in vacuo;

molecular weight;

individual gas constant;

Avogadro number;

Boltzmann constant;

zero-point energy per unit mass;

kinetic energy per unity of translatory mode and per unit mass;

$$e_{tr} = \frac{3}{2} R T$$

$$e_{(r)} = R T \quad \text{or} \quad \frac{3}{2} R T$$

lin. molec.                      non-lin. molec.

$$\bar{e}_{(v)} = \bar{e}_{(i)} = \frac{\vartheta_{(i)}}{\exp(\vartheta_{(i)}) - 1} R T$$

$$e_{(a)}$$

$$e_{(i)}$$

$$\nu$$

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{c} \quad \text{or} \quad 2 \pi \tilde{\nu}$$

$$\vartheta_{(i)} = \frac{h \nu_{(i)}}{k T} = \frac{h c \tilde{\nu}_{(i)}}{k T}$$

$$U = e_0 + \int c_{(r)} dT = e_0 + 3 e + \sum e_{(i)}$$

$$U_{(p)} = U - e_0$$

$$H_{(p)} = H - e_0 = U_{(p)} + R T = i R T$$

$$i = \frac{H_{(p)}}{R T} = \frac{U - e_0}{R T} + 1$$

$$i_{(a)} \\ g^2 - \gamma R T$$

$$c_{(r)} = \frac{dU}{dT}$$

$$c_{(p)} = \frac{dH}{dT} = c_{(a)} + c_{(i)}$$

$$c_{(a)}$$

$$c_{(i)}$$

$$\sigma = \int \left( \frac{c_{(p)}}{T} \right) dT$$

$$dH = dU + p d\tau + \tau dp \leq T d\sigma + \tau dp \quad (\text{inequality holding for irreversible occurrence});$$

$$\xi$$

kinetic energy of random translatory molecular motion per unit mass (definition of temperature);

rotational intramolecular energy per unit mass;

vibrational intramolecular energy of  $i$ -th mode per unit mass at equilibrium;

intramolecular energy of all active (in general non periodic) modes per unit mass;

actual local energy per unit mass in regard to a lagging inner process like vibration;

characteristic frequency of intramolecular vibration;

characteristic wave number;

characteristic quantum-dynamical number of intramolecular normal vibration;

internal energy per unit mass;

proper or thermal internal energy per unit mass;

proper enthalpy per unit mass;

non-dimensional proper enthalpy per unit mass;

$i$  for active mobilities only;

squared speed of sound in a gas;

specific heat at constant volume;

specific heat at constant pressure;

specific heat of active modes only (translation and rotation);

specific heat of inert modes only (e. g., one normal vibratory mode);

entropy per unit mass;

rate of inner process;

A

$$dU = T d\sigma - p d\tau - A d\xi^{28}$$

 $\omega$ 

$$\omega_{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

$$a = \rho u$$

$$b = (p + a u)_{x=-\infty}$$

 $c$ 

$$\frac{u^2}{2} + i(T) R T \quad \frac{c^2}{2}$$

difference of chemical potentials of components (DONDER);

for equilibrium:  $A d\xi = 0$ ;

circular frequency;

Burnett non-dimensional coefficients (third approximation to velocity distribution function);

mass per unit area in unit time;

momentum per unit area in unit time;

speed of efflux into vacuum;

total proper energy per unit mass.

## REFERENCES

- [1] J. ACKERET, *Gasdynamik*, Handb. Phys. 7, 5, 289–342 (1927).
- [2] L. PRANDTL, *The Mechanics of Viscous Fluids*, Aerod. Theory, W. F. DURAND, edit. (1935), vol. 3, p. 34–208.
- [3] G. I. TAYLOR and J. W. MACOLL, *The Mechanics of Compressible Fluids*, Aerodyn. Theory, W. F. DURAND, edit. (1935), vol. 3, p. 209–250.
- [4] D. BURNETT, *The Distribution of Velocity in a Slightly Non-Uniform Gas*, Proc. London math. Soc. 39, 2, 385–430 (1935).
- [5] D. BURNETT, *The Distribution of Molecular Velocity and the Mean Motion in a Non-Uniform Gas*, Proc. London. math. Soc. 40, 382–435 (1935).
- [6] L. LANDAU and E. TELLER, *Zur Theorie der Schalldispersion*, Phys. Z. Sowjet. 10, 34–43 (1936).
- [7] H. A. BETHE and E. TELLER, *Deviations from Thermal Equilibrium in Shock Waves*, Rep. X-117, Cornell University (1941).
- [8] L. TISZA, *Supersonic Absorption and Stokes' Viscosity Relation*, Phys. Rev. 61, 531–536 (1942).
- [9] L. H. THOMAS, *Note on Becker's Theory of the Shock Front*, J. Chem. Phys. 12, 449–453 (1944).
- [10] J. C. GUNN, *Relaxation Time Effects in Gas Dynamics*, R. & M. 2338 (1946).
- [11] M. KOHLER, *Die Volumviskosität in idealen Gasen als gaskinetische Transportscheinung*, Z. Physik 124, 757–771 (1948).
- [12] M. KOHLER, *Reibung in mässig verdünnten Gasen als Folge verzögerter Einstellung der Energie*, Z. Physik 25, 715–732 (1949).
- [13] H. O. KNESER, *Molekulare Schallabsorption und Dispersion*, Erg. exakt Naturwiss. 22, 121–185 (1949).
- [14] G. R. COWAN and D. R. HORNIG, *The Experimental Determination of the Thickness of a Shock Front in a Gas*, Chem. Phys. 18, 1008–1017 (1950).
- [15] G. HERZBERG, *Molecular Spectra and Molecular Structure*; I: *Spectra of Diatomic Molecules* (2nd ed. Nostrand Co. 1950); II: *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules* (Nostrand, 1945).
- [16] R. VON MISES, *On the Thickness of a Steady Shock Wave*, J. IAS 17, 551–554 594 (1950).
- [17] J. I. MARKHAM, R. T. BEYER and R. B. LINDSAY, *Absorption of Sound in Fluids*, Rev. Mod. Phys. 23, 4, 353–411 (1951).

- [18] D. GILBARG, *The Existence and Limit Behavior of the One-Dimensional Shock Layer*, Amer. J. Math. 73, 256-274 (1951).
- [19] A. J. ZMUDA, *Dispersion of Velocity and Anomalous Absorption of Ultrasonics in Nitrogen*, J. Acoust. Soc. Amer. 23, 472-477 (1951).
- [20] S. CHAPMAN and T. G. COWLING, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 2nd ed. (Cambridge 1952).
- [21] S. F. GREENE and D. R. HORNIC, *Shape and Thickness of Shock Fronts in Argon, Hydrogen, Nitrogen and Oxygen*, Brown University, Metcalf. Res. Lab. TR-4 (1952).
- [22] C. TRUESDELL, *The Mathematical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, J. ration. Mech. Anal. 1, 125-300 (1952), 593-616 (1953).
- [23] J. MEIXNER, *Strömungen von fluiden Medien mit inneren Umwandlungen und Druckviskosität*, Z. Phys. 131, 456-469 (1952).
- [24] J. MEIXNER, *Allgemeine Theorie der Schallabsorption in Gasen und Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der Transporterscheinungen*, Acustica 2 (3), 101-109 (1952).
- [25] P. GERMAIN and R. BADER, *Unité des écoulements avec chocs dans la mécanique de Burgers*, WGL Jb. 1953, 144-148.
- [26] D. GILBARG and D. PAOLUCCI, *The Structure of Shock Waves in the Continuum Theory of Fluids*, J. ration. Mech. Anal. 2, 617-642 (1953).
- [27] TH. VON KÁRMÁN, *Introduction to General Theory of High-Speed Aerodynamics*, W. R. SEARS, edit. (Princeton 1954).
- [28] J. MEIXNER, *Thermodynamik der irreversiblen Prozesse* (Aachen 1954).
- [29] L. ROSENHEAD (leader) et al., *A Discussion on the First and Second Viscosities of Fluids*, Proc. roy. Soc. London [A] 226, 16-69 (1954). N. B.: C. TRUESDELL, *The Present Status of the Controversy Regarding the Bulk Viscosity of Fluids*, 59-69.
- [30] F. D. ROSSINI, edit., *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion; I: Thermodynamics and Physics of Matter* (Princeton 1955).
- [31] J. HILSENATH et al., *Tables of Thermal Properties of Gases*, National Bureau of Standards 1955.
- [32] PH. J. THEODORIDES, *Mehrparametrische Zähigkeit als Grundlage einer Quasi-Kontinuumtheorie der Kompressionsfront für mehratomige Gase*, Z. angew. Math. Mech., Sonderheft, 38-46 (1956).
- [33] PH. J. THEODORIDES, *A New Governing Equation of Shock Analysis with Heat Transfer in polyatomic Gases*, Bull. Amer. phys. Soc. (II) 1 (7), 361 (1956).
- [34] V. BLACKMAN, *Vibrational Relaxation in Oxygen and Nitrogen*, J. Fluid Mech. 1 (1), 61-85 (1956).
- [35] W. GRIFFITH, D. BRICKEL and V. BLACKMAN, *Structure of Shock Waves in Polyatomic Gases*, Phys. Rev. 102 (5), 1209-1216 (1956).
- [36] J. ACKERET, *Über Widerstände, die durch gasdynamische Relaxation hervorgerufen werden*, Z. Flugwiss. 4, 14-17 (1956).
- [37] J. M. BURGERS, *Selected Topics from the Theory of Gas Flow at High Temperatures* (I) and (II), Inst. Fluid Dyn. & Suppl. Math. Univ. of Maryland, Techn. Notes: BN 83, 63 pages (Sept. 1956), and BN 84, 51 pages (Oct. 1956).
- [38] D. R. CHAPMAN, *Some Possibilities of Using Gas Mixtures Other than Air in Aerodynamic Research*, NACA Rep. 1259, 22 pages (1956).
- [39] R. J. RUBIN and K. E. SHULER, *Relaxation of Vibrational Non-Equilibrium Distributions; I: Collisional Relaxation of a System of Harmonic Oscillators; II: The Effect of the Collisional Transition Probabilities on the Relaxation Behavior*, J. chem. Phys. 25, 59-74 (1956).

- [40] M. J. LIGHTHILL, *Viscosity Effects in Sound Waves of Finite Amplitude, Surveys in Mechanics*, G. I. Taylor 70th Anniversary Volume (Cambridge 1956), p. 250–351.
- [41] PH. J. THEODORIDES, *A Basic Approach to Shock Front Analysis*, Techn. Note BN 93, AD -115–099, Inst. Fluid Dyn. Appl. Math. (University of Maryland, 1957), 31 pages.
- [42] E. W. MONTROLL and K. E. SHULER, *Studies in Non-Equilibrium Rate Processes; I: The Relaxation of a System of Harmonic Oscillators*, Chem. Phys. 26 (3), 454–464 (1957).
- [43] W. W. WOOD and J. G. KIRKWOOD, *Hydrodynamics of a Reacting and Relaxing Fluid*, J. appl. Phys. 28 (4), 395–398 (1957).
- [44] PH. J. THEODORIDES, *L'onde de choc dans un fluide non-monoatomique*, Helv. phys. Acta 31 (1), 33–42 (1958).

### *Zusammenfassung*

Für strömende nicht-einatomige Fluida werden parallele Einflüsse von Volumenviskosität und Relaxation im Übergang hinter einer Kompressionsfront untersucht. Anhand einer intramolekularen Eigenschwingung, des einzigen aktivierten inneren Prozesses, wird das System der Grundgleichungen für eine dreiaxige Strömung mit Einschluss von Volumenviskosität und quadratischer Scherzähigkeit aufgestellt.

Es wird auf neuliche numerische Lösungen des einachsigen Falles für molekularen Stickstoff hingewiesen. Die Ergebnisse beruhen auf Veränderungen der dimensionslosen Enthalpie sowie der Transporteigenschaften gemäss den 1955-NBS-Tafeln als auch auf Volumenviskosität aus zuverlässigen Messungen von Überschalldämpfung.

Betreffend die Gase und Flüssigkeiten mit noch ungenügenden Daten über Volumenviskosität wird die Wichtigkeit der Landau-Teller-Theorie hervorgehoben.

(Received: November 22, 1957)



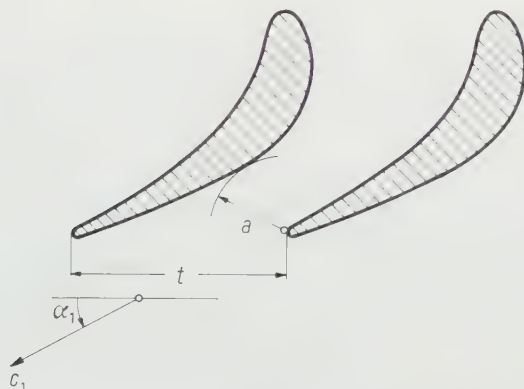
## Theorie zur Berechnung des Abströmwinkels bei Turbinengittern

VON WALTER TRAUPEL, Zürich, Schweiz<sup>1)</sup>

Die gittertheoretische Berechnung des Abströmwinkels eng geteilter Gitter aus stark gekrümmten Profilen, wie sie der Dampf- und Gasturbinenbau allgemein verwendet, ist heute möglich, erfordert aber einen erheblichen Aufwand. Die Praxis bedient sich daher weithin einer einfachen Faustregel, der sogenannten «Sinusregel». Diese kann in der Form

$$\sin \alpha_1 = K \frac{a}{t} \quad (1)$$

geschrieben werden, wobei  $a$  und  $t$  lichte Weite und Teilung des Gitters bedeuten (vgl. Figur 1). Den Faktor  $K$  fügte man erst nachträglich ein, um die Regel



Figur 1

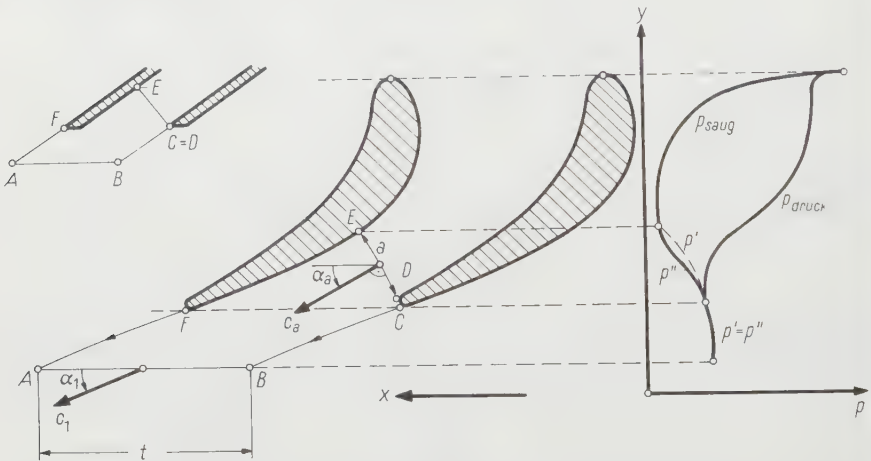
Schaufelschnitt zur Erklärung der Sinusregel.

mit der Erfahrung noch besser in Übereinstimmung zu bringen. Er ist in der Tat nur wenig von 1 verschieden und wird praktisch genau 1, wenn die Abströmgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit wird [1]<sup>2)</sup>. Unbefriedigend an

<sup>1)</sup> Institut für thermische Turbomaschinen der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 694.

dieser Regel ist ihr rein empirischer Charakter, der keine Einsicht in die massgebenden Zusammenhänge gewährt, ferner auch die Unsicherheit bezüglich des Faktors  $K$ , die bei grösseren Winkeln immerhin erheblich wird und einen stetigen physikalisch wohlbegründeten Übergang zum Fall des Gitters mit grosser Teilung und flachen Profilen nicht erlaubt. Nachfolgend wird gezeigt, wie eine genauere Aussage über die Ablenkungseigenschaften eines Gitters gewonnen werden kann, welche die Sinusregel als Grenzfall mit enthält.



Figur 2

Schaufelgitter mit Druckverlauf und Kontrollkontur  $ABCDE$ .

Zu diesem Zweck führen wir eine Kontinuitäts- und Impulsbetrachtung am Kontrollgebiet  $ABCDEF A$  (Figur 2) durch. Zunächst sei der *inkompressible Fall* betrachtet. Ist  $c_a$  der Mittelwert der Geschwindigkeit längs der Orthogonaltrajektorie  $a$  und sind  $c_1$  und  $\alpha_1$  die Geschwindigkeit und die Richtung der ausgeglichenen Strömung nach dem Gitter, so liefert die Kontinuitätsgleichung

$$t c_1 \sin \alpha_1 = a c_a. \quad (2)$$

Um den Impulssatz zu formulieren, betrachten wir den Druckverlauf  $p'$  längs  $BCDE$  und  $p''$  längs  $AFE$ . Längs  $BC$  und  $AF$  sind die beiden Druckverläufe sicher gleich, da beide Linien um  $t$  auseinanderliegen, und in  $E$  laufen sicher beide Druckverläufe wieder zusammen. Die  $x$ -Komponente der auf das Kontrollgebiet ausgeübten von den Drücken herrührenden resultierenden Kraft ist also

$$X = \int_C^E p' dy - \int_F^E p'' dy. \quad (3)$$

Da  $p'$  und  $p''$  in den betrachteten Intervallen keinen allzu unregelmässigen Verlauf annehmen können, darf mit guter Näherung  $X = 0$  gesetzt werden. Man kann also  $X$  neben der  $x$ -Komponente der gesamten Schaufelkraft vernachlässigen, wie aus dem entsprechenden Flächenverhältnis in Figur 2 auch verständlich wird. Weiter hat die  $x$ -Komponente des längs  $ED$  eintretenden Impulsstroms die Grösse  $\dot{m} c_u \cos \alpha_u$  ( $\dot{m}$  die je Zeiteinheit durchtretende Masse) und die  $x$ -Komponente des längs  $AB$  austretenden Impulsstromes den Betrag  $\dot{m} c_1 \cos \alpha_1$ , so dass mit  $X = 0$  aus dem Impulssatz folgt

$$c_1 \cos \alpha_1 = c_a \cos \alpha_a. \quad (4)$$

Aus (2) und (4) folgt aber sogleich

$$\sin \alpha_1 = \frac{a}{t} \cdot \frac{c_a}{c_1} = \frac{a}{t} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_u} \quad (5)$$

oder

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\cos \alpha_a} \cdot \frac{a}{t}} \quad (6)$$

Aus der Form (5) wird ebenfalls die Sinusregel verständlich, da ja

$$K = \cos \alpha_a / \cos \alpha_1$$

offensichtlich besonders für kleine Winkel nicht sehr wesentlich von 1 verschieden sein kann. Zur Bestimmung des Abströmwinkels eines «kanalartigen» Gitters genügt es also offenbar, eine Trajektorie  $DE$  zu zeichnen und  $\alpha_u$  zu messen – wobei kein grosser Fehler entstehen kann, da selbst ein etwas falsches  $\alpha_a$  den Kosinus nur wenig fälscht –, worauf (6)  $\alpha_1$  liefert.

Man beachte, welche Vereinfachungen gemacht wurden. Ausser der Voraussetzung der Reibungsfreiheit und der Vernachlässigung der Kraftkomponente  $X$  (die der wesentliche Schritt bei dieser Theorie ist) ist noch folgende Feinheit nicht zu übersehen. Die Krümmung der Trajektorie  $DE$  und die Tatsache, dass die Geschwindigkeit längs ihr nicht konstant ist, haben zur Folge, dass der in die Kontinuitätsgleichung einzusetzende Mittelwert  $c_u$  nicht genau gleich dem Mittelwert des Impulses je Masseneinheit ist. Eigentlich dürfte man also in der Impulsgleichung nicht das gleiche  $c_u$  verwenden, doch erweist sich der Fehler bei kanalartigen Gittern der hier betrachteten Art als ausserordentlich gering.

Neben dem inkompressiblen Fall wird vor allem der *transsonische* besonders einfach, das heisst der Fall, dass  $c_a$  und  $c_1$  ungefähr gleich der Schallgeschwindigkeit sind. Kompressibel muss ja (2) lauten

$$t \varrho_1 c_1 \sin \alpha_1 = a \varrho_a c_a. \quad (7)$$

Da aber bei Schallgeschwindigkeit  $q/c$  ein Maximum erreicht (also horizontale

Tangente und Kurve), gilt  $\varrho_1 c_1 \approx \varrho_a c_a$  und somit nach (7)

$$\boxed{\sin \alpha_1 = \frac{a}{t}} \quad \text{für} \quad M_1 \approx 1 \quad (8)$$

in Übereinstimmung mit dem empirischen Befund.

Schliesslich lässt sich auch der *allgemeine kompressible Fall* im Unterschallbereich behandeln. Verallgemeinernd sind hier noch die Austrittsschaufellänge  $l$  und die Schaufellänge  $l_a$  am Ort der lichten Weite verschieden angenommen. Durch Einführung von (4) in (7) folgt mit  $\kappa$  als Isentropenexponent

$$\sin \alpha_1 = \frac{a l_a \varrho_a c_a}{t l_1 \varrho_1 c_1} = \frac{a l_a \varrho_a \cos \alpha_1}{t l_1 \varrho_1 \cos \alpha_a} = \frac{a l_a \cos \alpha_1}{t l_1 \cos \alpha_a} \left( \frac{p_a}{p_1} \right)^{1/\kappa}, \quad (9)$$

wobei das Verhältnis der Dichten vermöge der Gleichung der Isentrope sogleich durch das Verhältnis der Drücke ausgedrückt wird. Für die isentrope Zustandsänderung gilt ferner die Energiegleichung

$$\frac{c_a^2 - c_1^2}{2} = j_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_a}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right]. \quad (10)$$

Hier bedeutet  $j_1$  die als «Normalenthalpie» bezeichnete Grösse

$$j_1 = \frac{\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1. \quad (11)$$

Diese Darstellung der Enthalpie ist bei geeigneter Nullpunktswahl längs einer Isentrope stets möglich, sofern nur der Isentropenexponent über einen genügenden Bereich genau genug konstant gesetzt werden darf. Es muss also nicht ideales Gas oder idealer Dampf vorausgesetzt werden. Der in (10) rechts stehende Ausdruck ist offensichtlich nichts anderes als die isentrope Enthalpiedifferenz zwischen den Zuständen 1 und  $a$ . Man bezeichnet als die Croccosche Zahl der Strömung die Grösse  $\mathcal{C}_1 = c_1 / 2 j_1$ . Dann folgt aus (10) unmittelbar

$$\left( \frac{c_a}{c_1} \right)^2 - 1 = \frac{1}{\mathcal{C}_1^2} \left[ 1 - \left( \frac{p_a}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right]$$

oder mit (4) auch

$$\left( \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_a} \right)^2 - 1 = \frac{1}{\mathcal{C}_1^2} \left[ 1 - \left( \frac{p_a}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right],$$

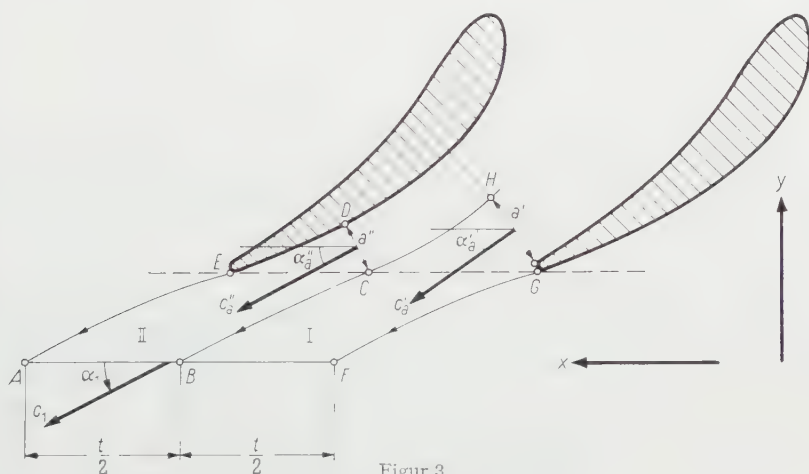
was wie folgt aufgelöst werden kann:

$$\left( \frac{p_a}{p_1} \right)^{1/\kappa} = \left\{ 1 - \mathcal{C}_1^2 \left[ \left( \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_a} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/(\kappa-1)}. \quad (12)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (9) ein, so folgt

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \left( \frac{a}{t} \right) \cdot \left( \frac{l_a}{l_1} \right) \frac{1}{\cos \alpha_a} \left\{ 1 - \mathcal{C}_1^2 \left[ \left( \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_a} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/(\kappa-1)}}. \quad (13)$$

Die Berechnung von  $\alpha_1$  aus dieser Gleichung müsste korrekterweise so erfolgen, dass man versuchsweise einige  $\alpha_1$  einsetzt und so denjenigen Wert auf findet, für den die Gleichung erfüllt ist. Da aber  $\cos \alpha_1$  rechts nur in einem stets kleinen Korrekturglied auftritt, genügt es meist,  $\alpha_1$  zunächst näherungsweise aus der Sinusregel zu bestimmen mit  $K = 1$  und den entsprechenden Näherungswert des Cosinus rechts in Gleichung (13) einzusetzen, worauf links der praktisch genaue Wert von  $\tan \alpha_1$  erhalten wird.



Figur 3  
Kontrollkonturen zur weiteren Theorie.

Man beachte, dass die Crocco- und Mach-Zahl miteinander zusammenhängen

$$\mathcal{C}_1 = M_1 \sqrt{\frac{\gamma}{2} - 1}. \quad (14)$$

Die ganze Untersuchung gilt streng genommen nur bis zur Schallgrenze. Bei Überschalldruckverhältnis ist die zusätzliche Strahlablenkung zu berücksichtigen, vergleiche darüber [2, 3].

Für Gitter aus sehr eng stehenden Schaufeln ist somit der Abströmwinkel auf einfache und physikalisch wohlbegründete Weise berechenbar. Gute Rechnungsunterlagen besitzt man auch für Gitter aus schwach gewölbten Profilen mit grosser Teilung. Am schwierigsten ist jedoch das Gebiet zwischen diesen beiden extremen Fällen. Trotzdem werden solche Gitter häufig verwendet, und es besteht daher ein dringendes Bedürfnis darnach, auch diese auf einfachem Wege berechnen zu können. Dies erweist sich als möglich durch die nachfolgend beschriebene Verallgemeinerung der soeben für das kanalartige Gitter durchgeführten Überlegung. Ein Gitter dieser Art ist in Figur 3 dargestellt. Wir be-

trachten die beiden Kontrollgebiete  $ABCDEA$  und  $BFGHCB$ . Die beide Gebiete trennende Linie  $BCH$  ist eine Stromlinie, und zwar treten durch die beiden mit I und II bezeichneten Gebiete gleiche Mengen hindurch, was dadurch erreicht wird, dass  $B$  in der Mitte zwischen  $A$  und  $F$  liegt.

Für beide Kontrollgebiete können die früheren Überlegungen wiederholt werden, nur dass jetzt die  $x$ -Komponente der resultierenden Kraft nicht mehr von vornherein vernachlässigt werden darf, denn der Druck in  $C$  wird von demjenigen in  $G$  und  $E$  etwas verschieden sein. Nehmen wir etwa an, der Druck in  $C$  sei wesentlich tiefer als der in  $E$ . Dann ist

$$X' = \int_{FGH} p \, dy - \int_{BCH} p \, dy > 0, \quad X'' = \int_{BCD} p \, dy - \int_{AED} p \, dy < 0. \quad (15)$$

Da der Druckverlauf längs  $AE$  und  $FG$  gleich ist, sind auch die unterhalb der Gitteraustrittsebene  $ECG$  entstehenden Anteile von  $X'$  und  $X''$  einander entgegengesetzt gleich. Die übrigen Anteile können auch nicht allzu stark voneinander abweichen, was aus der Ähnlichkeit der Druckverläufe längs  $GH'$  und  $ED$  einerseits und längs  $CH$  und  $CD$  andererseits folgt. Also besitzen  $X'$  und  $X''$  nicht sehr verschiedene Beträge und entgegengesetzte Vorzeichen. Die Überlegung führt zum gleichen Ergebnis, wenn man annimmt, der Druck in  $C$  sei höher als in  $E$ . Für das Kontrollgebiet I lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{t}{2} l_1 \varrho_1 c_1 \sin \alpha_1 = a' l_a \varrho'_a c'_a,$$

woraus

$$\sin \alpha_1 = \frac{2 a' l_a \varrho'_a c'_a}{t l_1 \varrho_1 c_1}, \quad (16)$$

während der Impulssatz für die  $x$ -Komponente liefert

$$\frac{\dot{m}}{2} (c_1 \cos \alpha_1 - c'_a \cos \alpha'_a) = X'.$$

Hier ist  $\dot{m}$  die gesamte durchgesetzte Masse. Mit  $\xi' = 2 X' / \dot{m}$  wird also

$$c_1 \cos \alpha_1 - c'_a \cos \alpha'_a = \xi', \quad (17)$$

woraus auch

$$\frac{c'_a}{c_1} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha'_a} \left( 1 - \frac{\xi'}{c_1 \cos \alpha_1} \right). \quad (18)$$

Eingesetzt in (16) gibt

$$\sin \alpha_1 = \frac{2 a' l_a \varrho'_a}{t l_1 \varrho_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha'_a} \left( 1 - \frac{\xi'}{c_1 \cos \alpha_1} \right). \quad (19)$$

In gleicher Weise folgt für das Kontrollgebiet II

$$\sin \alpha_1 = \frac{2 a'' l_a \varrho''}{t l_1 \varrho_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha''_a} \left( 1 - \frac{\xi''}{c_1 \cos \alpha_1} \right). \quad (20)$$



Aus der Addition dieser beiden Gleichungen nach Division durch  $2 \cos \alpha_1$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{l_a}{l_1} \left[ \frac{a' \varrho'_a}{t \varrho_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha'_a} \left( 1 - \frac{\xi'}{c_1 \cos \alpha_1} \right) + \frac{a'' \varrho''_a}{t \varrho_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha''_a} \left( 1 - \frac{\xi''}{c_1 \cos \alpha_1} \right) \right].$$

Diese Glieder ordnen wir so, dass alle Glieder zusammengefasst werden, die weder  $\xi'$  noch  $\xi''$  enthalten, und ebenso diejenigen, in denen die  $\xi$  vorkommen, wobei wir diese aber durch (17) bzw. den analogen Ausdruck für  $\xi''$  ersetzen. Dann kommt

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{l_a}{l_1} \left\{ \frac{a' \varrho'_a}{t \varrho_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha'_a} + \frac{a'' \varrho''_a}{t \varrho_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha''_a} - \frac{1}{c_1 \cos \alpha_1} \left[ \frac{a' \varrho'_a}{t \varrho_1} (c_1 \cos \alpha_1 - c'_a \cos \alpha'_a) + \frac{a'' \varrho''_a}{t \varrho_1} (c_1 \cos \alpha_1 - c''_a \cos \alpha''_a) \right] \right\} \quad (21)$$

Nun sind die in runden Klammern geschriebenen Ausdrücke offensichtlich sehr klein, was besonders klar wird, wenn man den Faktor  $1/c_1 \cos \alpha_1$  noch hineinnimmt, also zum Beispiel die erste runde Klammer

$$\left( 1 - \frac{c'_a \cos \alpha'_a}{c_1 \cos \alpha_1} \right)$$

schreibt. Die beiden runden Klammern in (21) stellen aber nichts anderes als  $\xi'$  und  $\xi''$  dar, haben also nach den durchgeführten Überlegungen ähnliche Beträge und entgegengesetzte Vorzeichen. Weiter sind auch  $a' \varrho'_a$  und  $a'' \varrho''_a$  nicht stark voneinander verschieden. Damit wird also der ganze in eckiger Klammer geschriebene Ausdruck samt dem Faktor  $1/c_1 \cos \alpha_1$  eine Differenz zwischen zwei Grössen an sich sehr kleinen und ähnlichen Betrages, das heisst, er ist vernachlässigbar klein, und es bleibt

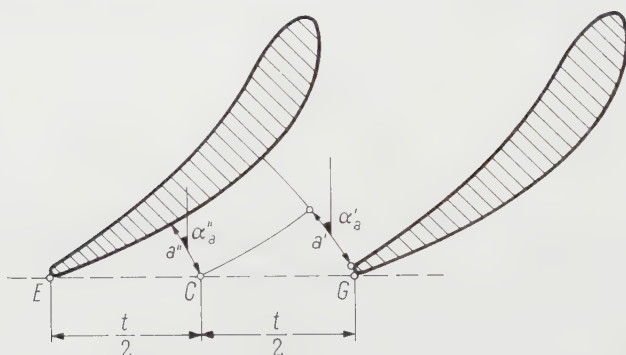
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a' l_a \varrho'_a}{t l_1 \varrho_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha'_a} + \frac{a'' l_a \varrho''_a}{t l_1 \varrho_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha''_a}. \quad (22)$$

Diese Gleichung hat eine anschauliche Bedeutung, die man durch Vergleich mit (9) erkennt, wenn man dort durch  $\cos \alpha_1$  dividiert, so dass links  $\operatorname{tg} \alpha_1$  steht. (22) sagt dann einfach aus, dass man jedes Kontrollgebiet wie früher zu behandeln und dann das arithmetische Mittel zu bilden habe. In der Tat stellt (22) eine arithmetische Mittelung dar. Die in (22) auftretenden Dichteverhältnisse können – wenn überhaupt die Kompressibilität berücksichtigt werden muss, was meist unnötig ist – wieder durch die entsprechenden Ausdrücke (12) wiedergegeben werden.

Für die praktische Ausführung des Verfahrens müsste allerdings noch die genaue Lage C (Figur 3) bekannt sein. Dieser Punkt liegt nicht genau in der Mitte zwischen E und G. Verschiebt man ihn etwas aus seiner wahren Lage, so fälscht man  $a'$  und  $a''$  im entgegengesetzten Sinne. Es ist daher zulässig, C in die Mitte zwischen E und G zu legen; da der Punkt sehr nahe bei der Mitte

liegen wird, kann kein merklicher Fehler entstehen, denn die Fehler der beiden Kontrollgebiete gleichen sich praktisch aus.

Das Verfahren lässt sich wie folgt zusammenfassen. Vom Mittelpunkt  $C$  der Strecke  $EG$  (Figur 4) und ebenso von  $G$  aus fälle man je eine Normaltrajektorie auf den Schaufelrücken. Dann lässt sich weiter von  $C$  aus mit genügender Genauigkeit eine Stromlinie einzeichnen. Mit den so erhaltenen  $a'$ ,  $a''$ ,  $\alpha'_a$ ,  $\alpha''_a$



Figur 4

Festlegung der Bezeichnungen für das erweiterte Rechnungsverfahren.

ergibt sich  $\tan \alpha_1$  aus (22), wobei die Dichteverhältnisse, wenn sie nicht gleich 1 gesetzt werden können, aus

$$\frac{\varrho_a^{(i)}}{\varrho_1} = \left\{ 1 - \mathcal{C}_1^2 \left[ \left( \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_a^{(i)}} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/(\kappa-1)} \quad (23)$$

zu berechnen sind. Bei einiger Sorgfalt werden die Fehler beim Aufzeichnen der Trajektorien nicht gross und wirken sich übrigens praktisch fast nur auf das rechte Kontrollgebiet aus, werden also bei der Mittelung noch halbiert. Dieses verfeinerte Verfahren mit Einteilung in zwei Kontrollgebiete ist für alle Gitter mit nicht ganz ausgesprochen kanalartigem Charakter zu empfehlen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] D. G. AINLEY, *Performance of Axial-Flow Turbines*, Proc. Instn. mech. Engrs. 159, (War Emergency Issue No. 41), 230-244 (1948).
- [2] A. STODOLA, *Dampf- und Gasturbinen*, 5. Aufl. (Berlin 1922).
- [3] W. TRAUPEL, *Die Strahlablenkung in der vollbeaufschlagten Turbine*, Mitt. Inst. Therm. Turbomaschinen ETH, No. 3 (Leemann, Zürich 1956).

#### Summary

A simple method is given for the approximate calculation of the outlet flow angle for cascades of narrow-spaced blades of the type used in steam and gas turbines. The method is based on continuity and momentum equation and may be applied to compressible flow.

(Eingegangen: 31. August 1957.)

## Näherungstheorien für die Berechnung von Strömungsgrenzschichten

VON ALFRED WALZ, Emmendingen (Bd), Deutschland<sup>1)</sup>

### Einleitung

Die Basis aller Theorien für zähe kompressible Strömungen sind bekanntlich die *Navier-Stokes-Gleichungen* (1, 2<sup>2)</sup>), aus denen sich für den technisch wichtigsten Sonderfall der Strömung mit kleiner Zähigkeit die wesentlich einfachere *Prandtlsche Grenzschicht-Gleichung* [3] herleiten lässt.

Jedoch auch diese Gleichung ist noch verhältnismässig schwierig zu behandeln, und bis vor kurzem waren nur wenige Sonderfälle laminarer Grenzschicht, wie zum Beispiel die Strömung an der ebenen Platte, die Strömung gegen einen Keil ( $U \sim x^m$ ) und die linear verzögerte Strömung ( $U = 1 - x$ ), streng zu lösen.

Man war daher schon immer bemüht, das allgemeine Problem einer zähen kompressiblen Strömung mit Druckanstieg in Strömungsrichtung wenigstens näherungsweise zu lösen, vor allem um die in der praktischen Luftfahrttechnik anfallenden Fragen bezüglich des Zusammenhangs zwischen Strömungsablösung und Profilform zumindest grob bei erträglichem Zeitaufwand beantworten zu können.

Besonders fruchtbringend im Hinblick auf die Entwicklung solcher Näherungstheorien war der Gedankengang von v. KÁRMÁN und POHLHAUSEN [4, 5], der darauf beruht, die Prandtlsche Grenzschichtgleichung nicht mehr punktweise, sondern nur noch im Mittel über die Grenzschichtdicke zu erfüllen. Dabei musste allerdings die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Grenzschicht als eine einparametrische Kurvenschar vorgegeben werden, die der physikalischen Wirklichkeit nach dem Vorbild exakter Rechnungen (im laminaren Fall) oder von Messungen (im turbulenten Fall) anzupassen war.

Solche Verfahren funktionieren erstaunlich gut, vor allem, seitdem K. WIEGHARDT [6] zu dem *gemittelten Impulssatz*, den schon v. KÁRMÁN und POHLHAUSEN benützten, einen *gemittelten Energiesatz* hinzufügte und ROTTA

<sup>1)</sup> Institut für Strömungslehre und Strömungsmaschinen der Technischen Hochschule Karlsruhe und Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V. (DVL), Institut Freiburg i. Br.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 708.

[7, 8] und LUDWIG-TILLMANN [9] für die turbulente Grenzschicht einen universellen Zusammenhang zwischen Dissipation, Wandschubspannung, Reynoldsscher Zahl und Formparameter des turbulenten Geschwindigkeitsprofils feststellen konnten.

Alle diese wesentlichen Fortschritte waren jedoch auf *inkompressible Strömung ohne Wärmeübergang* an der Wand beschränkt.

In der vorliegenden Arbeit werden die Grundzüge einer Verallgemeinerung dieser Verfahren auf den Fall einer kompressiblen Strömung mit Wärmeübergang dargelegt.

Ausserdem werden darin die Grundgedanken einer weiteren Verallgemeinerung angedeutet, die in der Richtung geht, dass Druckunterschiede innerhalb der Grenzschicht berücksichtigt werden können. Dieser Fall liegt zum Beispiel im Bereich von Verdichtungsstössen vor, wo der Druckgradient senkrecht zur Wand die Grössenordnung der Druckgradienten in Strömungsrichtung erreichen kann.

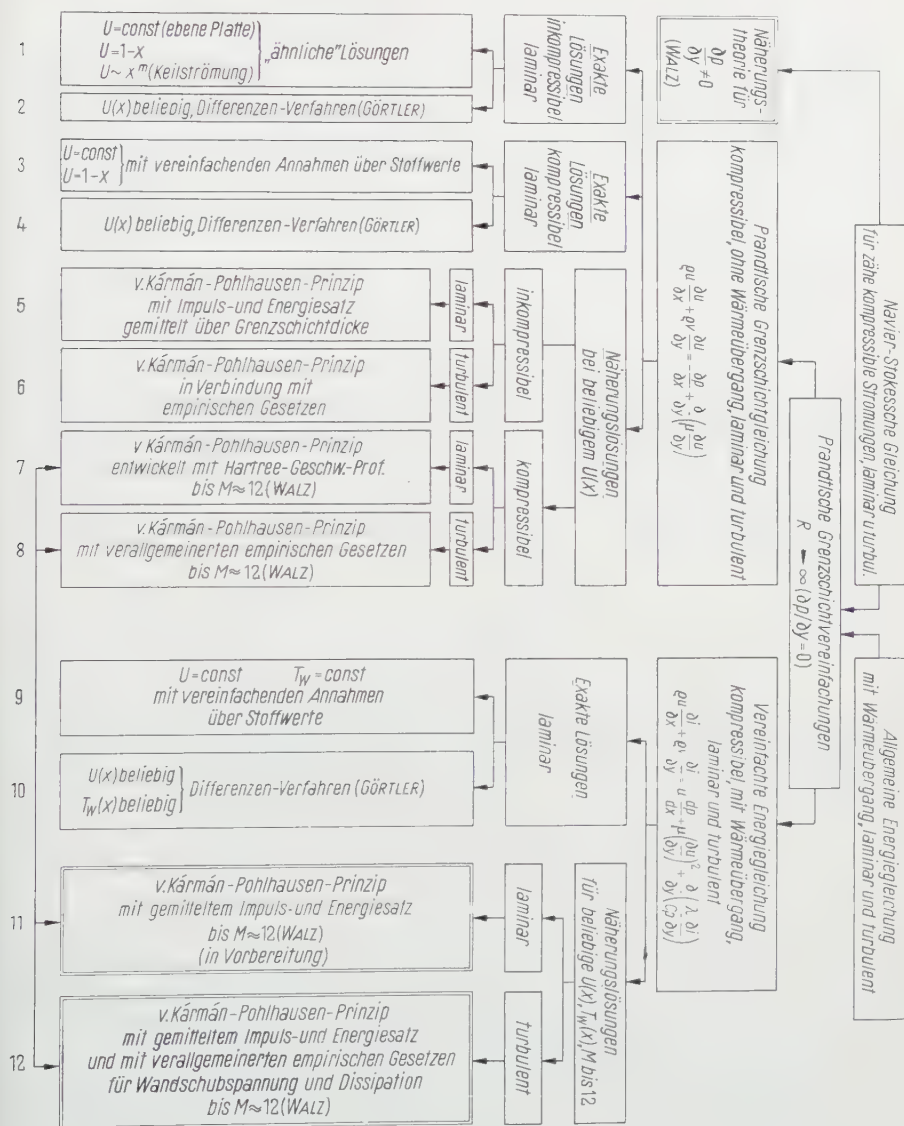
Bevor jedoch auf Einzelheiten der darzustellenden Näherungstheorien eingegangen wird, sei anhand eines Übersichtsbildes gezeigt, an welcher Stelle sich die zu behandelnden Näherungstheorien in das allgemeine Feld der schon vorhandenen Grenzschichttheorien einordnen.

Figur 1 lässt erkennen, wie sich aus den Navier-Stokesschen Gleichungen für eine zähe kompressible Strömung und aus der allgemeinen Energiegleichung durch die üblichen Prandtlschen Grenzschichtvereinfachungen einerseits die *Prandtl'sche Grenzschichtgleichung*, andererseits eine *vereinfachte Energiegleichung* ergeben.

Diese beiden Gleichungen (hier angeschrieben für den Fall einer zweidimensionalen stationären Strömung) bilden dann die Grundlage für alle bis jetzt bekannten *exakten* und *angenäherten* Lösungen für die Reibungs- und Temperaturgrenzschicht.

Exakte Lösungen sind, wie schon erwähnt, bis jetzt nur für die laminare Grenzschicht und da auch nur für spezielle Fälle geglückt. Diese Lösungen sind vor allem mit den Namen BLASIUS, BUSEMANN, CHAPMAN, CROCCO, HARTREE, HOWARTH, LEGENDRE, ROY und RUBESIN verknüpft. Eine besondere Stellung nehmen dabei die vor allem von H. GÖRTLER [14, 15] entwickelten Verfahren ein, die mit Differenzgleichungen oder mit Reihenentwicklungen arbeiten. Diese Verfahren führen für sehr allgemeine Aufgabenstellungen  $U(x)$  bei genügendem Aufwand (ausreichend kleiner Schrittgrösse oder genügend grosser Gliederzahl) zu Lösungen, die ebenfalls als exakt anzusehen sind.

Während die exakten Lösungsmethoden darauf hinausgehen, das Geschwindigkeitsprofil ( $u/U$ ) und (bei Problemen mit Wärmeübergang an der Wand) auch das Temperaturprofil ( $T/T_0$ ) Punkt für Punkt zu ermitteln (Lösung durch Transformation der Variablen und Einführung einer Stromfunktion), werden bei den Näherungsmethoden Geschwindigkeits- und Tempe-



Figur 1

Übersicht über Grenzschicht-Theorien.<sup>3)</sup>

<sup>3)</sup> Unter «exakte Lösungen» (2 und 4) sind neuerdings auch die mit einer neuen Reihenentwicklung arbeitenden Verfahren von H. GÖRTLER [15] einzuordnen, anwendbar für beliebig monoton mit  $x$  sich änderndes  $U$ .



raturprofil als gegeben vorausgesetzt und gemittelte Bedingungen für Impuls und Energie innerhalb der Grenzschicht aufgestellt.

Diese Näherungsmethoden, deren Grundgedanke auf v. KÁRMÁN und POHLHAUSEN [4, 5] zurückgeht (1921), sind vor allem für die Behandlung der turbulenten Grenzschicht unentbehrlich geworden und sind heute der einzige Weg, um das wichtige Gebiet der kompressiblen turbulenten Grenzschichtvorgänge ohne und mit Wärmeübergang einer (wenn auch nur näherungsweise) rechnerischen Untersuchung zugänglich zu machen.

Die Arbeiten des Verfassers, über die hier kurz berichtet werden soll, betreffen besonders das zuletzt genannte Gebiet und ordnen sich in das Übersichtsbild (Figur 1) für die Grenzschichttheorien an der angedeuteten Stelle ein.

Ausserdem soll hier eine weitere Näherungstheorie für die Grenzschichtentwicklung bei Druckgradienten senkrecht zur Wand, wie sie im Bereich von Verdichtungsstössen beobachtet werden, in groben Zügen skizziert werden. Bei dieser Theorie muss natürlich auf die Prandtlschen Grenzschichtvereinfachungen verzichtet und unmittelbar an die Navier-Stokesschen Gleichungen angeknüpft werden.

## 2. Näherungstheorie für kompressible turbulente Grenzschicht mit Wärmeübergang

Wir beginnen mit der Darstellung der Näherungstheorie für kompressible turbulente Grenzschicht mit Wärmeübergang an der Wand.

Ausgangspunkt bildet die Prandtlsche Grenzschichtgleichung für ebene stationäre Strömung

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1)$$

in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

und der allgemeinen Energiegleichung

$$\varrho u \frac{\partial i}{\partial t} + \varrho v \frac{\partial i}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial i}{\partial y} \right), \quad (3)$$

$$i = c_p T. \quad (4)$$

$\lambda$  ist die Wärmeleitzahl,  $c_p$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck,  $x$  die Koordinate parallel zur beströmten Wand,  $y$  die Koordinate senkrecht dazu,  $u$  die Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung,  $v$  die Geschwindigkeitskomponente in  $y$ -Richtung.



Durch partielle Integration in  $y$ -Richtung können wir nun aus Gleichung (1) eine über die Grenzschichtdicke gemittelte Impulsbedingung und aus Gleichung (3) eine entsprechende Energiebedingung herleiten. Beides sind gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung, mit denen wir grundsätzlich zwei Grenzschichtunbekannte zu gegebenen Verläufen  $M_\delta^*(x)$  und  $T_w(x)$  berechnen können.

Die Schreibweise dieser beiden Gleichungen wird besonders einfach, wenn wir als Unbekannte einführen

$$1. \quad z = \delta_2 \left( \frac{\varrho \delta U \delta_2}{\mu_w} \right)^n = \delta_2 R^n, \quad (5)$$

$$R = \frac{\varrho \delta U \delta_2}{\mu_w}. \quad (6)$$

( $n$  - Exponent der Reynoldsschen Zahl  $R$  im Wandschubspannungsgesetz von LUDWIG-TILLMANN):

$$\frac{\tau_w}{\varrho \delta U^2} = \frac{z(H)}{R^n}. \quad (7)$$

$$2. \quad H^* = - \frac{\delta_4 / \delta_2}{\alpha - \frac{1}{2} - M_\delta^2}, \quad (8)$$

$$H_{M_\delta=0}^* = \left( \frac{\delta_3}{\delta_2} \right)_i = H$$

( $H$  = gewählter Formparameter des Geschwindigkeitsprofiles).

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  sind Integralgrößen, definiert in [10]. Dann kann man nämlich schreiben:

$$\frac{dz}{dx} + z \frac{dM_\delta^*/dx}{M_\delta^*} - F_1 - F_2 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{dH^*}{dx} - H^* \frac{dM_\delta^*/dx}{M_\delta^*} - F_3 - \frac{F_4}{z} = 0, \quad (10)$$

gültig für *laminare und turbulente* Grenzschicht, inkompressibel und kompressibel, ohne und mit Wärmeübergang an der Wand.

$F_1, F_2, F_3, F_4$  und  $H^*$  sind dabei Funktionen von  $H, M_\delta^*$  und (bei Wärmeübergang an der Wand) ausserdem von einem Wärmeübergangsparameter  $\theta$  und sind universell auswertbar, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Geschwindigkeitsprofile  $u/U$  als einparametrische Schar vorgegeben,  $H$  als Scharparameter, bei turbulenter Grenzschicht mit Potenzansatz:

$$\frac{u}{U} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\gamma(H)}, \quad (11)$$

$$\gamma = \frac{2-H}{3H-4}. \quad (12)$$

2. Temperaturprofile  $T/T_\delta$  vorgegeben, zum Beispiel mit bekannter exakter Lösung für die ebene Platte (als Näherung für den allgemeinen Fall  $dp/dx \neq 0$ ):

$$\frac{T}{T_\delta} = \frac{\varrho_\delta}{\varrho} = 1 + r \frac{\kappa - 1}{2} M_\delta^2 \left[ \frac{\theta}{r} (f_1 - 1) + 1 - f_2 \right] \quad (13)$$

mit

$$\frac{\theta}{r} = \frac{(T_r - T_w)/T_\delta}{r \frac{\kappa - 1}{2} M_\delta^2}, \quad (14)$$

$$r = \frac{T_r - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad (15)$$

$T_w$  Wandtemperatur (im jeweils betrachteten Integrationsabschnitt als konstant angenommen);  $T_r$  Eigentemperatur;  $f_1$  und  $f_2$  bekannte Funktionen von  $u/U$  und  $\tau/\tau_w$ .

3. Schubspannungsverteilung  $\tau/\tau_w$  in der turbulenten Grenzschicht darstellbar (nach J. ROTTA [8]) als Potenzreihe:

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 + a_1 \frac{y}{\delta} + a_2 \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 + a_3 \left( \frac{y}{\delta} \right)^3, \quad (16)$$

$$a_1 = 140 \gamma(H) - 20, \quad a_2 = -280 \gamma(H) + 37, \quad a_3 = 140 \gamma(H) - 18. \quad (17)$$

4. Turbulente Wandschubspannung  $\tau_w$  darstellbar durch Näherungsansatz, gültig bis etwa  $M_\delta = 10$  (nach A. WALZ [10]):

$$\frac{\tau_w}{\varrho_\delta U^2} = \left( \frac{\tau_w}{\varrho_\delta U^2} \right)_i \frac{\delta_2}{(\delta_2)_i} \quad (i = \text{inkompressibel}). \quad (18)$$

5. Turbulente Dissipation  $D$ , darstellbar durch Näherungsansatz, gültig bis etwa  $M_\delta = 10$  (nach A. WALZ [10]):

$$\frac{D}{\varrho_\delta U^3} = \left( \frac{D}{\varrho_\delta U^3} \right)_i \frac{\delta_2}{(\delta_2)_i} \left( \frac{\mu_{\text{mittel}}}{\mu_w} \right)^m \quad (m = 0,168). \quad (19)$$

Die Funktionen  $F_1$  bis  $F_4$  wurden auf dieser Basis zunächst für turbulente Grenzschicht ausgewertet für einen praktisch interessierenden Wertebereich der Machschen Zahl (bis  $M_\delta \approx 10$ ), der Reynoldsschen Zahl  $R = \varrho_\delta U \delta_2 / \mu_w$  (bis  $10^6$ ) und des Wärmeübergangsparameters  $\theta/r$  (von  $-1$  bis  $+1$ ).

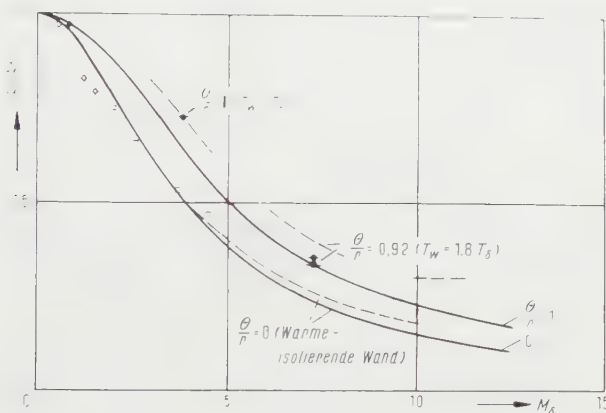
Dabei zeigte sich das etwas überraschende Ergebnis, dass der Einfluss des Wärmeüberganges auf diese Funktionen durch ein additives, dem Parameter  $\theta/r$  proportionales Glied ausgedrückt werden kann. Es ist also eine Darstellung dieser Funktionen in der Form

$$F_v \left( H, M_\delta^*, \frac{\theta}{r} \right) \approx F_v \left( H, M_\delta^*, \frac{\theta}{r} = 0 \right) + \frac{\theta}{r} a_v(H, M_\delta^*) \quad (20)$$

möglich, die für praktische Rechnungen besonders bequem ist.

In den Figuren 2, 3 und 4 sind Ergebnisse dieser Theorien, und zwar Reibungsbeiwerte der ebenen Platte ohne und mit Wärmeübergang an der Wand mit verfügbaren Messungen verglichen (aus CHAPMAN-KESTER [11]).

Figur 2 zeigt den örtlichen Reibungsbeiwert  $c_f$ , bezogen auf den Wert  $c_{f,i}$  bei inkompressibler Strömung (und gleicher örtlicher Reynoldsscher Zahl  $R$ ),



Figur 2

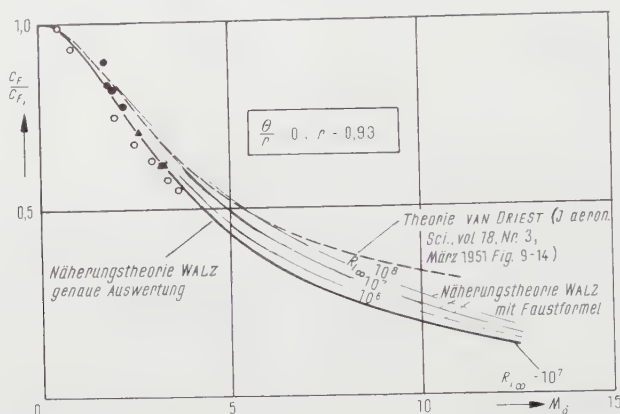
Örtlicher Reibungskoeffizient  $c_f$  einer turbulenten Grenzschicht, bezogen auf den berechneten Wert  $c_{f,i}$  bei inkompressibler Strömung und beim gleichen Wert  $R = \frac{\rho_\delta U_\delta \delta_2}{\mu_w} \cdot c_{f,i} c_{f,i}$  ist aufgetragen in Funktion der Mach-Zahl  $M_\delta$ , mit  $\theta/r$  als Wärmeübertragungs-Parameter. Vergleich zwischen Theorie (ausgezogene und gestrichelte Kurve) und Messungen (Punkte).

□ LIEPMANN-DHAWAN  $R_{l\infty} = 10^6$ ; □ COLES  $R_{l\infty} = 8 \cdot 10^6$ ; ● ABBOTT  $R_{l\infty} = 5 \cdot 10^6$ ;  
 — Näherungstheorie WALZ mit  $r = 0,93 \approx \sqrt[3]{P_r}$ ,  $Re_{\delta_2} = 10^4$ ; --- Näherungstheorie ECKERT  
 mit  $r = \sqrt[3]{P_r}$  [12].

abhängig von der Machschen Zahl für zwei Werte des Wärmeübergangsparameters  $\theta/r$ , und zwar für  $\theta/r = 0$  (wärmeisolierte Wand) und  $\theta/r = 1$  ( $T_w = T_\delta$ , entsprechend einer starken Kühlung der Wand). Man erkennt, dass die Theorie (ausgezogene Kurven) mit den Messergebnissen recht gut übereinstimmt. Gestrichelt ist noch eine Näherungstheorie von ECKERT [12] eingetragen, über die jedoch Einzelheiten noch nicht veröffentlicht wurden.

In Figur 3 sind entsprechende Ergebnisse für den Gesamtreibungsbeiwert  $C_F$  der ebenen Platte, bezogen auf den zugehörigen Wert  $C_{F,i}$  bei inkompressibler Strömung, wiedergegeben, hier allerdings nur für den Fall ohne Wärmeübergang, da Vergleichsmessungen nur für diesen Fall zur Verfügung standen. Die Ergebnisse der Theorie sind wiederum als ausgezogene Kurven dargestellt: dick ausgezogen die genaue Auswertung der Theorie für  $R_{l\infty} = 10^7$ ; auch hier ist gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung festzustellen. Dünn ausgezogen sind Ergebnisse von Faustformeln, die für rasche Abschätzungen

aus der Theorie abgeleitet wurden. Parameter der theoretischen Kurven ist die mit der Plattenlänge gebildete Reynoldssche Zahl  $R_{l\infty}$ . Es ergibt sich eine leichte Zunahme von  $C_f/C_{fi}$  mit wachsender Reynoldsscher Zahl  $R_{l\infty}$  (einige Prozent Zunahme, wenn  $R_{l\infty}$  um eine Zehnerpotenz zunimmt), die sich auch in den Messergebnissen von CHAPMAN und KESTER [11] andeutet.



Figur 3

Gesamt-Reibungsbeiwert  $C_F$  der ebenen Platte für turbulente Grenzschicht, bezogen auf den Wert  $C_{Fi}$ , bei inkompressibler Strömung und bei gleicher Reynoldsscher Zahl  $R_{l\infty} = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty$ . Die gezeichneten Werte  $C_F/C_{Fi}$  sind als Funktion der Machschen Zahl  $M_\delta$  aufgetragen mit  $R_{l\infty}$  als Parameter. Es ist wärmeisolierte Wand ( $\theta/r = 0$ ) angenommen.

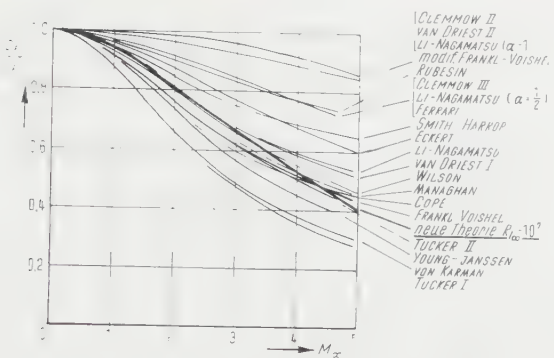
Dick ausgezogene Kurve: genaue Auswertung der Näherungstheorie; dünn ausgezogene Kurven: gerechnet mit Faustformel für Näherungstheorie. Verschiedene Messergebnisse sind zum Vergleich als Punkte eingetragen.

○ CHAPMAN-KESTER  $R_{l\infty} = 6 \div 16 \cdot 10^6$  ● WILSON  $R_{l\infty} = 10^7$ ;  
 ▲ RUBESIN-M.-VARGA  $R_{l\infty} = 7 \cdot 10^6$ ; ■ BRINCH-DIAGONIS  $R_{l\infty} = 3 \div 18 \cdot 10^6$ .

Figur 4 ist der soeben erwähnten Veröffentlichung [11] entnommen und durch das Ergebnis unserer Theorie für  $C_F/C_{Fi}$  bei  $R_I = 10^7$  ergänzt.

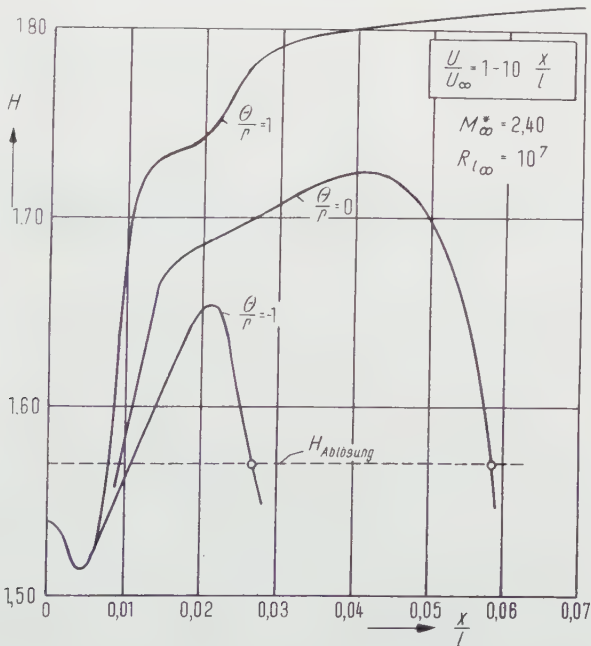
Diese Figur lässt die grosse Unsicherheit in der theoretischen Behandlung dieser Aufgabe erkennen, wenn (wie bisher) nur der gemittelte Impulssatz benutzt wird. Unsere neue Theorie scheint diese Unsicherheit zu vermeiden durch die gleichzeitige Benützung eines gemittelten Energiesatzes in Verbindung mit einer passend definierten örtlichen Reynoldsschen Zahl  $R$  nach Gleichung (6), sowie mit verallgemeinerten Gesetzen für Wandschubspannung und Dissipation (18) und (19).

In den Figuren 5 und 6 ist (ohne Vergleichsmöglichkeit mit Messungen) der errechnete Einfluss einer Kühlung oder Heizung der Wand auf den turbulenten Ablösepunkt bei der Machschen Zahl  $M_\delta^* = 2,40$  ( $M_\delta \approx 12$ ) in stark verzögerter Strömung ( $U/U_\infty = 1 - 10 x/l$ ) dargestellt. Es ist in Figur 5 der Formparameter  $H$  des Geschwindigkeitsprofils über der Lauflänge  $x/l$  aufge-



Figur 4

Quotient  $C_F/C_{Fi}$  einer turbulenten Grenzschicht in Funktion der Mach-Zahl  $M_\delta = M_\infty$ . Zusammenstellung der Ergebnisse der verschiedenen Theorien nach CHAPMANN-KESTER [11]. Neue Theorie: dick ausgezogene Kurve,  $R_{l\infty} = 10^7$ .

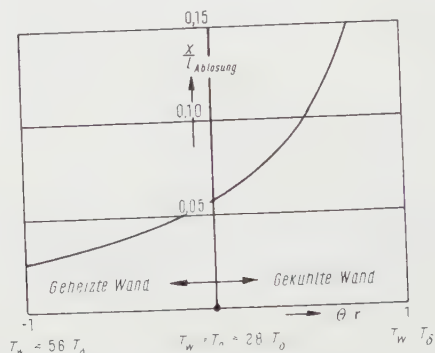


Figur 5

Verschiebung des turbulenten Ablösungspunktes in Funktion der Wärmeübertragung an die Wand bei einer Mach-Zahl  $M_\delta^* = 2,40$  ( $M_\delta \approx 12$ ),  $R_{l\infty} = 10^7$  in verzögerter Strömung  $U/U_\infty = 1 - 10 x/l$  ( $H_{Ablösung} = 1,57$ ).

tragen. Ablösung ist zu erwarten, wenn  $H$  den Wert 1,57 unterschreitet. Man erkennt, dass bei  $\theta/r \approx 1$  ( $T_w = T_\delta$ , starke Kühlung) überhaupt keine Ablösung eintritt, während bei  $\theta/r \approx -1$  (starke Heizung) der Ablösepunkt stark nach vorne wandert.

Zur Veranschaulichung dieses Ergebnisses sind in Figur 6 die errechneten Ablösepunkte  $x/l$  über  $\theta/r$  aufgetragen.



Figur 6

Ablösepunkt  $(x/l)_{\text{Ablösung}}$  in Funktion des Wärmeübertragungsparameters  $\theta/r$ .

Verschiebung des turbulenten Ablösepunktes in Funktion der Wärmeübertragung an die Wand für eine Mach-Zahl  $M_\delta^* = 2,40$  ( $M_\delta \approx 12$ ),  $R_{l\infty} = 10^7$  in verzögerter Strömung  $U/U_\infty = 1 - 10 x/l$  ( $H_{\text{Ablösung}} = 1,57$ ).

Durch Kühlung der Wand wird offenbar die kinetische Energie der wandnahen Grenzschichtbereiche vergrößert, so dass die Grenzschicht grössere Druckanstiege überwinden kann. Bei Heizung der Wand tritt eine entgegengesetzte Wirkung ein.

Der Zeitaufwand zur Durchführung solcher Rechnungen ist bei Benützung der entwickelten graphischen Hilfsmittel und Rechenschemen nur wenig grösser als für Rechnungen ohne Wärmeübergang.

### 3. Näherungstheorie mit Berücksichtigung eines Druckgradienten senkrecht zur Wand ( $\partial p / \partial y \neq 0$ )

Es ist ein Kennzeichen der Prandtl'schen Grenzschichtvereinfachungen, dass  $\partial p / \partial y = 0$  gesetzt wird. Zur Behandlung des allgemeinen Falles einer Grenzschicht mit  $\partial p / \partial y \neq 0$  müssen wir daher unmittelbar an die Navier-Stokesschen Gleichungen anknüpfen:

$$\left. \begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (20)$$



$$\left. \begin{aligned} \varrho u \frac{\partial v}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial v}{\partial y} \\ = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Da eine strengere Lösung dieser Gleichungen natürlich noch schwieriger als die der Prandtlschen Grenzschichtgleichung (1) erscheint, wurde eine Näherungslösung in der Richtung versucht, dass die Aussage dieser Gleichungen nach dem Grundprinzip von v. KÁRMÁN-POHLHAUSEN durch eine partielle Integration in  $y$ -Richtung gemittelt wurde.

Man kann damit aus diesen zwei partiellen Differentialgleichungen zunächst mindestens je zwei gemittelte Impuls- und Energiesätze, also insgesamt mindestens 4 gewöhnliche Differentialgleichungen ableiten, die zur Bestimmung von 4 Grenzschichtunbekannten bei vorgegebenem Verlauf von  $M_\delta^*(x)$  dienen können<sup>4)</sup>.

Es liegt nahe, zur weiteren Vereinfachung des Problems wieder einparametrische Geschwindigkeitsprofile einzuführen und als Grenzschichtunbekannte zumindest wieder die Grenzschichtdicke  $\delta$  bzw. die Grösse  $z$  nach Gleichung (5) und den Formparameter  $H$  einzuführen.

Als dritte Unbekannte bietet sich der Druckunterschied  $\Delta p$  zwischen der Wand [Druck  $p(x, 0)$ ] und dem Rand der Grenzschicht [Druck  $p(x, \delta)$ ] an:

$$\Delta p(x) = p(x, 0) - p(x, \delta) . \quad (22)$$

Die Theorie wurde zunächst auf der Basis dieser 3 Unbekannten mit nur drei Gleichungen entwickelt. Für  $p(x, y)$  wurde dabei ein linearer Verlauf senkrecht zur Wand vorausgesetzt:

$$p(x, y) \approx p(x, \delta) - \frac{\Delta p(x)}{\delta(x)} (\delta - y) . \quad (23)$$

Die drei Gleichungen können dann auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{dz}{dx} + z \frac{dM_\delta^*/dx}{M_\delta^*} F_1 - F_2 = C_2(H, z/\delta, M_\delta^*, \delta_\nu/\delta \dots) , \quad (24)$$

$$\frac{dH^*}{dx} + H^* \frac{dM_\delta^*/dx}{M_\delta^*} F_3 - \frac{F_4}{z} = C_4(H, z/\delta, M_\delta^*, \delta_\nu/\delta \dots) , \quad (25)$$

$$\frac{\Delta p}{\varrho \delta U^2} = \frac{\Delta p}{\varrho \delta U^2} (H, z/\delta, M_\delta^*, \delta_\nu/\delta \dots) . \quad (26)$$

<sup>4)</sup> Durch dieses Prinzip der partiellen Integrationen kann aus den Navier-Stokesschen Gleichungen oder auch aus der Prandtlschen Grenzschichtgleichung ein simultanes System unendlich vieler gewöhnlicher Differentialgleichungen mit unendlich vielen Unbekannten erzeugt werden. Jedoch nur zwei Gleichungen davon, nämlich Impuls- und Energiesatz, sind physikalisch anschaulich. Die Berücksichtigung weiterer Gleichungen dieses Systems bringt ohne Zweifel eine bessere Annäherung an die exakte Lösung. Grundsätzliche Untersuchungen in dieser Richtung sind im Gange.

Die ersten beiden Gleichungen, (24) und (25), unterscheiden sich, wie man sieht, von den Gleichungen (9) und (10) der normalen Näherungstheorie nur dadurch, dass auf der rechten Seite nicht Null, sondern Korrekturglieder  $C_2$  bzw.  $C_4$  stehen. Diese stellen nichts anderes dar als den über die Grenzschichtdicke  $\delta$  gemittelten Unterschied zwischen der Prandtl'schen Grenzschichttheorie und der strengen Navier-Stokesschen Theorie.

In diesen Korrekturgliedern sowie in dem Ausdruck für  $\Delta p / \rho_\delta U^2$  sind insgesamt etwa 20 universelle Integralausdrücke  $\delta_v$  nach Art der schon bekannten Ausdrücke  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  enthalten, die sich unter der Voraussetzung leicht auswerten lassen, dass die Korrekturen  $C_2, C_4, \Delta p / \rho_\delta U^2$  relativ klein sind.

Eine solche Auswertung wurde für laminare und turbulente Grenzschicht (Hartree- und Potenzprofile) bis zu  $M_\delta^* = 2,40$  ( $M_\delta \approx 12$ ) durchgeführt.

Zur Lösung des Gleichungssystems (24), (25), (26) kann man ein iteratives Verfahren versuchen, solange  $C_2, C_4$  und  $\Delta p / \rho_\delta U^2$  klein sind gegenüber den Funktionen  $F_2$  und  $F_4$ , beginnend mit  $C_2 = 0, C_4 = 0, \Delta p / \rho_\delta U^2 = 0$ .

Ein solches Verfahren wurde an einigen Beispielen erprobt, bei denen aus systematischen Gründen eine verzögerte Strömung vom Typ

$$U(x) = 1 - ax \quad (27)$$

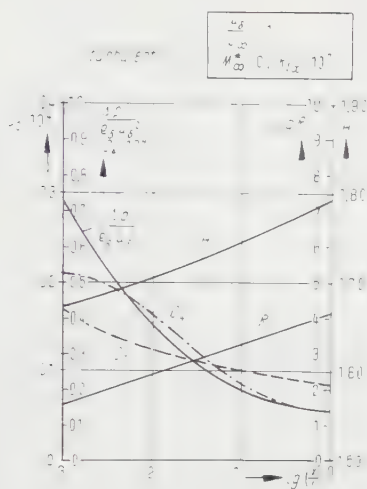
angesetzt wurde.

$a = 0$  ergibt den Fall der ebenen Platte,  $a = 100$  eine Strömung mit starkem Druckanstieg in Strömungsrichtung von der Grössenordnung der Druckanstiege, wie sie im Bereich von Verdichtungsstössen beobachtet werden.

Der Vollständigkeit halber wurde auch der Fall der ebenen Platte,  $a = 0$ , in die Reihe der durchgerechneten Beispiele einbezogen. Da in diesem Fall bei grosser Reynoldsscher Zahl die Gültigkeit der Prandtl'schen Grenzschichttheorie bestens bewiesen ist, müssen sich die Korrekturen  $C_2, C_4$  und  $\Delta p / \rho_\delta U^2$  als vernachlässigbar klein herausstellen. Aus Figur 7 ist zu ersehen, dass dies tatsächlich zutrifft. Ein Einfluss dieser Korrekturen ergäbe sich erst, wenn sie die Grössenordnung  $10^{-2}$  überschreiten würden. Tatsächlich sind diese Werte aber kleiner als  $10^{-3}$ .

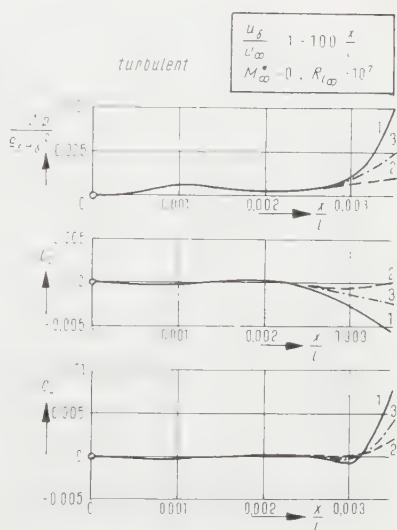
Zur Vorderkante der Platte zu nehmen jedoch diese Korrekturen zu, wie dies wegen der mit  $x$  abnehmenden Reynoldsschen Zahl zu erwarten ist. Die Zunahme der Korrektur  $C_4$  lässt es sogar möglich erscheinen, dass in unmittelbarer Nähe der Vorderkante Strömungsablösung eintritt. Dieses Problem konnte jedoch noch nicht näher untersucht werden.

Im Beispiel  $a = 100$  erreichen die Korrekturgrössen schon eine kritische Grössenordnung, wie aus den Figuren 8 und 9 zu ersehen ist. Sie sind jedoch noch so klein gegenüber den Hauptfunktionen  $F_2$  und  $F_4$ , dass das Iterationsverfahren, wie ebenfalls aus den Figuren 8 und 9 zu erkennen ist, noch funktioniert.



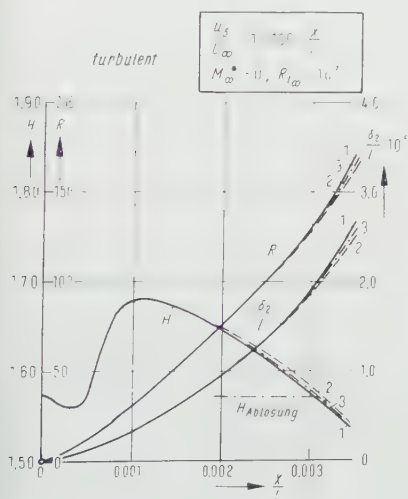
Figur 7

Ebene Platte. Korrekturglieder  $C_2$ ,  $C_4$  und  $\Delta p/\rho U^2$  der neuen Theorie, in Funktion von  $\lg(x/l)$ .



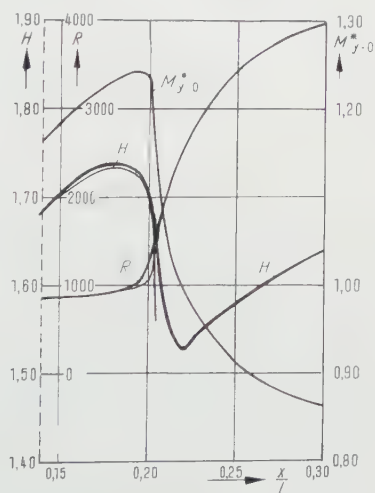
Figur 8

Korrekturglieder  $C_2$ ,  $C_4$  und  $\Delta p/\rho U^2$  der neuen Theorie, in Funktion von  $x/l$ ; 1., 2. und 3. Näherung. Beispiel einer stark verzögerten Strömung.  $U/U_\infty = 1 - 100 x/l$ ;  $M_\delta = 0$ ;  $R_{l\infty} = 10^7$ , turbulente Grenzschicht.



Figur 9

Berechnete Grenzschichtwerte  $H$ ,  $R$  und  $\delta_2$  in Funktion von  $x/l$  (1., 2. und 3. Näherung), berechnet mit den Korrekturgliedern aus Figur 8. Beispiel einer stark verzögerten Strömung.  $U/U_\infty = 1 - 100 x/l$ ;  $M_\delta = 0$ ;  $R_{l\infty} = 10^7$ , turbulente Grenzschicht.



Figur 10

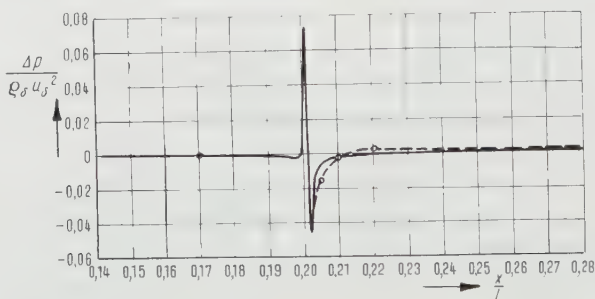
Dick ausgezogen: Messwerte; dünn ausgezogen: 1. Näherung der neuen Theorie,  $H(x)$ ,  $R(x)$ . Turbulente Grenzschicht im Bereiche eines Verdichtungsstosses nach ACKERET, FELDMANN und ROTT [13].

Als wichtigstes Beispiel wurde die Grenzschicht in einem tatsächlichen Verdichtungsstossbereich, für den eine Messung von ACKERET, FELDMANN und ROTT [13] als Vergleich zur Verfügung stand, mit Hilfe der neuen Näherungstheorie rechnerisch untersucht. Aus dieser Messung konnten experimentelle Werte für  $M_{y=0}^*(x)$ ,  $R(x) = \varrho_\delta U \delta_2/\mu_w$ ,  $H(x)$  und  $\Delta p/\varrho_\delta U^2(x)$  entnommen werden (siehe Figur 10).

Bei diesen Rechnungen zeigte es sich, dass die Korrekturgrössen  $C_2$ ,  $C_4$  und  $\Delta p/\varrho_\delta U^2$  so gross werden, dass eine iterative Lösung des Gleichungssystems (24), (25), (26) nicht mehr möglich ist. Da aber diese Gleichungen bei Bewertung der Korrekturen als Hauptgrössen Ableitungen bis zu 3. Ordnung der Unbekannten enthalten (die Glieder mit Ableitungen 3. Ordnung können notfalls vernachlässigt werden), müssen gewöhnliche Differentialgleichungen von mindestens 2. Ordnung gelöst werden.

Eine Verbesserung der Theorie in dieser Richtung konnte bis jetzt noch nicht in Angriff genommen werden.

Um prüfen zu können, ob wenigstens die Grössenordnung des Druckunterschiedes  $\Delta p/\varrho_\delta U^2$  innerhalb der Grenzschicht von der neuen Theorie richtig wiedergegeben wird, wurde diese Grösse unter Umgehung des Iterationsverfahrens aus den gemessenen Verläufen  $H(x)$  und  $R(x)$  nach Gleichung (26) berechnet und in Figur 11 mit den verfügbaren Messpunkten (leere Kreise) verglichen. Die grössenordnungsmässige Übereinstimmung bestätigt sich.



Figur 11

Druckunterschied  $\Delta p/\varrho_\delta U^2$  zwischen Wand und Grenzschichttrand.

Dick ausgezogen: theoretische Rechnungen auf Grund gemessener Werte  $H(x)$  und  $R(x)$ .

Offene Kreise (gestrichelt verbunden): Messergebnisse.

*Turbulente Grenzschicht im Bereiche eines Verdichtungsstosses nach ACKERET, FELDMANN und ROTT [13].*

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1] M. NAVIER, *Memoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mém. Acad. Sci. 6, 389 (1827).
- 2] G. G. STOKES, *On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion*, Trans. Camb. phil. Soc. 8 (1949).

- [3] L. PRANDTL, *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Vortrag auf dem Heidelberger Mathematiker-Kongress 1904.
- [4] TH. v. KÁRMÁN, *Über laminare und turbulente Reibung*, Z. angew. Math. Mech. 1, 233 (1921).
- [5] K. POHLHAUSEN, *Zur näherungsweise Integration der Differential-Gleichungen der laminaren Reibungsschicht*, Z. angew. Math. Mech. 1, 235 (1921).
- [6] K. WIEGHARDT, *Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten*, Ingen.-Arch. 16, 243 (1948), und interner Bericht des KWJ Göttingen (1944).
- [7] J. ROTTA, *Beitrag zur Berechnung der turbulenten Grenzschichten*, Ingen.-Arch. 19, Heft 1 (1949).
- [8] J. ROTTA, *Schubspannungsverteilung und Energie-Dissipation bei turbulenten Grenzschichten*, Ingen.-Arch. 20, Heft 3 (1952).
- [9] H. LUDWIG und W. TILLMANN, *Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten*, Ingen.-Arch. 17, 288 (1949).
- [10] A. WALZ, *Nouvelle méthode approchée de calcul des couches limites laminaire et turbulente en écoulement compressible*, Publ. sci. techn., Ministère de l'Air, Nr. 309 (1956) und Nr. 336 (1957).
- [11] D. R. CHAPMAN und R. H. KESTER, *Measurements of Turbulent Skin Friction on Cylinders in Axial Flow at Subsonic Velocities*, J. aeron. Sci. 20, Nr. 7 (July 1953).
- [12] E. R. G. ECKERT, *Engineering Relations for Friction and Heat Transfer to Surfaces in High Velocity Flow*, J. aeron. Sci. 22, Nr. 8 (August 1955).
- [13] J. ACKERET, F. FELDMANN und N. ROTT, *Untersuchungen an Verdichtungsstößen und Grenzschichten in schnell bewegten Gasen*, Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH Zürich, Nr. 10 (1946).
- [14] H. GÖRTLER, *Ein Differenzverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten*, Ingen.-Arch. 14, Heft 3/4 [Verbesserung von H. WITTING, Z. angew. Math. Phys. 4, Fasc. 5 (1953)].
- [15] H. GÖRTLER, *A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows*, J. Math. Mech. 6, No. 1 (1957).

### Summary

Calculations of turbulent boundary layers in a compressible flow with heat transfer at the wall require the knowledge of empirical laws for the wall-friction and dissipation valid under these general conditions. An approximate theory is developed which involves a generalization of the empirical wall-friction and dissipation laws well known for the incompressible case to be valid up to about Mach number 10 and arbitrary heat transfer conditions. Universal functions occurring in this theory have been evaluated so that practical calculations may be performed in a short time. Comparisons of theoretical results with experiments show good agreement.

The fundamental idea of deriving averaged boundary layer conditions may also be applied to the complete equations of NAVIER and STOKES, thus creating a fairly simple method of checking or improving the results of PRANDTL's simplified theory, e. g., in cases, where the conditions  $\partial p / \partial y = 0$  and high Reynolds numbers are no longer fulfilled. This approximate theory, however, has so far been advanced to a preliminary state only.

(Eingegangen: 6. Juni 1957.)



# Bewegung und Ansammlung von Ionen und sonstigen Schwebeteilchen in Wirbelströmungen

VON FRIEDRICH WENK, Friedrichshafen a. B., Deutschland<sup>1)</sup>

## Einleitung

Man beobachtet zuweilen, dass kleine, leichte Schwebeteilchen, die sich in einem flüssigen oder gasförmigen Medium unter der Wirkung eines Kraftfeldes bewegen, im Gebiet einer Wirbelströmung dieses Mediums festgehalten oder gar angesammelt werden. Die vorliegende Arbeit versucht, einige dieser Bewegungsvorgänge physikalisch zu erklären in der Absicht, dadurch eine Deutungsmöglichkeit zu schaffen insbesondere für verschiedene luftelektrische Erscheinungen, die bisher noch wenig untersucht wurden.

Angeregt wurde die Untersuchung bereits vor längerer Zeit durch die luftelektrischen Studien von W. KOLHÖRSTER und A. WIGAND und durch strömungsmeteorologische Beobachtungen des Verfassers im Rahmen von nicht-veröffentlichten Arbeiten am Preussischen Aeronautischen Observatorium Lindenberg. Da eine hierauf bezügliche Literaturzusammenstellung durch die Kriegerereignisse verlorenging und da die seitherige Auslandsliteratur dem Verfasser nicht zugänglich war, muss hier auf die Nennung von Literaturstellen verzichtet werden. In der deutschen aerophysikalischen Literatur wurden während der Nachkriegsjahre bisher keine Arbeiten bekannt, die mit dem vorliegenden Problem enger zusammenhängen.

Die im folgenden dargelegte Teiluntersuchung wurde in der Nachkriegszeit durchgeführt, da verschiedene Beobachtungen und Überlegungen aus den Gebieten der atmosphärischen Aerophysik, der Gasentladungen, der Radartechnik und der Staubtechnik ein Interesse an der Untersuchung zu begründen schienen.

## Untersuchung der Bewegungsvorgänge

Die vorliegende Untersuchung betrachtet die Bewegung von kleinen, leichten Schwebeteilchen in einem sie allseitig umgebenden, zusammenhängenden Medium, einer Flüssigkeit oder einem Gas, und zwar im Gebiet einer irgendwie gearteten Wirbelströmung dieses Mediums. Auf diese Schwebeteilchen soll ein Kraftfeld einwirken, das an sich von allen Strömungserscheinungen

<sup>1)</sup> Dornier-Werke GmbH.



unabhängig ist und auch von eventuellen räumlichen Anreicherungen der Schwebekörperchen nicht merklich deformiert wird. Ein solches Kraftfeld kann beispielsweise durch das Erdschwerefeld repräsentiert werden, wenn die Schwebekörperchen ein im Medium gewogenes Gewicht aufweisen, oder durch ein elektrisches Feld, wenn die Körperchen Ladungsträger sind, deren unipolare Konzentration das Feld nicht wesentlich beeinflusst. Auch sind physikalische Fälle denkbar, in denen ein elektromagnetisches Feld die Rolle eines solchen Kraftfeldes übernimmt. Derartige Kraftfelder können sich superponieren. Das resultierende Kraftfeld wird im folgenden als homogen und parallel vorausgesetzt. Seine zeitliche Konstanz wird nur für Sonderfälle angenommen. Die Wirbelströmung wird dagegen der Einfachheit halber als stationär betrachtet. Der Bewegungswiderstand der Schwebekörperchen im Medium möge proportional ihrer Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Medium und zu dieser parallel gerichtet sein, was für kleine Körperchen in allen reibungsbehafteten Medien angenommen werden kann und für kugelförmige Körperchen dem Stokesschen Gesetz entspricht.

Unter diesen Umständen folgt die Bewegung der Schwebeteilchen im Gebiet einer Wirbelströmung eigenartigen räumlichen Bahnen, die den Hauptgegenstand der folgenden Betrachtung bilden.

Die Betrachtung kann sich, zumindest bei Wirbelgebilden mit längerer, schwach gekrümmter Achsenerstreckung, auf eine Ebene beschränken, die senkrecht zur Wirbelachse gerichtet ist. Die verbleibende Feldkomponente parallel zur Wirbelachse ist für die hier zu betrachtenden Vorgänge uninteressant. Der Durchstoss der Wirbelachse durch die Koordinatenebene möge als Koordinatenanfangspunkt gewählt werden. Bei stationärer Wirbelströmung sind demgemäss die Stromlinien des Mediums konzentrische Kreise um den Koordinatenanfangspunkt.

Zur rechnerischen Untersuchung werden folgende Grössen und Grössenbezeichnungen verwendet:

$\mathcal{P}$	Feldkraft;
$\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y$	Feldkraftkomponenten;
$\mathcal{P}_e$	Einheitsfeldkraft;
$v$	Relativgeschwindigkeit der Schwebekörperchen;
$v_x, v_y$	Komponenten der Relativgeschwindigkeit;
$v_e$	Einheitsgeschwindigkeit;
$w$	Geschwindigkeit der Wirbelströmung;
$w_x, w_y$	Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit;
$w_e$	Einheitsgeschwindigkeit der Wirbelströmung;
$w_t$	Tangentialgeschwindigkeit der Wirbelströmung;
$\varrho$	Dichte der Schwebekörperchen;
$\varrho_m$	Dichte des Mediums;
$Q$	Volumen der Schwebekörperchen;

$Q_m$	Volumen der «scheinbaren Masse» des Mediums;
$r$	Radius
$\varphi$	Winkel
$r_e$	Einheitsradius;
$t$	laufende Zeit;
$\tau$	reduzierte laufende Zeit;
$P$	reduzierte Feldkraft;
$R$	reduzierter Radius.

Hiermit ergeben sich zunächst die beiden dynamischen Gleichungen für die Bahn und die Bahnbewegung eines Schwebeteilchens in folgender Form:

$$p_x - \frac{\dot{x} - w_x}{v_e} p_e = \varrho \left( Q + \frac{Q_m}{\varrho} Q_m \right) \ddot{x} - \varrho_m (Q + Q_m) \dot{w}_x, \quad (1)$$

$$p_y - \frac{\dot{y} - w_y}{v_e} p_e = \varrho \left( Q + \frac{Q_m}{\varrho} Q_m \right) \ddot{y} - \varrho_m (Q + Q_m) \dot{w}_y. \quad (2)$$

Sind die Feldkraftkomponenten  $p_x$  und  $p_y$  Komponenten der Schwerkraft, also (positive oder negative) Restgewichtskomponenten der im Medium schwimmenden Körperchen, so werden rein mechanische Bewegungsvorgänge hervorgerufen, wie man sie beispielsweise beobachtet beim anhaltenden Schweben von Laub- oder Papierblättern oder auch von nicht ausgewogenen Freiballonen in Windhosen mit horizontaler oder schräger Achse oder in den stationären Windwalzen in Gebirgstälern. Im allgemeinen kann man hierbei, auch bei starkem Überwiegen der effektiven Zähigkeitskräfte, die auf der rechten Seite stehenden Beschleunigungsglieder in den dynamischen Gleichungen nicht vernachlässigen.

Wirken jedoch auf die Schwebekörperchen die Kräfte eines verhältnismässig starken elektrischen oder elektromagnetischen Feldes ein, so kann es durchaus zulässig werden, diese Beschleunigungsglieder zu vernachlässigen, besonders dann, wenn es sich um hinreichend kleine, leichte Schwebekörperchen handelt. Die meisten Arten der atmosphärischen Luftionen entsprechen dieser Bedingung. Die folgende Betrachtung wird sich auf diese Fälle beschränken.

Hier gelten also mit hinreichender Genauigkeit die vereinfachten dynamischen Gleichungen:

$$p_x = \frac{\dot{x} - w_x}{v_e} p_e, \quad (3)$$

$$p_y = \frac{\dot{y} - w_y}{v_e} p_e. \quad (4)$$

Mit Rücksicht auf die Form der Wirbelströmung empfiehlt sich besonders die Darstellung in Polarkoordinaten. Wählt man als Pol den bisherigen Koordinatenanfangspunkt, als Polarachse ( $\varphi = 0$ ) die bisherige positive  $x$ -Achse und nimmt man das Kraftfeld in Richtung der negativen  $y$ -Achse an, so dass  $p_x = 0$

und  $p_g = -p$  wird, so erhält man die dynamischen Gleichungen in folgender Form:

$$\dot{r} = -v \sin \varphi, \quad (5)$$

$$r \dot{\varphi} = -v \cos \varphi + \omega_t. \quad (6)$$

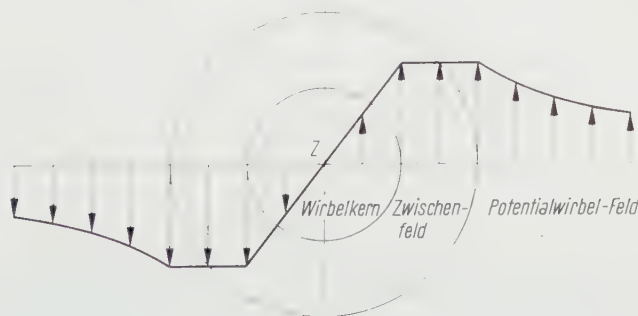
Hierbei ist die Relativgeschwindigkeit der Schwebekörperchen im Medium definiert durch

$$v = \frac{p}{p_0} v_e$$

und der Betrag des Geschwindigkeitsvektors der Strömung durch

$$\omega_t = \int_{(r)}.$$

In der angenommenen stationären Wirbelströmung ist der Geschwindigkeitsvektor der Strömung überall senkrecht zum Radiusvektor gerichtet, und sein Betrag ist lediglich eine Funktion des Radius.



Figur 1

Geschwindigkeitsprofile in Wirbelfeldern. Z Wirbelachse.

Für den vorliegenden Zweck genügt es, wenn man sich eine Wirbelströmung in kreisringförmige Gebiete aufgeteilt denkt, deren Geschwindigkeitsverteilung drei verschiedene Typen aufweist (siehe Figur 1):

- Geschwindigkeit proportional dem Radius (Wirbelkern);
- Geschwindigkeit konstant über dem Radius (Zwischenfeld);
- Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Radius (Potentialwirbel-feld).

Für die Formulierung der Strömungsgeschwindigkeit im Wirbelgebiet kann daher der Ansatz

$$w_t = w_e \left( \frac{r}{r_e} \right)^n$$

verwendet werden, wobei die Einheitsgrößen  $w_e$  und  $r_e$  geeignet zu wählen sind. Es gilt sodann:

$$\begin{aligned} n &= +1 \text{ für Fall a) (Wirbelkern);} \\ n &= 0 \quad \text{für Fall b) (Zwischenfeld);} \\ n &= -1 \text{ für Fall c) (Potentialwirbelfeld).} \end{aligned}$$

Die Wirbelströmungen der Technik und der natürlichen Atmosphäre weisen meist Geschwindigkeitsprofile auf, die sich hierdurch mit hinreichender Annäherung darstellen lassen, wobei das Radialverhältnis zwischen a) und b) sehr verschieden sein kann. Im folgenden werden die Bewegungsbahnen der Schwebekörperchen in den einzelnen Gebieten getrennt betrachtet. Mit Hilfe der Einheitsgrößen lassen sich die massfreien Größen definieren:

$$\tau = \frac{w_e}{v_e} t, \quad R = \frac{r}{r_e}, \quad P = \frac{v_e}{w_e} \cdot \frac{P}{P_e}.$$

Die Feldstärke des Kraftfeldes wird hier durch die Grösse  $P$  gekennzeichnet, die voraussetzungsgemäss entweder als zeitlich konstant oder als variabel mit einem irgendwie vorgegebenen zeitlichen Verlauf anzunehmen ist. Die Richtung des Kraftfeldes wird dagegen stets als konstant betrachtet.

Mit diesen massfreien Größen lauten die dynamischen Gleichungen:

$$\frac{dR}{d\tau} = -P \sin \varphi, \quad (7)$$

$$R \frac{d\varphi}{d\tau} = -P \cos \varphi + R^n. \quad (8)$$

Hieraus lassen sich die Ähnlichkeitsgesetze der untersuchten Bewegungsvorgänge erkennen. Allgemeine Aussagen aber, wie sie als Endergebnis der Untersuchung angestrebt werden, können erst durch weitere Rechnungen gewonnen werden, wobei auch die Zulässigkeit der getätigten Vernachlässigungen noch überprüft werden müsste.

Zunächst sei daher der Spezialfall  $P = \text{const}$  untersucht.

Aus (7) und (8) erhält man

$$\frac{d(R \cos \varphi)}{d\tau} = -R^n \sin \varphi = \frac{R^n}{P} \cdot \frac{dR}{d\tau}.$$

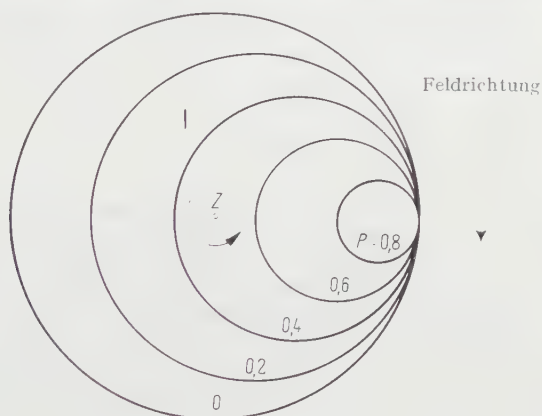
Hieraus ergibt sich als erstes Integral

$$R \cos \varphi - R_0 \cos \varphi_0 = \frac{1}{P} \int_{R_0}^R R^n dR. \quad (9)$$

Für alle Spezialfälle  $P = \text{const}$  sind also die Bahnen der Schwebekörperchen stationär, und die Form der Bahnen hängt lediglich von der Geschwindigkeitsverteilung der Wirbelströmung ab:

$$R \cos \varphi - R_0 \cos \varphi_0 \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1}{2} P (R^2 - R_0^2) \text{ für einen Wirbelkern,} \\ = \frac{1}{P} (R - R_0) \text{ für ein Zwischenfeld,} \\ = \frac{1}{P} \ln \frac{R}{R_0} \text{ für ein Potentialwirbelfeld.} \end{array} \right.$$

Für einen Wirbelkern mit  $n = +1$  ergeben sich kreisförmige Bahnen mit einem exzentrisch auf der Polarachse gelegenen Mittelpunkt (Figur 2), wie man aus der allgemeinen Kreisgleichung in Polarkoordinaten ansehen kann.

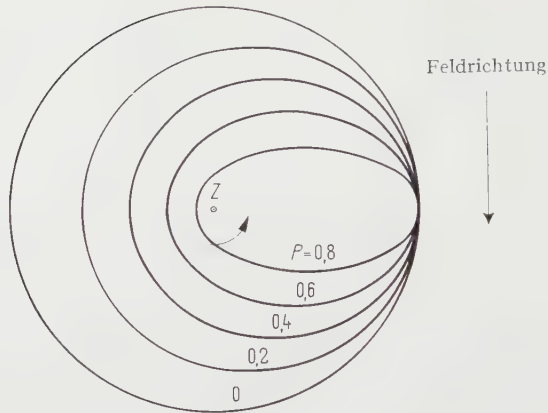


Figur 2

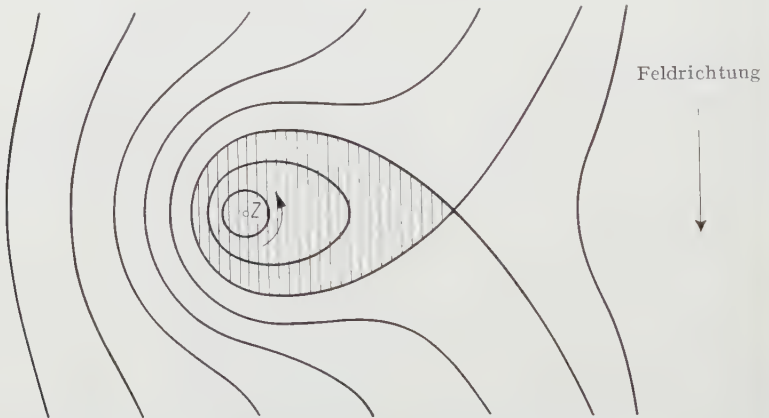
Bahnen der Schwebeteilchen in einem Wirbelkern. Z Wirbelachse.

Für ein Zwischenfeld mit  $n = 0$  ergeben sich elliptische Bahnen, deren grosse Achse auf der Polarachse liegt (Figur 3). Dies kann aus der Ellipsengleichung in Polarkoordinaten geschlossen werden, wenn man als Bezugspunkt den linken Brennpunkt der Ellipse wählt.

Im Fall des Potentialwirbels bei  $n = -1$  teilt sich das interessierende Gebiet der Bahnlinien in zwei Teilgebiete. Im Innern eines auf die engere Umgebung der Wirbelachse beschränkten Teilgebietes, dessen Umriss etwa die Form eines Tropfenquerschnitts besitzt, bewegen sich die Schwebekörperchen auf geschlossenen Bahnen, die nach dem Innern zu von der Tropfenform über die Eiform zu einer Kreisform übergehen und stets den mit hinreichend kleinem Durchmesser vorausgesetzten Kernwirbel umschliessen. Ausserhalb dieses Teil-



Figur 3  
Bahnen der Schwebeteilchen in einem Zwischenfeld.  $Z$  Wirbelachse.



Figur 4  
Bahnen der Schwebeteilchen im Feld eines Potentialwirbels.  $Z$  Wirbelachse; |||| Gebiet der geschlossenen Bahnen.

gebiets jedoch werden die Schwebekörperchen nicht auf geschlossenen Bahnen festgehalten, sondern sie umschwimmen das innere Teilgebiet auf Bahnen, wie sie angenähert das Stromlinienbild der Umströmung eines Flettner-Rotors aufweisen kann (Figur 4).

Auch der zeitliche Ablauf der Bewegung eines Schwebekörperchens auf seiner Bahn kann für den Spezialfall  $P = \text{const}$  aus den Gleichungen (7) und (8) berechnet werden; jedoch ist dies bei der vorliegenden Problemstellung von geringerem Interesse.



Als das hauptsächlich interessierende Ergebnis der Untersuchung des Spezialfalles  $P = \text{const}$  lässt sich vielmehr folgende Aussage gewinnen:

*Die unter der Wirkung eines stationären Kraftfeldes stehenden Schwebekörperchen eines Mediums können unter Umständen in gewissen Teilgebieten einer Wirbelströmung dieses Mediums festgehalten werden, im Gegensatz zu ihrer sonstigen Tendenz, das Medium in Richtung des Kraftfeldes zu durchschwimmen.*

Nunmehr ist der allgemeine Fall zu untersuchen, bei dem  $P$  eine irgendwie gegebene Funktion der Zeit ist.

Da die vorliegende Untersuchung zunächst nur den Nachweis dafür anstrebt, dass unter Umständen die Bahnformen der Schwebeteilchen zu einer beträchtlichen örtlichen Anhäufung derselben führen können, so darf sich die Rechnung hierzu auf geeignete Zahlenbeispiele beschränken.

Hierfür empfiehlt sich unter anderem ein Rechnungsgang, der die Bahnen punktweise zu bestimmen gestattet. Er kann sich der Gleichung (9) bedienen unter Verwendung so kleiner Zeitintervalle, dass für ein solches Intervall mit hinreichender Genauigkeit ein Mittelwert  $P$  abgeschätzt werden kann. Die räumliche Distanz zweier Bahnpunkte lässt sich gewinnen entweder aus (7)

$$R_2 - R_1 = [-P \sin \varphi]_{\text{mittel}} \Delta \tau$$

oder aus (8)

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left[ R^{(n-1)} - \frac{P}{R} \cos \varphi \right]_{\text{mittel}} \Delta \tau.$$

Die erste Gleichung ist vorzuziehen bei vorwiegend radialer Bahnrichtung, die zweite Gleichung bei vorwiegend tangentialer Bahnrichtung. Im Fall des Potentialwirbelfeldes lässt sich die Bahnberechnung unter Verwendung der Gleichung (8) durchführen mit Hilfe der Beziehungen:

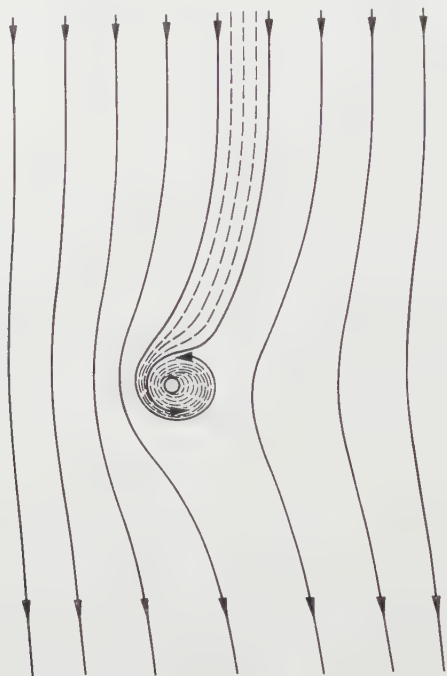
$$k_1 = \frac{1}{P_{12} R_1}, \quad k_2 = \left[ 1 + \ln \frac{R_2}{R_1} \right] \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{k_1 - \cos \varphi_1}{k_1 k_2 - \cos \varphi_2},$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (k_1 - \cos \varphi_1) \frac{P_{12}}{R_1} \Delta \tau.$$

Dieser Rechnungsgang liefert Bahnkurven, bei denen die Ungenauigkeiten der Näherung für  $P$  lediglich den zeitlichen Verlauf von  $P$  verzerren, was für die vorliegende Untersuchung von untergeordneter Bedeutung ist.

Mit Hilfe dieses Rechnungsgangs wurden einzelne Bahnkurven der Schwebekörperchen in einem Potentialwirbel-Feld berechnet, dessen innerer, von der Potentialströmung abweichender Kern so klein angenommen wurde, dass er durch die Bahnkurven nirgends geschnitten wurde. Allgemein konnte aus diesen Einzelbeispielen ersehen werden, dass ein Teil der Schwebekörperchen, die bei konstantem Kraftfeld an dem Potentialwirbel vorbeischwimmen würden, bei zeitlich abnehmendem Kraftfeld in das Innere des Wirbelgebiets hineingezogen

werden. Es kann also in solchen Fällen während eines gewissen Zeitraums eine relativ dicke Schicht des Schwebeteilchenstromes zu einem röhrenförmigen Raumgebilde um die Wirbelachse herum zusammengerollt werden (Figur 5).



Figur 5

Einrollung einer Schicht von Schwebeteilchen in das innere Gebiet eines Potentialwirbels (schematische Skizze).

Der Vorgang lässt sich demgemäss etwa durch folgende Aussage beschreiben:

*Im Strömungsgebiet eines stationären Potentialwirbels kann bei einer zeitlichen Abnahme des Kraftfeldes ein Teil der den Wirbel sonst umschwimmenden Schwebestoffe in das Innere des Wirbelgebiets abgelenkt werden, so dass dort ein verhältnismässig kleines geschlossenes Raumgebilde während einer gewissen Zeitspanne eine Zufuhr von Schwebekörperchen erfährt.*

Ein solcher Vorgang kann, wie aus der Definition von  $P$  entnommen werden kann, nicht nur durch eine Abnahme der Feldstärke  $p$ , sondern auch durch die Zunahme der Wirbelströmungsgeschwindigkeit hervorgerufen werden.

In jedem Fall kann bei einem solchen Vorgang nach anfänglich homogener Verteilung der Schwebeteilchen unter Umständen deren Konzentration innerhalb eines röhrenförmigen Raumgebildes zeitweise auf ein Vielfaches gesteigert werden, wenn nicht andere Effekte massgebend dem entgegenwirken. Bei Luft-

Ionen beispielsweise würde das Zustandekommen der Wiedervereinigung eine solche Konzentration stets vermindern und nach Beendigung der Zufuhr von Schwebeteilchen schnell abklingen lassen. Trotzdem wird auch in solchen Fällen immer noch vorübergehend eine erhebliche Schwebeteilchenkonzentration entstehen. Es wird also in einem Strömungsgebiet, das nach den Helmholtz'schen Wirbelsätzen stets aus den gleichen Teilen des Mediums besteht, ein gegenüber dem Aussenraum höher ionisiertes Raumgebilde erzeugt. Das höher ionisierte Raumgebilde wird sich deshalb lufterlektrisch wie ein im Medium schwebender halbleitender fester Körper auswirken.

Der entsprechende umgekehrte Vorgang bei zeitlich zunehmendem Kraftfeld oder bei zeitlich abnehmender Wirbelgeschwindigkeit wurde rechnerisch nicht näher verfolgt.

### Schlussbemerkungen

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung können, abgesehen von Naturbeobachtungen, ohne Schwierigkeiten auch im Laboratorium experimentell nachgeprüft werden. Bereits mit Hilfe von einfachen aerodynamischen Versuchsgeräten lassen sich Wirbelströmungen erzeugen, deren Geschwindigkeitsprofile sich für diesen Zweck eignen. Für den übrigen Teil des Versuchs kommen vor allem lufterlektrische Methoden in Frage, da sie eine einfache Feldregulierung und Beobachtung gestatten. Für manche der untersuchten Fragen könnten die Versuche modellähnlich ausgelegt werden. Ausser einigen qualitativen Versuchen im Rahmen von Entstaubungsuntersuchungen sind jedoch bisher keine physikalischen Versuche bekannt geworden, deren Ergebnisse zur experimentellen Nachprüfung der vorliegenden Überlegungen verwendet werden könnten.

Die Verwertung der Untersuchungsergebnisse ist auf naturwissenschaftlichem Gebiet denkbar vor allem im Bereich der Aerologie, während die technischen Anwendungsmöglichkeiten besonders auf dem Gebiet der Gasentladungen und der Stabtechnik liegen werden.

Die Aerologie interessiert sich für die Deutung zahlreicher lufterlektrischer Vorgänge, mit denen die vorliegenden Untersuchungsergebnisse in Zusammenhang gebracht werden können. An derartigen Vorgängen sind zu nennen: Die Entstehung von atmosphärischen Scheinzielen bei der Wetterbeobachtung mit Hilfe von Radargeräten, die Bildung von Kugelblitzen, Perlschnurblitzen und sonstigen Besonderheiten der Blitzbahn, die Anreicherung von radioaktiven Schwebestoffen in einzelnen Schichten der Substratosphäre und ähnliche Naturerscheinungen. Naturgemäss werden alle diese Erscheinungen durch eine Reihe von anderweitigen lufterlektrischen und atmosphärischen Vorgängen massgeblich beeinflusst werden; die in dieser Notiz geschilderte Modifikation der Ionenbewegung könnte aber dennoch einen wesentlichen Beitrag zur Klärung fraglicher Teilvorgänge liefern.

Auch die Betrachtung der Gasentladungen weist auf Teilprobleme hin, zu deren Lösung die obigen Untersuchungsergebnisse vielleicht beitragen können.

In der Staubtechnik lassen sich die Untersuchungsergebnisse besonders auf dem Teilgebiet der kombinierten elektrisch-mechanischen Entstaubungsgeräte anwenden. Doch sind auch bei rein mechanischen oder rein elektrischen Geräten einzelne Anwendungsfälle denkbar.

Für besondere Problemstellungen in Naturwissenschaft und Technik kann die vorliegende Untersuchung in vielfacher Hinsicht erweitert und umgeformt werden.

#### *Summary*

The present study relates to the motion of ions and other suspended particles in turbulent flows. It is attempted to describe particularly interesting motional phenomena by virtue of their physical laws. Mention is made briefly of the possibilities of an experimental examination of the results of the investigation and their scientific and technical interpretation.

(Eingegangen: 5. Oktober 1957.)

## Ein Beitrag zur Untersuchung stetiger und unstetiger dreidimensionaler Strömungsfelder in Turbomaschinen

Von JOHN R. WESKE, College Park, Maryland, USA<sup>1)</sup>

In seinen Arbeiten zur theoretischen Berechnung des Strömungsfeldes in den Kanälen von Schaufelgittern [1]<sup>2)</sup> hat Herr Professor ACKERET als erster [2] auf die Bedeutung der durch periodische Schwankungen der Zirkulation verursachten nichtstationären Vorgänge hingewiesen. Diese letzteren sind erst in jüngster Zeit in ihren praktischen Auswirkungen voll erkannt [3] und daher weiterer theoretischer Behandlung unterzogen worden [4].

Seit den frühen Ackeretschen Arbeiten bestand indessen das Problem, den theoretischen Methoden der Behandlung nichtstationärer Strömung in festen oder umlaufenden Schaufelgittern eine entsprechende experimentelle Methode zur Seite zu stellen, um auf beiden sich ergänzenden Wegen zu genauerer Kenntnis und Beherrschung dieser für die Wirtschaftlichkeit der Turbomaschinen bedeutungsvollen Vorgänge vorzudringen.

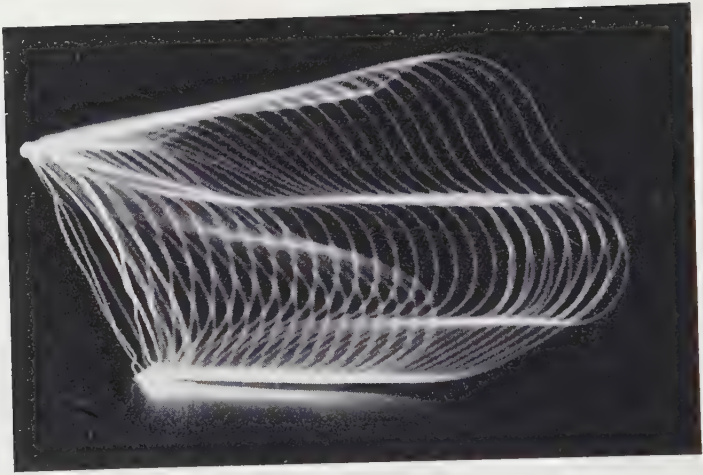
Den hier bestehenden Bedürfnissen entspricht die von H. BÖMELBURG [5] am hiesigen Institut entwickelte und von J. HERZOG [6] den Erfordernissen der Strömungsmaschinenforschung angepasste elektrische Funkenserienmethode. Diese Methode unterscheidet sich von der älteren Townendschen Funkentechnik dadurch, dass der vom ersten Funken ionisierte Luftfaden als Weg geringsten elektrischen Widerstandes von nachfolgenden hochfrequent periodischen Funken benutzt und wiedererleuchtet wird. Wenn der Plasmafaden sich in strömender Luft verlagert, entsteht ein Netz von Funkenwegen, die eine Stromfläche bezeichnen (Figur 1). Diese Funkenserien werden mit normalen Mitteln der Radartechnik erzeugt. Will man eine sich mit Schallgeschwindigkeit bewegend Strömung durch ein Netz von Funken mit 2 mm gegenseitigem Abstand aufnehmen, so muss die Pulsfrequenz gegen 170 kHz sein, was technisch durchaus möglich ist. Für eine Funkenstrecke von 30 mm Länge ist die Spannung 50 kV, die Stromstärke etwa 1 A. Da die Funkendauer 1  $\mu$ s nicht übersteigt, ist die Energie des Funkens sehr gering.

Bei ihrer Anwendung zu Messungen sind gewisse Eigenschaften dieser Methode zu beachten. Äerodynamische Störungen durch den Funken werden auf ein zulässiges Mass reduziert, indem der Strom die zur Leuchtwirkung er-

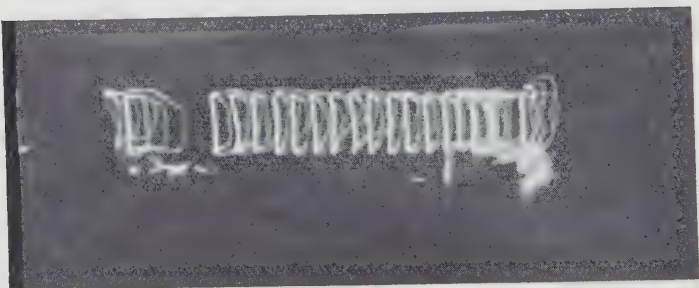
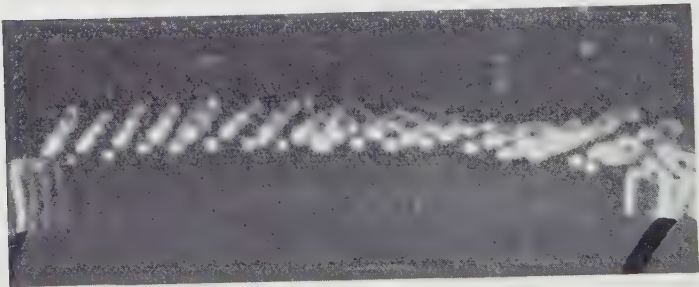
<sup>1)</sup> Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 724.





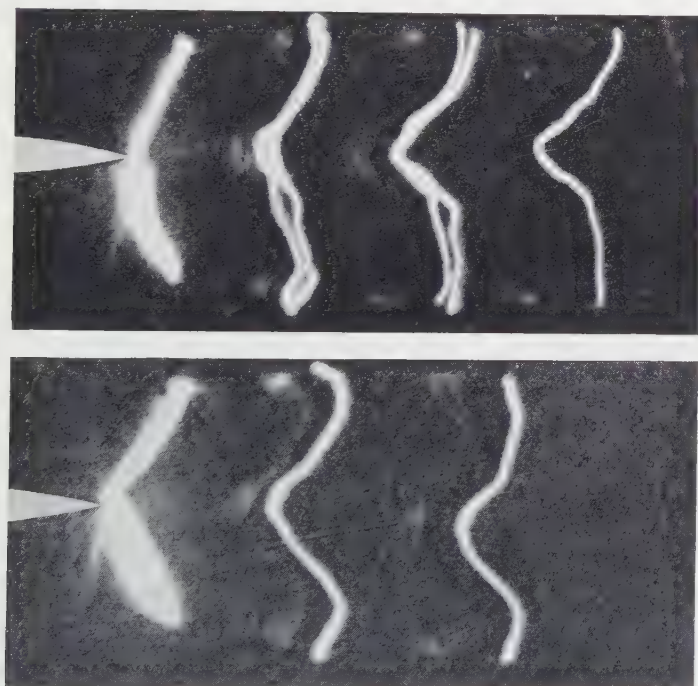
Figur 1  
Funkennetz einer dreidimensionalen Strömung.



Figur 2  
Funkenbilder der Relativbewegung am Austritt eines rotierenden Zentrifugalkompressor-Läufers.  
Oberes Bild: Axialprojektion; unteres Bild: Radialprojektion.



forderliche Minimalstärke hat. Nachfolgende Funken haben die Tendenz, scharfe Biegungen des Plasmafadens abzurunden. In beschleunigter Strömung erfährt die durch den Funken erhitzte Luft grössere Bewegungsänderungen als die sie umgebende kühlere. Die aus den letzteren beiden Vorgängen sich ergebenden Fehlerquellen lassen sich durch Eich-Formeln [7] bei der Auswertung der Funkenphotographien ausschalten.



Figur 3

Funkenspuren im Nachlauf eines Gitterprofiles.

Oberes Bild: bei  $M = 0,67$ ; unteres Bild: bei  $M = 0,815$ .

Die Funkenserienmethode lässt sich ebenso leicht für umlaufende wie für ruhende Schaufelgitter verwenden, da ein Netz der Relativströmung auf ein solches der Absolutströmung umgezeichnet werden kann. Strömungsvektoren, die aus den Verlagerungslinien im allgemeinen nicht unmittelbar zu erschen sind, können nach Grösse und Richtung durch Funkenfähnchen, deren Funkenstrecke in Blickrichtung fällt, festgestellt werden (Figur 2).

Bei Anwendung der Strömungsmaschinenforschung hat es sich als Vorteil erwiesen, dass die Funkenserienmethode im Vergleich zur Hitzdrahtmethode,

die bestenfalls ein Geschwindigkeitsprofil liefert, momentane Strömungszustände über einen Flächenstreifen festhält und zudem auch den zeitlichen Ablauf der Strömung zum Beispiel für 10 Funken von 100 kHz während einer Zeitdauer von  $1/10000$  s wiedergibt.

Da die Genauigkeit der Messung mit der Funkenserienmethode mit wachsender Luftgeschwindigkeit zunimmt, bietet diese Methode besondere Vorteile bei Untersuchungen im schallnahen Bereich (Figur 3). Es lassen sich mit ihr insbesondere die in der Nähe der Schallgeschwindigkeit sich häufenden und den Charakter der Strömung beherrschenden Geschwindigkeitsschwankungen und Strömungsverlagerungen sowie deren Auswirkungen auf Kern- und Grenzschichtströmungen erfassen. Es steht zu erwarten, dass weitere Einblicke in diese Zusammenhänge neue Wege zur Erhöhung der Leistung und Wirtschaftlichkeit von Turbomaschinen bei hoher Mach-Zahl eröffnen werden.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. ACKERET, *Zum Entwurf dichtstehender Schaufelgitter*, Schweiz. Bauztg. 120, Nr. 9, 103–108 (1948).
- [2] J. ACKERET, *Kinetische Energieverluste hinter Schaufelgittern als Folge von Zirkulationsschwankungen* ([Hydrodynamische Probleme des Schiffsantriebs] Hamburg 1932).
- [3] H. KRAFT, *Nonsteady Flow Through a Turbine*, Proc. Ninth Int. Congr. appl. Mech. (Brüssel 1956).
- [4] C. C. LIN, *Motion in the Boundary with a Rapidly Oscillating External Flow*, Proc. Ninth Int. Congr. appl. Mech. (Brüssel 1956).
- [5] H. J. BÖMELBURG, *A Method for the Measurement of the Flow of Air by Means of Series of Electric Sparks*, Technical Note BN-68 (1956), Inst. Fluid Dyn. appl. Math., University of Maryland.
- [6] J. HERZOG, *A New Experimental Approach to the Analysis of Compressor Performance*, Technical Note BN-90 (1957), Inst. Fluid Dyn. appl. Math., University of Maryland.
- [7] J. HERZOG und J. R. WESKE, *Characteristics of the Technique of Aerodynamic Measurements by Means of Series of Electric Sparks*, Technical Note BN-105 (1957), Inst. Fluid Dyn. appl. Math., University of Maryland.

#### Summary

Flow patterns in fixed or rotating passages of turbomachines, for steady or nonsteady, two- or three-dimensional flow may be photographed by means of series of electric sparks produced at very high frequencies. Characteristics of this experimental method, which is suitable particularly at transonic speeds, are discussed. Spark photographs are presented to demonstrate its applicability to turbomachines.

(Eingegangen: 9. Oktober 1957.)

## The Use of an Electronic Computer in Diffuser Boundary-Layer Investigations

By FRITZ ALFRED L. WINTERNITZ, East Kilbride, Glasgow, Scotland<sup>1)</sup>

### 1. Introduction

The problem of flow in a diffuser, that is the development of the turbulent boundary layer under the effect of an adverse pressure gradient, has received considerable attention over the past sixty years [1]<sup>2)</sup>. The available information relates, however, chiefly to two-dimensional flow. There is, as URAM [2] has pointed out, an almost complete dearth of data from detailed boundary-layer investigations of the three-dimensional type which could be analysed to predict boundary-layer growth, the development of the velocity profile in the direction of flow and the onset of separation. In a diffuser, if inlet conditions and geometry were known, this would allow an estimate of performance.

### 2. The Diffuser Research Program at the Mechanical Engineering Research Laboratory

A systematic study of three-dimensional boundary layers is in progress at the Mechanical Engineering Research Laboratory, East Kilbride, as an experimental contribution to the development of semi-empirical methods for calculating turbulent boundary layers. Conical diffusers are used to generate the simplest form of three-dimensional flow, that with axial symmetry. The variables in this investigation are the diffuser angle, the roughness of the diffuser walls, both natural and artificial, and the inlet conditions. The information required includes inlet Reynolds number; pressure rise and distribution across the diffuser; the variation in the direction of flow of two- and three-dimensional boundary-layer displacement and momentum thicknesses and the resulting shape parameters; the energy coefficients at stations along the diffuser; terms comparing the different boundary-layer parameters and a number of other terms describing diffuser effectiveness.

<sup>1)</sup> Fluid Mechanics Division, Mechanical Engineering Research Laboratory, Department of Scientific and Industrial Research.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 736.

### 3. The Experimental Investigation

All readings on the rig are taken with reference to a datum pressure (Figure 1) and are non-dimensionalized by dividing by the contraction pressure differential. This makes them independent of changes in through-flow conditions during an instrument traverse and provides direct comparison for different traverse data. Air temperature, humidity and barometric pressure are also recorded.

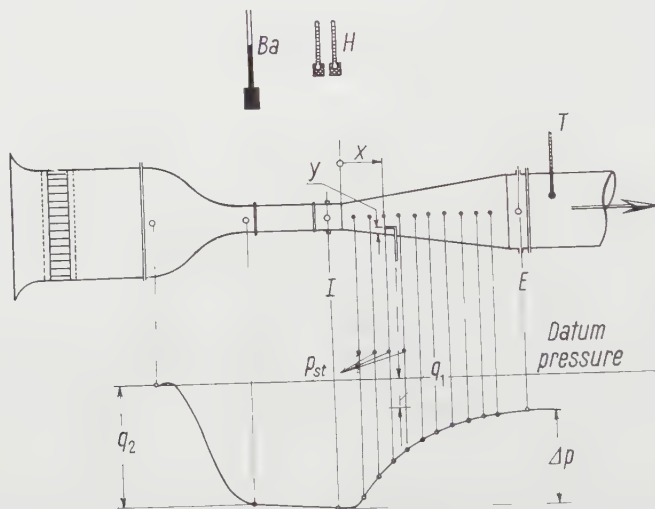


Figure 1

Diffuser rig measurements.

$x, y$  traverse positions;  $q_1$  Pitot total pressure;  $P_{st}$  wall static pressure;  $q_2$  contraction differential;  $\Delta p$  diffuser pressure rise;  $Ba$  barometric pressure;  $H$  humidity;  $T$  temperature;  $I$  traverse station at inlet;  $E$  traverse station at exit.

Tests are carried out in the 'incompressibility range' at five different inlet Reynolds numbers between approximately  $2 \times 10^5$  and  $12 \times 10^5$ ; for each of these, Pitot traverses are taken on two diameters at not less than five different cross sections of the diffuser. In view of the magnitude of the program, some twenty diffusers are being examined, it soon proved necessary to investigate possible ways in which progress could be expedited. On the experimental side, there are physical limitations which restrict the rate of output; thus, for instance, automatic carriages with remote control, which certainly facilitate the experimental procedure, cannot reduce the time required for a traverse below that dictated by the minimum response time of the boundary-layer probes used for the point-velocity measurements. Savings in time thus procured are unimportant by comparison with the time required for evaluation, the latter being the obvious target for any attempt at improving the rate of output.

4. Methods of Evaluation

Quantities required for further analysis are listed in Table 1 together with their definitions, and are indexed for further reference under a later heading. Five of the terms are seen to require integration of the measured velocity profiles with respect to area or distance, and it is this operation which accounts for most of the time expended on evaluation. Graphical integration is generally used.

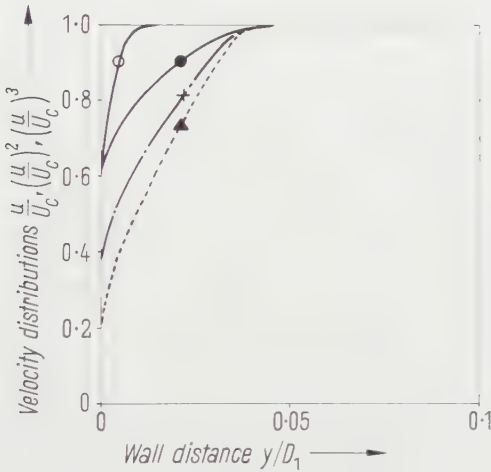


Figure 2 A

Contraction velocity profiles, no entry length.

○  $u/U_c$ , contraction I; ●  $u/U_c$ , +  $(u/U_c)^2$ , ▲  $(u/U_c)^3$ , contraction II.

4.1 Evaluation by Graphical Integration

Numerical readings taken on the rig must by numerical treatment be suitably converted for plotting. They are then approximated by curve fitting and finally planimeted to yield a result which is again numerical, a process taking several hours per traverse to complete. Apart from being time consuming, graphical integration also affects the test procedure since, if ambiguity in the curve fitting is to be avoided, an adequately large number of point-velocity measurements must be taken. Even if the individual bias in preparing the graphs from a finite number of points is minimized, the actual graphical integration is subject to random errors. To demonstrate this, specimen velocity distributions have been chosen from the three groups of velocity profiles encountered in the experimental investigation [3], Figures 2 A to C, and have been integrated graphically with respect to distance and area for  $u/U_c$ ,  $(u/U_c)^2$  and  $(u/U_c)^3$ , using standard techniques. Table 2 presents the standard deviations



Table 1  
Terms to Be Computed

Section	Symbol	Quantity	Definition	Index
I	$\bar{U}$	Mean velocity	$2 \left(\frac{2}{D}\right)^2 \int_0^{D/2} u \left(\frac{D}{2} - y\right) dy$	—
	$\frac{U_c}{U}$	'Pipe factor'	—	$w$
	$\left(\frac{\rho}{2} U^2\right)_x$	Mean dynamic pressure	—	—
	$C_{px}$	Pressure coefficient	$\frac{2 \Delta p_x}{\rho U_1^2}$	$C_p$
	$Re$	Inlet Reynolds number	$\frac{\bar{U}_1 D_1 \rho}{\mu}$	$R$
II	$(\delta_2^*)_x$	Two-dimensional displacement thickness	$\int_0^{D/2} \left(1 - \frac{u}{U_c}\right) dy$	—
	$\frac{(\delta_2^*)_x}{D_1}$	Ratio of displacement thickness to inlet diameter	—	$\delta_b$
	$(\theta_2)_x$	Two-dimensional momentum thickness	$\int_0^{D/2} \left(1 - \frac{u}{U_c}\right) \frac{u}{U_c} dy$	—
	$\frac{(\theta_2)_x}{D_1}$	Ratio of momentum thickness to inlet diameter	—	$\theta_b$
	$(H_2)_x$	Shape factor	$\frac{\delta_2^*}{\theta_2}$	$H_b$
III	$(\delta_3^*)_x$	Three-dimensional displacement thickness	$\int_0^{D/2} \left(1 - \frac{u}{U_c}\right) \frac{D/2 - y}{D/2} dy$	—
	$\frac{(\delta_3^*)_x}{D_1}$	Ratio of displacement thickness to inlet diameter	—	$\delta_c$
	$\frac{4 (\delta_3^*)_x D_x}{D_1^2}$	Ratio of displacement to inlet area	—	$\delta_i$
	$(\theta_3)_x$	Three-dimensional momentum thickness	$\int_0^{D/2} \left(1 - \frac{u}{U_c}\right) \cdot \frac{u}{U_c} \cdot \frac{D/2 - y}{D/2} dy$	—
	$\frac{(\theta_3)_x}{D_1}$	Ratio of momentum thickness to inlet diameter	—	$\theta_c$
	$\frac{4 (\theta_3)_x D_x}{D_1^2}$	Ratio of momentum to inlet area	—	$\theta_j$
	$(H_3)_x$	Shape factor	$\frac{\delta_3^*}{\theta_3}$	$H_c$



Table 1

Section	Symbol	Quantity	Definition	Index
IV	$\Delta$	Ratio of displacement thicknesses	$\frac{\delta_2^*}{\delta_3^*}$	$\frac{\delta_b}{\delta_c}$
	$\theta$	Ratio of momentum thicknesses	$\frac{\theta_2}{\theta_3}$	$\frac{\theta_b}{\theta_c}$
	$\chi$	Ratio of shape factors	$\frac{H_2}{H_3}$	$\frac{H_b}{H_c}$
V	$\alpha$	Energy coefficient	$\frac{\bar{u}^3}{\bar{U}^3}$	$\alpha$
	$\eta_p$	Pressure efficiency	$\frac{C_p}{1} - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4$	$\eta_p$
	$\eta_{conv}$	Conversion efficiency	$\frac{C_p}{\alpha_1} - \alpha_2 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4$	$\eta_c$
	$\eta_{conv}^*$	Approximate conversion efficiency	$\frac{C_p}{\alpha_1} - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4$	$\eta_c^*$
	$\eta_{en}$	Energy efficiency	$C_p + \alpha_2 \frac{(D_1/D_2)^4}{\alpha_1}$	$\eta_e$

$u$  axial point velocity;  $U_c$  centre line velocity;  $\Delta_p$  diffuser pressure rise;  $\rho$  density;  $\mu$  viscosity.  
Suffices: 1,2 inlet, outlet;  $x$  traverse position along diffuser.

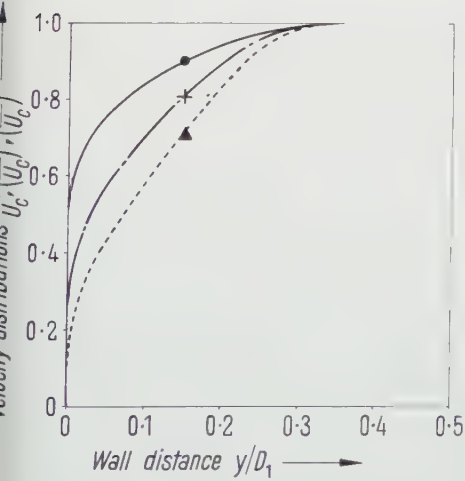


Figure 2 B  
Contraction velocity profiles, with entry length.

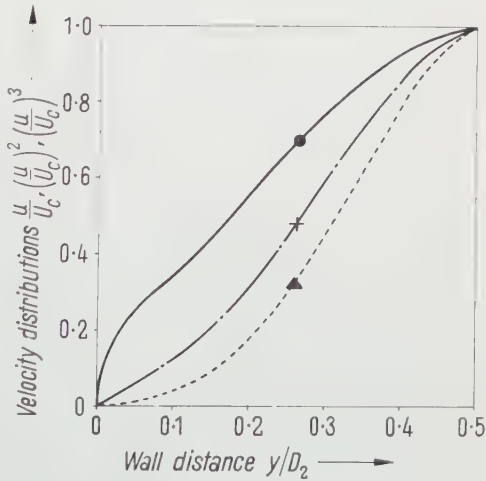


Figure 2 C  
Diffuser exit velocity profiles.

●  $u/U_c$ ; +  $(u/U_c)^2$ ; ▲  $(u/U_c)^3$ .

in percent which were obtained from up to twenty integrations of the curves by different operators. For velocity distributions with thin boundary layers, the percentage deviations may amount to as much as 6% for certain of the boundary-layer parameters; although this is less for thicker boundary layers, percentage errors of up to 2.5 and 1% respectively are possible in the graphical determination of the boundary-layer parameters for the velocity distributions of Figures 2 B and C. They may be larger still if fewer than twenty results are used in the evaluation.

Table 2

*Random Errors of Graphical Integration Method.*

*Results Obtained from Twenty Graphical Integrations by Different Operators of  $U/U_c$ ,  $(U/U_c)^2$ ,  $(U/U_c)^3$  Against Distance and Area for Three Different Types of Velocity Profiles.*

Quantity	Figure 2 A ( $\delta_s^* \approx 1$ mm)	Figure 2 B ( $\delta_s^* \approx 5$ mm)	Figure 2 C ( $\delta_s^* \approx 50$ mm)
	$\sim \psi$ [%]	$\sim \psi$ [%]	$\sim \psi$ [%]
$\frac{U}{U_c}$	$\leq 0.1$	(0.1)–0.3	(0.2)–0.3
$\delta^*$	(1.0)–1.7	(0.1)–0.3	(0.1)–0.3
$\theta$	$\geq 4$	(0.5)–2.5	(0.2)–0.7
$H$	(2.0)–6.0	(0.5)–2.5	(0.4)–1.0
$\alpha$	(0.1)–0.4	(0.2)–0.5	(0.3)–0.7
$\psi$ = percentage error of individual result = $\frac{\pm \sigma}{\text{Mean}} \times 100$ ; $\sigma$ = standard deviation. (Figures in brackets are values from four results selected for minimum deviation.)			

Graphical methods of evaluation, while in this context universally applicable, are time consuming and limited in the degree of accuracy attainable, their only apparent advantage being that a visual check on the experimental results is obtained. A numerical method of computation, by comparison, would allow the processing of the numerical data obtained on the rig without intermediate transformation, thereby eliminating the possible random errors of curve fitting and the systematic and random errors of the graphical integration. Further, if fitting functions can be chosen which, for practical purposes, are adequate representations of the measured velocity profiles, it should be possible to obtain equivalent results from fewer point measurements than required for graphical integration, thereby reducing the time spent on the rig. Lastly, further improvement is possible by introducing automatic recording of tes

data combined with simultaneous registration in a form suitable for processing on an electronic computer.

#### 4.2 Evaluation by Numerical Methods

If the analytical functions used to represent the velocity distributions or their powers are discussed in the sequence of the sections in Table 1, the first objective is the determination of the mean velocity of flow  $U$  at any cross section along the diffuser. It has been shown [4] that, for velocity profiles of the type presented in Figures 2A to C, this is possible with adequate accuracy by integrating an expression of the form

$$u = A^* + B^* \log\left(\frac{y}{D}\right) + C^* \left(\frac{y}{D}\right), \quad (1)$$

where  $u$  is the point velocity;  $y$  the distance from the wall;  $D$  the traverse diameter;  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  are constants for a given velocity distribution, all having the dimension of velocity.

Pitot traverse positions were determined such that, for a section of the area of through-flow, the true mean velocity would be measured at the selected gauging point, provided equation (1) represented the velocity profile in a satisfactory manner. This approach has here been applied to the outer quarter of the area of the circle which confines the traverse plane, but the number of traverse positions was increased for improved accuracy.

The quarter area has been subdivided into five concentric rings with area ratios 1:1:2:4:8; in each of these, two ordinates were determined such that the mean  $\log(y/D)$  of the two points was the mean  $\log(y/D)$  of the ring and their mean  $(y/D)$  the mean  $(y/D)$  of the ring. Details of the calculation are given in reference [4]. This placed ten traverse points within a distance of an eighth of the radius from the wall. Weights used are proportional to area. In the inner three-quarter area of the circle, six further traverse positions are chosen so as to make numerical integration exact for seventh-degree polynomials of a variable which is proportional to area; integration is by TCHEBYSHEF's rule [5]. A radial traverse consists thus of sixteen positions, to which the centre line- and one more near-wall reading are added; this must be compared with the 25 to 50 point-velocity measurements which are normally considered necessary in this type of investigation. It is contended that an equivalent accuracy may be obtained from the sixteen-point traverse which can, of course, by the same approach, be extended to contain an arbitrarily larger number of points if required. Experimental procedure does include, however, readings at other positions than those specified to provide additional information for future reference.

If the mean velocity  $U$  is thus determined, all terms in section I of Table 1 can be computed.

Numerical determination of the two-dimensional boundary-layer parameters of section II necessitates the use of the test results from the sixteen traverse positions in the integration, which is now no longer carried out with respect to area but with reference to distance from the wall. It was found that this was possible with adequate accuracy if, in the outer quarter of the cross-section, weights proportional to ring width were chosen, the numerical integration again being carried out for  $\log(y/D)$  and  $(y/D)$ . The remaining inner three-quarters of the area is divided into two sections, in which the approximation is by quadratic polynomials of  $y/D$ ; two triplets of weights are applied.

It will be noted that in the definitions for the two-dimensional boundary-layer parameters, section II, the limits of the integration have been extended from the conventional boundary-layer thickness usually defined at  $0.99 u/U$ , to the diffuser centre line. This modification, which simplifies numerical integration is thought justified on the strength of the available evidence which suggests that differences due to the two different definitions are in general smaller than the random errors of the graphical method of evaluation, Table 2.

In order to deal with the third section of Table 1 by numerical analysis, the definitions of  $\delta_3^*$  and  $\theta_3$ :

$$\delta_3^* = \int_0^{D/2} \left(1 - \frac{u}{U_c}\right) \frac{D/2 - y}{D/2} dy, \quad \theta_3 = \int_0^{D/2} \left(1 - \frac{u}{U_c}\right) \frac{u}{U_c} \frac{D/2 - y}{D/2} dy \quad (2)$$

are expanded and non-dimensionalized by division with the inlet diameter  $D_1$ , the resulting expressions being

$$\left(\frac{\delta_3^*}{D_1}\right)_x \equiv \delta_c = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{U}{U_c}\right] \frac{D_x}{D_1}, \quad \left(\frac{\theta_3}{D_1}\right)_x \equiv \theta_c = \frac{1}{4} \left[\frac{U}{U_c} - \frac{\bar{U}^2}{U_c^2}\right] \frac{D_x}{D_1}, \quad (2a)$$

which are readily computable.

The fourth and fifth sections of Table 1, consisting of composite expressions of terms already determined in the sequence of calculation, are calculated by simple algebraic operations.

By use of the assumptions outlined, the diffuser test data can be processed entirely by numerical methods using fewer points per radial traverse than generally considered necessary. This is permissible only if results obtained are in adequate agreement with the values found by use of a larger number of test points and conventional methods of evaluation. Such a comparison is presented in Table 3, again for velocity profiles of the types shown in Figures 2 A to C, but using traverse results from a minimum number of 35 points per radial traverse. It is seen that the percentage differences are adequately small, by comparison with the possible percentage error of the standard graphical method of evaluation.

Table 3

*Comparison of Results Obtained by Graphical and by Numerical Methods of Evaluation  
Summarized Results for Twenty-Five Diffuser Tests*

Quantity	Figure 2 A ( $\delta_2^* \approx 1$ mm)	Figure 2 B ( $\delta_2^* \approx 5$ mm)	Figure 2 C ( $\delta_2^* \approx 50$ mm)
	$\sim \psi$ [%]	$\sim \psi$ [%]	$\sim \psi$ [%]
$\frac{\bar{U}}{\bar{U}_c}$	$< 0.2$	$< 0.2$	$< 0.3$
$\delta_2^*$	(1.8)–2.5	(0.3)–0.8	(0.3)–0.8
$\delta_3^*$	(1.8)–2.5	(0.3)–0.8	$< 0.4$
$\theta_2$	(1.5)–7.0	(0.3)–2.0	(0.5)–1.2
$\theta_3$	(1.0)–3.5	(0.8)–1.7	(0.3)–0.5
$H_2$	(0.8)–5.5	(0.6)–2.0	(0.5)–2.0
$H_3$	(1.2)–2.0	$< 2.5$	(0.2)–1.1
$\alpha$	(0.2)–0.4	(0.1)–0.4	(0.3)–0.9

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left( \frac{Q_{Gr} - Q_{An}}{Q_{Gr}} \times 100 \right)^2};$$

$Q_{Gr}$  = quantity graphically determined (two integrations);  
 $Q_{An}$  = quantity analytically determined.  
(Figures in brackets are values from four results selected for minimum deviation.)

On the strength of these and further results, numerical evaluation was adopted. It was found that, by using electric desk machines, the time required for computing the results from a single traverse could be reduced to about one quarter or one fifth. The time spent on the rig was also cut down, although, in general, additional point velocity measurements are taken. The next step towards automation of the rig was the coding of the evaluation program for processing on an electronic computer.

## 5. The Digital Computer Program

The detailed coding of the computation for the machine used, a high-speed digital computer at the National Physical Laboratory, Teddington, was carried out by the Mathematics Division of that Laboratory. The following is a brief outline of the preliminary programming which was done at the Mechanical Engineering Research Laboratory, Table 4 summarizing input and output data.

Table 4  
*Computer Quantities*

Input quantities, punched
$q_1, q_2, q'_2, C_q, d, f_1, f_2, \text{Test No.}, \text{Card label}, \Sigma (q_1, q_2, q'_2, C_q, d, f_1, f_2)$
Output quantities, printed
Test No., $w_1 - w_{17}, \delta_b, \theta_b, H_b, \delta_j, \theta_j, \Delta, \Theta, \chi, H_c, R, \alpha, C_p, \eta_c, \eta_c^*, \eta_c, \eta_p$

The computation was subdivided into five sections A to E which are cross-referenced by transfer through the computer stores.

### 5.1 Section A

Of the input data, point total pressure readings of the traverse and related static pressure measurements are made non-dimensional by dividing by the contraction pressure differential. Dynamic pressures and their mean as well as the non-dimensional mean velocity are calculated. Next, the velocity distribution is non-dimensionalized with  $U$ , the resulting  $w$ -terms being printed. In addition the  $w$ -terms are cubed and their mean stored for use in section E. Similarly  $\bar{U} d^2$  is computed for use in sections D and E.

### 5.2 Section B

Integration of the non-dimensional dynamic pressure and velocity distribution is carried out with respect to distance, the weights forming, as in the case of the determination of  $U$ , part of the coding instructions. Output terms  $\delta_b, \theta_b$  and  $H_b$  are calculated and printed.

### 5.3 Section C

All quantities required to calculate the three-dimensional boundary-layer parameters are available and the machine computes  $\delta_j, \theta_j, H_3$  as well as  $\Delta, \theta, \chi$ , and the six terms are printed.

### 5.4 Section D

The Reynolds number at inlet is calculated by use of correction factors which take account of atmospheric pressure, air temperature and humidity. As programmed, the inlet Reynolds number is determined from the results of each single traverse by use of the continuity equation. The ratio of these to the



value obtained directly from the inlet traverse with  $d^2 = 1$  is a measure of agreement between test results and continuity equation.

### 5.5 Section E

Lastly, the energy coefficients and the terms denoting diffuser effectiveness are computed at every traverse station with reference to the one at inlet, and are printed.

At present the input data are punched by hand; to the terms listed in Table 4 are added the sum of the columns  $q_1$  and  $q_2$  and the terms  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $d$  and  $C_q$ ; the total is used to check the correctness of the punching. Each of the eight cards carrying the input data relating to one traverse is labelled individually and with the test number.

The manometers used are in the process of being modified for output in digitized form, after which recording on cards or tape will be automatic.

## 6. Time Comparison for Different Methods of Evaluation

From the experience available, the time required to produce the output data on Table 4 for one radial velocity traverse of at least 25 points and the related pressure measurements is of the order of 12 h if graphical integration is used.

If the same computation is carried out numerically with electric desk machines, and the results from the sixteen-point traverse are used, this reduces to approximately 3 h.

The computation time on the electronic machine is of the order of 10 s, approximately 1/4000th of the original time requirement. The previous limitation on output has therefore been removed, but by comparison with the available computation capacity the test facilities have now become inadequate. The modifications planned are of importance to the work of the Fluid Mechanics Division, since the diffuser rig is used in a pilot experiment which will assist the introduction of automation on the large test facilities of the Hydraulic Machinery building, and in the evaluation by the electronic digital computer which will shortly be available at the Mechanical Engineering Research Laboratory.

## Acknowledgements

The work described was carried out as part of the research program of the Mechanical Engineering Research Board of the Department of Scientific and Industrial Research. This paper is published by the permission of the Director of Mechanical Engineering Research.

## REFERENCES

- [1] J. M. ROBERTSON and D. ROSS, *Water Tunnel Diffuser Flow Studies*, Part. I: *Review of Literature*, Pennsylvania State College, Ordnance Research Laboratory Report No. 7958-139 (1949).
- [2] E. H. URAM, *Investigation of the Growth of an Axisymmetric Turbulent Boundary Layer in an Adverse Pressure Gradient*, Thesis (Pennsylvania State College, School of Engineering).
- [3] F. A. L. WINTERITZ and W. J. RAMSAY, *Effects of Inlet Boundary Layer on Pressure Recovery, Energy Conversion and Losses in Conical Diffusers*, J. roy. aero. Soc. 24 (2), 116-124 (1957).
- [4] F. A. L. WINTERITZ and C. F. FISCHL, *A Simplified Integration Technique for Pipe-Flow Measurement*, Wat. Pwr. 9 (6), 225-234 (1957).
- [5] J. B. SCARBOROUGH, *Numerical Mathematical Analysis* (Oxford University Press, 1950), p. 155.

*Zusammenfassung*

Eine systematische, im Mechanical Engineering Research Laboratory, East Kilbride, in Durchführung begriffene Untersuchung der Auswirkung von Einlaufverhältnissen und Wandrauigkeit auf die Strömung in geraden, konischen Diffusoren konnte durch Auswertung der experimentellen Resultate auf einer Elektronenrechenmaschine bedeutend gefördert werden.

Die in den verschiedenen Abschnitten des Berechnungsganges anstelle der üblichen graphischen Integrationsverfahren zur Verwendung kommende numerische Auswertung wird kurz beschrieben und die Genauigkeit bei verringerter Anzahl der Meßstellen als genügend aufgezeigt.

Für jedes mit dem Staurohr gemessene Geschwindigkeitsprofil und die entsprechenden statischen Druckmessungen werden für weitere Auswertung sechzehn verschiedene Ausdrücke, darunter zwei- und dreidimensionale Grenzschicht-Parameter berechnet und das dimensionslose Geschwindigkeitsprofil angeliefert.

(Received: September 24, 1957.)

## Three Hundred Years of Vibration Engineering

By STEPHEN J. ZAND, Erie, Pennsylvania, USA<sup>1</sup>)

To most engineers specializing in vibration, the theory of oscillation is a new science confined to their individual fields be it airplanes, power plants, automobiles or ships. Vibration occurs when a sudden application of a force disturbs the equilibrium between the internal (elastic) forces of a body and the external forces, thus this definition indicates that vibration is a universal phenomenon of nature. To name but a few examples, the theory of oscillation is applicable to a vast variety of problems encountered in clocks and watches, where the oscillations can be seen, musical instruments where the oscillations can be heard and in such minute particles as molecules where interatomic oscillations can be calculated by the same formulae as those used for finding the period of a pendulum.

The development of the theory of vibration, a branch of dynamics, extends over a period of more than 300 years and since 'The inventions of to-morrow can be predicted if it is known what went on yesterday' this discourse will sketch the history of the researches conducted in physics and applied mathematics which bear on oscillatory phenomena.

The pace in engineering science to-day leaves a minimum of time for historical studies, hence only few realize how little fundamental knowledge has been added to theories resulting from observation or analysis set forth as far back as three hundred years ago. One is amazed at the results obtained in that remote time with the crudest equipment; also, one can hardly believe that so many basic truths were discovered by virtue of pure philosophical speculation, mere intellectual effort, without technical aids. Take for instance the obvious fact that the period of a pendulum of a length  $L$  is constant and independent of the mass. Any first-year engineering student can prove this fact by writing the energy equation but three hundred years ago such simple reasoning was not possible as laws of motion and the concept of energy were not yet formulated. As a matter of historical fact it was the observation of the behavior of the pendulum which led to the formulation of such laws.

In 1579 a young medical student at Pisa was worshipping in the Cathedral. Save for the annoying rattle of a chain there was silence in the auditory. A sacristan had just filled a hanging oil lamp and left it swinging. The noise of

---

<sup>1</sup>) Registered Consulting Engineer.

the oscillating chain interfered with the student's meditations and started him upon a train of thought that was far removed from his devotions. He observed the rhythm of the swinging lamp, it seemed to him that its beat was regular, that the swinging lamp was taking exactly the same time in each of its oscillations although the amplitude was constantly diminishing.

Was his observation correct? If so, he had come upon a fundamental fact. At home he took two threads of the same length and attached them to two pieces of lead of the same weight. He then tied the other ends to separate nails and was ready for detailed observations.

He took the two pendulums, drew one of them to a distance of two hands' breadth from the perpendicular, the other to four hands' breadth and then released them simultaneously. With an assistant he counted and compared the oscillations of the two threads. The total was exactly the same – one hundred counts in each case. The two threads, in spite of the great difference in their starting points, ended their swinging at the same time.

And thus, in the swinging motion of a cathedral lamp, this young man discovered the rhythmic principle of nature which to-day is applied in the counting of the human pulse, the measurement of time on the clock, the eclipses of the sun and the movement of the planets. This young man was GALILEO (1564–1642) the founder of the science of kinematics and also the one who first realized that the theory of sound and the theory of oscillation are essentially one and the same.

In GALILEO's *Discourses Concerning Two New Sciences*, first published in 1638, there is a remarkable discussion of the vibration of bodies. Beginning with the description of the experiment reported above, GALILEO goes on to describe the phenomenon of resonance. He then reviews the common notions about the relation of the pitch of a vibrating string to its length and then expresses the opinion that the physical meaning of the relations is to be found in the number of vibrations per unit of time. He says he was led to this point of view by an experiment in which he scraped a brass plate with an iron chisel and found that when a pure note of definite pitch was emitted the chisel marked the plate with a number of fine lines. When the pitch was high the lines were close together, while when the pitch was lower they were farther apart. GALILEO was actually able to tune two spinet strings with two of these scraping tones; when the musical interval between the string notes was judged by the ear to be a fifth, the number of lines produced in the corresponding scrapings in the same total time interval bore precisely the ratio 3:2. It seems plain from a careful reading of GALILEO's writings that he had a clear understanding of the dependence of the frequency of a stretched string on its length, tension and density. There was, of course, no question then of a discussion of the dynamics of the motion of the string, for the theory of mechanics had not advanced far enough. But GALILEO did make an interesting comparison between the vibra-



tions of strings and pendulums in the endeavor to understand the reason why sounds of certain frequencies, i. e., those whose frequencies are in the ratio of two small integers, appear to the ear to combine pleasantly, whereas others not possessing this property sound discordant. He observed that a set of pendulums of different lengths, set to oscillating about a common axis and viewed in the original plane of their equilibrium positions, present a pleasing pattern to the eye if the frequencies are simply commensurable and a complicated jumble if they are not. This is a kinematic observation of great ingenuity and illustrates the fondness of the great Italian for analogy in physical description.

While GALILEO explained the elementary phenomena of motion, CHRISTIAAN HUYGHENS (1629-1695) provided precise definitions pertaining to fundamentals of dynamics and laid the groundwork for the coming Newtonian era. His investigations of dynamics of interest to vibration engineering were the studies of the compound pendulum, analysis of restricted motion along a circular path, and researches on the theory of elastic shock and wave propagation. In this work the concept of the dynamic center of gravity is first introduced. His researches also extended to optics where he was the first to point out that light is a form of vibration which spreads outward from the source just as sound does in air. HUYGHENS correctly observed that light which propagates *in vacuo* must be a different form of vibration from sound but the final explanation of the nature of light was elaborated by NEWTON and completely and brilliantly made clear by MAXWELL in the middle of the 19th century.

HUYGHENS applied his theories to the practical solution of time measurements and built the first pendulum controlled clock. The theories and practical results were published in a book, *Horlogium Oscillatorium* (1673). HUYGHENS' pendulum clock raised the precision of time measurements in both science and daily life to hitherto undreamed-of accuracy. Clocks consisting of concentric hands actuated by falling weights through a gear train were known even before GALILEO but they ran irregularly and unreliably for they were regulated by friction which is always variable. The introduction of a pendulum of a fixed period of oscillation was a tremendous step forward in the art of clock making – the result was trustworthy measurement of time.

In navigation, because of the oscillation of the ship, the usual pendulum, depending upon gravity, was not satisfactory in spite of HUYGHENS' special efforts. He therefore proceeded to work on elastically controlled pendulums (balance wheels) for these clocks, pendulums such as we still find to-day in the balance wheel and escapements of pocket watches and ships' chronometers. Here again, the introduction of a fixed-period device is the only point of novelty. Pocket watches with trains or wheels, driven by a spring, existed already; because of their external form, and their main place of origin, they were known as 'Nuremberg eggs'. The actual introduction of the spring-controlled balance wheel as an equivalent to the gravity pendulum is generally

credited to HOOKE but, by his own admission, he was led to this invention by HUYGHENS' researches.

The middle of the 17th and the beginning of the 18th century can rightly be designated as the beginning of the reign of the applied and theoretical physicist. To enumerate the achievements of all the men who during that period contributed directly or indirectly to the theory of oscillations would require the writing of a two-volume book. The scientific highlights of these times are the researches on stress and strain by HOOKE. KEPLER, HALLEY and WREN must be mentioned for their work on oscillations in celestial mechanics. Also, one must pay tribute to that great French philosopher DESCARTES (CARTESIUS) (1596–1650), inventor of the system of coordinates bearing his name and the first to formulate a method of conducting a scientific investigation. This system paved the way to the study of sound. Many more giants of science of that era should be included but space limitations forbid – forcing us to confine ourselves to the one who was the greatest and the profoundest of them – the one upon whose teachings all modern mechanics, acoustics, optics and thermodynamics are based. He was ISAAC NEWTON (1643–1727), who was born a year after GALILEO's death<sup>2)</sup>.

Woolstrobe, in East Anglia, where he first saw the light of day, could have small inkling that it would produce the author of one of the greatest scientific revelations ever made to mankind. NEWTON discovered universal gravitation, the force which holds the heavenly bodies together, which guides the earth, the planets and the moons in their orbits, which acts according to a simple fixed law and is the same force which causes a stone to fall to the ground. Indeed, this force acts on all matter earthly or heavenly, great or small. The laws of gravitation formulated by NEWTON were so fundamental that they remained unchanged for two hundred years until 1905 when ALBERT EINSTEIN broadened the laws without, however, changing their basic concepts.

NEWTON also gave us a tool without which the solution of oscillatory problems could not be attempted. He gave us calculus, the key to the solution of all kinematic questions. He investigated phenomena of flow and formation of eddies in liquids, oscillations of liquids in U-tubes, propagation of waves, internal friction of viscosity, damped oscillations, and many similar problems. He thus became the founder of the science of acoustics. As the result of a profound insight into the phenomena of waves, he developed the method of calculating the velocity of sound, finding it to be equal to the square root of the ratio between elastic force (pressure of the air) and density (specific gravity), and concluded from this fact that the velocity of sound must increase with increase of temperature. It was a hundred and thirty years later that LAPLACE, by intro-

<sup>2)</sup> In one of the best popular biographies of GALILEO (*The Star Gazer*, by ZOLT DE HARSYI) the closing sentence of the book states that the very year, the very day, the very hour when GALILEO died, NEWTON was born – a dramatic ending for the book but historically incorrect.



ducing into this formula the ratio of specific heats, made it agree with the measured velocity of sound in air. NEWTON also developed the fundamental and simple relationships, holding for all wave processes, between velocity of propagation, wave-length, and period of vibration, or frequency<sup>3</sup>). He then calculated the wave-length of a note of known frequency, and found it to be double the length of the open pipe producing the note.

The velocity of water waves, and its dependence upon the wave-length was also calculated by NEWTON directly (for small amplitudes). He assumed in this research rectilinear motion of the particles of water; but he rightly remarks that the motion is actually circular, which fact was finally completely explained by WILHELM WEBER a hundred and forty years later. Subsequently, mathematicians, led by BERNOULLI and leaning on NEWTON's foundations, have succeeded in calculating the velocity of propagation of such waves for any amplitude. Nothing of fundamental novelty, however, concerning these oscillatory phenomena has been added.

NEWTON's scientific thinking was based on a creed 'Hypotheses non fingo' by which he meant that mere supposition – what has not been properly deduced from phenomena – should not be put forward as science. If the investigation of nature is to remain what all great men of science have held it to be – the gathering of knowledge of the truth – then the warning in this statement is certainly of permanent validity.

The vibration of a string excited the imagination of the early acoustical experimenters. In this phenomenon vibration and acoustics are obviously combined, as vibratory excitation by plucking or bowing the string produces an audible note. Just as the pendulum was the portal to analytical kinematics, so the vibrating string was the gate to the establishment of a branch of physical science, originally called wave mechanics and later vibration and acoustics. To-day the terms vibration and acoustics can be used interchangeably because it is known that sounds which are heard are nothing other than vibrations lying within a certain frequency range and having a finite amplitude.

After NEWTON's introduction of calculus and formulation of the basic laws of mechanics, a younger contemporary of his, BROOK TAYLOR (1685–1731), the British mathematician who established the infinite series bearing his name, worked out the strictly dynamical solution of the vibrating string and was able to derive the formula for the frequency of its vibration within certain boundaries, a formula which corroborates the data recorded by GALILEO. More elaborate mathematical techniques, in particular the introduction of partial derivatives worked out by EULER (1707–1783), D'ALEMBERT (1717–1783), DANIEL BERNOULLI (1700–1782) and finally LAGRANGE (1736–1813) solved the problem completely without any limiting conditions.

<sup>3</sup>)  $V = f\lambda$ ;  $v$  velocity;  $f$  frequency;  $\lambda$  wave length;  $f = 1/2\pi (1/g)^{1/2}$ ;  $f$  frequency;  $l$  length of a pendulum;  $g$  gravity.

In 1755 DANIEL BERNOULLI published his famous principle of superposition<sup>4)</sup> which was a bold anticipation because of the limited mathematical knowledge then available to the physicist. The rigid proof of this principle with extensions and practical applications to the theory of oscillations and acoustics was made in 1822 by FOURIER (1768–1830) who also postulated and proved a theorem<sup>5)</sup> which is of fundamental practical importance, in daily use in all vibration engineering.

Any review of technological improvements or of the development of the sciences will reveal that they follow a certain historical pattern. With but few exceptions successful inventions and new theories are put forth at the time when the world is ripe for them. When technology is starved for new materials, different processes, new manufacturing methods, etc., some outstanding personality is born who integrates the isolated, already existing approaches to separate but related problems and gives the world the practical method of exploiting that science.

This was precisely the state of affairs with respect to the theory of oscillation and sound in the middle of the 19th century. Industry had progressed to a point where all kinds of machines were being built. Theaters, auditoria, arenas, sports palaces were being erected all over the world. The machines often vibrated and broke down, the magnificent edifices were sometimes acoustical monstrosities built without regard to science and had to be rebuilt frequently to make understanding of speech and appreciation of music possible.

The man who integrated all the available knowledge on vibration and sound, filling in the existing gaps by his own researches, to whom this and future generations of engineers are indebted for the first complete, formal and highly practical presentation of the theory of vibration and sound is JOHN WILLIAM STRUTT, Baron RAYLEIGH (1842–1919). Lord RAYLEIGH was able to make a complete synthesis of the experimental data and rewrite the theory for the engineer who, unlike the theoretical scientist, has to work under real and not idealized conditions. Most of the experimental findings available at that time had been discussed by their authors in impractical ways with little attempt at a true dynamical explanation. RAYLEIGH checked such experiments and presented the data with the necessary rigid mathematical proofs.

During his lifetime Lord RAYLEIGH published some 450 scientific papers covering all branches of physics. Of these, 128 were devoted to vibration and acoustics. These were later collected, edited and put together in a two-volume book entitled *The Theory of Sound*, published in 1870. A second edition appeared in 1894 which was reprinted without change in 1926, 1929 and 1945. As one of his biographers, Prof. B. LINDSAY, says: 'This record of devotion to

<sup>4)</sup> The total displacement of a system acted on by a number of forces can be found by solving the problem for each applied force separately and adding together all the resulting solutions.

<sup>5)</sup> Any periodic function can be represented as a sum of sines or cosines.

a single department of thought is undoubtedly unique in the annals of science.'

RAYLEIGH's original contributions to the science of vibration engineering are many. A few of the less well-known may be mentioned here. He was the first to measure sound objectively and his classical method is based on the finding that a suspended disk tends to set itself at right angles to the to-and-fro motion of the particles in a sound wave. In using this device, the disk, supported by a torsion-bar suspension, is placed where an antinode will be situated in a resonating tube, its plane making an angle of  $45^\circ$  with the axis of the tube. When a sound is established in the tube, a torque will act on the disk and deflect it, the torque being proportional to the intensity of the sound. The method by which it is possible to find approximately the lowest (fundamental) frequency of a string or a bar with variable cross section is due to him and led AUREL STODOLA (1860-1943) to the publication in 1907 of a method of calculating natural frequencies of crankshafts and turbine disks. RAYLEIGH was the first to point out the physical nature of sound absorption giving formulae relating the porosity of a material with its sound absorbing qualities and also gave the architectural profession several useful ideas pertaining to optimum reverberation time in an auditorium.

RAYLEIGH's book contains all the basic information on vibration the specialist needs. Even such up-to-date design ideas as decoupling of the modes by establishing the coincidence of the center of gravity with the elastic center will be found in this work.

Many problems in vibration engineering are solved by assuming small displacements, thereby linearizing the equation of motion. RAYLEIGH correctly warns his readers that such a procedure may not always be correct, thereby anticipating the latest development in oscillatory science -- nonlinear mechanics.

After RAYLEIGH's death, vibration engineering continued to develop rapidly particularly in the branches which he had not explored in his researches. The great expansion of telephone networks throughout the world and especially in the United States, Sweden and Switzerland, made the understanding of the physical aspect of speech and hearing of paramount importance. At the same time, due to electronic developments, the technique of reproducing, recording and measuring objectively the amplitude, frequency and wave form of sound became routine laboratory assignment. Thus in the 1920's one finds the nature of speech and hearing explored by Dr. FLETCHER of Columbia University in such a way that the engineer, the physiologist and the physician speak the same language and work towards better acoustics in vehicles, quieter factories and offices, better reproduction of speech in theaters and classrooms, better hearing aids for the deaf. Simultaneously, the work on acoustical materials, concepts of sound absorption, transmission loss, attenuation, ultimate rever-

beration time, etc., are clarified and formulated by Drs. WALLACE C. SABINE of Harvard and VERN KNUDSEN of the University of California, pioneers of American architectural acoustics.

While in RAYLEIGH's time acoustics and any other vibration phenomenon were treated together, in the last thirty years, due to the vast amount of information available, four distinct specialties have developed: mechanical vibration engineering, acoustical engineering, flutter engineering, electrical oscillation engineering. All four are of equal importance to aeronautics and each has its experts – many of them will be remembered as pioneers in specialized vibration problems. Some, still young to-day, have already earned permanent niches in the engineering hall of fame.

Mechanical vibration, its elimination or isolation, elastic stability and its influence on fatigue life of airplane structures, became better understood after the publication of a formal book by the Russian-American STEPHEN TIMOSHENKO. His treatise, *Vibration Problems in Engineering* (now in its fourth edition) is almost as fundamental as RAYLEIGH's. DAVIS of the NPL in England and CHRISLER of the NBS in the USA (in 1929) provided a theoretical foundation for the subsequent soundproofing of airplanes applied practically in the USA by the author<sup>6</sup>). VON KÁRMÁN, THEODORSEN, FREBERG, and KEMLER gave us theories of flutter generation and a method of designing so as to prevent the occurrence of this dangerous phenomenon. In electrical engineering, VAN DER POL laid before the world a whole series of oscillatory phenomena which are found also in problems dealing with supersonic flow and in many automatic control designs.

It is VAN DER POL's work which alerted the engineers and made them take the nonlinearity of some of the problems (correctly predicted by RAYLEIGH) seriously under consideration, and in doing so they were catapulted into an entirely new branch of mechanics – the whole field of nonlinear oscillation.

Nonlinear mechanics is a branch of physics where the equation of motion cannot be represented by the familiar second order differential equation with constant coefficients<sup>7</sup>).

EULER, LAGRANGE, POINSON, in the 18th century, already realized that such problems would be encountered. Their efforts to provide solutions followed the tendency to linearize by confining the parameters to small motions. Applying the same thought to large displacements, one finds that this approach is completely inadequate. At the end of the last century, POINCARÉ discovered that nonlinear problems have certain closed characteristics, called 'limit cycles', giving at least an indication of the general character of the solution. For

<sup>6</sup>) S. J. ZAND, *Etude du confort au bord d'avion de transport*, L'Aéronautique 1936 (June), and S. J. ZAND, *Acoustics and the Aeroplane*, SAE Jl. 1934 (February).

<sup>7</sup>) Typical linear:  $m \ddot{x} + 2h \dot{x} + K = F(t)$ ; motion of mass under influence of spring with friction.

Typical nonlinear:  $\ddot{x} + (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0$ ; Van der Pol-vacuum tube oscillator.



example, while there is no general solution of the Van der Pol equation, it is known (1) that there is a unique periodic stable solution, and (2) that every solution tends asymptotically to the periodic solution. This knowledge is of great practical significance. For a quarter of a century POINCARÉ's work – except in astronomical circles – remained hidden in philosophical files until brought to light by VAN DER POL some thirty years ago. Strangely, the theoretical continuation of VAN DER POL's ideas was largely conducted in the USSR under the direction of MANDLESTAM, PAPALEXI, KRYLOFF and BOGOLIUBOFF. In America VON KÁRMÁN introduced this science to the aeronautical profession<sup>8)</sup>, while MINORSKY's excellent text<sup>9)</sup> permitted a deeper insight into a number of nonlinear hydrodynamic problems.

The established design principles of aeronautics – lightness, great power output per unit of weight, high velocities – are applied as criteria in other branches of engineering. The aeronautical methods, while sound, and from the point of economy, supreme, are, however, most conducive to the generation and transmission of vibration. Thus vibration engineering in the future will play an even more important role in technology.

Vibration is not always destructive – it can often be used to advantage: mixing paints, sorting coal, separating different sizes of many materials, making cores for castings, etc.

Knowledge of vibration is of utmost importance in atomic physics because the particles of the universe are constantly subject to periodic oscillations. Let us for an instant approach vibration engineering from a molecular point of view, and select, from atomic physics, just one single example. Suppose two atoms, one of mass  $m_1$ , the other of mass  $m_2$  are considered. At small displacements, let these atoms be connected by a force of attraction  $F$  which is approximately linear. This relation is that found in the diatomic molecules  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $Cl_2$ , etc. In all of these molecules,  $m_1$  is equal to  $m_2$ . Plotting the potential energy versus increasing interatomic distance point  $A$  (see figure) is the point of minimum potential energy, corresponding to the equilibrium separation of the atoms.

If, because of external forces (electric or magnetic field), the atoms separate, a force of attraction tends to return them to  $A$ ; if they are compressed toward each other, a repulsive force tends to return them to the original position  $A$ . Atoms joined in this manner do, at ordinary temperatures, vibrate about the point  $A$  with a frequency equal to

$$f_m = \frac{1}{2} \left( \frac{F}{\mu} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

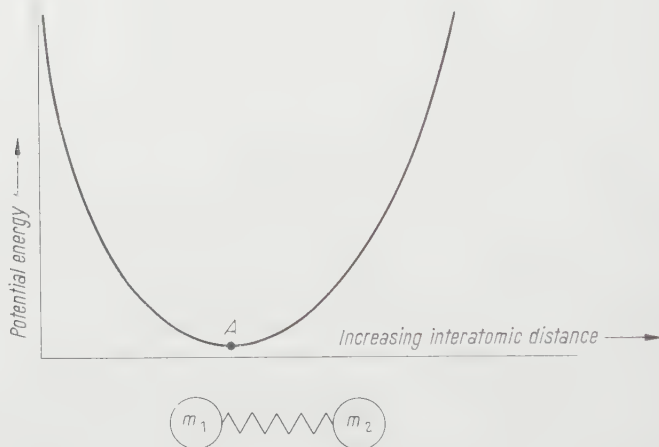
<sup>8)</sup> TH. VON KÁRMÁN, *The Engineer Grapples with Nonlinear Problems*, Amer. math. Soc. 46, 8 (1940).

<sup>9)</sup> N. MINORSKY, *Introduction to Nonlinear Mechanics* (Edward Brothters, Ann Arbor, Michigan, 1947).

where  $F$  is the spring force between the atoms, and

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}.$$

$F$  can be expressed as  $2a^2D$ , where  $D$  is the heat required to decompose the dumbbell molecule.  $F$  is a constant, characterizing the curvature at  $A$  of the



Potential energy versus interatomic distance. Point  $A$  is the point of minimal potential energy.

potential energy-separation diagram. Equation (1) is the classical vibration equation describing any mass spring system. If  $m_1 = m_2$ , then the frequency  $f_m = \pi/2 (K/m)^{1/2}$ , where  $K = 2F$ . Of what actual significance is this molecular frequency? Due to thermal excitation, the atoms constituting a molecule possess energy of vibration. This particular frequency of vibration is the infrared frequency of the molecule. Thus a molecule consisting of two atoms, with a force holding the nuclei at a fixed distance apart will have one and only one characteristic vibration frequency  $f_m$ . This frequency is due to the vibration of the atoms towards and away from each other. Furthermore, it has been shown that this frequency is the frequency of radiation emitted by the molecule and finally the frequency absorbed during permanent excitation. We also know that the fundamental molecular frequency determines the Raman spectra. In the Raman scattering process, in which the molecule is not permanently excited to a higher level, the frequency of the scattered light is always less than that of the incident light, by the value  $f_i - f_s = f_m$ , where  $f_i$  is the frequency of the incident radiation,  $f_s$  that of the scattered radiation, and  $f_m$  is the natural molecular frequency derived previously. The laws and methods applied



in the analysis of mechanical, acoustical or electrical vibration are obviously valid and applicable in the study of atomic or nuclear physics. Since nuclear physics deals with the most fundamental concepts of matter, one should really say that all vibration laws derived in nuclear physics are universally applicable.

The most important tool in all researches, as this resume purports to show, is the human mind. Let us continue our studies not only to make our machines better but to explore the basic mysteries of the universe. Let us believe with POINCARÉ that 'what makes these periodic solutions so valuable is the fact that they are, so to speak, the only breach through which we can penetrate a realm heretofore deemed inaccessible', namely the Infinite.

### *Résumé*

Le problème des vibrations dans la technique moderne, particulièrement dans l'aviation, est un objet de recherches très approfondies auxquelles participent des savants et des ingénieurs de tous les pays. On croirait qu'il s'agit d'un phénomène découvert dans notre siècle, mais, une étude superficielle déjà, comme celle de l'auteur, démontre que GALILÉE fut le premier à étudier les oscillations d'un pendule simple et que grâce à lui HUYGHENS, HOOKE et quelques autres purent inventer des horloges et des montres de précision, munies de pendules soit linéaires soit à torsion. Les contributions de NEWTON vont davantage au fond de la question, particulièrement dans ses recherches sur la théorie des ondes. L'ère de BERNOLLI, FOURIER et LAGRANGE est discutée brièvement et sert d'introduction aux travaux de Lord RAYLEIGH, un des géants de l'acoustique. Les contributions des ingénieurs et physiciens des dernières soixante années sont mentionnées ainsi que des observations sur les phénomènes nonlinéaires. Pour conclure et pour démontrer que les problèmes vibratoires sont universels, l'article se termine par une citation d'un exemple de la physique atomique.

(Received: July 26, 1957.)

# An Attempt to Generalize Onsager's Principle, and its Significance for Rheological Problems<sup>1)</sup>

By HANS ZIEGLER, Zürich, Schweiz<sup>2)</sup>

## 1. Introduction

Recent developments in rheology emphasize the thermodynamic aspect of the problems treated. In thermoelasticity, for instance, the field of classical elasticity is extended to include influences of temperature differences and heat flow [1]<sup>3)</sup>. While the phenomena considered here are reversible (by definition), other trends of research are concerned with irreversible processes. A. P. GREEN [2] and W. PRAGER ([3], p. 83) have pointed out that in the solution of problems of plastic flow it is indispensable to assure a positive sign of the rate of dissipation work throughout the body. M. A. BIOT [4] stressed the importance of irreversible thermodynamics for viscoelasticity. He used the relations of L. ONSAGER [5, 6] to establish a perfect analogy between problems of elastic deformation and viscous flow. This proof of the so-called viscoelastic analogy has the advantage of being independent of any conditions of symmetry or isotropy; it is restricted, however, to linear rheological laws, since ONSAGER's relations are meaningful only in the linear case.

In a recent paper [7]<sup>4)</sup> the author suggested (without proof) a generalization of ONSAGER's theory for nonlinear phenomenological laws. Such a generalization is of particular interest in connection with rheology, since it allows to establish the viscoelastic analogy in full generality, and at the same time to lay a foundation for the theory of plastic potential of R. v. MISES [8] which, in the generalized form due to W. PRAGER ([3], p. 18), is one of the central pillars of the theory of plasticity.

This paper is an attempt to prove the suggested generalization of ONSAGER's relations. This can be done in full generality for arbitrary irreversible processes (sections 4 and 5). Since, however, the need for this generalization

---

<sup>1)</sup> The results presented in this paper were obtained in the course of research sponsored by the Office of Ordnance Research, Department of the Army, under Contract No. DA-19-020-3487.

The author is indebted to Professors W. PRAGER and R. S. RIVLIN for their helpful advice.

<sup>2)</sup> ETH, 1956/57 Brown University, Providence, R. I., USA.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 762.

<sup>4)</sup> This paper was written in ignorance of Biot's work.

arose in connection with rheology, the exposition of the problem (sections 2 and 3) and the evaluation of the results (section 6) will be restricted to this particular field.

## 2. The Rheologic Problem

In certain rheologic bodies (Maxwell body, Prandtl-Reuss body) each of the deformations  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) is the sum

$$x_k = x_k^e + x_k^i \quad (2.1)$$

of an elastic and an inelastic component, where the distinction between the two types of deformation is based on a definition to be given presently. If  $\theta$  is the temperature of the body, the quantities  $x_k^e$ ,  $x_k^i$ , and  $\theta$  may be considered as the independent thermodynamic state-variables. In order to assure that the state of the body at any time is entirely determined by these quantities, it is necessary to confine the following considerations to sufficiently small bodies or to sufficiently slow changes of state.

The work of the external forces  $X_k$  in an arbitrary change of state is given by

$$dW = X_k (dx_k^e + dx_k^i) \quad (2.2)$$

If  $dQ$  denotes the induced heat, the *first fundamental theorem* of thermodynamics takes the form

$$dW + dQ = dU, \quad (2.3)$$

where  $U(x_k^e, x_k^i, \theta)$  is a single-valued state-function, called the *internal energy* of the body.

From (2.2) and (2.3) follows

$$dQ = dU - dW = \left( \frac{\partial U}{\partial x_k^e} - X_k \right) dx_k^e + \left( \frac{\partial U}{\partial x_k^i} - X_k \right) dx_k^i + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta. \quad (2.4)$$

According to the *second fundamental theorem* of thermodynamics

$$dQ \leq \theta dS, \quad (2.5)$$

where  $S(x_k^e, x_k^i, \theta)$  is another single-valued state-function, called the *entropy* of the body. For reversible changes of state (2.5) is an equality; for irreversible processes it is an inequality.

We now distinguish between  $x_k^e$  and  $x_k^i$  by the definition that the elastic deformations be reversible changes of state, while the inelastic deformations are irreversible. From (2.4) and from relation (2.5), interpreted as an equation

<sup>5)</sup> Throughout this paper the summation convention is adopted for subscripts.

for elastic processes  $dx_k^i = 0$ , we obtain

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x_k^e} - X_k \right) dx_k^e + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta = \theta dS. \quad (2.6)$$

It follows that

$$\frac{\partial S}{\partial x_k^e} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{\partial U}{\partial x_k^e} - X_k \right), \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (2.7)$$

For the partial derivatives  $\partial S / \partial x_k^i$  no similar relations hold.

It is useful to introduce a third single-valued state function

$$F(x_k^e, x_k^i, \theta) = U - \theta S, \quad (2.8)$$

called the *free energy* of the body. According to (2.7) and (2.8)

$$X_k = \frac{\partial F}{\partial x_k^e}, \quad -S = \frac{\partial F}{\partial \theta}. \quad (2.9)$$

Thus the dependent state-variables  $X_i$ ,  $-S$  can be obtained as partial derivatives of the free energy with respect to the corresponding independent variables  $x_k^e$ ,  $\theta$ . The function  $F$  therefore is sometimes called the *thermoelastic potential* of the body. According to (2.9) the thermoelastic behaviour (the elastic constants, the thermic deformation coefficients and the specific heats) is fully determined by the function  $F$  and generally depends on the inelastic deformations  $x_k^i$ .

From now on we confine ourselves to bodies the thermoelastic behaviour of which is independent of the inelastic deformations. On account of (2.9) the free energy of such a body is a sum of the form  $F(x_k^e, \theta) + f(x_k^i)$ . According to the last equation (2.9) the entropy has the form  $S(x_k^e, \theta)$ , and due to (2.8) the internal energy is given by  $U(x_k^e, \theta) + f(x_k^i)$ . Reviewing relations (2.1) through (2.9) we note that the function  $f(x_k^i)$  only appears in (2.4). As a consequence of this the inelastic-thermic behaviour (e. g., the specific heats of the inelastic body and its response to given external forces) generally depends on the inelastic deformations. We exclude this dependence as well, setting  $f(x_k^i) = 0$ , so that  $U = U(x_k^e, \theta)$  and  $S = S(x_k^e, \theta)$ .

In the discussion of the elastic behaviour it is customary to use the fact that the heat production is small. If the changes of state are isothermal, the temperature is no more a state-variable. The free energy, dependent on the elastic deformations  $x_k^e$  alone, becomes the elastic potential  $\Phi(x_k^e)$ , and the forces are given, according to (2.9), by

$$X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i^e}. \quad (2.10)$$

The changes of state, however, can also be considered as adiabatic. Setting  $dx_k^i = 0$  and  $dQ = 0$  in (2.2) and (2.3), we obtain in this case  $dU = X_k dx_k^e$ .

The internal energy again is independent of the temperature, and the forces follow once more from (2.10), where  $\Phi(x_k^e)$  now is the internal energy.

Relation (2.10) represents the general rheologic law for isothermally or adiabatically elastic bodies. This law can be linearized for small deformations by assuming that  $\Phi$  is a (positive definite) quadratic form

$$\Phi(x_k^e) = \frac{1}{2} a_{ik} x_i^e x_k^e \quad (2.11)$$

of the elastic deformations. The generality of (2.11) is not restricted by the further assumption that the matrix be symmetric, i. e., that

$$a_{ki} = a_{ik}. \quad (2.12)$$

The law (2.10) now takes the form

$$X_i = a_{ik} x_k^e, \quad (2.13)$$

and due to (2.12) we have

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_i^e} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k^e}. \quad (2.14)$$

If also inelastic deformations are present, (2.5) is to be interpreted as an inequality. According to (2.4) through (2.6)

$$dQ = \theta dS - X_k dx_k^i < \theta dS. \quad (2.15)$$

Thus the so-called *dissipation work*  $dW^d = X_k dx_k^i$  is subject to the inequality

$$dW^d = X_k dx_k^i > 0, \quad (2.16)$$

and the increase of entropy is given by

$$dS = \frac{1}{\theta} (dQ + dW^d). \quad (2.17)$$

From (2.16) and (2.17) follows as expected that every adiabatic inelastic deformation increases the entropy.

According to CARNOT and CLAUSIUS the entropy increment  $dS$  may be considered as the sum

$$dS = dS^e + dS^i = \frac{dQ}{\theta} + dS^i \quad (2.18)$$

of the entropy supply  $dS^e = dQ/\theta$  from outside and the entropy production inside the body which, according to (2.16) through (2.18), is given by

$$dS^i = \frac{\partial W^d}{\theta} = \frac{1}{\theta} X_k dx_k^i > 0. \quad (2.19)$$

While

$$L^d = X_k \dot{x}_k^i > 0 \quad (2.20)$$

represents the *rate of dissipation work*, the *rate of entropy production* is

$$\dot{S}^i = \frac{L^d}{\theta} = \frac{1}{\theta} X_k \dot{x}_k^i > 0. \quad (2.21)$$

The foregoing considerations are based alone on the fundamental theorems of thermodynamics. As far as the thermoelastic behaviour is concerned, the results are complete, as soon as the free energy is known. Concerning the inelastic behaviour, however, little is known apart from the fact that the dissipation work is always positive.

### 3. Onsager's Relations

In certain cases ONSAGER's theory [5, 6] supplies the additional information needed concerning the inelastic behaviour of the body under consideration. ONSAGER's theory applies to any kind of irreversible process. It is based essentially on the assumption of microscopic reversibility and can be stated as follows:

Let

$$L^d = X_k \dot{x}_k \quad (3.1)$$

be the rate of dissipation work of an irreversible process. Provided the 'velocities'  $\dot{x}_k$  and the corresponding 'forces'  $X_i$  are connected by the linear relations

$$X_i = a_{ik} \dot{x}_k, \quad (3.2)$$

then the matrix  $(a_{ik})$  is symmetric, i. e.,

$$a_{ki} = a_{ik}. \quad (3.3)$$

The linear relations (3.2) are called the *phenomenological law* of the process, and (3.3) are ONSAGER's *reciprocal relations*.

In a rheologic process the  $\dot{x}_k$  are the inelastic rates of deformation. Since the elastic behaviour has been disposed of, the superscript  $i$  can be suppressed from here on. The  $X_i$  are the external forces; (3.2) is the rheologic law of a linear inelastic body, and (3.3) represents the same symmetry as (2.12) in the case of a linear elastic body. The coincidence of (2.12) and (3.3) establishes the visco-elastic analogy for linear bodies (i. e., between a linear Newton body and a linear Hooke body or between the inelastic and elastic responses to external forces of a linear Maxwell body).

The symmetry expressed by (3.3) also holds for the inversion of the phenomenological law,

$$\dot{x}_k = b_{ki} X_i \quad \text{with} \quad b_{ki} = \frac{A_{ik}}{a}, \quad (3.4)$$



where  $a_{ik} = 1/a_{ki}$  and  $A_{ik}$  is the cofactor of  $a_{ik}$  in this determinant. For from the symmetry of  $(a_{ik})$  follows  $A_{ki} = A_{ik}$  and hence

$$b_{ik} = b_{ki}. \quad (3.5)$$

Due to (3.2) ONsager's relations (3.3) can also be written in the form

$$\frac{\partial X_k}{\partial \dot{X}_i} = \frac{\partial X_i}{\partial \dot{X}_k}. \quad (3.6)$$

It follows that the forces are the partial derivatives

$$X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{X}_i} \quad (3.7)$$

of a function

$$\Phi(\dot{x}_k) = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \quad (3.8)$$

This means that the force vector  $X_i$  is 'vortex-free' in the space  $\dot{x}_k$  and hence is the gradient of a potential  $\Phi(\dot{x}_k)$ .

Similarly (3.4) and (3.5) yield

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_k} = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial X_i} \quad (3.9)$$

and thus

$$\dot{x}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial X_i} \quad (3.10)$$

with

$$\Psi(X_i) = \frac{1}{2} b_{ki} X_k X_i. \quad (3.11)$$

The connection between the functions  $\Phi(\dot{x}_k)$  and  $\Psi(X_i)$  is, according to (3.11), (3.2), (3.4), (3.3) and (3.8),

$$\left. \begin{aligned} \Psi(X_i) &= \frac{1}{2} b_{ki} a_{kj} a_{il} \dot{x}_j \dot{x}_l = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_{ik}}{a} a_{kj} a_{il} \dot{x}_j \dot{x}_l \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} a_{il} \dot{x}_j \dot{x}_l = \frac{1}{2} a_{jl} \dot{x}_j \dot{x}_l = \Phi(\dot{x}_k), \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

where  $\dot{x}_k$  and  $X_i$  are values connected by the phenomenological law (3.2). This means that the velocity vector  $\dot{x}_k$  is 'vortex-free' in the space  $X_i$  and hence is the gradient of a potential  $\Psi(X_i)$ .

The phenomenological law (3.2) supplies a reversibly single-valued transformation of the space  $\dot{x}_k$  (the space of deformation rate) onto the space  $X_i$  (the force space). The inversion of this transformation is given by (3.4). From  $\Phi = \text{const}$  follows, according to (3.12),  $\Psi = \text{const}$  and vice versa: the potential surfaces in one space are the images of those in the other space. According to

(3.2) and (3.4) the rate of dissipation work is

$$L^d = a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k = 2\Phi \quad \text{or} \quad L^d = b_{ki} X_k X_i = 2\Psi. \quad (3.13)$$

Due to (2.20), i. e., to the second fundamental theorem of thermodynamics, these expressions are positive for any nonvanishing vector  $\dot{x}_k$  or  $X_i$  respectively. Hence the matrices  $(a_{ik})$  and  $(b_{ki})$  are positive definite, and the surfaces  $\Phi = \text{const}$  and  $\Psi = \text{const}$  are ellipsoids.

Figure 1 illustrates the results in two dimensions, the quadratic forms (3.13) being transformed on normal coordinates.

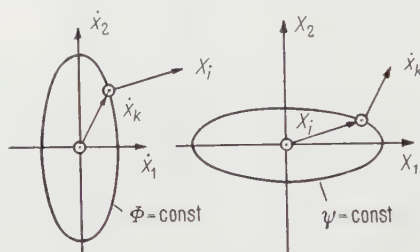


Figure 1

ONSAGER's law (3.7), (3.8) and its inversion (3.10).

#### 4. A Generalization

In order to prove his relations (3.3), ONSAGER considered the statistical aspect of the fluctuations occurring in irreversible processes, making use of the following assumptions [6]: In the first place, the microscopic fluctuations about a state of equilibrium are assumed to be reversible. In the second place, it is supposed that the regression of fluctuations obeys the same laws as a macroscopic process.

For nonlinear phenomenological laws ONSAGER's relations are meaningless. In the form given by (3.6) or (3.7), however, the results can be generalized, if two assumptions are accepted that correspond in a certain sense to ONSAGER's postulates.

From the viewpoint of statistical mechanics, a thermodynamic system with the state variables  $x_k$ ,  $\theta$  is a mechanical system with a great number of degrees of freedom most of which are latent from the phenomenological point of view. Beside the external coordinates  $x_k$  there are a large number of internal coordinates  $q_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots$ ). If  $T$  is the kinetic energy of the system and if the  $Q_\lambda$  are its generalized forces, the motion for given values of the external coordinates  $x_k$  may be obtained by LAGRANGE's differential equations

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} = Q_\lambda. \quad (4.1)$$

It is customary to assume [9] that the system is conservative and nongyroscopic [10]. Clearly this assumption is equivalent to ONSAGER's first postulate (microscopic reversibility). The generalized forces then are the negative partial derivatives

$$Q_\lambda = - \frac{\partial}{\partial q_\lambda} V(q_\lambda, x_k) \quad (4.2)$$

of a potential energy dependent on the internal and external coordinates.

Let us now assume that the external velocities  $\dot{x}_k$  are prescribed constants. Then the partial derivatives  $\partial V / \partial q_\lambda$  are known functions of the  $q_\lambda$  and of  $t$ . Integration of (4.1) supplies the  $q_\lambda$  as functions of the time and of the initial conditions. In other words: the motion of the system is entirely determined by the initial conditions and the velocities  $\dot{x}_k$ . Hence, also the rate of increase  $\dot{U}$  of the total energy

$$U = T + V \quad (4.3)$$

only depends on the initial conditions and on the  $\dot{x}_k$ .

From the phenomenological point of view the rate of energy increase can be considered as a mean value  $\bar{\dot{U}}$  over a sufficiently long time interval. It only depends on the  $\dot{x}_k$ , and this remains true in the case where the  $\dot{x}_k$  are functions of the time, provided they vary so slowly that they can be considered constant over the time intervals needed for the averaging process just mentioned. The phenomenological rate of energy increase in an adiabatic process of this type thus is represented by a *dissipation function*

$$\dot{U} = D(\dot{x}_k). \quad (4.4)$$

This function, defined without reference to the external forces, can be represented in velocity space by means of surfaces  $D = \text{const}$  (see Figure 2, illustrating this statement for two dimensions).

Let us now consider the case where instead of the  $\dot{x}_k$  the external forces  $X_i$  are prescribed constants. The velocities  $\dot{x}_k$  then fluctuate about certain mean values  $\dot{x}_k^m$ , and the connection between these mean values  $\dot{x}_k^m$  and the  $X_i$  obviously represents the phenomenological law of the process. If we assume that the fluctuations

$$\delta \dot{x}_k = \dot{x}_k - \dot{x}_k^m \quad (4.5)$$

are slow compared with the molecular velocities (this assumption corresponding to the second of ONSAGER's postulates), the energy increase (4.4) at any instant depends on the actual velocities  $\dot{x}_k$ . According to the first fundamental law the rate of work of the  $X_i$  in an adiabatic process must be equal to the rate of increase of the internal energy. We have therefore

$$X_k \dot{x}_k = \bar{\dot{U}} = D(\dot{x}_k), \quad (4.6)$$

and due to the second fundamental theorem this quantity is positive for any nonvanishing state of motion  $\dot{x}_k$ .

Let us now – still under the assumption that the  $X_i$  are kept constant – pick out two states of motion  $\dot{x}_k^m$  and  $\dot{x}_k = \dot{x}_k^m + \delta \dot{x}_k$  for which  $D(\dot{x}_k^m) = D(\dot{x}_k)$ , their representative points (Figure 2) thus lying on the same surface  $D = \text{const.}$

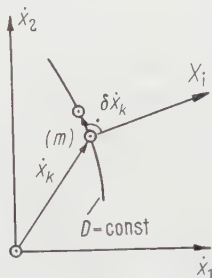


Figure 2  
Vector  $X_i$  and surface  $D = \text{const.}$

From (4.6) follows

$$X_k \dot{x}_k^m = X_k \dot{x}_k = X_k (\dot{x}_k^m + \delta \dot{x}_k) \quad (4.7)$$

or

$$X_k \delta \dot{x}_k = 0; \quad (4.8)$$

hence, the vector  $X_i$  must be normal to the surface  $D = \text{const}$  in the domain of the values  $\dot{x}_k$  compatible with  $X_i$ .

Phenomenologically, the fluctuations  $\delta \dot{x}_k$  under a given vector  $X_i$  are imperceptible. From this point of view a force  $X_i$  defines a velocity  $\dot{x}_k$ , and the superscript  $m$  can now be dropped. If (4.6) is applied to this phenomenological velocity  $\dot{x}_k$ , we have

$$L^d = X_k \dot{x}_k = D(\dot{x}_k) \text{ positive definite.} \quad (4.9)$$

Condition (4.8) is equivalent to the statement that  $X_i$  is parallel to the gradient of  $D$  at  $\dot{x}_k$ . According to (4.9) the scalar product  $X_k \dot{x}_k$  is positive in the whole space  $\dot{x}_k$  with the exception of the origin. The surfaces  $D = \text{const}$  therefore are concave with respect to the origin.

Analytically the fact that  $X_i$  is perpendicular to the surface  $D = \text{const}$  at  $\dot{x}_k$  is expressed by

$$X_i = f(\dot{x}_k) \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}, \quad (4.10)$$

where  $f(\dot{x}_k)$  is an arbitrary function. Due to (4.9), however, the functions  $f(\dot{x}_k)$  and  $D(\dot{x}_k)$  are connected by the condition

$$D = f \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k. \quad (4.11)$$

It follows that the phenomenological law has the form

$$X_i = \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k \right)^{-1} D \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}. \quad (4.12)$$

Relation (4.12) [or (4.10) together with one of the relations (4.9), (4.11)] is the generalization of ONSAGER'S theory we were looking for. It represents the most general phenomenological law for a purely irreversible process subject to the two assumptions made in the derivation.

If we require that the  $X_i$  be linear functions

$$X_i = a_{ik} \dot{x}_k \quad (4.13)$$

of the  $\dot{x}_k$ ,  $D(\dot{x}_k)$ , according to (4.9), is a quadratic form

$$D = a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \quad (4.14)$$

positive definite, but not necessarily symmetric. Due to (4.10), however,

$$X_i = f(\dot{x}_k) (a_{ik} + a_{ki}) \dot{x}_k. \quad (4.15)$$

Since (4.13) and (4.15) must be identical for any values of  $i$  and  $k$ , we obtain  $f = 1/2$  and

$$a_{ki} = a_{ik}, \quad (4.16)$$

i. e., ONSAGER'S relations (3.3).

## 5. An Important Special Case

From a physical point of view we are particularly (if not exclusively) interested in phenomenological laws of a special kind, namely in laws where the directions of the vectors  $\dot{x}_k$  and  $X_i$  determine each other independently of their magnitudes. In other words: the vectors  $X_i$  for all points  $\dot{x}_k$  on a radius from the origin in the space  $\dot{x}_k$  have the same direction. It follows at once that in this case the surfaces  $D = \text{const}$  are similar and similarly situated with respect to the origin.

Let us assume that an arbitrary function  $G(\dot{x}_k)$  has similar surfaces  $G = \text{const}$ , similarly situated with respect to the origin. If we start from different points  $\dot{x}_k$  on an arbitrary surface  $G = \text{const}$  and carry out small steps

$$d\dot{x}_k = \dot{x}_k d\varepsilon \quad (5.1)$$

in the directions and proportional to, the vectors  $\dot{x}_k$ , then, according to (5.1),

$$dG = \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_k} d\dot{x}_k = \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k d\varepsilon. \quad (5.2)$$

Due to the similarity assumed these steps end on another surface  $G = \text{const.}$  Hence the right-hand side of (5.2) is the same for all starting points, i. e.,

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = g(G). \quad (5.3)$$

Applying (5.3) to the dissipation function  $D$  and making use of (4.11), we obtain

$$\frac{D}{f} = g(D). \quad (5.4)$$

It follows that  $f$  is a function of  $D$ , i. e.,

$$f(\dot{x}_k) = \varphi(D). \quad (5.5)$$

Let a function  $\Phi$  be defined by

$$\Phi = \int \varphi(D) dD \quad (5.6)$$

and let the additional constant contained in (5.6) be fixed by setting

$$\Phi(D = 0) = 0. \quad (5.7)$$

Then

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dD}, \quad (5.8)$$

and the rheologic law (4.10) becomes, due to (5.5) and (5.8),

$$X_i = \varphi \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d\Phi}{dD} \cdot \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \quad (5.9)$$

or

$$X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} \quad (5.10)$$

as in (3.7). Hence, the force vector  $X_i$  again is the gradient of a potential  $\Phi(\dot{x}_k)$  in velocity space, and since such a gradient is 'vortex-free', the generalized Onsager relations (3.6)

$$\frac{\partial X_k}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial X_i}{\partial \dot{x}_k} \quad (5.11)$$

hold.

If (5.10) or (5.11) are interpreted as rheologic relations, either of these equations [by comparison with (2.10) or (2.14)] establishes the viscoelastic analogy for non-linear Newton and Maxwell bodies with rheologic laws satisfying the condition stated at the beginning of this section.

The potential  $\Phi(x_k)$ , however, is not an arbitrary function. According to (5.6) the surfaces  $\Phi = \text{const}$  coincide with the surfaces  $D = \text{const}$ . Hence, they are similar and similarly situated with respect to the origin. It follows that a relation of the type (5.3) also holds for  $\Phi$ ; the potential function thus must



satisfy the condition

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = h(\Phi). \quad (5.12)$$

It is easy to see that this condition is satisfied by any homogeneous function [11] of the  $\dot{x}_k$ , particularly by any entire rational function of arbitrary degree  $n$ . There are, however, more general solutions of (5.12).

By means of LEGENDRE'S transformation [12]<sup>6)</sup>, these results can be extended. Let us assume for convenience that the phenomenological law (5.10) is single-valued. Due to (5.7) and to the fact that  $D = 0$  at the origin  $o$  of the space  $\dot{x}_k$ , the function  $\Phi(\dot{x}_k)$  vanishes at  $o$ . Relation (5.10) supplies a single-valued transformation of a domain  $g$  in the space  $\dot{x}_k$  (the domain of definition of the function  $\Phi$ ) onto a domain  $G$  in the space  $X_i$ . Let us assume further that the inversion of the phenomenological law,

$$\dot{x}_k = \dot{x}_k(X_i), \quad (5.13)$$

is also single-valued, supplying a single-valued transformation of  $G$  onto  $g$ . Figure 3 illustrates these transformations in two dimensions. According to

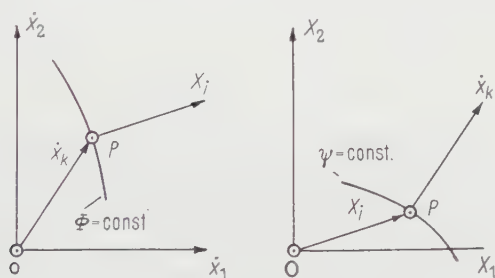


Figure 3

Generalization (5.10), (5.17) of ONSAGER'S law.

section 2 there are no irreversible changes of state without dissipation. Hence the origin  $O$  in the space  $X_i$  is the image of  $o$ ; consequently  $g$  contains  $o$  and  $G$  contains  $O$ .

Let  $c$  be an arbitrary curve in  $g$ , connecting  $o$  with a point  $p$  with coordinates  $\dot{x}_k$ . Let further the point  $P$  with coordinates  $X_k$  be the image of  $p$  in  $G$ . Then the image  $C$  of  $c$  in  $G$  connects the points  $O$  and  $P$ , and we have

$$\int_c X_i d\dot{x}_i + \int_C \dot{x}_i dX_i = \int d(X_i \dot{x}_i) = X_k \dot{x}_k. \quad (5.14)$$

<sup>6)</sup> The analogous transformation for nonlinear Hooke bodies leads to the so-called complementary energy [13].

Making use of (5.10) and of the fact that  $\Phi$  vanishes at  $o$ , we may write instead

$$\int_C \dot{x}_i dX_i = X_k \dot{x}_k - \Phi(\dot{x}_k). \quad (5.15)$$

If on the right-hand side  $\dot{x}_k$  is expressed in terms of  $X_k$  by means of (5.13), the integral on the left-hand side appears as a function

$$\int_C \dot{x}_i dX_i = \Psi(X_k) \quad (5.16)$$

of the coordinates  $X_k$  of  $P$ , and from (5.16) follows

$$\dot{x}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial X_k}. \quad (5.17)$$

Thus, also the inversion (5.13) of the rheologic law can be represented by means of a potential  $\Psi(X_i)$  which, due to (5.16) and (5.15), vanishes at  $O$ . This potential may be called *complementary* to  $\Phi(\dot{x}_k)$ .

Due to (5.10) and (5.17), the dissipation function (4.6) may be written in either one of the two forms

$$D = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k, \quad D = \frac{\partial \Psi}{\partial X_i} X_i. \quad (5.18)$$

Thus,  $D$  in both spaces is the scalar product of the gradient of the potential and the radius vector. Since  $D$  is positive definite, both potentials increase monotonically on every radius from the origin. The potentials  $\Phi(\dot{x}_k)$  and  $\Psi(X_i)$  hence are single-valued functions of their arguments (obviously also in cases where the phenomenological law or/and its inversion are not single-valued).

Due to (5.16) and (5.15)

$$\Phi(\dot{x}_k) + \Psi(X_k) = X_k \dot{x}_k = D. \quad (5.19)$$

According to (5.6) the surfaces  $D = \text{const}$  in the space  $\dot{x}_k$  are also the surfaces  $\Phi = \text{const}$ . If  $\dot{x}_k$  varies on such a surface,  $\Psi(X_k)$ , according to (5.19), is constant as well. It follows that the surfaces  $\Psi = \text{const}$  are the images of the surfaces  $\Phi = \text{const}$  and vice versa, and that both types of surfaces also are the surfaces  $D = \text{const}$  in the corresponding space.

Since  $\Phi(\dot{x}_k)$  increases monotonically on each radius from  $o$ , a given radius intersects a given surface  $\Phi = \text{const}$  in no more than one point  $p$ . Hence, there exists on the corresponding surface  $\Psi = \text{const}$  only one point  $P$  the normal of which has a given direction. It follows that the surfaces  $\Psi = \text{const}$  are convex. In an analogous way the convexity of the surfaces  $\Phi = \text{const}$  may be proved.

## 6. An Application to Plasticity

Let the  $\dot{x}_k$  be the plastic rates of deformation of a perfectly plastic body under the action of the stresses  $X_i$ , and let the yield locus  $H$  be regular and determined by the equation

$$\chi(X_i) = 1, \quad (6.1)$$

where the function  $\chi$  is chosen in such a manner that  $\chi < 1$  inside  $H$ . It is physically evident that this surface is closed and containing the origin  $O$ . Moreover, it is generally accepted that the yield locus is convex. According to the theory of plastic potential of R. v. MISES [8], as generalized by W. PRAGER ([3], p. 18), the velocity vector  $\dot{x}_k$  for a given stress vector  $X_i$  at the yield limit is given by

$$\dot{x}_k = \lambda \frac{\partial \chi}{\partial X_k}, \quad (6.2)$$

where  $\lambda$  is an arbitrary non-negative factor of proportionality.

In this theory two items are extremely probably, but have not been proved so far in a direct and convincing manner. The first one is the convexity of the yield locus<sup>7)</sup>; in the second place there are the relations (6.2)<sup>8)</sup>. In both cases a direct proof is possible on the basis of our theory if we make the plausible assumption that a Prandtl-Reuss body may be considered as the limiting case of a non-linear Newton body with a rheologic law of the type considered in section 5.

In the case of a perfectly plastic body the vector  $\dot{x}_k$  is zero when the end point of  $X_i$  lies in the interior of the yield locus  $H$ . Thus the transformation supplied by the rheologic law is such that the whole interior of  $H$  in the space  $X_i$  corresponds to the origin  $o$  in the space  $\dot{x}_k$ . On the other hand, plastic flow occurs under vectors  $X_i$  with end points on  $H$ . Hence, the whole space  $\dot{x}_k$  with the exception of the origin  $o$  is transformed onto the yield locus  $H$  in the space  $X_i$ . Thus the domain  $g$  of section 5 is the entire space  $\dot{x}_k$ ; the domain  $G$  contains the yield locus  $H$  and its interior. Neither the rheologic law nor its inversion are single-valued. If

$$R = (X_i X_i)^{1/2} \quad (6.3)$$

is the magnitude of an arbitrary radius vector in the space  $X_i$ , the direction of this vector is determined by the ratios

$$a_i = \frac{X_i}{R} \quad (a_i a_i = 1). \quad (6.4)$$

<sup>7)</sup> In applications the yield locus is always convex, and from considerations of uniqueness it seems highly probable that this is always the case. A direct and convincing proof, however, has not been given so far.

<sup>8)</sup> R. v. MISES gave no proof for his relations. W. PRAGER [14] showed that (6.2) is a sufficient condition for a certain uniqueness theorem. A proof given by D. C. DRUCKER [15] is based on an assumption which itself is hypothetical.

The yield locus (6.1) may be described also by an equation of the form

$$R = h(a_i). \quad (6.5)$$

If we set

$$\Psi(X_i) = \left[ \frac{R}{h(a_i)} \right]^n, \quad (6.6)$$

$\Psi$  is a function in the space  $X_i$  which equals 1 on the surface  $H$  and increases on any radius with the  $n$ -th power of the distance from  $O$ . If  $R/h(a_i)$  is constant,  $\Psi$  is constant; the surface  $\Psi = \text{const}$  therefore are similar and similarly situated with respect to  $O$ .

A comparison with section 5 shows that the function  $\Psi$  given by (6.6) defines a nonlinear Newton body with the rheologic law

$$\dot{x}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial X_k}. \quad (6.7)$$

If we assume that  $n > 1$ , the gradient of  $\Psi$  is zero at  $O$  and increases towards  $H$ ; hence, the body defined by (6.7) has a viscosity decreasing with increasing stress. If  $n$  is increased, the region  $K$  where the magnitude of the gradient of  $\Psi$  exceeds an arbitrary small quantity  $\varepsilon$  spreads out more and more towards the surface  $H$ . At the same time, the magnitude of the gradient increases more and more on  $H$ . By increasing  $n$  sufficiently, the region  $K$  can be made as small as desired, and at the same time the magnitude of the gradient can be made arbitrarily large at any point  $P$  of  $H$ . On a radius connecting  $O$  and  $P$ , therefore, the gradient assumes all values of an interval tending to  $0 \dots \infty$  with increasing  $n$  in a vicinity of  $P$  tending to zero, and its direction, perpendicular to the surfaces  $\Psi = \text{const}$ , is that of the normal to  $H$  at  $P$ . Hence, in the limit, (6.7) assumes the form (6.2) with  $\lambda \geq 0$ . Thus, the relation of R. v. MISES is justified under the assumption that the Prandtl-Reuss body is a limiting case of a nonlinear Newton body with a rheologic law of the type treated in section 5. Moreover, this assumption requires that  $H$  be a convex surface. According to section 5 the surfaces  $\Psi = \text{const}$  must be convex, and it is clear that they cannot supply in any limit process a non-convex yield limit.

## REFERENCES

- [1] M. A. BIOT, *Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics*, J. appl. Phys. 27, 240 (1956).
- [2] A. P. GREEN, *The Plastic Yielding of Notched Bars Due to Bending*, Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 223 (1953).
- [3] W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie*, (Basel 1955).
- [4] M. A. BIOT, *Theory of Stress-Strain Relations in Anisotropic Viscoelasticity and Relaxation*, J. appl. Phys. 25, 1385 (1954); *Variational Principles in Irreversible Thermodynamics with Application to Viscoelasticity*, Phys. Rev. 97, 1463 (1955); *Variational and Lagrangian Methods in Viscoelasticity*,

- IUTAM Colloquium Madrid (1955); *Deformation and Flow of Solids* (Berlin 1956), p. 251.
- [5] L. ONSAGER, *Reciprocal Relations in Irreversible Processes*, Phys. Rev. 37 (II), 405 (1931), and 38 (II), 2265 (1931).
- [6] H. B. G. CASIMIR, *On Onsager's Principle of Microscopic Reversibility*, Rev. modern Phys. 17, 343 (1945).
- [7] H. ZIEGLER, *Thermodynamik und rheologische Probleme*, Ing.-Arch. 25, 58 (1957).
- [8] R. v. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Z. angew. Math. Mech. 8, 161 (1928).
- [9] J. W. GIBBS, *The Collected Works*, volume 2 (New Haven, 1948), p. 4.
- [10] H. ZIEGLER, *On the Concept of Elastic Stability*, Adv. appl. Mech. 4, 370 (1956).
- [11] R. COURANT, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, volume 2, (Berlin 1955), p. 96.
- [12] R. COURANT and D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, volume 2 (Berlin 1937), p. 26.
- [13] F. ENGESSER, *Über statisch unbestimmte Träger bei beliebigem Formänderungsgesetze und über den Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit*, Z. Arch. Ing.-Ver. Hannover 35, 733 (1889).
- [14] W. PRAGER, *Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity*, J. appl. Phys. 20, 235 (1948).
- [15] D. C. DRUCKER, *Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity*, Quart. appl. Math. 8, 411 (1950).

### Zusammenfassung

Wenn ein irreversibler Prozess durch die «Geschwindigkeiten»  $\dot{x}_k$  und die «Kräfte»  $X_i$  (und somit durch die Dissipationsleistung  $X_k \dot{x}_k$ ) charakterisiert ist und wenn das phänomenologische Gesetz  $X_i = f_i(\dot{x}_k)$  dieses Prozesses linear, das heisst von der Form  $X_i = a_{ik} \dot{x}_k$  ist, dann etabliert die Onsagersche Theorie die Symmetrie  $a_{ki} = a_{ik}$  der Matrix  $(a_{ik})$ . Das phänomenologische Gesetz kann daher in der Form

$$X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} \quad (1)$$

geschrieben werden.

Diese Arbeit stellt einen Versuch dar, ONSAGERS Theorie für nichtlineare phänomenologische Gesetze zu verallgemeinern. Es stellt sich heraus, dass ein solches Gesetz von der Form

$$X_i = \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k \right)^{-1} D \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \quad (2)$$

sein muss und dass sich (2) im speziellen, aber praktisch wichtigen Falle, dass die Vektoren  $\dot{x}_k$  und  $X_i$  ihre Richtungen gegenseitig unabhängig von den Beträgen bestimmen, auf (1) reduziert.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die nichtlineare Rheologie. Wenn etwa ein ideal-plastischer Körper als Grenzfall eines nichtlinearen Newton-Körpers aufgefasst wird, dann folgt die Konvexität der Fliessfläche und v. MISES' Theorie des plastischen Potentials aus dem rheologischen Gesetz (1).

(Received: May 27, 1957.)



## Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil

VON JÜRGEN ZIEREP, Aachen, Deutschland<sup>1)</sup>

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem Verdichtungsstoss, der sich in stationärer Strömung an einer ebenen, gekrümmten Wand ausbildet. Man kann dabei etwa an ein lokales Überschallgebiet denken, wo häufig ein solcher Stoss die Begrenzung stromabwärts zur Unterschallseite hin darstellt, oder auch an Gitterströmungen, wo der Stoss gegebenenfalls von der einen Wand bis zur anderen reicht. Wir legen uns von vornherein nicht auf den einen oder den anderen Typus fest. Zum Vergleich mit unseren theoretischen Ergebnissen benutzen wir die Messungen von ACKERET, FELDMANN und ROTT [1,<sup>2)</sup>], und zwar insbesondere diejenigen mit turbulenten Grenzschichten, da wir uns nur mit *einem* Stoss an der Wand beschäftigen wollen.

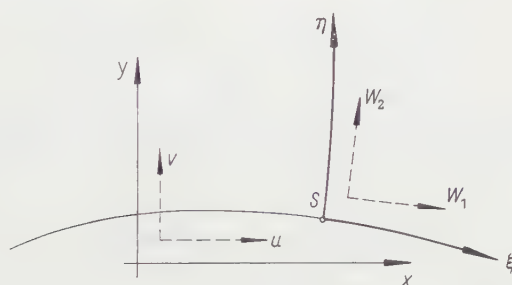
Es gelingt auf theoretischem Wege, die geometrische Form dieses Stosses in Körperrnähe anzugeben. Er sitzt senkrecht auf dem Profil (solange keine Ablösung eintritt), jedoch im allgemeinen mit unendlicher Krümmung, wie unten nachgewiesen wird. Die Stossform ist eine Neilsche Parabel mit Spitze auf der Körperoberfläche, bei der die beiden Äste möglich sind. Dazu ist folgendes zu sagen: Die von uns entwickelte Theorie arbeitet «lokal», das heisst, alle Bestimmungsgrössen des Stosses werden in Wandnähe auf bekannte Grössen im Punkte *S* (Figur 1) zurückgeführt. Dabei bleibt dann im Ergebnis eine gewisse Willkür bei der Auswahl der Stossäste. Es ist daher durchaus nicht von vornherein von der Hand zu weisen, dass die von aussen aufgeprägte Strömung die Entscheidung über die Stossäste selbst durchführt. Nehmen wir bei einem konvexen Profil denselben Ast, wie er sich im Experiment [1] ergibt, so folgt ein recht interessantes Verhalten von Druck und Geschwindigkeit hinter dem Stoss. Der Druck nimmt in Stromrichtung über den Stoss hinweg sprunghaft zu, um dann danach noch einmal mit unendlichem Differentialquotienten abzufallen. Dieser Nachexpansion entspricht eine kräftige Beschleunigung der Strömung, die sich gewiss günstig auf die Grenzschicht auswirkt und mit der Beobachtung zusammenhängt, die häufig gemacht worden ist, dass bei konvexen Profilen die Strömung oft sogar *trotz* eines Stosses nicht ablöst. Dieser Effekt ist in [1], S. 52, experimentell vollauf bestätigt, eine qualitative Erklärung findet man in [1], S. 51.

<sup>1)</sup> Institut für theoretische Gasdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 776.



Die explizite mathematische Herleitung unserer Ergebnisse ist bisweilen etwas mühsam, da wir recht allgemein vorgehen. Wir benutzen einerseits die strengen nichtlinearen gasdynamischen Gleichungen und rechnen andererseits hinter dem Stoss nicht wirbelfrei (nicht isentrop). Bezüglich aller in dieser Arbeit nicht mitgeteilten Einzelheiten der Zwischenrechnungen sei auf die ausführliche Darstellung des Verfassers in [2] verwiesen. Hier wollen wir uns bei



Figur 1

Die beiden Koordinatensysteme  $(x, y)$  und  $(\xi, \eta)$ .

den mathematischen Ableitungen kurz fassen (häufig werden wir nur referieren), dagegen werden wir mehr den Gang der Herleitung selbst hervortreten lassen. Herrn Prof. Dr. K. OSWATITSCH bin ich wegen der Anregung zu dieser Arbeit sowie wegen vieler Ratschläge bei der Abfassung derselben zu Dank verpflichtet.

## 1. Die Grundgleichungen und die Formulierung der Aufgabe

Wir wählen zunächst geeignete Koordinaten, um den Stoss bequem erfassen zu können. Dazu gehen wir von dem  $(x, y)$ -System zu einem neuen orthogonalen  $(\xi, \eta)$ -Koordinatennetz über. Es sei  $\xi = 0$  die Stossfront und  $\eta = 0$  die Profilkontur (Figur 1). Die Geschwindigkeitskomponenten  $u, v$  im alten System lassen sich leicht in die Grössen  $W_1, W_2$  des neuen Systems überführen. Man hat nun die Grundgleichungen ebenfalls in das neue System zu transformieren. Für die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

und den Croccoschen Wirbelsatz

$$\mathbf{w} \times \text{rot } \mathbf{w} = -T \text{ grad } s \quad (1.2)$$

erhält man (beachte hierzu [3], S. 192/193)<sup>3)</sup>

$$h_1 W_{1\xi} + h_2 W_{2\eta} - h_1 W_2 \beta_\xi + h_2 W_1 \beta_\eta + h_1 W_1 \frac{\varrho_\xi}{\varrho} + h_2 W_2 \frac{\varrho_\eta}{\varrho} = 0 \quad (1.3)$$

und

$$h_1 W_{2\xi} + h_1 W_1 \beta_\xi - h_2 W_{1\eta} + h_2 W_2 \beta_\eta = -h_1 \frac{T}{W_2} s_\xi, \quad (1.4a)$$

$$h_1 W_{2\xi} + h_1 W_1 \beta_\xi - h_2 W_{1\eta} + h_2 W_2 \beta_\eta = h_2 \frac{T}{W_1} s_\eta. \quad (1.4b)$$

Hierin bedeutet  $\beta$  den Schnittwinkel der Linien  $x = \text{const}$  und  $\xi = \text{const}$ .  $h_1$  und  $h_2$  sind Maßstabsfaktoren auf den neuen Koordinatenachsen. Sie hängen in folgender Weise mit den Transformationsfunktionen  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  zusammen:

$$h_1 = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \quad h_2 = \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}.$$

Damit bestätigt man leicht (beachte hierzu [3], S. 192):

$$h_1 \beta_\xi = \frac{1}{R_1(\xi, \eta_0)} = \text{Krümmung der Linie } \eta = \eta_0,$$

$$h_2 \beta_\eta = \frac{1}{R_2(\xi_0, \eta)} = \text{Krümmung der Linie } \xi = \xi_0.$$

$R_1(\xi, \eta_0)$ ,  $R_2(\xi_0, \eta)$  sind die zugehörigen Krümmungsradien. Im folgenden wird die Krümmung des benutzten Profils in  $S$  als stetig und von Null verschieden vorausgesetzt.

Zu den Differentialgleichungen (1.3) und (1.4a, b) (sowie den Eulerschen Gleichungen, siehe unten) kommen nun die Bedingungen am Rand und am Stoss.

$$\text{Rand: } \eta = 0 \quad W_2 = 0, \quad \text{das heisst auch } W_{2\xi} = 0, \quad (1.5)$$

$$\text{Stoss: } \xi = 0 \quad W_2 = \hat{W}_2, \quad \varrho W_1 = \hat{\varrho} \hat{W}_1. \quad (1.6)$$

Damit gelten längs des Stosses auch

$$W_{2\eta} = \hat{W}_{2\eta}, \quad (\varrho W_1)_\eta = (\hat{\varrho} \hat{W}_1)_\eta. \quad (1.6a)$$

Hier haben wir die Werte hinter dem Stoss durch ein Dach gekennzeichnet.

Das erste Ziel der kommenden Betrachtungen ist nun, aus den Gleichungen (1.3, 1.4a, 1.4b) sowie den Eulerschen Gleichungen im Verein mit den Bedingungen (1.5) und (1.6) eine Aussage über  $h_2 \beta_\eta$  im Punkte  $S$ , das heisst über die Stosskrümmung am Profil zu machen.

<sup>3)</sup> Die Indizes  $\xi, \eta$  bedeuten stets partielle Ableitungen.

## 2. Die Stosskrümmung am Profil

Wir gehen aus von den Eulerschen Gleichungen in der Form

$$-\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \frac{W^2}{2} - \mathbf{w} \times \operatorname{rot} \mathbf{w} \quad (2.1)$$

oder mit (1.2)

$$-\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \frac{W^2}{2} + T \operatorname{grad} s. \quad (2.2)$$

Hiermit kann man zunächst leicht die Ableitungen der Dichte  $\varrho$  in (1.3) eliminieren. Man erhält nach einigen elementaren Umformungen aus (1.3), (1.4) und (2.2) die folgenden Darstellungen für  $W_{2\eta}$  und  $(\varrho W_1)_\eta$ :

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{W_2^2}{c^2}\right) W_{2\eta} - \left(1 - \frac{W_1^2}{c^2}\right) W_{1\xi} - \left(1 - \frac{W_2^2}{c^2}\right) W_1 \beta_\eta + \left(1 - \frac{W_1^2}{c^2}\right) W_2 \beta_\xi \\ + 2 \frac{W_1 W_2}{c^2} W_{2\xi} + \frac{m}{R} W_1 s_\xi + \frac{m}{R} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} W_2 s_\eta^{4,5} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{W_2^2}{c^2}\right) \frac{1}{\varrho} (\varrho W_1)_\eta &= \frac{W_1 W_2}{c^2} \left(1 - \frac{W_1^2}{c^2}\right) W_{1\xi} \\ &+ W_1 \left[ \frac{W_1 W_2}{c^2} \beta_\eta \left(1 - \frac{W_2^2}{c^2}\right) + \beta_\xi \left(1 - \frac{W_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{W_2^2}{c^2}\right) \right] \\ &+ W_2 \left[ \beta_\eta \left(1 - \frac{W_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{W_2^2}{c^2}\right) - \frac{W_1 W_2}{c^2} \beta_\xi \left(1 + \frac{W_1^2}{c^2}\right) \right] \\ &+ W_{2\xi} \left(1 - \frac{W_1^2}{c^2} - \frac{W_1^2 W_2^2}{c^4}\right) - \frac{m}{R} \cdot \frac{W_1^2 W_2}{c^2} s_\xi \\ &s_\eta \left[ \frac{W_1 W_2^2}{c^2} \cdot \frac{m}{R} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} + \frac{m}{R} W_1 \left(1 - \frac{W_2^2}{c^2}\right) + \frac{T}{W_1} \left(1 - \frac{W_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{W_2^2}{c^2}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Mit diesen Ausdrücken erfüllt man nun die Stossbedingungen (1.6), (1.6a) für  $\xi \rightarrow 0$ ,  $\eta \neq 0$  und bildet anschliessend in den Gleichungen den Grenzübergang  $\eta \rightarrow 0$ . Dabei hat man dann sowohl die Randbedingung (1.5) als auch die Endlichkeit der Profilkümmung  $h_1 \beta_\xi (\neq 0)$  und die Konstanz von  $s$  längs der Profilstromlinie zu beachten. Es kommt im Grenzfall ein lineares System für die beiden Unbekannten:  $h_1 W_2 \hat{W}_{1\xi}$  und  $h_2 W_2 \beta_\eta$ . Für die zweite Grösse kommt als Lösung

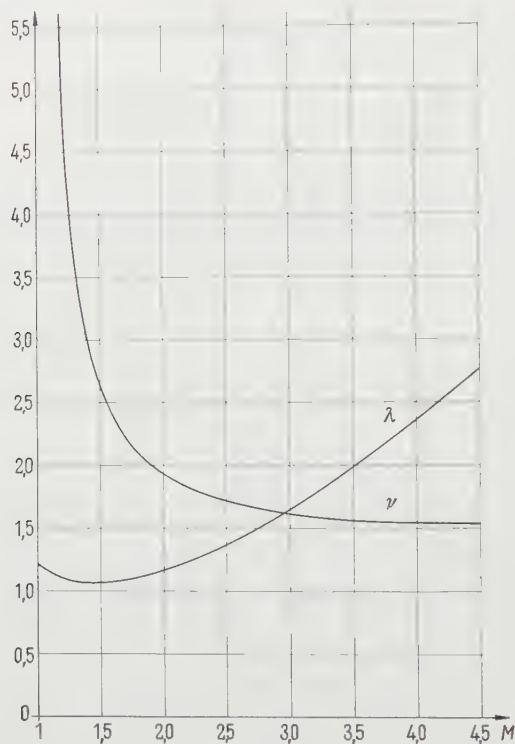
$$\lim_{\eta \rightarrow 0} h_2 W_2 \beta_\eta = \lim_{\eta \rightarrow 0} W_1 \left( h_2 v \frac{s_\eta}{c_v} - h_1 \lambda \beta_\xi \right). \quad (2.5)$$

<sup>4)</sup> Hierin ist  $R/m = c_p - c_v$ ,  $\kappa = c_p/c_v$ .

<sup>5)</sup> Aus Gründen der einfacheren Schreibung haben wir in (2.3) und (2.4)  $h_1(\partial/\partial\xi)$  durch  $\partial/\partial\xi$  und  $h_2(\partial/\partial\eta)$  durch  $\partial/\partial\eta$  ersetzt.

$\lambda$  und  $\nu$  sind hierin Funktionen, die nur von der Mach-Zahl  $M = W_1/c$  vor dem Stoss abhängen (Figur 2)<sup>6)</sup>.

Man erkennt sofort an (2.5), dass die Stosskrümmung am Profil unendlich werden muss, wenn der Klammerausdruck auf der rechten Seite einen von Null



Figur 2

Die Mach-Zahl-Funktionen  $\lambda$  und  $\nu$  in (2.5).

verschiedenen Limes hat. (Man beachte, dass  $W_2$  am Rande verschwindet!) Hierzu benötigt man allerdings den Entropiegradienten  $\hat{s}_\eta$ . Er lässt sich aus den Gleichungen für den schiefen Verdichtungsstoss<sup>7)</sup> ermitteln. Dann kommt für (2.5)

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} h_2 W_2 \beta_\eta = - \lim_{\eta \rightarrow 0} h_1 \sigma W_1 \beta_\xi. \quad (2.6)$$

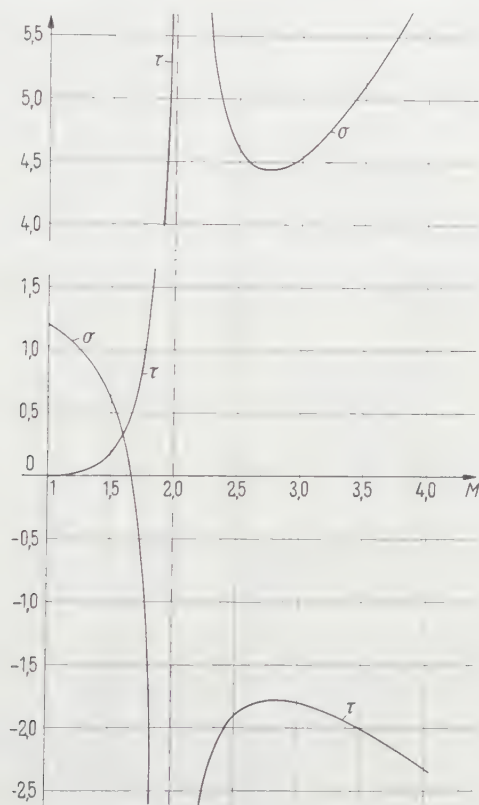
Für den Entropiegradienten selbst gilt

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} h_2 \frac{\hat{s}_\eta}{c_v} = \lim_{\eta \rightarrow 0} h_1 \tau \beta_\xi. \quad (2.7)$$

<sup>6)</sup> In der numerischen Auswertung ist  $\kappa = 1,40$  gewählt worden.

<sup>7)</sup> In der Umgebung der Wand müssen wir mit einem schiefen Stoss arbeiten.

Sowohl  $\sigma$  als auch  $\tau$  sind wieder nur Funktionen von  $M$  (Figur 3).  $\sigma$  hat einige charakteristische Eigenschaften, die wir hier anführen, da wir später auf sie zurückgreifen.



Figur 3

Die Mach-Zahl-Funktionen  $\sigma$  und  $\tau$  in (2.6) und (2.7).

$\sigma$  hat eine Nullstelle bei

$$M = \sqrt{\frac{\kappa+1}{2}} + \sqrt{\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^2 + 1} = 1,662,$$

$\sigma$  hat eine Polstelle bei

$$M = \sqrt{\frac{\kappa+5}{3-\kappa}} = 2,$$

$\sigma$  geht nach  $\infty$  wie

$$\frac{\kappa-1}{3-\kappa} M^2 = 0,25 M^2.$$

Für transsonische Betrachtungen benötigt man den Wert  $\sigma(1) = (\kappa+1)/2$ .

Jetzt können wir aus (2.6) den Schluss ziehen, dass, abgesehen von der Nullstelle, von  $\sigma$  bei  $M = 1,662$  die *Stosskrümmung am Profil unendlich* werden muss. Wir merken für das folgende noch an, dass wir in  $S$  sowohl  $h_1 = 1$  als auch  $h_2 = 1$  normieren wollen. Um Unklarheiten zu vermeiden, sei betont, dass es sich bei der eingangs durchgeführten Transformation  $x, y \rightarrow \xi, \eta$  nicht um eine konforme Abbildung handelt, bei der im ganzen betrachteten Bereich  $h_1/h_2 = 1$  wird.

### 3. Die Stossform in Profilnähe

Benutzt man (2.3) für  $\eta \rightarrow 0$  und (2.6), so führen die Ansätze

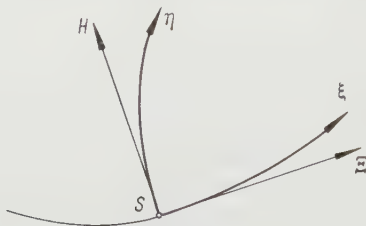
$$\beta_\eta = \alpha \eta^{-\delta}, \quad W_2 = \gamma \eta^\delta \quad (\alpha, \gamma, \delta = \text{const}) \quad (3.1)$$

zu dem Ergebnis

$$\beta_\eta = \sqrt{\frac{\sigma}{2}} \beta_\xi \frac{1}{\sqrt{\eta}}, \quad W_2 = -2 W_1 \sqrt{\frac{\sigma}{2}} \beta_\xi \sqrt{\eta}^8. \quad (3.2)$$

Durch Integration kommt für die Stossform in dem tangentialen Koordinatensystem  $\Xi, H$  (Figur 4)

$$\Xi = \pm \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{2}} \beta_\xi H^{3/2} = \pm \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{2}} \cdot \frac{1}{R_1} H^{3/2}. \quad (3.3)$$



Figur 4

Die beiden Koordinatensysteme  $(\xi, \eta)$  und  $(\Xi, H)$ .

Wir erhalten also eine Neilsche Parabel, deren Spitze auf der Körperoberfläche liegt.

Betrachtet man die beiderseitige Umgebung der Stromlinie  $\eta = 0$ , so hat man in (3.3) nur  $H$  durch  $|H|$  zu ersetzen<sup>8)</sup>.

Studiert man die Abhängigkeit der Stossform von der Mach-Zahl  $M$ , so erkennt man, dass, beginnend bei  $M = 1$ , sich beide Äste immer mehr aufteilen,

<sup>8)</sup>  $\sigma, \beta_\xi$  und  $W_1$  sind hierin die Funktionswerte im Punkte  $S$ .

<sup>9)</sup> Die Stromlinienkrümmung sei auch in diesem Fall in  $S$  stetig und von Null verschieden. Inwieweit der Stoss dies ändert, soll hier nicht erörtert werden.



bis sie bei  $M = 1,662^{10)}$  in einen streng senkrechten Stoss übergehen. Für diesen Grenzfall wird die Stosskrümmung gleich Null. Geht man zu grösseren Mach-Zahlen über,  $1,662 < M < 2$ , so wird wegen  $\sigma < 0$  die Stossform nicht mehr reell, während für  $M > 2$  wieder eine reelle Stossform möglich ist<sup>11)</sup>.

Es ist gewiss nicht sinnvoll, den obigen Resultaten der reibungsfreien Rechnung bis zu grossen Mach-Zahlen zu folgen, da dann sicherlich die Voraussetzung eines Stosses an der Wand nicht mehr erfüllt ist. Es kommt zu Stossabelungen, die die Ergebnisse wesentlich abändern.

#### 4. Der Verlauf von Druck und Geschwindigkeit in der Nähe des Stosses

Die Ableitungen des Druckes ergeben sich aus den Eulerschen Gleichungen. Es kommt zunächst vor dem Stoss

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} -\frac{1}{\varrho} p_{\xi} = \lim_{\eta \rightarrow 0} W_1 W_{1\xi}, \quad (4.1)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} -\frac{1}{\varrho} p_{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{W_1^2}{R_1}. \quad (4.2)$$

Hinter dem Stoss wird

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} -\frac{\hat{p}_{\xi}}{\frac{\varrho}{2} W_1^2 \beta_{\eta}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{4}{\kappa + 1} \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \frac{\hat{p}}{\hat{p}}, \quad (4.3)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} -\frac{\hat{p}_{\eta}}{\frac{\varrho}{2} W_1^2 \beta_{\xi}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} K(M) \quad (4.4)$$

mit  $K(M)$  in Figur 5.

Ganz entsprechend kommt zum Beispiel

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\hat{W}_{1\xi}}{\beta_{\eta}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{2}{\kappa + 1} \cdot \frac{W_1}{M^2} \cdot \frac{\hat{p}}{\hat{p}}. \quad (4.5)$$

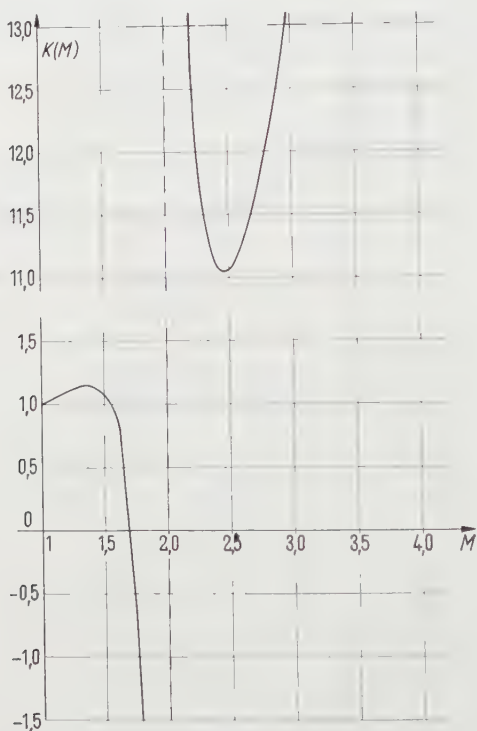
Wir erkennen zunächst an (4.3) und (4.5), dass sowohl  $\hat{p}_{\xi}$  als auch  $\hat{W}_{1\xi}$  für  $\eta \rightarrow 0$  nach Unendlich gehen müssen, da  $\beta_{\eta}$  (abgesehen von  $M = 1,662$ ) diese Eigenschaft hat und die rechten Seiten der entsprechenden Gleichungen endlich und von Null verschieden sind.

Bevor wir jedoch diese Singularität in der Druck- und Geschwindigkeitsableitung bezüglich  $\xi$  weiter untersuchen, gehen wir zum Druckverlauf senk-

<sup>10)</sup> Diese Grenz-Mach-Zahl findet man auch in [4]. Die Herleitung erfolgt dort auf einem anderen Wege und in einem anderen Zusammenhang.

<sup>11)</sup> Bisher ist das Vorzeichen der Krümmungen nicht definiert. Wir arbeiten mit dem Absolutbetrag. In Kapitel 4 wird vermöge (4.2) eine Unterscheidung von konkav und konvex durchgeführt.

recht zum Profil über. Bei einem konkaven Profil folgt aus (4.2) und (4.4) mit Figur 5, dass, beginnend bei  $M = 1$ , der Druck in  $\eta$ -Richtung sowohl vor als auch nach dem Stoss abnimmt. Im konvexen Fall<sup>12)</sup> nimmt der Druck auf beiden Seiten zu. Dieses Ergebnis führt uns zwangsläufig zu einem Problem,



Figur 5

Die Funktion  $K(M)$  in (4.4).

das in der Literatur zu finden ist (siehe zum Beispiel [3], S. 366) und sich auf die von uns untersuchte Strömung bezieht. Man schloss früher wie folgt: Bei der Umströmung eines *konvexen* Profils muss der Druck (vor und hinter dem Stoss) mit dem Profilabstand zunehmen. Bei einem Stoss, der noch in einiger Entfernung vom Profil senkrecht ist, ergeben aber die höchsten Drucke vor dem Stoss die kleinsten nach dem Stoss, was mit dem soeben aus der Konvexität Gefolgerten im Widerspruch steht.

Dieser Widerspruch löst sich bei uns sofort, da wir erkannt haben, dass die Stosskrümmung im allgemeinen unendlich ist und damit die Voraussetzung,

<sup>12)</sup> Man hat hierzu nur  $\eta$  durch  $-\eta$  zu ersetzen.

dass der Stoss noch in einiger Entfernung von Profil senkrecht ist, im allgemeinen nicht zutrifft

Den Einfluss der Stosskrümmung auf den Druckverlauf senkrecht zur Wand kann man noch durch die folgende kleine Rechnung veranschaulichen. Wir bilden die Differenz der Druckableitungen in  $\eta$ -Richtung hinter dem gekrümmten und dem streng senkrechten Stoss. Bezeichnen wir die erste mit  $(\hat{p}_\eta)_k$  und die zweite mit  $(\hat{p}_\eta)_s$ , so kommt nach einigen elementaren Rechnungen im Grenzfall  $\eta \rightarrow 0$

$$(\hat{p}_\eta)_k - (\hat{p}_\eta)_s = -\varrho W_1^2 \beta_\xi \sigma \frac{4}{\kappa + 1} \quad (4.6)$$

oder mit (2.6)

$$(\hat{p}_\eta)_k - (\hat{p}_\eta)_s = \varrho W_1 W_2 \beta_\eta \frac{4}{\kappa + 1}. \quad (4.7)$$

Das heisst, es ergibt sich eine Differenz der Druckableitungen hinter dem Stoss allein auf Grund der Tatsache, dass  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \Pi_\pm \rho_{\eta_i}$  endlich und von Null verschieden ist. Im Grenzfall  $\sigma \rightarrow 0$  (das heisst  $M \rightarrow 1,662$ ) verschwindet die obige Differenz, beide Stösse sind dann ja auch senkrecht.

Es wäre jetzt etwas zu sagen über die Eindeutigkeit der Lösung unseres Problems. Wir wollen uns hier kurz fassen. In [2] wird auseinandergesetzt, dass es mit der vorgetragenen Methode nicht möglich ist, zu entscheiden, welcher Ast der Neilschen Parabel als Stosskurve zu nehmen ist. Wir haben alle Bestimmungsgrössen des Stosses auf die Werte von  $M$  und  $\beta_\pm$  im Punkte  $S$  zurückgeführt und damit den Stoss durch die *lokalen* Daten festzulegen versucht. Im Resultat ist eine Doppeldeutigkeit – bei der Auswahl der Stossäste – geblieben. Es ist durchaus denkbar, dass die Aussenströmung, die in ihrer Struktur bei uns ja nicht eingeht, diese Auswahl unter den Ästen selbst trifft. Es ist natürlich genau so gut möglich, dass bei einer Theorie, die noch die Änderung der Krümmung mit  $\eta$  zu berechnen gestattet, diese Doppeldeutigkeit fortfällt.

Nehmen wir im Falle des konvexen Profils den linksläufigen Ast, wie er in den Experimenten in [1] auftritt, so können wir (3.2) mit (3.3) in (4.3) eintragen und die Integration durchführen. Es kommt für den Druckverlauf hinter dem Stoss

$$-\frac{\hat{p} - \hat{p}(0)}{\frac{\varrho}{2} W_1^2} = \frac{6}{\kappa + 1} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M^2 - 1)\right) \left(\frac{\sigma}{2} \beta_\xi\right)^{2/3} \Xi^{2/3}. \quad (4.8)$$

Zum Vergleich mit den Messergebnissen führen wir als Bezugsdruck den adiabatischen Ruhedruck  $p_0$  ein. Dann wird

$$-\frac{\hat{p} - \hat{p}(0)}{p_0} = \frac{3\kappa}{\kappa + 1} \frac{1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M^2 - 1)}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\kappa/(\kappa + 1)}} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{\sigma}{2} \beta_\xi\right)^{2/3} \Xi^{2/3}. \quad (4.9)$$

Der Druck steigt zunächst sprunghaft über den Stoss hinweg an, um danach noch einmal rapide abzufallen. Dies geschieht gemäss (4.8) oder (4.9) mit negativ unendlichem Differentialquotienten. Ein ganz entsprechendes Verhalten zeigt die Geschwindigkeit (Figur 6). Sie sinkt sprunghaft über den Stoss von Überschall- auf Unterschallgeschwindigkeit, um dann noch einmal stark anzusteigen. Diese Nachexpansion ist experimentell ([1], S. 52) vollauf bestätigt und wirkt sich bestimmt günstig auf die Grenzschicht aus. Vielleicht liefert unsere Theorie einen Beitrag zu der Feststellung, die bei Windkanalmessungen an turbulenten Grenzschichten wiederholt gemacht wurde, dass die Grenzschicht häufig *trotz* eines Stosses nicht ablöst.

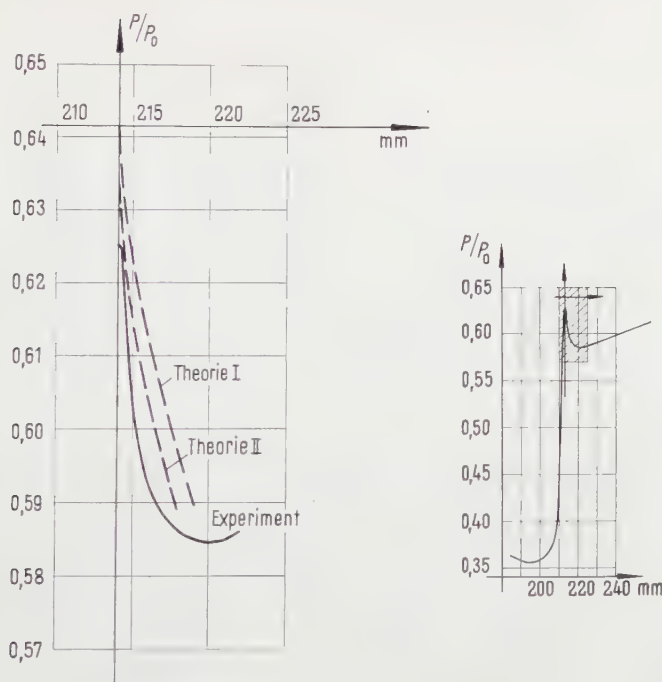


Figur 6

Qualitativer Verlauf von Druck und Geschwindigkeit über den Stoss hinweg beim konvexen Profil.

In Figur 7 haben wir die Ergebnisse der Theorie mit dem Experiment verglichen. Hierzu muss gesagt werden, dass die theoretische Druckkurve den Sachverhalt unmittelbar an der Wand ( $\eta = 0$ ) wiedergibt, während sich die in Figur 7 aufgenommenen experimentellen Ergebnisse auf  $\eta = 15$  mm beziehen. Die Druckmessungen *an* der Wand ( $\eta = 0$ ) zeigen natürlich wegen der vorhandenen Grenzschicht den oben geschilderten Druckeffekt nicht. Wir haben nun in Figur 7 für  $\hat{p}(0)$ , das heisst für den Ausgangspunkt der Druckspitze, zunächst denjenigen Wert gewählt, der sich hinter dem Stoss im Abstand  $\eta = 15$  mm von der Wand ergibt. (Theorie I in Figur 7.) Nimmt man für  $\hat{p}(0)$  den Wert hinter dem senkrechten Stoss an der Wand, so verschiebt sich unsere theoretische Kurve parallel zu sich nach unten (Theorie II in Figur 7), und wir haben eine recht gute Übereinstimmung zwischen der Theorie (bei  $\eta = 0$ ) und dem Experiment (bei  $\eta = 15$  mm).

Zum Abschluss sei noch kurz darauf hingewiesen, dass unsere Ergebnisse natürlich die transsonischen Ähnlichkeitsgesetze enthalten. Wir führen den Nachweis etwa an der Gleichung für  $\hat{W}_{1\xi}$  (4.5) sowie an der Stosskurve (3.3) vor. Wir verwenden die Transformationen in der Form, wie sie im Buch von OSWATITSCH ([3], Kap. IX, Gleichung (33)) angegeben werden. Als Bezugslänge



Figur 7

Quantitativer Vergleich im Druckverlauf mit dem Experiment beim konvexen Profil.

( $M = 1,30$ ,  $\beta_\xi(S) = 0,015 \text{ cm}^{-1}$ .)

Rechts: Druckverlauf in Strömungsrichtung im Abstand  $\eta = 15 \text{ mm}$  vom Profil nach [1], S. 52.

Links: Vergrößerung der rechtsseitigen Umgebung der Spitze und Vergleich mit der Theorie.

wählen wir jedoch nicht die maximale Dicke, sondern den Krümmungsradius  $R_1$  des Profils in  $S$ . Da die Profildicke und der Krümmungsradius umgekehrt proportional zueinander sind, lauten die Gleichungen in unserem Fall:

$$\eta = (\kappa + 1)^{-1/3} R_1^{1/3} \eta, \quad \frac{\hat{W}_1}{c^*} - 1 = (\kappa + 1)^{-1/3} R_1^{-2/3} \mathfrak{W}_1. \quad (4.10)$$

$\eta$  und  $\mathfrak{W}_1$  sind hierin die sogenannten reduzierten Größen.

Trägt man (3.2) in (4.5) ein, so kommt für  $M \approx 1$  wegen  $\sigma(1) = (\kappa + 1)/2$  in der rechtsseitigen Umgebung des Stosses

$$\frac{1}{c^*} \hat{W}_{1\xi} = \frac{1}{\sqrt{(\kappa + 1) R_1 \eta}}.$$

Also mit (4.10)

$$\mathfrak{W}_{1\xi} = \frac{1}{\sqrt{\eta}}. \quad (4.11)$$

Genau so folgt für die Stosskurve

$$\varepsilon = \pm \frac{2}{3} \eta^{3/2}. \quad (4.12)$$

Es ergeben sich also Formeln, die von dem speziellen Gas ( $\kappa$ ) und dem Profil ( $R_1$ ) völlig unabhängig sind. Damit ist bestätigt, dass die transsonischen Ähnlichkeitsgesetze (4.10) in unseren Resultaten enthalten sind.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. ACKERET, F. FELDMANN und N. ROTT, *Untersuchungen an Verdichtungsstößen und Grenzschichten in schnell bewegten Gasen*, Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik der ETH Zürich, Nr. 10 (1946).
- [2] J. ZIEREP, *Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil*, DVL-Bericht, Nr. 51 (1958).
- [3] K. OSWATITSCH, *Gasdynamik* (Springer-Verlag, Wien 1952).
- [4] W. F. BROWN, *The General Consistency Relations of Shock Waves*, J. Math. Phys. 29, 4 (1951).

*Zusatz bei der Korrektur:* Nach Abschluss der vorliegenden Note sind dem Verfasser noch folgende Arbeiten über diesen Gegenstand bekannt geworden:

- [5] H. S. TSIEH, *Flow Conditions Near the Intersection of a Shock Wave with Solid Boundary*, J. Math. Phys. 26 (1947).
- [6] T. Y. THOMAS, *On Curved Shock Waves*, J. Math. Phys. 26 (1947).
- [7] C. C. LIN und S. J. RUBINOW, *On the Flow Behind Curved Shocks*, J. Math. Phys. 27 (1948).

An keiner der angegebenen Literaturstellen wird der grundlegende Schluss gezogen, dass bei stetiger von Null verschiedener Krümmung des Profils die Stosskrümmung unendlich werden muss. Auch die übrigen Ergebnisse gerade auch im Hinblick auf die Experimente in [1] finden sich dort nicht.

### Summary

The present paper investigates a compression shock forming at a curved plane surface in stationary flow. The geometric form of this shock adjacent to the profile is determined, and the flow in the vicinity of the wall and of the shock is investigated. With convex profiles, an effect is confirmed which has been known for about 12 years through the measurements performed by ACKERET, FELDMANN and ROTT [1]. Our findings are of importance for both local supersonic flow fields and compressible flow through cascades.

(Eingegangen: 23. August 1957.)



## Nachwort

Im Frühjahr 1957 haben Assistenten und Mitarbeiter Professor J. ACKERETS den Gedanken aufgegriffen, ihren grossen Lehrmeister anlässlich seines 60. Geburtstages durch Herausgabe einer Festschrift zu ehren. Die Ermunterungen, denen sie bei der Kontaktnahme mit Kreisen der Wissenschaft und Industrie begegneten, veranlassten sie, eine allgemeine Rundfrage an führende Persönlichkeiten auf dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Wissenschaften sowie an Freunde, Kollegen und ehemalige Schüler zu richten mit der Bitte, zu bekunden, ob und in welcher Form ein Beitrag zur beabsichtigten Festschrift erwartet werden könnte.

Das gewaltige Echo, das die Rundfrage fand, war für die Initianten Verpflichtung, sofort ernsthaft an die Verwirklichung ihres Vorhabens heranzutreten. Da die angekündigten Beiträge grösstenteils dem Gebiete der Industrie und angewandten Mathematik und Physik zugehörten, wurde mit der Redaktion der ZAMP vereinbart, die Festschrift in der Form eines Sonderheftes (Doppelnummer) dieser Zeitschrift erscheinen zu lassen. Ferner wurde für die Herausgabe des Sonderheftes ein Redaktionskomitee gebildet, welches sich ausser dem ZAMP-Redaktor aus den folgenden Herren zusammensetzte:

Z. PLASKOWSKI,	}	Institut für Aerodynamik der ETH,
H. SPRENGER,		
Dr. G. DÄTWYLER, Zürich,		
Dr. P. DE HALLER, Winterthur,		
Prof. Dr. F. TANK, Zürich,		
Prof. Dr. W. TRAUPEL, Zürich.		

Der grosse Umfang des Sonderheftes verlangte die Bereitstellung beträchtlicher finanzieller Mittel. Diese sind in grosszügiger Weise von den folgenden Industriefirmen zur Verfügung gestellt worden:

AG Brown, Boveri & Cie., Baden,  
 Escher Wyss Aktiengesellschaft, Zürich,  
 Gebrüder Sulzer Aktiengesellschaft, Winterthur,  
 Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon, Bührle & Co., Zürich.

Es ist dem Unterzeichneten eine grosse Freude, allen Mitarbeitern, die in irgendeiner Form zum Gelingen der Festschrift beigetragen haben, den herzlichsten Dank der Redaktion auszusprechen. Ausserdem möchte die Redaktion auch den oben genannten Firmen danken, die durch ihre Zuwendungen die Herausgabe der Festnummer ermöglicht haben.

RAYMUND SÄNGER















3 8198 313 606 616  
THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

# DATE DUE

OVERNIGHT

FEB 5 '71

GAYLORD

PRINTED IN U.S.A.

